arXiv:2302.02445v2 [math.SG] 1 May 2023

子笛卡尔空间之间的满射浸没

Richard Cushman

摘要

我们定义了亚笛卡尔微分空间之间的次浸没这一概念，并证明了它的一些性质；这些性质类似于光滑流形范畴中次浸没及光滑映射的性质。

引言

本文旨在定义亚笛卡尔微分空间之间满射浸没的概念。我们证明，亚笛卡尔空间之间的满射浸没是开映射。

1 Aronszajn 和 Sikorski 亚笛卡尔空间

我们首先回顾一些关于 Aronszajn 和 Sikorski 亚笛卡尔空间的结果，这些结果已在 [3]中证明。

若一个微分空间 $(S, C^\infty(S))$ 的微分空间拓扑是豪斯多夫的，并且对每个点 $x \in S$，都存在 x 中包含 $x \in S$ 的开集 U_x，以及一个一一映射 $\varphi_x : U_x \subseteq S \to V_x = \varphi_x(U_x) \subseteq \mathbb{R}^{n_{\varphi_x}}$，使其将微分空间 $(U_x, C^\infty(U_x))$ 微分同胚到 $(\mathbb{R}^{n_{\varphi_x}}, C^\infty(\mathbb{R}^{n_{\varphi_x}}))$ 的微分子空间 $(V_x, C^\infty(V_x))$，则称该微分空间为亚笛卡尔的。

按照 Aronszajn 的定义，亚笛卡尔空间 $(S, \mathfrak{A})$ 是一个豪斯多夫拓扑空间 S，配备一个图册 $\mathfrak{A} = \{\varphi : U_\varphi \to V_\varphi\}$，其中 φ是将 U_φ 的一个开集映射到 $\mathbb{R}^{n_\varphi}$ 的一个子集 V_φ 上的同态，并满足

1. 域 $\{U_\varphi \,|\, \varphi \in \mathfrak{A}\}$ 构成 S的一个开覆盖。2. 对于每个 φ、$\psi \in \mathfrak{A}$ 以及每个 $x \in U_\varphi \cap U_\psi$，在 $\mathbb{R}^{n_\varphi}$ 中 $\varphi(x)$ 的一个开邻域 $W_{\varphi(x)}$ 内，存在一个 C^∞ 映射Φ_φ，它扩展映射 $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \to \psi(U_\varphi \cap U_\psi)$；并且在 $\mathbb{R}^{n_\psi}$ 中 $\psi(x)$ 的一个开邻域 $W_{\psi(x)}$ 内，存在一个 C^∞映射 Φ_ψ，它扩展映射 $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U_\varphi \cap U_\psi) \to \varphi(U_\varphi \cap U_\psi)$。

[1]印刷日期：2023年5月2日

设 $(S_1, \mathfrak{A}_1)$ 和 $(S_2, \mathfrak{A}_2)$ 是按 Aronszajn 意义定义的亚笛卡尔空间。映射 $\chi: S_1 \to S_2$ 是光滑 的，当且仅当对于每个 $y \in S_1$，都存在 $\varphi_1 \in \mathfrak{A}_1$和 $\varphi_2 \in \mathfrak{A}_2$，使得 $y \in U_{\varphi_1}$，并且对于每个 $x \in U_{\varphi_1}$，都有 $\chi(x) \in U_{\varphi_2}$，且映射 $\varphi_2 \circ \chi \circ \varphi_1^{-1}: V_{\varphi_1} \to V_{\varphi_2}$可扩展为一个，$\varphi_2$光滑映射 C^∞，它将 $\mathbb{R}^{n_{\varphi_1}}$ 中 $\varphi_1(x)$ 的开邻域 $W_{\varphi_1(x)}$ 映射到 $\mathbb{R}^{n_{\varphi_2}}$ 中 $\varphi_2(\chi(x))$ 的开邻域$W_{\varphi_2(\chi(x))}$。

命题 1. 设 $(S, C^\infty(S))$ 是一个亚笛卡尔微分空间，其图册为 $\mathfrak{A} = \{\varphi_x : U_x \to V_x\}_{x \in S}$。那么，$(S, \mathfrak{A})$ 是 Aronszajn 意义下的亚笛卡尔空间。

命题 1 中的图册 $\mathfrak{A}$称为与微分结构 相关联的图册(S)。

设 $(S, \mathfrak{A})$ 是 Aronszajn 意义下的亚笛卡尔空间。若函数$f: (S, \mathfrak{A}) \to \mathbb{R}$属于族 $\mathcal{F}$，则对每个 $y \in S$，存在 $\varphi \in \mathfrak{A}$，使得 $y \in U_\varphi$；并且若 $x \in U_\varphi$，则存在φ（x）的一个开邻域 $W_{\varphi(x)} \in \mathbb{R}^{n_\varphi}$，以及一个函数 $F_{\varphi(x)} \in C^\infty$（$\mathbb{R}^{n_\varphi}$），使其在$\varphi^{-1}$（$V_\varphi \cap W_{\varphi(x)}$）上满足 $f = F_{\varphi(x)} \circ \varphi$。在 S 上，由族 $\mathcal{F}$生成一个微分结构 C^∞（$\mathfrak{A}$）。该微分结构由 S 上的图册 $\mathfrak{A}$ 决定。空间 $(S, \mathfrak{A})$ 与 $(S, C^\infty(\mathfrak{A}))$ 具有相同的拓扑。

命题 2。 设 $(S_1, \mathfrak{A}_1)$ 和 $(S_2, \mathfrak{A}_2)$ 是 Aronszajn 次笛卡尔空间，$(S_1, C^\infty(\mathfrak{A}_1))$ 和 $(S_2, C^\infty(\mathfrak{A}_2))$ 是亚笛卡尔微分空间，其微分结构由相应的图册决定。若 $\chi: (S_1, \mathfrak{A}_1) \to (S_2, \mathfrak{A}_2)$ 是 Aronszajn 次笛卡尔空间之间的光滑映射，则 $\chi: (S_1, C^\infty(\mathfrak{A}_1)) \to (S_2, C^\infty(\mathfrak{A}_2))$ 是亚笛卡尔微分空间之间的光滑映射。

2 次浸没

本节定义亚笛卡尔微分空间的次浸没概念。

设 $\chi: (S_1, C^\infty(S_1)) \to (S_2, C^\infty(S_2))$ 是子笛卡尔微分空间之间的满射光滑映射。设 $\mathfrak{A}_1$ and $\mathfrak{A}_2$ 分别是与微分结构 $C^\infty(S_1)$ 和 $C^\infty(S_2)$ 相对应的图册。若对每个 $y \in S_1$，都存在一个 $\varphi_1 \in \mathfrak{A}_1$ 和一个 $\varphi_2 \in \mathfrak{A}_2$，使得 $y \in U_{\varphi_1}$，并且对每个 $x \in U_{\varphi_1}$，都有 $\chi(x) \in U_{\varphi_2}$，且映射 $\varphi_2 \circ \chi \circ \varphi_1^{-1}: V_{\varphi_1} \to V_{\varphi_2}$ 可延拓为一个光滑的 C^∞ 次浸没 $\Phi_{\varphi_1, \varphi_2}$，它将 $\varphi_1(x)$ 在 $\mathbb{R}^{n_{\varphi_1}}$ 中的一个开邻域 $W_{\varphi_1}(x)$ 映到 $\varphi_2(\chi(x))$ 的一个开邻域 $W_{\varphi_2}(\chi(x))$，则称 $\chi: (S_1, C^\infty(S_1)) \to (S_2, C^\infty(S_2))$ 为次浸没。换言之，

映射 $\chi:(S_1,\mathfrak{A}_1)\to(S_2,\mathfrak{A}_2)$ 是 Aronszajn 次笛卡尔空间之间的次浸没。反过来，若 $\chi:(S_1,\mathfrak{A}_1)\to(S_2,\mathfrak{A}_2)$ 是 Aronszajn 次笛卡尔空间之间的次浸没，则 $\chi:(S_1,C^\infty(\mathfrak{A}_1))\to(S_2,C^\infty(\mathfrak{A}_2))$ 是子笛卡尔微分空间之间的次浸没。

定理 3. 设 $\chi:(S_1,C^\infty(S_1))\to(S_2,C^\infty(S_2))$ 是亚笛卡尔微分空间之间的满射浸没。那么，χ是一个开映射；也就是说，若 U 是 S_1的开子集，则 $\chi(U)$ 是 S_2的开子集。

证明。设 U 是 S_1的开子集。由于对于每个 $x\in U$，χ 都是满射次浸没，因此存在微分同胚 $\varphi_x\in\mathfrak{A}_1$ 和 $\varphi_{\chi(x)}\in\mathfrak{A}_2$，满足以下性质。

1. 图册 $\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_2$ 分别由微分结构 $C^\infty(S_1)$ 和 $C^\infty(S_2)$ 确定。 2. 微分同胚 $\varphi_x:U_x\to V_x\subseteq\mathbb{R}^{n_{\varphi_x}}$ 和 $\varphi_{\chi(x)}:U_{\chi(x)}\to V_{\chi(x)}\subseteq\mathbb{R}^{n_{\varphi_{\chi(x)}}}$ 分别属于图册 $\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_2$。 3. 对每个 $\xi\in V_x$，映射

$$\varphi_{\chi(x)}\circ\chi\circ\varphi_x^{-1}:V_x\subseteq\mathbb{R}^{n_{\varphi_x}}\to V_{\chi(x)}\subseteq\mathbb{R}^{n_{\varphi_{\chi(x)}}}$$

可扩展为 $\mathbb{R}^{n_{\varphi_x}}$ 中 $\varphi_x(\xi)$ 的一个开子集 V^ξ 上的次浸没 Φ_ξ 到 $\mathbb{R}^{n_{\varphi_{\chi(x)}}}$. 中 $\Phi_\xi(\varphi_x(\xi))=\varphi_{\chi(x)}(\chi(\xi))$ 的一个开子集 V^η

因此 $(\varphi_{\chi(x)}\circ\chi\circ\varphi_x^{-1})(V^\xi\cap V_x)=V^\eta\cap V_{\chi(x)}$。换句话说，

$$\chi\big(\varphi_x^{-1}(V^\xi\cap V_x)\big)=\varphi_{\chi(x)}^{-1}(V^\eta\cap V_{\chi(x)}) \tag{1}$$

是 $\chi(U_x)\subseteq U_{\chi(x)}$ 的一个开子集，包含 $\chi(\xi)$。令 ξ 遍历 V_x，方程 (1) 蕴含

$$\chi(U_x)=\chi\big(\varphi_x^{-1}(V_x)\big)=\varphi_{\chi(x)}^{-1}(V_{\chi(x)})=U_{\chi(x)},$$

这是 $\chi(U)$ 的一个开子集，包含 $\chi(x)$。因此，$\chi(U)$ 是 S_2 的一个开子集。□

3 一个无穷小判据

本节给出一个无穷小判据，用于判定亚笛卡尔微分空间之间的光滑满射映射是否为次浸没。

设 $(S,C^\infty(S))$ 是一个亚笛卡尔微分空间。在S 上的向量场 是 $C^\infty(S)$ 的一个导子 X，满足对于每个 $x\in S$，都存在一个开

邻域 U，它是 S 中包含 x 的邻域，并且存在一个 $\varepsilon > 0$，使得对于每个 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$，映射 $\varphi_t : U \to V_t = \varphi_t(U) \subseteq S$ 都有定义，且是到 S 的开子集 V_t 上的微分同胚，其中 $t \mapsto \varphi_t(x)$ 是 X 的一条积分曲线。

引理 4. 亚笛卡尔空间 S 上所有向量场的集合 $\mathfrak{X}(S)$ 是 $\mathrm{Der}\, C^\infty(S)$ 的实向量子空间；$\mathrm{Der}\, C^\infty(S)$ 是 $C^\infty(S)$ 的所有导子构成的集合。

证明。设 $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ 且 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$。设 $\mathcal{F}$ 是包含向量场 X 和 Y 的 $(\mathfrak{X}(S), [\ ,\ ])$ 的最小李子代数。设 $x \in S$。那么，$\mathcal{F}$ 在 x 处的轨道 O_x 是 S 的光滑子流形。因此，$X_{|\mathsf{O}_x}$ 和 $Y_{|\mathsf{O}_x}(x)$ 是光滑流形 O_x 上的向量场，见 [6]。设 $\gamma_x : I_x \subseteq \mathbb{R} \to \mathsf{O}_x : t \mapsto \varphi_t^{\alpha X_{|\mathsf{O}_x} + \beta Y_{|\mathsf{O}_x}}(x)$ 是定义在 O_x 上、从 x 出发的向量场 $(\alpha X + \beta Y)_{|\mathsf{O}_x}$ 的一条积分曲线。那么，γ_x 是从 x 出发的 $C^\infty(S)$ 的导子 $\alpha X + \beta Y$ 的一条积分曲线。因此，I_x 包含一个包含 0 的开区间，在该区间上 γ_x 有定义。设 I_x 是 γ_x 有定义的最大区间。若对每个 $x \in S$ 都有 $I_x = (-\infty, \infty)$，则 $\alpha X + \beta Y$ 是 S 上的向量场。假设存在一个 $x \in S$，使得 $\overline{I}_x$ 的有限右端点为 t_x。设 $y = \varphi_{t_x}^{\alpha X + \beta Y}(x)$。向量场 $(\alpha X + \beta Y)_{|\mathsf{O}_y}$ 在 y 处有定义，其中 $t \mapsto \varphi_t^{\alpha X + \beta Y}(y)$ 是一条从 y 出发的积分曲线；当 $t \in I_x$ 且 $t < 0$ 时，它与 γ_x 一致。这条积分曲线定义在一个包含 0 的开区间上，这与 t_x 的定义矛盾。因此，$\overline{I}_x$ 的右端点 t_x 不属于 I_x。类似的论证表明，$\overline{I}_x$ 的左端点不属于 I_x。因此，I_x 是一个开区间，这意味着 $C^\infty(S)$ 上的导子 $\alpha X + \beta Y$ 是 S 上的向量场，因为 S 是一个亚笛卡尔空间。□

对于每个 $x \in S$ S 的强切空间 $\mathcal{T}_x S$ 都是向量空间子空间 $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{X(x) \in \mathrm{Der}_x C^\infty(S) \mid X \in \mathfrak{X}(S)\}$。回忆一下，$S$ 在 $x \in S$ 处的切空间 $T_x S$ 是 $C^\infty(S)$的导子集合。令$TS = \coprod_{x \in S} T_x$为 S的切丛。微分空间的光滑映射 $\varphi : R \to S$ 的切映射 $T\varphi : TR \to TS$将 $C^\infty(R)$的导子 ν 映为 $C^\infty(S)$的导子 $T\varphi(\nu)$，其定义为 $\nu(\varphi^*)$。设 $\chi : R \to S$是亚笛卡尔微分空间之间的光滑映射。假设对于每个向量场 $X \in \mathfrak{X}(R)$和每个 $x \in R$，都存在一个向量场 $Y \in \mathfrak{X}(S)$，它在 $\chi(x)$处与 X χ相关，即

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\chi \circ \varphi_t^X)(x) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \varphi_t^Y\big(\chi(x)\big).$$

Then

$$\mathcal{T}_x\chi : \mathcal{T}_x R \to \mathcal{T}_{\chi(x)} S : X(x) \mapsto Y\big(\chi(x)\big)$$

是 χ 在 x处的强切映射。换言之，映射 $\chi\colon R \to S$ 具有强切映射 $\mathcal{T}\chi\colon \mathcal{T}R \to \mathcal{T}S$，当且仅当 $\iota_{\mathcal{T}S} \circ \mathcal{T}\chi = T\chi \circ \iota_{\mathcal{T}R}$。这里 $\iota_{\mathcal{T}S}\colon \mathcal{T}S \to TS$和 $\iota_{\mathcal{T}\mathcal{R}}\colon \mathcal{T}R \to TR$是包含映射。

设 $f \in C^\infty(S)$。若亚笛卡尔微分空间之间的光滑映射$f\colon (S, C^\infty(S)) \to (\mathbb{R}, C^\infty(\mathbb{R}))$具有强切映射，则函数 f 是强光滑的。

引理 5. 每个 $f \in C^\infty(S)$ 都是强光滑的。[2]

证明。假设 $x \in S$ 和 $X(x) \in \mathcal{T}_x S$，其中 $X \in \mathfrak{X}(S)$。由于f是光滑的，$(T_x f)X(x)$ 是$C^\infty(\mathbb{R})$ 在 $f(x)$ 处的导子 $Y\big(f(x)\big) = X(f)(x)$。但是 $(\mathbb{R}, C^\infty(\mathbb{R}))$ 是一个光滑流形。因此，Y 是 $\mathbb{R}$上的向量场。由于对于每个 $x \in S$，都有 $(T_x f)X(x) = Y\big(f(x)\big)$，所以向量场 X 和 Y是f-相关的。因此，f 具有强切映射

$$\mathcal{T}f : \mathcal{T}S \to \mathcal{T}\mathbb{R} = T\mathbb{R} : X(x) \mapsto Y\big(f(x)\big).$$

因此，f 是 S上的强光滑函数。 □

命题 6. 设微分空间（$S, C^\infty(S)$）是（$\mathbb{R}^n, C^\infty(\mathbb{R}^n)$）的微分子空间。那么包含映射 $\iota\colon S \to \mathbb{R}^n$具有强切映射，即对于每个 $x \in S$，$\mathcal{T}_x S \subseteq T_x\mathbb{R}^n$。

证明。设 $X(x) \in \mathcal{T}_x S$，其中 $x \in S$ 且 $X \in \mathfrak{X}(S)$。向量场 X有一条从 x出发的极大积分曲线 $\gamma_x : I \subseteq \mathbb{R} \to S$，其定义在包含 0 的极大开区间 I上。因此，$\Gamma_{\iota(x)} = \iota \circ \gamma_x\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$是 $\mathbb{R}^n$上向量场 Y的一条极大积分曲线，其中

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\iota \circ \varphi_t^X)(x) = Y\big(\iota(x)\big). \tag{2}$$

因此，$\mathcal{T}_x\iota X(x) = Y\big(\iota(x)\big) \in \mathcal{T}_{\iota(x)}\mathbb{R}^n = T_x\mathbb{R}^n$，这意味着包含映射 $\iota\colon S \to \mathbb{R}^n$ 具有强切映射。由于 $\mathcal{T}_x\iota\colon \mathcal{T}_x S \to T_x\mathbb{R}^n$ 是包含映射，且 $X(x) \in T_x\mathbb{R}^n$，我们得到 $\mathcal{T}_x S \subseteq T_x\mathbb{R}^n$。□

假设 $(S, C^\infty(S))$ 是一个亚笛卡尔空间，且 $(S, \mathfrak{A})$ 是相应的 Aronszajn 亚笛卡尔空间。$\mathfrak{A}$ 是与微分结构 $C^\infty(S)$ 相关联的图册 $\{\varphi_x : U_x \to V_x\}_{x \in S}$。假设每个 $\varphi_x \in \mathcal{A}$都是从 $(U_x, C^\infty(U_x))$ 到 $(V_x, C^\infty(V_x))$ 的光滑微分同胚，且具有强切映射。那么，$\mathfrak{A}$ 是 S 的强图册，记作 $\mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}(S)$。我们称具有微分结构 $C^\infty(\mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}(S))$ 的亚笛卡尔空间 S

[2] J. Śniatycki 曾向我指出了这个引理 [5]。

由图册 $\mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}(S)$ 确定的强 亚笛卡尔空间，记作 $(S, C^\infty(\mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}(S)))$。

命题 7. 设 $\chi\colon \big(R, C^\infty(\mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}(R))\big) \to \big(S, C^\infty(\mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}(S))\big)$是强子笛卡尔空间之间具有强切映射的光滑映射。若在每个点 $x \in R$ 处， χ 的强切向量 $\mathcal{T}_x\chi\colon \mathcal{T}_xR \to \mathcal{T}_{\chi(x)}S$ 都是满射，则 χ 是次浸没。

证明。 对于每个 $x \in R$，存在微分同胚 $\varphi_x : U_x \to V_x$ （属于 $\mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}(R)$）和 $\varphi_{\chi(x)}\colon U_{\chi(x)} \to V_{\chi(x)}$ （属于 $\mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}(S)$），满足 $\chi(U_x) \subseteq U_{\chi(x)}$，使得

$$\Psi_{x,\chi(x)} = \varphi_{\chi(x)} \circ \chi \circ \varphi_x^{-1} : V_x \subseteq \mathbb{R}^{n_{\varphi_x}} \to V_{\chi(x)} \subseteq \mathbb{R}^{n_{\varphi_{\chi(x)}}}$$

是从 $(V_x, C^\infty(V_x))$ 到 $(V_{\chi(x)}, C^\infty(V_{\chi(x)}))$ 的光滑映射，它们分别是 $(\mathbb{R}^{n_{\varphi_x}}, C^\infty(\mathbb{R}^{n_{\varphi_x}}))$ 和 $(\mathbb{R}^{n_{\varphi_{\chi(x)}}}, C^\infty(\mathbb{R}^{n_{\varphi_{\chi(x)}}}))$ 的微分子空间。由于映射 φ_x、 χ 和 $\varphi_{\chi(x)}$ 都是具有强切映射的光滑映射，因此映射 $\Psi_{x,\chi(x)}$ 具有强切映射

$$\mathcal{T}_y\Psi_{x,\chi(x)} = T_y\Psi_{x,\chi(x)} : \mathcal{T}_yV_x = T_y\mathbb{R}^{n_{\varphi_x}} \to \mathcal{T}_{\chi(y)}V_{\chi(x)} = T_{\chi(y)}\mathbb{R}^{n_{\varphi_{\chi(x)}}}$$

对每个 $y \in V_x$。根据假设，$T_y\Psi_{x,\ \chi(x)}$ 是满射，因此 $\Psi_{x,\ \chi(x)}$ 是次浸没。因此，映射 χ 是次浸没。□

我们给出一个判据，用以判断由次浸没确定的纤维化是否为局部平凡。在光滑流形与光滑映射范畴中，我们有

引理 8. 设 $F\colon M \to N$ 是光滑流形之间的满射浸没，并具有以下性质。

1. 对每个 $n' \in N$，都存在 N 中包含 n' 的开邻域 V，使得对每个 $n \in V$，都存在一个微分同胚 φ_n： $F^{-1}(n) \to F^{-1}(n')$。2. 映射 $n \mapsto \varphi_n$ 是光滑的。换言之，映射

$$\begin{aligned}\Phi : U = F^{-1}(V) = \coprod_{v\in V} F^{-1}(v) \to V \times F^{-1}(n') :\\ u = (v, y) \mapsto \big(v, \varphi_v(y)\big)\end{aligned} \tag{3}$$

是光滑的。

那么，由 F 定义的纤维化是局部平凡的，也就是说，对于第一点中给出的开邻域 V， $F^{-1}(V)$ 与 $V \times F^{-1}(n')$ 微分同胚。

证明。 下面的论证表明，光滑映射 Φ (3) 是局部微分同胚。在 $u \in U$ 处到 Φ 的切映射为

$$T_u\Phi : T_uU = T_vV \times T_y\big(F^{-1}(v)\big) \to T_vV \times T_{\varphi_v(y)}\big(F^{-1}(n')\big) : \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} I & D_1\varphi_v(y)\\ 0 & D_2\varphi_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}.$$

对于固定的 $v \in V$，根据假设，映射 φ_v 是微分同胚。因此，沿 T_yF^{-1}(v) 方向的偏导数 $D_2\varphi_v$ 是可逆的。于是 $T_u\Phi$ 是可逆的。因此， Φ (3) 是局部微分同胚。事实上， Φ 是微分同胚，因为：1） Φ 是满射，因为 $\pi_1 \circ \Phi = F|U$ 且 F 是满射。这里， π_1 是 $V \times F^{-1}$(n′) 第一因子的投影；2）映射 Φ 是单射。因为如果对于某个 (,)， (,) 有 $\Phi\ u\ = \Phi\ u'$ $u = \ v\ y\ \ u' = \ v'\ y'\ \in U$ $(v\ \varphi_v\ y\ ) =$( ) ( )，那么 , $(v'\ \varphi_{v'}\ y'\ )$ $v = v'$ $\varphi_v\ y\ = \varphi_{v'}\ y'\ = \varphi_v\ y'$ φ_v ( ) , ( )，从而得到 。因此 ( ) ( ) ( )。但是根据假设， 是微分同胚。所以 $y = y'$，这表明 $u = u'$。因此，映射 Φ 是单射，从而是微分同胚。□

现在，我们证明引理 8 在具有强切向量的强子笛卡尔空间及光滑映射范畴中的一个类似结论。

定理 9. 设 χ : (R, C^∞($\mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}$(R))) $\to$ (S, C^∞($\mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}$(S))) 是亚笛卡尔空间之间的光滑满射下沉，具有强切映射，并满足以下性质。

1. 对每个 $s' \in S$，存在 $s' \in S$ 的一个开邻域 V，使得对每个 $s \in V$，存在一个微分同胚

$$\varphi_s : \big(\chi^{-1}(s), C^\infty(\mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}(\chi^{-1}(s)))\big) \to \big(\chi^{-1}(s'), C^\infty(\mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}(\chi^{-1}(s')))\big).$$

2. 光滑映射 $s \mapsto \varphi_s$ 具有强切向量。换言之，光滑映射

$$\Psi : U = \chi^{-1}(V) = \coprod_{v\in V}\chi^{-1}(v) \to V \times \chi^{-1}(s') : u = (v, y) \mapsto \big(v, \varphi_v(y)\big) \tag{4}$$

强子笛卡尔微分空间 $\big(U, C^\infty(\mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}(U))\big)$ 与 $\big(V \times \chi^{-1}(s')\ C^\infty(\mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}(V \times \chi^{-1}(s')))\big)$ 之间的映射具有强切向量。

那么，由 χ定义的纤维化是局部平凡的，也就是说，对于第一点中给出的开邻域 V， $\big(\chi^{-1}(V)\ C^\infty(\mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}(\chi^{-1}(V)))\big)$ 与 $\big(V \times \chi^{-1}(s')\ C^\infty(\mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}(V \times \chi^{-1}(s')))\big)$ 微分同胚。

证明。我们的论证与引理 8 的证明类似。强切映射

$u \in U$ 处光滑映射 Ψ (4) 的

$$T_u\Psi : T_uU = T_vV \times T_y\big(\chi^{-1}(v)\big) \to T_vV \times T_{\varphi_v(y)}\big(\chi^{-1}(s')\big) : \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} I & D_1\varphi_v(y)\\ 0 & D_2\varphi_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}.$$

对固定的 $v \in V$，映射 φ_v 由假设可知是微分同胚。因此，它沿 $T_y\big(\chi^{-1}$（v）$\big)$ 方向的偏导数 $D_2\varphi_v$ 可逆。于是 $T_v\Psi$ 可逆，这意味着 Ψ （4）是具有强切向量的光滑局部微分同胚。 Ψ 是微分同胚，因为它是满射且单射；证明方法与引理 8 的证明相同。□

4 例子

本节给出亚笛卡尔微分空间之间光滑映射的一些例子，这些映射是光滑满射浸没。

4.1 预备例子

设 E 是一个有限维实向量空间。设 Φ： $H \times E \to E$ 是紧子群 H 在 Gl（E, $\mathbb{R}$）上的线性作用。 E 上 H 不变多项式构成的代数 P（E）^{H} 是有限生成的，设其生成元为 p_1, ..., p_m。由于 H 作用 Φ 是线性的，我们可以选择 p_i 为次数 $d_i > 0$ 的齐次多项式。我们可以假设 m 是极小的。于是 $\{p_i\}_{i=1}^m$ 是 P（E）^{H} 的希尔伯特基，并且

$$\sigma : E \to \mathbb{R}^m : x \mapsto \big(p_1(x), \dots, p_m(x)\big) = \overline{x}$$

是对应于作用 Φ 的希尔伯特映射。由于 $P(E)^H$ 中的元素能够区分作用 Φ 在 E 上的轨道，且 σ 是 H- 不变的，因此 σ 诱导出一个连续双射

$$\widetilde{\sigma} : E/H \to \Sigma = \sigma(E) \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Σ 是 $\mathbb{R}^m$ 的半代数子集。映射 $\widetilde{\sigma}$ 是从局部紧豪斯多夫轨道空间 E/H 到 Σ 的同胚，参见 [2, 第 324] 页。

根据施瓦茨定理， E 上的每个光滑 H不变函数，都是 H不变多项式的光滑函数；也就是说，对每个 $f \in C^\infty(E)^H$，都存在一个 $F \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$使得 $\sigma^*F = f$。我们称$\overline{f} \in C^\infty(E/H)$，当且仅当 $\sigma^*\overline{f} \in C^\infty(E)^H$。 $C^\infty(E/H)$是 E/H上的一个微分结构，而映射

$$\sigma : (E, C^\infty(E)^H) \to (E/H, C^\infty(E/H))$$

是微分空间之间的光滑映射，因为 $\sigma^*\overline{f} \in C^\infty(E)^H$。映射 σ是满射。微分空间（$E/H, C^\infty(E/H)$）是子笛卡尔空间，因为轨道空间 E/H 是 $\mathbb{R}^m$的子集。

$\mathcal{T}_x E$ 在 $x \in E$ 处的强切空间是 $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{X(x)\}$，其中 $X \in \mathfrak{X}(E)^H$ 是 E 上的光滑 H-不变向量场。X 的流 φ_t 与 H 作用 Φ可交换，也就是说，对于每个$(h, x) \in H \times E$和每个 $t \in \mathbb{R}$，都有 $\Phi_h\big(\varphi_t(x)\big) = \varphi_t\big(\Phi_h(x)\big)$。因此，$\varphi_t$ 诱导了一个单参数群 $\overline{\varphi}_t$，它由$(E/H, C^\infty(E/H))$到自身的微分同胚构成。$\overline{\varphi}_t$ 是 E/H上的向量场 $\overline{X}$ 的流。向量场 $\overline{X}$ 与向量场 X σ 相关，因为

$$\overline{\varphi_t(x)} = \sigma\big(\varphi_t(x)\big) = \overline{\varphi}_t\big(\sigma(x)\big) = \overline{\varphi}_t(\overline{x}).$$

因此，$\overline{X}(\overline{x}) \in \mathcal{T}_{\overline{x}}(E/H)$。由此，强切映射

$$\mathcal{T}_x\sigma : \mathcal{T}_x E \to \mathcal{T}_{\overline{x}}(E/H) : X(x) \mapsto \overline{X}(\overline{x})$$

希尔伯特映射在每个 $x \in E$处都有定义。$\mathcal{T}_x\sigma$ 是满射，因为 E/H 上的每个光滑向量场都与 E上的一个光滑 H-不变向量场 σ 相关，见 [1]。由于 Σ 是 $\mathbb{R}^m$的子集，包含映射 $\iota : \Sigma \to \mathbb{R}^m$ 具有强切映射。因此，$(E/H, \mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}(E/H))$ 是一个强子笛卡尔空间。

由于 E 是一个光滑流形，亚笛卡尔微分空间（$E, C^\infty(E)^H$）具有一个图册 $\mathfrak{A} = \{\mathrm{id}_E : E \to E\}$ 由一个坐标图组成，该坐标图具有强切向量。因此，（$E, \mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}(E)$）是一个强子笛卡尔空间。希尔伯特映射 σ：（$E, \mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}(E)$）$\to$（$E/H, \mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}(E/H)$）是一个具有强切向量的满射光滑映射。因此，$\sigma$ 是从微分空间（$E, C^\infty(E)^H$）到亚笛卡尔微分空间（$E/H, C^\infty(E/H)$）的满射浸没。

4.2 主要例子

设 M 为一个光滑流形，设 G 为一个李群，其通过映射 Φ： $G \times M \to M$在 M 上适当地作用。对于每个 $x \in M$，令 $G \cdot x = \{\Phi_g(x) \in M \,\big|\, g \in G\}$ 表示 G 作用经过 x的轨道。令 $M/G = \{G \cdot x \,\big|\, x \in M\}$表示 M 上的 G 轨道空间，并令 G为轨道映射

$$\pi : M \to M/G : x \mapsto G \cdot x = \overline{x}.$$

M/G 上的商拓扑是豪斯多夫的。

我们称函数 $\overline{f}$： $M/G \to \mathbb{R}$ 光滑，当且仅当 $\pi^*\overline{f} \in C^\infty(M)^G$，即定义在 M 上的光滑 G 不变函数集合。令 $C^\infty(M/G)$

表示 M/G 上的光滑函数集合。那么 $C^\infty(M/G)$ 是 M/G 上的微分结构，参见 [2, 第 321] 页。$(M/G, C^\infty(M/G))$ 的微分空间拓扑与商拓扑相同，因为 M 上的光滑 G 不变函数可以分离作用 Φ 的 G 轨道。因此，微分空间拓扑是豪斯多夫的。根据定义，$\pi^*\big(C^\infty(M/G)\big) = C^\infty(M)^G$，轨道映射 $\pi\colon (M, C^\infty(M)^G) \to (M/G, C^\infty(M/G))$ 是微分空间之间的光滑满射映射。π 在 $x \in M$ 处有强切映射，因为其切映射将 M 上在 x 处取值的一个 G 不变向量场 X 映为 M/G 上在 $\pi(x) = \overline{x}$ 处取值的向量场 $\overline{X}$。这里的 $\overline{X}$ 由 X 诱导。

现在我们回顾这一论证，它表明 $(M/G, C^\infty(M/G))$ 是一个亚笛卡尔微分空间。对每个 $x \in M$，令 $G_x = \{g \in G \,\big|\, \Phi_g(x) = x\}$为 G 作用 Φ 在 x 处的各向同性群。对于每个 $g \in G_x$，线性变换 $T_x\Phi_g\colon T_xM \to T_xM$ 使子空间 $T_x(G \cdot x)$ 保持不变。因此我们得到如下作用

$$* : H \times E \to E : (h, v) \mapsto T_x\Phi_h v$$

紧群 $H = G_x$ 在实有限维向量空间 $E = T_xM/T_x(G \cdot x)$ 上的作用。令 B 为 E中包含 0 的一个 H-不变开邻域。在$G \times B$ 上， H 的作用定义为

$$\mu : H \times (G \times B) \to G \times B : \big(h, (g, b)\big) \mapsto (gh^{-1}, h * b),$$

该作用是自由且适当的。因此， H 轨道空间 $G\times_H B$ 是一个光滑流形。 G 在 $G \times B$ 上的作用定义为

$$\nu : G \times (G \times B) \to G \times B : \big(g', (g, b)\big) \mapsto (g'g, b)$$

与 H 作用 μ 相容。因此，它在 $G\times_H B$ 上诱导出一个 G 作用。因此，存在 M 中包含 x 的一个 G 不变开邻域 U、 E 中包含 0 的一个 H-不变开邻域 B，以及一个微分同胚 $\varphi\colon G\times_H B \to U$，它将 $G\times_H B$ 上的 G作用与 U 上的 G作用相互交织，见[2, 第318]页。事实上，存在一个微分同胚 ϕ，将微分空间（$B/H, C^\infty(B/H)$）映到微分空间（$U/G, C^\infty(U/G)$），见[2,第323]页。考虑下图

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\psi} & U \\ \big\downarrow{\scriptstyle \rho|B} & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi|U} \\ B/H & \xrightarrow{\phi} & U/G \end{array}$$

这里， ψ 是由 Bochner 引理 [2, 第306]页给出的微分同胚， $\rho|B$ 是将 E 上的 H 作用 $*$ 的轨道映射限制到 B 上所得的映射，而 $\pi|U$ 是将 M 上的 G 作用的轨道映射 π 限制到 U 上所得的映射。由于光滑映射 $\rho|B$、ψ 和 $\pi|U$ 都有强切向量，且该图可交换，因此微分同胚 ϕ 有强切向量。

现在我们说明， G 在光滑流形 M 上的适当作用所对应的轨道空间是一个亚笛卡尔微分空间。令 $x \in M$。考虑 $H = G_x$ 在有限维实向量空间 $E = T_xM/T_x(G \cdot x)$ 上的作用 $*$。令

$$\sigma : E \to \mathbb{R}^m : x \mapsto \big(p_1(x), \ldots, p_m(x)\big)$$

为对应于空间 $P(E)^H$ 上的 H-不变多项式的希尔伯特基 $\{p_i\}_{i=1}^m$ 的希尔伯特映射。由于 σ 是 H-不变的，它诱导出映射

$$\widetilde{\sigma} : E/H \to \Sigma = \sigma(E) \subseteq \mathbb{R}^m,$$

它是微分空间 $(E/H, C^\infty(E/H))$ 和 $(\sigma(E)\ C^\infty(\sigma(E))) \subseteq (\mathbb{R}^m, C^\infty(\mathbb{R}^m))$ 之间的一个同胚，也是一个具有强切向结构的光滑满射微分同胚。

令 $\mathcal{F}$ 为函数族 $\overline{f}\colon \Sigma \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$，使得 $\sigma^*\overline{f}\colon E \to \mathbb{R}$是 E上的光滑函数。注意，$\sigma^*\overline{f}$ 是 H-不变的。令 $C^\infty(\Sigma)$ 为由 $\mathcal{F}$生成的 Σ 上的 $\widetilde{}$微分结构。令 $\mathcal{F}$ 为函数族$\widetilde{}$ $\widetilde{}$ $f\colon \Sigma \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$，使得存在一个 $F \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ 满足 $F|\Sigma = f$。令 $\widetilde{}$ $\widetilde{}C^\infty(\Sigma)$ 为由 $\mathcal{F}$生成的 Σ 上的微分结构。微分空间 $(\Sigma, C^\infty(\Sigma))$ 和 $(\Sigma, C^\infty(\Sigma))$ 微分同胚。由 $C^\infty(\Sigma)$ 在 Σ 上生成的微分空间拓扑，与 Σ 从 $\mathbb{R}^m$继承的拓扑相同。

现在我们证明 $(\Sigma, C^\infty(\Sigma)) \subseteq (\mathbb{R}^m, C^\infty(\mathbb{R}^m))$ 是一个局部紧次笛卡尔微分空间。如有必要，缩小 B 和 U 后，我们可以假设对某个 $c > 0$，有 $B = \{x \in E \,\big|\, \beta(x,x) < c\}$。这里， β 是 E上的一个H-不变内积。映射 $\widetilde{\sigma}$ 是轨道空间 B/H 到 $\sigma(B) = \{y \in \Sigma = \sigma(E)\ P(y) < c\}$的同胚，其中 P 是 $\mathbb{R}^m$上的一个多项式，满足对所有 $x \in E$， $\beta(x,x) = P\big(\sigma(x)\big)$。 $\sigma(B)$是闭半代数集 Σ的一个开半代数子集。令$\phi\colon (B/H, C^\infty(B/H)) \to (U/G, C^\infty(U/G))$ 为上图中的微分同胚。映射

$$\widetilde{\sigma} \circ \phi^{-1} : (U/G, C^\infty(U/G)) \to \big(\sigma(B), C^\infty(\sigma(B))\big) \subseteq (\mathbb{R}^m, C^\infty(\mathbb{R}^m))$$

是一个微分同胚，见 [2, 第327]页。由于开集 $\{U/G\}$ 覆盖轨道空间 M/G，因此 $(M/G, C^\infty(M/G))$ 是一个亚笛卡尔微分空间。由于映射 $\widetilde{\sigma}$ 和 ϕ是具有强切向量的光滑微分同胚，因此坐标图映射 $\widetilde{\sigma}\circ\phi^{-1}$:
$U/G \to B/H \subseteq \mathbb{R}^m$ 是具有强切向量的光滑微分同胚。因此，$(M/G, \mathfrak{A}_{\mathrm{stg}}(M/G))$ 是一个强子笛卡尔空间。

参考文献

[1] Larry Bates、Richard Cushman 和 Jędrzej Śniatycki，适当作用的轨道空间上的向量场与微分形式，$Axioms$ **10**（2021年）第118号论文，共23页。arxiv.2108.00280。[2] R.H. Cushman 和 L.M. Bates，《经典可积系统的整体方面》，第二版，Birkhäuser，巴塞尔，2015年。[3] Richard Cushman 和 Jędrzej Śniatycki，Aronszajn 和 Sikorski 子笛卡尔微分空间，波兰科学院数学通报**69** （2021年）171–180。[4] Richard Cushman 和 Jędrzej Śniatycki，带角流形作为微分空间，手稿，2023年5月。[5] J. Śniatycki，2023年1月12日的电子邮件。[6] J. Śniatycki，《奇异空间微分几何与对称性约化》，剑桥大学出版社，剑桥，英国，2013年。