arXiv:2302.02464v1 [math.OC] 5 Feb 2023

离散化最优控制问题的数值稳定性

Ashutosh Bijalwan 和 Jos´e J Mu˜noz

摘要 最优控制问题旨在优化一个受一组常微分方程约束的目标泛函。本文探讨将这一优化过程按时间离散化后，对数值解稳定性的影响。具体而言，我们分析了一个具有二次泛函和线性常微分方程的最优控制问题，并采用中点法 和隐式欧拉法进行离散化。我们表明，数值稳定性以及数值振荡的出现不仅取决于时间步长，还取决于目标泛函中衡量控制输入量的参数。最后，我们还通过一个示例说明，这些结果同样适用于非线性最优控制问题。

1 引言

最优控制是一类数学优化问题，其目标系统状态通过在路径约束下最小化/最大化代价泛函来确定，这些路径约束以常微分方程（ODEs）和初始条件的形式给出。在实际应用中，这类问题通常难以获得闭式解，因此往往使用非线性规划技术进行数值求解 [3, 4]。根据优化与时间离散化的先后顺序，最优控制问题（OCPs）的求解过程可分为间接方法和直接方法。间接法首先推导必要最优性条件，并构造带有两点边界条件的微分代数方程（DAEs），这也称为两点边值问题

Ashutosh Bijalwan 加泰罗尼亚理工大学 (UPC)，Jordi Girona 31，08034 巴塞罗那，西班牙，电子邮箱：abijalwan@cimne.upc.edu Jos´e J Mu˜noz 加泰罗尼亚理工大学 (UPC)，Jordi Girona 31，08034 巴塞罗那，西班牙，电子邮箱：j.munoz@upc.edu

（TPBVP）或哈密顿边值问题（HBVP），随后对其进行时间离散化，从而得到离散系统 [9, 10]。相反，直接法首先对连续系统进行时间离散化，然后根据所得离散系统推导必要最优性条件 [1]。这两种方法各有其独特的性质和局限性，相关内容已在其他文献中有所描述，例如 [4]。

初值问题（IVP）数值积分器的稳定性已得到广泛研究。例如，显式欧拉法（*eE*）积分器仅条件稳定，而辛积分器，即隐式欧拉法（*iE*）或中点法（*MP*），则是无条件稳定格式，并能保持运动第一积分 [6, 7]。鉴于辛积分器具有这些优良性质，哈密顿边值问题通常采用 MP 或 iE 格式进行离散化 [2, 5, 8]。然而，由于存在两点边界条件，沿时间推进方向（正向）无条件稳定的隐式（辛）积分，在反向上会变为显式（条件稳定）；而反向正是最优控制问题中伴随常微分方程的自然方向。这一事实促使我们开展本研究：我们将说明，原本对常微分方程稳定的格式，在离散化的最优控制问题中可能变得不稳定。此外，我们还将说明，稳定性以及数值解中是否出现振荡，取决于控制输入的大小。为简明清晰地阐述我们的观点，我们将讨论范围限定为应用于最优控制问题的中点格式和隐式欧拉格式的数值稳定性。

本章结构如下。第1节简要回顾求解最优控制问题的现有数值方法。第2节正式介绍连续最优控制问题的一般框架，并描述相关的辛结构。此外，我们还给出哈密顿边值问题的时间离散形式。第3节将常用的中点格式和隐式欧拉方案应用于一个示例线性最优控制问题，并详细分析数值振荡的来源及相关稳定性判据。最后，第4节将这些思路推广到非线性最优控制问题，以避免数值振荡，并在第5节总结全文。

2 最优控制问题：间接法

我们考虑一个连续最优控制问题，该问题旨在寻找控制$uuu(t)$和状态$xxx(t)$轨迹，使目标泛函 $\mathscr{J}(xxx,uuu)$ 最小化，同时满足一阶初值问题和等式约束 [1], ，即求解以下优化问题

$$\begin{aligned} &\max_{\boldsymbol{x}(t),\,\boldsymbol{u}(t)} \mathscr{J}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) && && (1)\\ &\quad \text{s.t., } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) - \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} && \text{（状态常微分方程）}\\ &\qquad \boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0} && \text{（初始条件）} \end{aligned}$$

为简洁起见，这里省略时间依赖关系。在轨迹优化问题中，泛函 $\mathscr{J}(xxx,uuu)$ 的一种常见形式是衡量状态变量$xxx(t)$ 与目标状态xxx_t之间的偏差，并加入达到期望状态所需的相应输入/控制代价。数学上通常采用以下形式，

$$\mathscr{J}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) := \int_0^T \left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_t)^\top \mathbf{R}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_t) + \frac{\alpha}{2}\boldsymbol{u}^\top \mathbf{Q}\boldsymbol{u} \right) dt, \tag{2}$$

其中 $\mathbf{Q}$ 和$\mathbf{R}$ 是输入矩阵和输出矩阵。参数 $\alpha > 0$ 用于调节输入控制uuu 的大小，而 T 是固定的终止时间。

为了推导式 (1) 中约束优化问题的最优性条件，我们引入拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 和 $\boldsymbol{\xi}$，并定义与问题 (1) 相关的拉格朗日泛函如下：

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u};\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\xi}) = \mathscr{J}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \int_0^T \boldsymbol{\lambda}^\top (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) - \dot{\boldsymbol{x}})\, dt + \boldsymbol{\xi}^\top (\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_0). \tag{3}$$

经过分部积分并重新整理被积函数后，拉格朗日泛函变为 [3]

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u};\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\xi}) = \int_0^T \left(\mathscr{H} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^\top \boldsymbol{x} \right) dt - \boldsymbol{\lambda}(T)^\top \boldsymbol{x}(T) + \boldsymbol{\lambda}(0)^\top \boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{\xi}^\top (\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_0)$$

其中 $\mathscr{H}(xxx,uuu;\boldsymbol{\lambda}) := \frac{1}{2}(xxx - xxx_t)^\top \mathbf{R}(xxx - xxx_t) + \frac{\alpha}{2} uuu^\top \mathbf{Q} uuu + \boldsymbol{\lambda}^\top fff$ (xxx,uuu) 是所谓的控制哈密顿量；只要 $\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} = 0$，它沿最优轨迹保持不变。随后，可通过对$xxx$ $\boldsymbol{\lambda}$,uuu和 $\boldsymbol{\xi}$求导，得到一阶最优性条件，进而导出以下带有两点边界条件的微分代数方程组 (DAE) [2, 5],

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\nabla_{\boldsymbol{x}} \mathscr{H} \tag{4a}$$
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \mathscr{H} \tag{4b}$$
$$\mathbf{0} = \nabla_{\boldsymbol{u}} \mathscr{H} \tag{4c}$$
$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_o,\ \boldsymbol{\lambda}(T) = \mathbf{0} \tag{4d}$$

上面的前三个方程通常分别称为伴随方程、状态方程和控制代数方程；这些方程构成的系统称为欧拉-拉格朗日方程组（E-L），与（4d）中的端点条件共同构成所谓的哈密顿边值问题（HBVP），其具有内在的辛结构 [3]。

现在，我们通过对式（4）中的连续系统引入时间离散格式，以均匀的时间步长 $\Delta t > 0 (n = 1,2,\ldots,N)$，对哈密顿边值问题进行数值时间积分，其一般形式如下：

$$\frac{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}-\boldsymbol{\lambda}_n}{\Delta t} = \mathbf{R}\left(\boldsymbol{x}_{n-\tau}-\boldsymbol{x}_t\right)+\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{n-\tau},\boldsymbol{u}_{n-\tau})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}_{n-\tau} \tag{5a}$$

$$\frac{\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_{n-1}}{\Delta t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{n-\tau},\boldsymbol{u}_{n-\tau}) \tag{5b}$$

$$\mathbf{0} = \alpha\mathbf{Q}\boldsymbol{u}_{n-\tau}+\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{n-\tau},\boldsymbol{u}_{n-\tau})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}_{n-\tau} \tag{5c}$$

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_o,\ \boldsymbol{\lambda}_N = \mathbf{0} \tag{5d}$$

其中 $xxx_{n-\tau} := \tau xxx_{n-1}+(1-\tau)xxx_n$，$uuu_{n-\tau}$和 $\boldsymbol{\lambda}_{n-\tau}$也同理。 $\tau = 0$和 $\tau = \frac{1}{2}$ 分别对应广为人知的隐式欧拉法（iE）和中点法（MP）格式。

3 动机示例：线性最优控制问题

考虑一个质量为 m 的推进体（例如水母），以初速度 v_o沿 $+y$方向运动。除沿 $-y$ 方向作用、加速度为 a 的重力外，还存在形式为$f_d := bv$的阻力，其中 $b > 0$ 为摩擦系数。此外，我们假设水母通过调节沿 $-y$ 方向的流体喷射来控制推进速度，从而产生沿 $+y$ 方向的推力 u 。沿 $+y$ 方向的线动量平衡给出如下状态初值问题，

$$\begin{aligned} f(v,u)-\dot{v} &= 0 \\ v(0)-v_o &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

其中，$f(v,u) := -bv+u-a$。我们希望求得一个控制函数$u(t)$，使水母在给定时间 T内从初速度v_o 达到目标速度 v_t 。本质上，我们希望最小化以下代价泛函

$$\mathscr{J}(v,u) := \int_0^T \left(\frac{1}{2}(v-v_t)^2+\frac{\alpha}{2}u^2\right)dt \tag{7}$$

满足式（6）中的初值问题。所提出问题的闭式解为

$$v(t) = C_1\left(\frac{b}{m}-\gamma\right)e^{\gamma t}+C_2\left(\frac{b}{m}+\gamma\right)e^{-\gamma t}+v_p \tag{8a}$$

$$\lambda(t) = C_1 e^{\gamma t}+C_2 e^{-\gamma t}+\lambda_p \tag{8b}$$

$$u(t) = \frac{\lambda(t)}{\alpha m} \tag{8c}$$

其中

$$\gamma=\sqrt{\frac{b^2}{m^2}+\frac{1}{\alpha m^2}},\ v_p=\frac{v_t-\alpha bma}{\alpha m^2\gamma^2},\ \lambda_p=-\frac{bv_t+ma}{m\gamma^2},$$
$$C_1=\frac{m(v_o-v_p)e^{-\gamma T}+(b+m\gamma)\lambda_p}{(b-m\gamma)e^{-\gamma T}-(b+m\gamma)e^{\gamma T}},\ C_2=\frac{m(v_o-v_p)-(b-m\gamma)C_1}{b+m\gamma}$$

无论 $\alpha>0$ 的值如何，都有 $\gamma>0$，因此可以预期状态、伴随变量和控制函数不会出现振荡。我们将在接下来的章节中表明，采用中点格式和隐式欧拉时间离散格式求解最优控制问题所得的数值解不一定是非振荡的。

3.1 中点（*MP*）格式

利用式（5）中的值 $\tau=1/2$，可得到常微分方程组的中点（MP）时间离散化，

$$\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\Delta t}-\frac{b}{m}\lambda_{n-\frac{1}{2}}+v_{n-\frac{1}{2}}-v_t=0, \tag{9a}$$
$$\frac{v_n-v_{n-1}}{\Delta t}+\frac{b}{m}v_{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{m}u_{n-\frac{1}{2}}+a=0, \tag{9b}$$
$$u_{n-\frac{1}{2}}+\frac{1}{\alpha m}\lambda_{n-\frac{1}{2}}=0. \tag{9c}$$

代入边界条件 $v_0=v_o$ 和 $\lambda_N=0$ 后，可使用常规线性求解器求解所得的线性方程组。

为了研究 MP方案的稳定性，将系统表示为自变量（v 和 λ）会有所帮助。注意，式（9c）中的控制方程是线性的，因此，根据定义将式（9c）代入式（9b），

$$p:=\frac{b}{m}+\frac{2}{\Delta t};\ q:=\frac{b}{m}-\frac{2}{\Delta t};\ s:=\frac{1}{\alpha m^2} \tag{10}$$

可得到以下约化离散系统

$$q\lambda_n+p\lambda_{n-1}-v_{n-1}-v_n+2v_t=0 \tag{11a}$$
$$pv_n+qv_{n-1}+s\lambda_{n-1}+s\lambda_n+2a=0 \tag{11b}$$

定义向量 $zzz_n:=\{v_n,\ \lambda_n\}^T$ 后，MP方案可表示为

$$\boldsymbol{z}_n=\mathbf{A}\boldsymbol{z}_{n-1}+\boldsymbol{a} \tag{12}$$

其中

$$\mathbf{A}:=\frac{-1}{s+pq}\begin{bmatrix}s+q^2 & -s(p-q)\\ -(p-q) & s+p^2\end{bmatrix};\ \boldsymbol{a}:=\frac{-2}{s+pq}\begin{Bmatrix}qa-sv_t\\ a+pv_t\end{Bmatrix}.$$

矩阵 **A** 的特征值均为实数且互不相同，表示为

$$e_{1,2} = \left\{ \frac{2+\gamma\Delta t}{2-\gamma\Delta t},\ \frac{2-\gamma\Delta t}{2+\gamma\Delta t} \right\}. \tag{13}$$

且**A** 的谱半径为

$$\rho(\mathbf{A}) = \frac{2+\gamma\Delta t}{|2-\gamma\Delta t|}. \tag{14}$$

因此，当 $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$ 时，时间离散格式是稳定的。似乎不存在任何可行的数对 $(\gamma, \Delta t) \in \mathbb{R}^+$，使得 $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$。然而，若对 $\gamma\Delta t$ 施加限制，使得 $\log_{10}(\gamma\Delta t/2) \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty)$ 且满足 $\varepsilon \approx 2$，数值证据表明解仍然有界。

为分析数值振荡的出现情况，我们考察特征值改变符号时 α 的取值。若 $\gamma^2 - {}^{4}_{\Delta}t_2 < 0$，公式（13）中的特征值会由负变正；当达到阈值 $\gamma = {}^{2}_{\Delta t}$ 时，系统将发散。总之，

$$e_i = \begin{cases} < 0, & \alpha < \alpha_{th,MP} \ \text{(Oscillatory response)} \\ > 0, & \alpha > \alpha_{th,MP} \ \text{(No oscillations)} \end{cases} \tag{15}$$

with

$$\alpha_{th,MP} := \frac{\Delta t^2}{4m^2 - b^2\Delta t^2}. \tag{16}$$

3.2 隐式欧拉（*iE*）格式

将 $\tau = 0$ 的值代入式（5），采用隐式欧拉（iE）时间离散化可得到以下离散系统

$$\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\Delta t} - \frac{b}{m}\lambda_n + v_n - v_t = 0, \tag{17a}$$

$$\frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta t} + \frac{b}{m}v_n - \frac{1}{m}u_n + a = 0, \tag{17b}$$

$$u_n + \frac{1}{\alpha m}\lambda_n = 0. \tag{17c}$$

代入边界条件 $v_0 = v_o$ 和 $\lambda_N = 0$ 后，即可求得所得线性系统的解。

为了研究隐式欧拉方案的稳定性，我们用自变量v 和 λ表示系统。将式（17c）代入式（17b），并采用新的定义

$$p^* := \frac{b}{m} + \frac{1}{\Delta t};\ q^* := \frac{b}{m} - \frac{1}{\Delta t};\ r := \frac{1}{\Delta t};\ s := \frac{1}{\alpha m^2} \tag{18}$$

式（17）中的系统等价于

$$q^*\lambda_n + r\lambda_{n-1} - v_n + v_t = 0 \tag{19}$$
$$p^* v_n - r v_{n-1} + s\lambda_n + a = 0. \tag{20}$$

或者用向量 $zzz_n := \{v_n,\ \lambda_n\}^T$ 表示，可以写成

$$\boldsymbol{z}_n = \mathbf{B}\boldsymbol{z}_{n-1} + \boldsymbol{b} \tag{21}$$

with

$$\mathbf{B} := \frac{-r}{s + p^*q^*}\begin{bmatrix} -q^* & -s \\ -1 & p^* \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} := \frac{-1}{s + p^*q^*}\begin{Bmatrix} q^*a - sv_t \\ a + p^*v_t \end{Bmatrix}.$$

矩阵 $\mathbf{B}$ 的特征值及其谱半径 $\rho(\mathbf{B})$ 为

$$e_{1,2} = \left\{\frac{1}{1+\gamma\Delta t}, \frac{1}{1-\gamma\Delta t}\right\},\ \rho(\mathbf{B}) = \frac{1}{|1-\gamma\Delta t|} \tag{22}$$

因此，当满足 $|\gamma\Delta t - 1| \geq 1$ 时，时间离散格式将是稳定的。由于 $\gamma\Delta t \in \mathbb{R}^+$，我们剩下的限制条件是 $\gamma \geq \frac{2}{\Delta t}$。

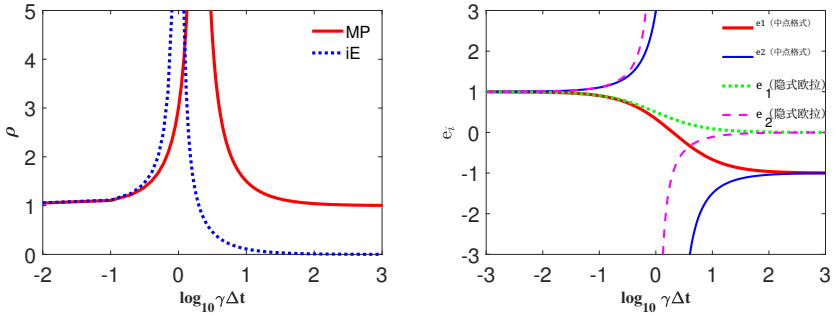

图1 中点格式（MP）和隐式欧拉法（iE）格式：(a) 谱半径；(b) 特征值。

与中点格式的类似分析表明，在 iE 方案中，当 e_2 的符号随 $1-\gamma\Delta t$ 改变而变化时，便会发生符号变化；当 γ 达到阈值 $\gamma = \frac{1}{\Delta t}$ 时，系统会发散。总结如下：

$$\frac{1}{1-\gamma\Delta t} = \begin{cases} < 0, & \alpha < \alpha_{th,iE} \text{ (Oscillatory response)} \\ > 0, & \alpha > \alpha_{th,iE} \text{ (No oscillations)} \end{cases} \tag{23}$$

with

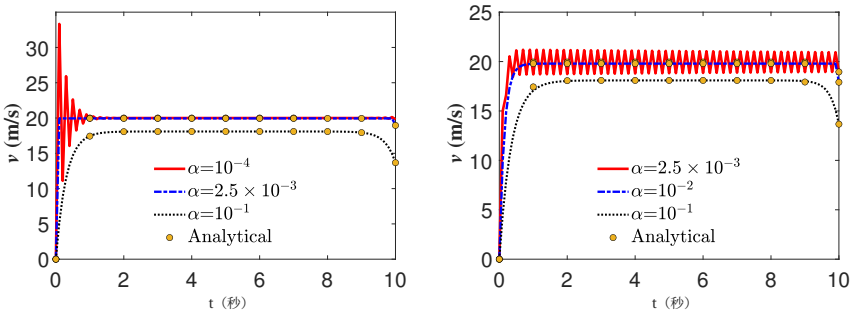

图 2 状态最优速度：（a）MP方案和（b）iE方案（圆点：解析解）。

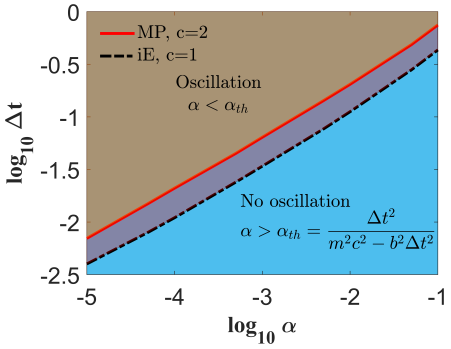

图 3 MP和iE方案的相图（α，Δt）。

$$\alpha_{th,iE} := \frac{\Delta t^2}{m^2 - b^2 \Delta t^2}. \tag{24}$$

我们使用数值$m,b,a,v_o,v_t,T\ \Delta t) = (1,1,1,0,20,10,0.1)$验证了式 (16) 和 (24) 中的理论结果及阈值，由此得到数值 $\alpha_{th,MP} = 2.5E-3$ 和 $\alpha_{th,iE} = 1.01E-2$。将 α 降至这些数值以下，会出现数值振荡，这与式 (15) 和 (23) 中的条件一致，如图2所示。谱半径和特征值的理论结果见图1。需要指出的是，存在一个使两种方案都变得不稳定的区域；只有与该区域保持足够距离，才能获得稳定结果。

为验证 α_{th}的阈值，我们通过数值实验生成了图3中的稳定性包络。我们发现其与式（16）和式（24）高度吻合。值得注意的是，MP方案的相边界高于iE方案，并且要晚得多才会出现数值振荡。

4 非线性最优控制问题：倒立弹性摆

在第二个应用中，我们考虑一个平面弹性倒立摆，它由两个质点m_1和m_2组成，并通过一根弹簧连接。系统处于沿 $-y$ 方向、强度为a的重力场中。质点m_1的位置xxx_1被约束为沿x轴运动，而m_2则可在xy平面内自由运动。质点m_1和m_2的初始位置分别为(0,0)和(0.3,1)（见图4）。我们假设，弹簧势能随长度相对于原长l_o的增量呈二次变化，即$U(xxx) := \kappa 2\ (l(xxx) - l_o)^2$。线动量平衡可表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) - \dot{\boldsymbol{v}} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{x}} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_o &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{v}(0) - \boldsymbol{v}_o &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{25}$$

其中 $\mathrm{l} = \|\mathrm{xxx}_2 - \mathrm{xxx}_1\|_2$，$\mathrm{xxx} = \{\mathrm{xxx}_1, \mathrm{xxx}_2\}^\mathsf{T}$，$\mathrm{vvv} = \{\mathrm{vvv}_1, \mathrm{vvv}_2\}^\mathsf{T}$，$\mathrm{fff}\,(\mathrm{xxx}, \mathrm{uuu}) := -\mathrm{M}^{-1}(\nabla_{\boldsymbol{x}}\mathrm{U} + \mathrm{aaa})$，$\mathrm{M} := \mathrm{diag}(\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2, \mathrm{m}_2)$，以及 $\mathrm{aaa} := \{0, \mathrm{a}, 0, \mathrm{a}\}^\mathsf{T}$。我们希望找到控制速度 $\mathrm{u} = \mathrm{v}_1$，使系统在直立构型下保持稳定。等价地，我们旨在最小化代价泛函

$$\mathscr{J}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) := \int_0^T \left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_t)^\mathsf{T}\mathbf{R}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_t) + \frac{\alpha}{2}\boldsymbol{u}^\mathsf{T}\mathbf{Q}\boldsymbol{u} \right) dt \tag{26}$$

受式 (25) 约束，其中 $uuu = vvv$，$\mathbf{Q} = \mathrm{diag}(1,0,0,0)$，$\mathbf{R} = \mathrm{diag}(0,0,0,1)$，以及$xxx_t = \{0,0,0,x_t\}^\mathsf{T}$。

在数值测试中，我们设定系统参数（m_1, m_2, k，a，x_t，T Δt）=（1，1，1，1，2，4，0.2），并采用 $\alpha \in$（10^{-4}，10^{-2}）。接下来，我们使用 MP 方案对系统进行离散化，即式（5），其中 $\tau = \frac{1}{2}$）。随后通过数值方法求解所得的非线性方程组。根据线性分析，我们观察到，对于较小 Δt的 MP 方案，有 $\alpha_{th} \sim \mathcal{O}(\Delta t^2)$，我们将其称为保守稳定性判据；将 α 降低至该值以下应会引发数值振荡。图 4 显示了质量 1 在三个 α 值下的水平位置。可以看出，当 $\alpha = 10^{-2}$ 时，轨迹平滑；当 $\alpha = 10^{-3}$ 时，会出现轻微的折点；而 $\alpha = 10^{-4}$ 则会导致最优轨迹发生振荡。

5 总结

我们已经证明，最优控制问题中的稳定性判据不仅取决于常微分方程的参数和离散化的时间步长，也取决于目标函数的参数。此外，控制代价函数中的参数取值较小时，也可能引发数值振荡。我们阐明了

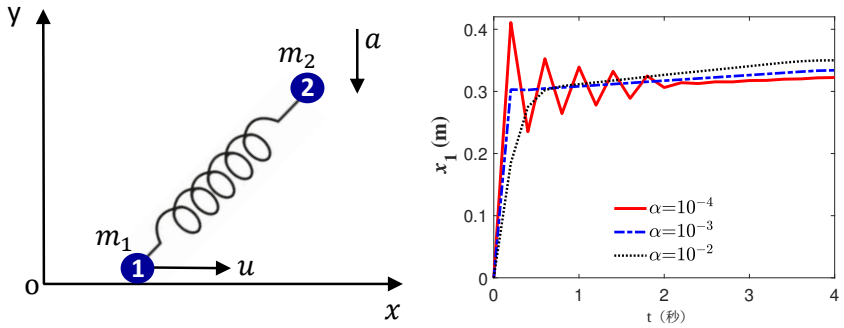

图 4 倒立摆：质量 m_1 水平位移，采用 α （MP方案）

这些不稳定性和振荡在线性问题中的成因，并通过数值示例说明，这些观点也适用于具有非线性常微分方程的问题。数值实验表明，随着 α 减小，我们必须缩短时间步长，以避免最优轨迹出现数值振荡，即 $\alpha \sim \mathcal{O}(\Delta t^2)$。

致谢 本研究得到西班牙科学与创新部资助，资助项目为 Severo Ochoa计划 CEX2018-000797-S，以及研究项目 DynAd2，项目编号为 PID2020-116141GB-I00。

参考文献

1. Betts, J.T.：《使用非线性规划实现最优控制与估计的实用方法》。工业与应用数学学会（SIAM），2010年。 2. Betsch, P.; Becker, C.：具有对称性的机械系统最优控制问题中广义动量映射的守恒。《国际工程数值方法杂志》，第111卷第2期，144-175，doi.org/10.1002/nme.54594，2017年。 3. Bryson, A.E.; Ho, Y.C.：《应用最优控制》。《优化、估计与控制》。Taylor & Francis，1975年。 4. Conway, B.A.：连续动态系统数值优化可用方法综述。《优化理论与应用杂志》，第152卷第2期，271-306，doi.org/10.1007/s10957-011-9918-z，2012年。 5. Flaßkamp, K.; Murphey, T.D.：机械系统的保结构局部最优控制。《最优控制应用与方法》，第40卷第2期：310-329，doi.org/10.1002/oca.2479，2019年。 6. Gonzalez, O.：受完整约束的机械系统：微分代数公式与保守积分。Physica D：非线性现象，第132卷第1-2期，165-174，doi.org/10.1016/S0167-2789(99)00054-8，1999年。 7. Hairer, E.; Wanner, G.; Lubich, C.：哈密顿系统的辛积分。载于《几何数值积分》。Springer，柏林、海德堡，2006年。 8. Koch, M.W.; Leyendecker, S.：多体系统最优控制的能量动量一致力公式。《多体系统动力学》，第29卷第4期：381-401，doi.org/10.1007/s11044-012-9332-9，2013年。

9. Miller,M.I.; Trouv´e,A.; Younes,L.：计算解剖学中的哈密顿系统与最优控制：达西·汤普森诞辰100周年。《生物医学工程年度评论》，第17卷：447-509，doi.org/10.1146/annurev-bioeng-071114-040601，2015年。 10. Sharp, J.A.; Burrage, K.; Simpson, M.J.：系统生物学最优控制的实现与加速。《英国皇家学会界面杂志》，第18卷第181期：20210241，doi.org/10.1098/rsif.2021.0241，2021年。