arXiv:2302.02492v1 [math.RT] 5 Feb 2023

Spin(8) 对偶对族：实群情形

WEE TECK GAN、HUNG YEAN LOKE、ANNEGRET PAUL 和 GORDAN SAVIN

Abstract. 型为 E_6 的例外群包含对偶对，其中一个成员是 Spin(8)，另一个是 $T \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$；这里 T 是一个二维环面，而 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中的非平凡元素通过逆 involution 作用于 T。我们描述通过限制极小表示而产生的表示对应。

1. Introduction

设 $\mathfrak{h}$ 是域 F 上一个特征零的、型为 F_4、E_6、E_7 或 E_8 的简单分裂李代数。设 H 是 $\mathfrak{h}$ 的自同构群。例外群的一个特征是，H 包含一个对偶约化对

$$G_2 \times \mathrm{Aut}(J_s) \subset H$$

其中 G_2 是型为 G_2 的分裂例外分裂群，而 Aut(J_s) 是一个维数分别为 6、9、15 和 27 的分裂 Freudenthal-Jordan 代数 J_s 的自同构群。这类约当代数的典型例子（不一定是分裂的）是系数取自维数分别为 1、2、4 和 8 的合成代数的 3×3 厄米对称矩阵代数。在实数域上，合成代数的典型例子包括 $\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{H}$ 和 $\mathbb{O}$，即八元数代数。关于这些代数的精确定义，读者可参阅《对合之书》 [KMRT]。群 G_2 本身是分裂八元数代数 $\mathbb{O}_s$ 的自同构群。由伽罗瓦上同调的函子性，我们有一个自然映射

$$H^1(F, G_2) \times H^1(F, \mathrm{Aut}(J_s)) \to H^1(F, H).$$

因此，$\mathbb{O}_s$ 的一个形式与 J_s 的一个形式（一个 Freudenthal-Jordan 代数 J）共同导出H的一个形式。从伽罗瓦上同调的角度来看，这就是 Tits 构造。本文中我们将固定 $\mathbb{O}_s$，并改变 J。由此得到的 H的形式记为 H_J。它包含一个对偶约化对（其中 G_2 分裂）

$$G_2 \times \mathrm{Aut}(J) \subset H_J.$$

立方 étale ′代数自然地作为 J的子代数出现。事实上，J 中的每个元素都满足其特征多项式。对于 Freudenthal-Jordan 代数，特征多项式是三次的。因此，J 中的一般元素生成一个立方 étale ′子代数。设 $E \to J$ 是一个立方 étale ′代数 E 到 J的嵌入。令 Aut($E \to J$) 表示 Aut(J) 中由所有逐点固定 i（E）的 J 自同构组成的子群。Aut($E \to J$) 在 H_J 中的中心化子是 G_E，这是一个与 E对应的绝对型为 D_4 的准分裂群。令 Z_E 为 G_E的中心。那么

$$G_E \times_{Z_E} \mathrm{Aut}(E \to J) \subset H_J$$

在 H_J 中是一个对偶约化对，相对于 $G_2 \times$Aut(J) 处于跷跷板位置。

本文将只关注 H 的型为 E_6 的情形。因此，现在或许正是详细介绍相关群的好时机。在这种情形下，分裂代数 J_s 是 $M_3(F)$，即系数取自 F 的 3×3 矩阵代数；而 Aut(J) $= \mathrm{PGL}_3 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，其中 PGL_3 通过共轭作用，而因子 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 通过转置映射作用。令 $E_s = F^3$ 为分裂三次 étale 代数，并令 $i : E_s \to J_s$ 为由对角矩阵给出的嵌入。显然，Aut($E_s \to J_s$) 是 $T \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，其中 T 是 PGL_3，中的极大环面，且 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中非平凡元素对 T 的共轭作用是 T 的逆 involution。第二个对偶对不是 H_J 中的极大子群。事实上，PGL_3 中 T 的正规化子包含 S_3，即三字母置换群；该群通过外自同构同时作用于 $T \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 及其中心化子——一个型为 D_4 的分裂单连通群。

伽罗瓦上同调映射

$$H^1(F, \mathrm{PGL}_3 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{\text{etalé quadratic } F\text{-algebras}\}.$$

将任意 F-形式 J of $M_3(F)$ 对应到一个二次 étale 代数 $K = K(J)$。若 $F = \mathbb{R}$，则群 Aut($E \to J$) 仅取决于 E 和 K [GS14]。因此我们采用以下记号：

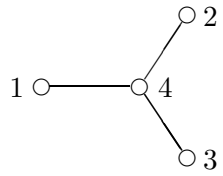
$$T_{E,K} := \mathrm{Aut}(E \to J).$$

本文旨在计算将极小表示 V 限制到实群的对偶对 $G_E \times T_{E,K}$ 后得到的表示对应，即当 $F = \mathbb{R}$ 时的情形。这些结果已在 [GS22] 中公布，其中讨论了 p-adic F 的情形。若 $F = \mathbb{R}$，则三次 étale 代数为 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$。约当代数为 $M_3(\mathbb{R})$ 和 $H_3(\mathbb{C})$，即关于 $M_3(\mathbb{C})$ 上第二类对合的 $M_3(\mathbb{C})$ 中的厄米对称矩阵代数。二次 étale 代数 $K = K(J)$ 分别为 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{C}$。因此，随着 E 和 K 的变化，基本上有四种情形需要考虑。在每种情形下，$T_{E,K}$ 都是二维环面 $T^\circ_{E,K}$ 与 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的半直积。因此，$T_{E,K}$ 的几乎所有不可约表示都是二维的，而限制到 $T^\circ_{E,K}$ 后是两个特征的直和 $\chi \oplus \chi^{-1}$。$T_{E,K}$ 的此类表示记作 $\rho(\chi)$。此外还有两个在 $T^\circ_{E,K}$ 上平凡的表示：平凡表示记作 $\rho(\mathbf{1})$，非平凡表示记作 ϵ。对于 $T_{E,K}$ 的每个酉表示 ρ，我们计算其到 G_E 的提升 $\Theta(\rho)$。该提升总是非零且不可约，并且我们计算其朗兰兹参数。除 ϵ 的提升（这是最困难的情形）之外，答案关于 χ 是统一的。

具体做法如下。首先，我们确定 $\Theta(\rho)$ 的无穷小特征。其次，作为分支规则的一个直接推论，$\Theta(\rho)$ 的 K-型包含在一个锥中。将其与具有相同无穷小特征的 G_E 的不可约表示的 K-型进行比较后，$\Theta(\rho)$ 可能具有的不可约子商便受到严格限制。进行这一比较时，我们只需知道有限多个 K-型的重数；对于涉及 $\rho = 1$ 和 ϵ 的情形，这些信息可借助 atlas 软件 [A], 得到。第三，作为关键的额外依据，我们证明某些 K-型在$\Theta(\rho)$ 中的重数为一，由此推出 $\Theta(\rho)$ 不可约。

2. 群

2.1. D_4 型的准分裂群。令 G 为特征零域 F 上李型为 D_4 的单连通群。该群之所以特殊，是因为其 Dynkin 图的自同构群同构于 S_3，即由三个非分支顶点的置换构成的对称群。



我们按照标准方式在 $\mathbb{R}^4$ 中实现根系，使得单根集合为 $\{\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_4 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, , \alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \alpha_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4\}$，其标记方式如图所示。最高根为 $\beta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 =$ (1, 1, 0, 0)。

三次 étale 代数 E 是分裂三次 étale 代数 $E_s = F^3$ 的一个 F-形式。 E_s 的 F-自同构群也为 S_3，因此 G 的准分裂形式的同构类对应于 F 上的三次 étale 代数 E 的同构类。令 G_E 为与 E 对应的 G 准分裂形式的 F-点群。群 G_E 有一个极大抛物子群 $P_E = M_E N_E$，对应于 Dynkin 图的分支顶点。利维因子 M_E 同构于

$$\mathrm{GL}_2(E)^{\det} = \{g \in \mathrm{GL}_2(E) | \det(g) \in F^\times\}.$$

幂零根基 N_E 是一个 9 维的二步幺幂群，其中心 $[N_E, N_E]$ 为一维群。群 M_E 通过行列式特征作用于 N_E 的中心。令 $V_E = N_E/[N_E, N_E]$，并令 V 为 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的标准二维表示。于是 $V_E(\bar{F}) \cong V \otimes V \otimes V$ 作为 $M_E(\bar{F}) \cong \mathrm{GL}_2(\bar{F}^3)^{\det}$-模，其中 $\mathrm{GL}_2(\bar{F}^3)^{\det}$ 在 $V \otimes V \otimes V$ 上的标准作用被 $\det^{-1}$ 扭曲。因此容易看出，ρ_{N_E} 的模特征为 M_E

$$\rho_{N_E} = |\det|^5.$$

令 π 为 M_E 的温和表示。利用归一化诱导，将 $\pi \otimes |\det|^s$ 从 P_E 诱导到 G_E。若 $s > 0$，则这是一个标准模。令 $L(\pi, s)$ 为相应的 Langlands 商。

2.2. 实群 $T_{E,\ K}$。假设 $F = \mathbb{R}$。每个维数为 9 的实 Freudenthal-Jordan 代数 J 都同构于 $M_3(\mathbb{R})$ 或 $H_3(\mathbb{C})$，即 $M_3(\mathbb{C})$ 上第二类对合的不动点集。回忆一下，由伽罗瓦上同调映射导出的二次 étale 代数 $K = K(J)$

$$H^1(F, \mathrm{PGL}_3 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{\text{etalé quadratic } F\text{-algebras}\}.$$

在 $\mathbb{R}$ 上，有两个二次 étal´e 代数：$\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{C}$。如果 $J = M_3(\mathbb{R})$，那么 $K = \mathbb{R}^2$。如果 $J = H_3(\mathbb{C})$，那么 $K = \mathbb{C}$。群 H_J 仅取决于 K。当 $K = \mathbb{R}^2$ 时它是分裂的；当 $K = \mathbb{C}$ [LS15] 时它是准分裂的。

接下来我们要描述可能的嵌入。在实数情形中，有 2 个三次 étal´e 代数： $E = \mathbb{R}^3$ 和 $E = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$。如果 J同构于 $M_3(\mathbb{R})$，那么 E都嵌入到$M_3(\mathbb{R})$中，且这些嵌入在共轭意义下唯一。因此，假设 J 同构于 $H_3(\mathbb{C})$，即 $M_3(\mathbb{C})$ 上一个第二类对合的不动点集。 $M_3(\mathbb{C})$上的第二类对合源自$\mathbb{C}^3$上的一个非退化厄米对称型 h 。令 $h = \epsilon_1 z_1 \bar{z}_1 + \epsilon_2 z_2 \bar{z}_2 + \epsilon_3 z_3 \bar{z}_3$，其中 $\epsilon_i = \pm 1$。符号有 8 种选择，但我们得到 4 个不同的对合，因为 h 和 $-h$ 给出相同的对合。由此我们得到 4 个约当代数 J，并且有一个将 $\mathbb{R}^3$ 嵌入 J 作为对角矩阵的嵌入。其中一个约当代数是定的，即 h 是定的；另外三个是不定的，且彼此同构。然而，这三个嵌入并不同构，因此总共得到 4 个嵌入类。它们代表了 $E = \mathbb{R}^3$ 嵌入此类约当代数的所有同构类。最后， $E = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ 不能嵌入定约当代数，而将这个 E 嵌入不定约当代数的方式唯一。对于每个嵌入，都容易计算出 T_E、$_K$。它总是一个半直积 T°_E，$_K \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 使得 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中非平凡元素对 T°_E、$_K$ 的共轭作用是逆 involution。二维环面 T°_E、$_K$ 的可能情形列于下表，其中 $\mathbb{T}$ 是模为一的复数构成的群。

	$E = \mathbb{R}^3$	$E = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$
$K = \mathbb{R}^2$	$(\mathbb{R}^\times)^3/\Delta(\mathbb{R}^\times)$	$(\mathbb{R}^\times \times \mathbb{C}^\times)/\Delta(\mathbb{R}^\times)$
$K = \mathbb{C}$	$(\mathbb{T})^3/\Delta(\mathbb{T})$	$(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^\times)/\Delta(\mathbb{T})$

我们为这些环面上的特征引入一种精细记号。$(\mathbb{R}^\times)^3/\Delta(\mathbb{R}^\times)$ 的特征 χ 是 $\mathbb{R}^\times$ 的三个特征 (χ_1, χ_2, χ_3)，满足 $\chi_1 \cdot \chi_2 \cdot \chi_3 = 1$。 $\mathbb{T}$ 的特征用一个整数表示。因此，$(\mathbb{T})^3/\Delta(\mathbb{T})$ 的特征 χ 用三个整数 (n_1, n_2, n_3) 表示，满足 $n_1 + n_2 + n_3 = 0$。在其余两种情形中，环面的特征分别对应于一对特征 $(\chi_\mathbb{R}, \chi_\mathbb{C})$，满足 $\chi_\mathbb{R} \cdot \chi_\mathbb{C} = 1$ 在 $\Delta(\mathbb{R}^\times)$ 上；以及一对 $(m, \chi_\mathbb{C})$，其中 $m \in \mathbb{Z}$，并且 $\chi_\mathbb{C}$ 在 $\mathbb{T}$ 上的限制由 $z \mapsto z^{-m}$ 给出。

3. Main statement

3.1. T_E 的表示，$_K$。设 χ 是 T°_E，$_K$ 的一个特征。若 $\chi \neq \chi^{-1}$，则 $\rho(\chi) \cong \rho(\chi^{-1})$ 是 T_E，$_K$ 的唯一不可约表示，其在 T°_E，$_K$ 上的限制为 $\chi \oplus \chi^{-1}$。若 $\chi = \chi^{-1}$，则 χ 可以扩张为 T_E，$_K$ 的特征，有两种扩张，记作 $\rho(\chi)^\pm$。除非 $\chi = 1$，这两个表示无法区分。此时，一个扩张是平凡表示，记作 $\rho(1)$，另一个是符号表示 ϵ。注意，非平凡二次特征 χ 仅出现在分裂情形中。

3.2. M_E的一些温和表示。对于每个酉特征 χ （T_E，$_K$），我们将赋予一个簇 $P(E, K, \chi) = P(E, K, \chi^{-1})$，其中包含 $\mathrm{GL}_2(E)^{\det}$的温和表示；这些表示是通过限制 $\mathrm{GL}_2(E)$的一个不可约表示得到的。我们需要引入一些额外的记号。设 F为一个局部域，(μ_1, μ_2)为 $F^\times$的一个特征对。设 $\mu_1 \times \mu_2$ 为 $\mathrm{GL}_2(F)$的主系列表示的唯一无限维子商，该主系列表示由这对特征经归一化抛物诱导得到。令 $\omega : \mathbb{R}^\times \to \{\pm 1\}$ 为符号特征。它是 $\mathbb{R}^\times$唯一的非平凡二次特征。令 $\nu : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}^\times$ 为

$\nu(x) = x$，对所有 $x \in \mathbb{R}^\times$均成立。令 $n \in \mathbb{Z}$。注意，将 $\nu^n \times \omega$限制到 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$时，它是两个（极限）离散级数表示之和，其最低 SO_2-型为 $\pm(|n|+1)$。

情形 $E = \mathbb{R}^3$ 和 $K = \mathbb{R}^2$。令 $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ 为 $(\mathbb{R}^\times)^3/\Delta(\mathbb{R}^\times)$ 的一个酉特征。簇 $P(E, K, \chi)$ 由限制到 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}^3)^{\det}$时出现的表示构成：

$$(\chi_1 \times 1) \otimes (\chi_2 \times 1) \otimes (\chi_3 \times 1).$$

除非至少有一个 i 满足 $\chi_i = \omega$，否则该表示限制到 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}^3)$ 后仍不可约。群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}^3)^{\det}$ 足够大，因此当且仅当一个 χ_i 为 ω 时，限制仍不可约。鉴于关系 $\chi_1 \cdot \chi_2 \cdot \chi_3 = 1$，至多两个 χ_i 可以是 ω；而这恰好发生在 χ 是非平凡二次特征时。且仅在这种情况下，该簇由两个元素组成。标准交织算子给出了 $P(E, K, \chi)$ 与 $P(E, K, \chi^{-1})$ 的一个对应。

情形 $E = \mathbb{R}^3$ 和 $K = \mathbb{C}$。设 $\chi = (n_1, n_2, n_3)$ 是 $(\mathbb{T})^3/\Delta(\mathbb{T})$ 的一个特征。簇$P(E, K, \chi)$ 由限制到 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}^3)^{\det}$ 后出现的表示构成

$$(\nu^{n_1} \times \omega) \otimes (\nu^{n_2} \times \omega) \otimes (\nu^{n_3} \times \omega).$$

限制到 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}^3)$ 后由 8 个直和项构成，因此簇 $P(E, K, \chi)$ 由 4 个表示构成。

情形 $E = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$和 $K = \mathbb{R}^2$。从 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R} \times \mathbb{C})$ 到 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R} \times \mathbb{C})^{\det}$ 的限制总是不可约的，因此这些簇都是单元素集。设 $\chi = (\chi_{\mathbb{R}}, \chi_{\mathbb{C}})$ 是 $(\mathbb{R}^\times \times \mathbb{C}^\times)/\Delta(\mathbb{R}^\times)$ 的一个酉特征。簇 $P(E, K, \chi)$由限制到 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R} \times \mathbb{C})^{\det}$ 后得到

$$(\chi_{\mathbb{R}} \times 1) \otimes (\chi_{\mathbb{C}} \times 1).$$

情形 $E = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$和 $K = \mathbb{C}$。我们再次考虑从 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R} \times \mathbb{C})$ 到 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R} \times \mathbb{C})^{\det}$ 的限制，因此这些簇都是单元素集。设 $\chi = (m, \chi_{\mathbb{C}})$ 是 $(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^\times)/\Delta(\mathbb{T})$ 的一个酉特征。簇 $P(E, K, \chi)$由限制到 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R} \times \mathbb{C})^{\det}$ 后得到

$$(\nu^m \times \omega) \otimes (\chi_{\mathbb{C}} \times 1).$$

总而言之，我们有 4 个温和表示包族 $P(E, K, \chi) = P(E, K, \chi^{-1})$，它们属于 $\mathrm{GL}_2(E)^{\det}$，由 $T_{E,K}$ 的酉特征 χ 参数化。若 $E = \mathbb{R}^3$ 和 $K = \mathbb{C}$，则 $|P(E, K, \chi)| = 4$。作为主要结果的一部分，该表示包的 4 个成员由 4 个嵌入 $\mathbb{R}^3 \to H_3(\mathbb{C})$ 自然参数化。若 χ 是非平凡二次特征（这仅在 $E = \mathbb{R}^3$ 和 $K = \mathbb{R}^2$ 时发生），则 $|P(E, K, \chi)| = 2$。令 $\pi^+(\chi)$ $\pi^-(\chi)$ 为其构成成分。否则，$|P(E, K, \chi)| = 1$，其唯一元素记作 $\pi(\chi)$。

3.3. 主要结果。令 V 为 H_J 的极小表示的 Harish–钱德拉模。考虑对应于嵌入 $E \to J$ 的对偶对 $G_E \times T_{E,K}$。令 G_E 的一个极大紧子群为 K_E。令 $T_{E,K}$ 的一个不可约表示为 ρ。那么存在一个 $(\mathfrak{g}_E, K_E)$-模 $\Theta(\rho)$，使得

$$\Theta(\rho) \otimes \rho \cong V/\cap_{\varphi \in \mathrm{Hom}(V,\rho)} \ker(\varphi)$$

其中 φ 是 Harish–钱德拉模意义下的同态。注意，先验而言$\Theta(\rho)$ 可能是平凡的，或具有无限长度。以下是本文的主要结果，将在接下来的两个章节中证明。

定理 3.1. 设 $G_E \times T_{E,K}$ 是由嵌入 $E \to J$ 产生的对偶对。设 χ 是 $T^\circ_{E,K}$ 的酉特征。

- 若 $E \to J$ 不是 4 个嵌入 $\mathbb{R}^3 \to H_3(\mathbb{C})$ 之一，则 $\Theta(\rho(\chi)) \cong L(\pi(\chi), 1)$，除非 χ 是非平凡二次特征，此时 $\Theta(\rho^{\pm}(\chi)) \cong L(\pi^{\pm}(\chi), 1)$。
- 若 $E \to J$ 是 4 个嵌入 $\mathbb{R}^3 \to H_3(\mathbb{C})$ 之一，则 $\Theta(\rho(\chi)) \cong L(\pi, 1)$，其中 $\pi \in P(E, K, \chi)$。遍历全部 4 个嵌入 $\mathbb{R}^3 \to H_3(\mathbb{C})$ 时，π 遍历 $P(E, K, \chi)$ 中的 4 个表示。

表示 $\Theta(\epsilon)$ 总是不可约的，可以通过它所在的某些退化主系列表示以及 $\Theta(\rho(1))$ 来描述。令 $I_E(s)$ 表示 G_E 上的（归一化）退化主系列，其中我们将 $|\det|^s$ 从 P_E 诱导而来。令 $I_E^\omega(s)$ 为该级数的二次扭积，即我们诱导 $\omega(\det) \cdot |\det|^s$。（请回忆，$\omega$ 是 $\mathbb{R}^\times$ 的符号特征。）以下结果归功于 Avner Segal [Se, Appendix A]，但其表述采用了我们关于 θ 提升的解释。

定理 3.2. 令 $\Theta_{E\to J}(\rho)$ 表示由嵌入 $E \to J$ 所产生的对应中 ρ 的 theta 提升。

- 对每个 E，我们都有一个正合列
$$0 \to \oplus \Theta_{E\to H_3(\mathbb{C})}(\epsilon) \to I_E(1/2) \to \Theta_{E\to M_3(\mathbb{R})}(\rho(1)) \to 0.$$
- 对每个 E，我们都有一个正合列
$$0 \to \Theta_{E\to M_3(\mathbb{R})}(\epsilon) \to I_E^\omega(1/2) \to \oplus \Theta_{E\to H_3(\mathbb{C})}(\rho(1)) \to 0.$$

这里，$H_3(\mathbb{C})$ 是任意一个由 $M_3(\mathbb{C})$ 上的第二类对合所产生的约当代数。在这两个正合列中，求和均遍历将 E 嵌入此类代数所得的同构类。若 $E = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$，则只有一个同构类；若 $E = \mathbb{R}^3$，则有四个。

备注：$M_E \times T_{E,\ K}$ 是 H_J 中绝对型为 A_5 的 Levi 子群 M_J 里的一个对偶对。将 M_J 的极小表示限制到这个对偶对所得到的对应，实质上是对偶对 $\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{O}_2$，的经典θ对应的三重张量积，结果为 $\pi(\chi) \leftrightarrow \rho(\chi)$ [GS22，第 10] 节。由于 M_J 的极小表示是 H_J 的极小表示的一个商，因此立刻可知，$\Theta(\rho(\chi))$ 包含 $L(\pi(\chi), 1)$ 作为一个子商。这给出了 $\Theta(\rho(\chi))$ 的一个下界。通过确定 $\Theta(\rho(\chi))$ 的型可以达到这个上界。然而，对于 $\rho = \epsilon$，这一策略行不通，因为它确实提升为 M_E 的一个表示。

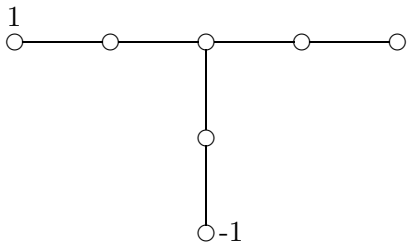
4. Correspondence of infinitesimal characters

我们将描述实群 $E_{6,\ 2}$ 中 D_4 对偶对的一个紧形式，该形式将用于确定无穷小特征的对应。本节中约当代数不发挥作用，记号也会有所不同。

设 $\mathfrak{h}$ 为型 E_6 的分裂李代数，并在一般域 F 上固定 $\mathfrak{h}$ 的一个切瓦利基。我们以标准方式实现位于 $\mathbb{R}^8$ 中的根系 E_6，其中单根为

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_8) - \frac{1}{2}(e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7)$$
$$\alpha_2 = e_1 + e_2,\ \alpha_3 = e_2 - e_1,\ \alpha_4 = e_3 - e_2,\ \alpha_5 = e_4 - e_3,\ \alpha_6 = e_5 - e_4.$$

我们将在同一空间中实现余特征格，使余特征与根之间的自然配对由 $\mathbb{R}^8$ 上的标准点积给出，记作 $\langle \cdot, \cdot \rangle$。令 α_0 为最低根。最低根与单根构成的扩展 Dynkin 图具有 3 阶对称性。令 λ_1 为一个极小基本余特征，使得对于其他单根，$\langle \lambda_1, \alpha_1 \rangle = 1, \langle \lambda_1, \alpha_i \rangle = 0$，且 $\langle \lambda_1, \alpha_0 \rangle = -1$，如图所示。



扩展图的自同构群 S_3 提升为根系的自同构群以及 H，即 E_6 型的伴随群。令 σ 为一个 3 阶自同构，它对应于图按逆时针方向旋转 120 度。令 $\lambda_2 = \sigma(\lambda_1)$ 和 $\lambda_3 = \sigma(\lambda_2)$。那么 $-\lambda_2$ 是另一个极小基本权，且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$，采用加法记号。在乘法记号下，$\lambda_i$ 是从 $\mathbb{G}_m$ 到伴随 Chevalley 群的同态，并且对所有 $t \in F^\times$，$\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t) = 1$。因此，$\lambda_i(t)$生成一个环面 T，它同构于 $(F^3)^\times / F^\times$。在 T的中心化子中，存在一个 D_4 型的分裂单连通群 G，它对应于垂直于这三个 λ_i的根。群 S_3 同时作用于 T 和 G。

现在假设 $F = \mathbb{R}$。现在，$\tau = \lambda_1(-1)$定义了 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当对合，相应的 H 的实形式 H' 记为$E_{6,\ 2}$，它在实群的分类中。由于τ 与 $T \times G$ 对易，我们在 H'中得到该对偶对的一个紧形式 $T' \times G'$。每个λ_i 都定义了一个从 U(1) 到 H' 的同态，这些同态合起来给出一个同构$T' \cong \mathrm{U}(1)^3/\mathrm{U}(1)$。对每个整数 n，令 $\chi_n(z) = z^n$ 为 U(1) 的特征。T' 的任意特征都是

$$\chi(a, b, c) = \chi_a \boxtimes \chi_b \boxtimes \chi_c$$

对于满足 $a + b + c = 0$的三个整数。令 K' 为由 τ选取的H' 的极大紧子群。它同构于 $\mathrm{U}(1) \times \mu_4 \mathrm{Spin}_{10}$，其中从 U(1) 到 K' 的映射由 λ_1给出，而 Spin_{10} 对应于所有 $i \neq 1$的单根 α_i。这些根是 e_1、……、e_5的线性组合，并且属于 D_5 根系的标准实现的一部分。于是

$$\omega = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5)$$

是 Spin_{10} 的半旋量表示 V_ω 的最高权。H' 的极小表示 V 的 K' 型为 [BZ]

$$V = \oplus_{n=0}^{\infty}\ \chi_{n+4} \boxtimes V_{n\omega}.$$

群 $G' \cong \mathrm{Spin}_8$ 对应于 $i \neq 1$ 的根 α_i,6。这些根是 $e_1, \ldots, e_4$ 的线性组合。因此，在 Spin_{10} 中 Spin_8 的中心化子是 U(1)，即余特征 $2e_5$ 的像。

我们有一个从 Spin_{10} 到 $\mathrm{Spin}_8 \times \mathrm{U}(1)$ 的限制公式 [Li],

$$V_{n\omega} = \bigoplus V_{(\frac{n}{2},\frac{n}{2},\frac{n}{2},\frac{b}{2})} \boxtimes \chi_b$$

其中求和遍及所有满足 $|b| \leq n$ 且 $n \equiv b$（模 2）的整数 b，并且 $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{b}{2})$ 是 Spin_8 在 D_4 根系的标准实现中的最高权。将其代入 V 的公式，并利用 $-2e_5 = \lambda_1 + 2\lambda_2$，$V$ 在 $T' \times G'$ 上的限制是以下各项的无重数直和

$$\chi(n+4, -\frac{b+n}{2} - 2, \frac{b-n}{2} - 2) \boxtimes V_{(\frac{n}{2},\frac{n}{2},\frac{n}{2},\frac{b}{2})}.$$

令 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$ 等等。V 在包络代数 $U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ 中的湮灭子是 Joseph理想 I。令 $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 为包络代数 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 的中心。V 在限制到 $T' \times G'$ 后的分解表明，存在映射 $\varphi\colon Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \to U(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$，使得$z \equiv \varphi(z)$（模 I）。更准确地说，我们有以下引理:

引理 4.1。设 (a,b,c) 是 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 的一个无穷小特征，即满足 $a+b+c = 0$ 的复数三元组。那么，(a,b,c) 在 φ 下的拉回是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的一个无穷小特征，其表示为

$$\frac{1}{2}(a+2, -a+2, b+c, b-c).$$

D_4 根系的标准实现中。

证明。利用 V的分解，以及 $V_{(\frac{n}{2},\frac{n}{2},\frac{n}{2},\frac{b}{2})}$的无穷小特征为 $(\frac{n}{2}+3, \frac{n}{2}+2, \frac{n}{2}+1, \frac{b}{2})$ □，即可轻易验证。

当然，引理 4.1 给出了对偶对任意实形式的无穷小特征对应，因为极小表示的湮灭子总是 Joseph理想 [GS04], ，并且该对偶对在复数域上共轭意义下唯一。将上述引理中的对应写成如下形式会更加对称:

$$\beta + \frac{a}{2}\alpha_1 + \frac{b}{2}\alpha_2 + \frac{c}{2}\alpha_3 \longleftrightarrow (a,b,c)$$

其中 $a+b+c=0$, β 最高根，而 α_i 是由 S_3置换的三个单根 .

5. The correspondences in the case $J = M_3(\mathbb{R})$

5.1. 极小表示。令 K_J 为 H_J的极大紧子群。回想一下，在情形 $J = M_3(\mathbb{R})$ 中，群 H_J 是分裂的。因此， K_J 与 $\mathrm{Sp}(4)/\mu_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 同构。$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的非平凡元素是嘉当对合，从而给出一个分解

$$\mathfrak{h}_J = \mathfrak{k}_J \oplus \mathfrak{p}_J$$

其中 $\mathfrak{p}_J \otimes \mathbb{C} \cong V_{\omega_4}$是 $\mathrm{Sp}(4)$ 的第四基本表示。令 V为与 H_J [BK] 的极小表示相对应的 $(\mathfrak{h}_J, K_J)$-模。我们有一个 $\mathrm{Sp}(4)$-模的同构,

$$V = \oplus_{n=0}^{\infty} V_{n\omega_4},$$

其中 $V_{n\omega_4}$ 是最高权为 $n\omega_4$的 $\mathrm{Sp}(4)$ 不可约表示。$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset K_J$中的非平凡元素，即嘉当对合，在 $V_{n\omega_4}$ 上的作用为 $(-1)^n$。

5.2. 一些分支规则。本文中，Sp(2) 有限维表示的最高权 μ 由一对整数 $\mu = (x, y)$ 给出，满足 $x \geq y \geq 0$。在此设定下，（1,0）和（1,1）分别是对应于 4 维和 5 维表示的基本最高权。设 V_μ 是最高权为 μ的 Sp(2) 不可约表示。我们需要一些低秩群的分支规则。它们要么是文献中分支规则的特例，参见 [HTW] 和 [GoW], ；要么可以直接由 Weyl 特征标公式推导得出。

引理 5.1. 对于 Sp(2) $\times$Sp(2) 到 Sp(4) 的自然嵌入， $V_{n\omega_4}$限制到 Sp(2) $\times$ Sp(2) 后，同构于对满足条件 $n \geq x$ 的所有最高权$\mu = (x, y)$对应的 $V_\mu \boxtimes V_\mu$ 的无重数直和。

设 V_n 是 $SU_2 \cong$ Sp(1) 的 $n+1$ 维不可约表示。

引理 5.2. 设 $\mu = (x, y)$ 是 Sp(2) 的一个最高权。 V_μ 限制到 $SU_2 \times SU_2$ 后，是对所有满足 $a + b \equiv x + y$ （模 2）的 (a, b) 对应的 $V_a \boxtimes V_b$ 的无重数直和

$$|a - b| \leq x - y \ and \ x - y \leq a + b \leq x + y.$$

最后，我们需要一个从 Sp(2) 到 Sp(1) $\times SO_2$, 的分支法则，其中 Sp(1) $\times$ $O_2 \subset$ Sp(2) 是一个经典对偶对。我们在等价的情形下研究从 SO(5) 到 SO(3) $\times$SO(2) 的限制。在此设定中，SO(5) 的不可约表示的最高权是半整数对 $a \geq b \geq 0$ ，满足 $a \equiv b$ (模 $\mathbb{Z}$)。相应的 Sp(2) 最高权为 $(x, y) = (a+b, a-b)$。SO(3) 的不可约表示的最高权是非负半整数 c ，而 SO(2) 的表示是特征 χ_n ，其中 n为半整数。对于每个非负半整数 n ，令

$$A(n) = \chi_n + \chi_{n-1} + \cdots + \chi_{-n}.$$

对于每个非负整数 n，令

$$B(n) = \chi_n + \chi_{n-2} + \cdots + \chi_{-n}.$$

它们分别是 SO(2) 的 $2n+1$ 维和 $n+1$ 维表示。我们有如下分支结果:

引理 5.3. 设 $\mu = (a, b)$ 是 SO(5) 的一个最高权。 V_μ 限制到 SO(3) $\times$SO(2) 上为

$$V_\mu = \oplus_c V_c \boxtimes \chi[c]$$

其中求和遍及 SO(3) 的所有不可约表示 V_c 。除非 $a \geq c$ 和 $a \equiv c$ （模 $\mathbb{Z}$），否则 $\chi[c]$ 为零；此时

若 $a \geq c \geq b$，则为 • $\chi[c] = A(b)B(a - c)$，且

若 $a \geq b \geq c$，则为 • $\chi[c] = A(c)B(a - b)$。

5.3. 分裂情形。假设 $E = \mathbb{R}^3$。在此情形下，$T^\circ_{E,K} \cong (\mathbb{R}^3)^\times/\mathbb{R}^\times$ ，且特征 χ 是 $\mathbb{R}^\times$ 的特征组成的三元组 (χ_1, χ_2, χ_3)，满足 $\chi_1 \cdot \chi_2 \cdot \chi_3 = 1$。设 $\nu_i \in \mathbb{C}$ 为 χ_i 的微分。那么 (ν_1, ν_2, ν_3)，$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 0$，是 χ 的无穷小特征，而提升 $\Theta(\chi)$ 的无穷小特征为

$$\beta + \frac{\nu_1}{2}\alpha_1 + \frac{\nu_2}{2}\alpha_2 + \frac{\nu_3}{2}\alpha_3.$$

特征 χ 是酉的，当且仅当全部三个 ν_i 都是纯虚数,

群 $G = G_E$ 是分裂的。固定 G的一个极大紧子群 K 。它同构于 SU_2^4/μ_2。固定这样一个同构。那么 K 的任意不可约表示都同构于 $V(a,b,c,d) = V_a \boxtimes V_b \boxtimes V_c \boxtimes V_d$，其中 $a+b+c+d$为偶数， V_n表示 SU_2的维数为 $n+1$的不可约表示。 K的中心 Z_K为 μ_2^4/μ_2。 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 在 K 的作用下分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

其中 $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C} \cong V(1,1,1,1)$。中心 Z_K通过一个特征 χ_K作用于 $\mathfrak{p}$。显然， G 的中心 Z_G 是 χ_K的核。

令 $K_J \supseteq K$ 为 H_J的极大紧子群，并固定一个同构 $K_J \cong \mathrm{Sp}(4)/\mu_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。在 $\mathrm{Sp}(4)$共轭意义下，将 SU_2^4 嵌入 $\mathrm{Sp}(4)$只有一种方式。在 $K \cong \mathrm{SU}_2^4/\mu_2$的作用下

$$\mathfrak{p}_J \otimes \mathbb{C} \cong V_{\omega_4} = V(1,1,1,1) \oplus 2V(0,0,0,0) \oplus_{(a,b,c,d)\in S} V(a,b,c,d)$$

其中 S 包含 6 个元素，即 $(1,1,0,0)$ 的所有排列。中心 Z_G 仅在前两个直和项上平凡作用。现在很容易得到， $\mathfrak{h}_J$ 中的 Z_G 的中心化子是 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$，其中 $\mathfrak{a} \otimes \mathbb{C} \cong 2V(0,0,0,0)$。由于 $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{k}_J$，且与 K交换，因此可得 $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}] = 0$。令 $A = \exp(\mathfrak{a}) \subseteq H_J$，其中指数映射是在李群的意义下取的。令 K' 为 K_J的一个子群，通过同构 $x \mapsto (x, \chi_K(x)) \in \mathrm{Sp}(4)/\mu_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，它与 Z_K同构。注意到 $Z_K \cap K' = Z_G$ ，并且按设计， K' 中心化 $\mathfrak{g}$。 K' 在 A 上的共轭作用下降为 K'/Z_G 的作用，其中非平凡元素通过对 A取逆而作用。群 $K'A$ 就是我们的 $T_{E,K}$，而 $Z_G A$ 是 $T^\circ_{E,K} \cong (\mathbb{R}^3)^\times/\mathbb{R}^\times$。这完成了对对偶对 $G \times T_{E,K}$ 的描述，适用于研究实群的限制问题。

5.4. 分裂 G的表示。根据引理 4.1，作为θ提升出现的 G 表示具有无穷小特征 $\lambda = (s+1, s, s-1, u)$，其中采用的是 D_4型根系的通常 Bourbaki记号。注意，当对分裂T_{E}的K进行酉表示的θ提升时， s 和 u 是纯虚的。

我们需要以下一般结果，其中 G是对应于根系 Φ的任意分裂群。设 $P_0 = M_0 A_0 N_0$ 为一个极小抛物子群。设 Φ 为 G的根系。固定 λ ，即 A_0的李代数 $\mathfrak{a}_0$上的一个复值线性泛函。令 Φ_λ 为满足 $(\lambda, \alpha^\vee) \in \mathbb{R}$的根$\alpha$ 的集合。将 $\lambda = \Re(\lambda) + i\Im(\lambda)$，即实部和虚部之和。注意， Φ_λ 恰好是满足 $\alpha^\vee$ 垂直于 $\Im(\lambda)$的根的集合。因此，Φ_λ 是某个 Levi 子群中的根的集合。不失一般性，我们假设$\Im(\lambda)$包含于由 P_0确定的正室的闭包中。于是， Φ_λ 是包含 P_0的抛物 $P = MAN$ 的某个 Levi 的根系。在此情形下，我们有以下结果，即 [Vo02]中的引理 4:

引理 5.4. 固定 M_0 的一个特征 δ 。$\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\delta, e^\lambda)$ 的不可约子商由 $\mathrm{Ind}_{P_0}^P(\delta, e^\lambda)$ 的不可约子商诱导而来。

此时，说明在这种情形下计算 theta 对应的策略或许会有所帮助。类比 p-adic 情形，对应中出现的 G 的表示应当是退化主系列的构成成分；该退化主系列由 G 的抛物子群 $P = MA_P N$ 的一维表示诱导而来，其中

M 的连通分支是一个对应于 A_2 根子系的单连通群。特别地，我们可以将该群与 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ 等同。不难验证，$M = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R}) \cdot Z_G$，其中 Z_G 是 G 的中心。群 A_P 是 2 维的。存在一个同构 $i\colon Z_G A_P \to Z_G A$，使得下述结论成立。

命题 5.5. 设 χ 是 $Z_G A$ 的一个酉特征，且 χ_P 是通过将 χ 沿 i 拉回而得到的 $Z_G A_P$ 的特征。将 χ_P 延拓为 MA_P 的一个特征，使其在 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ 上平凡。令 $\mathrm{Ind}_P^G(\chi_P)$ 为通过诱导 χ_P 得到的可酉化退化主系列表示。

- 若 χ 不是二次的，则 $\mathrm{Ind}_P^G(\chi_P) \cong L(\pi(\chi), 1)$。
- 若 χ 是二次但非平凡的，则 $\mathrm{Ind}_P^G(\chi_P) \cong L(\pi(\chi)^+, 1) \oplus L(\pi(\chi)^-, 1)$。
- 若 $\chi = 1$，则 $\mathrm{Ind}_P^G(1) \cong L(\rho(1), 1) \oplus \Sigma$，其中 Σ 是不可约的，具有最小K-型 $V(1,1,1,1)$。

证明。根据 Bruhat 的经典结果，[B], $\mathrm{Ind}_P^G(\chi_P)$ 是不可约的，除非 χ_P 是二次的；在这种情况下，它至多有两个直和项。容易验证，由极小型生成的 $\mathrm{Ind}_P^G(\chi_P)$ 的子模正是所述的 Langlands 商。这就证明了前两点。对于最后一点，使用 atlas 软件可以验证，$\mathrm{Ind}_P^G(1)$ 中 $L(\rho(1), 1)$ 的补具有极小型 $V(1, 1, 1, 1)$。然而，在给定的无穷小特征下，具有这种极小型的表示只有一个，见第 7.1 节。□

命题 5.5 的价值在于，它使我们能够控制 $K(\ L(\pi(\chi), 1)$ 的型。因此，要证明 $\Theta(\rho(\chi)) = L(\pi(\chi), 1)$，只需控制 $K(\ \Theta(\rho(\chi))$ 的型。更准确地说，设 $K_M \cong \mathrm{SO}_3 \cdot Z_G$ 为 M 的一个极大紧子群。若我们选取 $K \supset K_M$，则因子 $\mathrm{SO}_3 \cong \mathrm{SU}_2/\mu_2$ 对角嵌入到 $K \cong \mathrm{SU}_2^4/\mu_2$ 中。因此，所有表示 $\mathrm{Ind}_P^G(\chi_P)$ 的 K-型都具有非零的 SO_3-不变向量。此外，若该型出现，其重数等于 SO_3-不变向量空间的维数。（该型是否出现由中心特征决定。）因此，应当预期出现在 V 的限制中的 K-型具有非零的 SO_3-固定向量。事实上，这由引理 5.1 和引理 5.2 得出。一个型 $V(a, b, c, d)$ 只有在如下条件下才可能具有非零的 SO_3-固定向量：

$$a + b + c \geq d$$

成立，此外还有通过循环置换 a、b、c 和 d 得到的另外三个不等式。我们记录以下更精确的信息，以供后续使用。

命题 5.6. 设 $V(a, b, c, 0)$ 是一种包含一条直线的 K 型；该直线在 SO_3 下不变，且必然唯一。那么 $V(a, b, c, 0)$ 在 $V_{n\omega_4}$ 中的重数为

$$n + 1 - \frac{a + b + c}{2}$$

当且仅当这个整数非负时取上述值，否则为 0。如果 $V(a, b, c, 0)$ 不包含 SO_3 下的不变直线，那么 $V(a, b, c, 0)$ 在 $V_{n\omega_4}$ 中的重数为 0。

注意到，当且仅当 a、b 和 c 是三角形的边时，才存在 SO_3-不变直线。因此，若满足这一条件，$V(a, b, c, 0)$ 首次出现在 $n = (a + b + c)/2$ 时，其重数为 1，此后重数依次为 2、3、4、……。当然，我们也可以不假设 $d = 0$，而是假设其他任意一个坐标为 0，并且相应结论仍然成立。

回忆一下， $V = \oplus_{n=0}^{\infty} V_{n\omega_4}$ 是与 H_J 的极小表示相对应的 $(\mathfrak{h}_J, K_J)$-模。令 $V_n = \oplus_{i \le n} V_{i\omega_4}$。令 $U_n(\mathfrak{h}_J)$ 表示泛包络代数 $U(\mathfrak{h}_J)$ 按次数定义的通常滤过。通过考察.....的权

$$\mathfrak{p}_J \otimes V_{i\omega_4} \cong V_{\omega_4} \otimes V_{i\omega_4},$$

显然，如果 $j > i+1$，它不可能包含 $V_{j\omega_4}$ 作为直和项。因此，

$$U_n(\mathfrak{h}_J) \cdot V_m \subseteq V_{n+m}$$

对所有 n 和 m 均成立。现在我们需要以下关键引理。

引理 5.7. V 是一个无挠的 $U(\mathfrak{a})$-模。

证明。令 $v \in V$，并考虑矩阵系数 $f_v(a) = (\pi(\exp\ a)v, v)$。由 Howe–Moore 定理，由于 V 是酉的， f_v 在 $\mathfrak{a}$上的所有方向上都衰减。根据矩阵系数 [CM], 的渐近展开，这种衰减是指数型的。因此，傅里叶变换 $\hat{}f_v$ 在 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$中 $i\mathfrak{a}^*$ 的一个管状邻域内是全纯函数。包络代数$U(\mathfrak{a})$自然地是 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$上的多项式代数。如果 $p \in U(\mathfrak{a})$ 消灭了 v，那么它也消灭了 f_v；于是 $\hat{}$ $p \cdot f_v = 0$ 在该管状邻域内。这意味着 $p = 0$。

□

命题 5.8。设 $V(a,b,c,0)$ 是一个包含 SO_3-不变直线的 K型。那么

$$\mathrm{Hom}_K(V(a,b,c,0), V)$$

是一个自由 $U(\mathfrak{a})$-模，由 $\mathrm{Hom}_K(V(a,b,c,0)\, V_{\frac{a+b+c}{2}\omega_4})$ 中的一个非零元素生成 .

证明。为简单起见，假设 K-型是平凡的。我们需要证明， V^K 是一个由 K_J-球向量 v_0生成的自由$U(\mathfrak{a})$-模。由于 $U(\mathfrak{a})$的作用是无挠的，映射 $x \mapsto x \cdot v_0$ 是从 $U_n(\mathfrak{a})$到 V_n^K的单射。根据命题 5.6，$U_n(\mathfrak{a})$的维数等于 V_n^K的维数。因此， $V^K = U(\mathfrak{a}) \cdot v_0 \cong U(\mathfrak{a})$。一般情形的证明类似。□

设 χ 是分裂环面 $Z_G A$的一个特征。若 $\chi^2 \neq 1$，则 χ 诱导出 $K'A$的一个不可约二维表示 $\rho(\chi)$，使得 $\rho(\chi) \cong \rho(\chi)^{-1}$。若 $\chi^2 = 1$，则 χ 可延拓为 $K'A$的两个特征 $\rho(\chi)^{\pm}$。除非 χ 是平凡的，否则这两个延拓无法区分；此时将它们记为 $\rho(1)$ 和 ϵ。特征 χ 由其在 Z_G 上的限制 χ_G 及其微分 $\nu = d\chi : \mathfrak{a} \to \mathbb{C}$确定。稍微滥用记号，我们用 ν 表示相应的 $U(\mathfrak{a})$同态，并用 $\mathbb{C}_\nu$ 表示 $U(\mathfrak{a})$上的一维表示，在该表示中， $U(\mathfrak{a})$的作用由 ν给出。令

$$\Theta(\nu) = V / \cap_{\varphi \in \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{a})}(V, \mathbb{C}_\nu)} ker(\varphi).$$

以下是命题 5.8 的直接推论

推论 5.9. 设 $V(a,b,c,0)$ 是一个包含 SO_3-不变直线的 K-模。对于每个ν， $\Theta(\nu)$ 以重数为一包含型 $V(a,b,c,0)$。此外，该型包含于 $V_{\frac{a+b+c}{2}\omega_4}$ 的投影中。

每个 $\Theta(\nu)$ 都可以在 Z_G 的作用下分解，

$$\Theta(\nu) = \oplus_{d\chi = \nu} \Theta(\chi).$$

由于 Z_G 明确给定为 Z_K 的一个子群，因此推论 5.9 可以很容易地细化为关于 $\Theta(\chi)$ 的陈述。例如，如果 χ 对 Z_G 的限制是平凡的，那么 $\Theta(\chi)$ 只包含满足 a、b、c 和 d 奇偶性相同的型 $V(a,b,c,d)$。如果 $\nu \neq 0$，那么 $\Theta(\chi) = \Theta(\rho(\chi))$。另一方面，所有满足 $d\chi = 0$ 的 χ 都是二次的，并且 $\Theta(\chi) = \Theta(\rho(\chi)^+) \oplus \Theta(\rho(\chi)^-)$。由于 K' 在 $V(a,b,c,0) \subseteq V_{\frac{a+b+c}{2}\omega_4}$ 上的作用已知，我们可以进一步将推论 5.9 细化为关于 $\Theta(\rho(\chi)^{\pm})$ 的陈述。例如，我们有以下结果：

推论 5.10。设 a、b、c 为三个偶整数，且是三角形的边。若 $(a+b+c)/2$ 为偶数，则 $V(a,b,c,0)$ 出现在 $\Theta(\rho(1))$ 中；若 $(a+b+c)/2$ 为奇数，则出现在 $\Theta(\epsilon)$ 中。

这里总结一下我们对 $\Theta(\chi)$ 的了解，第三条是引理 4.1 的推论：

- K 型仅包括含有 SO_3-不变直线的那些型。
- 当不变直线唯一时，可以完全确定该型的重数。
- 无穷小特征为（$s+1$，s，$s-1$，u），其中 s、$u \in \mathbb{C}$ 满足某些条件。

现在我们解释如何利用这些要点计算 $\Theta(\rho(\chi))$。根据定理 3.2 后的注记，$L(\pi(\chi),1)$ 是 $\Theta(\chi)$ 的一个子商。假设 χ 不是二次的。由于根据命题 5.5，$L(\pi(\chi),1)$ 同构于一个退化主系列，因此我们可以完全确定它的 K-型：其重数等于 SO_3 不变量的维数。因此，$L(\pi(\chi),1)$ 涵盖了 $\Theta(\rho(\chi))$ 中所有 SO_3 不变量空间为一维的型。于是，要完成证明，只需说明，在 $\Theta(\chi)$ 的无穷小特征处，G 的每个不可约表示 π 要么具有某个 SO_3 不变量空间为零维的型，因此 π 不可能是 $\Theta(\rho(\chi))$ 的子商；要么具有某个 SO_3 不变量空间为一维的型，但该型已被 $L(\pi(\chi),1)$ 占据。

我们需要以下一般结果，其中 G 可以是与根系 Φ对应的分裂群。设 $P_0 = M_0A_0N_0$ 为一个极小抛物子群。固定 M_0的特征 δ，以及 Lie(A)的特征 λ。令 $\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\delta,\lambda)$为相应的主系列。对于任意 G的容许表示 π，令 χ_π 表示其 K-型的形式和。

命题 5.11。设 $\Re(\lambda)$为 λ的实部。$\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\delta,\Re(\lambda))$的不可约子商可划分为若干类 S_π，这些类由 $\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\delta,\lambda)$的不可约子商 π 参数化，使得

$$\chi_\pi = \sum_{\pi' \in S_\pi} \chi_{\pi'}.$$

证明。令 $\Im(\lambda)$ 为 λ 的虚部。假设 $\Im(\lambda)$ 位于与 P_0 对应的正室的闭包中。因此，$\Im(\lambda)$ 定义了一个标准抛物子群 $P = MAN$，使得 M 的根恰好是与 $\Im(\lambda)$ 垂直的那些根。这些根也可以定义为满足 $\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle \in \mathbb{R}$ 的根 α。于是，根据引理 5.4，$\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\delta,\lambda)$ 的不可约子商是由 $\mathrm{Ind}_{P_0}^P(\delta,\lambda)$ 的不可约子商诱导而来。另一方面，注意到 $\mathrm{Ind}_{P_0}^P(\delta,\Re(\lambda))$ 是 $\mathrm{Ind}_{P_0}^P(\delta,\lambda)$ 的一个（正）特征扭曲。因此，这两个 P-模的不可约子商之间存在自然对应，并且保持型别。若 π 是由 σ 诱导而来，且 σ 是 $\mathrm{Ind}_{P_0}^P(\delta,\lambda)$ 的一个子商，那么我们将 S_π 定义为

$\mathrm{Ind}_P^G(\sigma')$ 的不可约子商的（多重）集合，其中 σ' 是 $\mathrm{Ind}_{P_0}^P(\delta, \Re(\lambda))$ 中与 σ 对应的不可约子商。

□

若 $\lambda = (s+1, s, s-1, u)$，且 s 和 u 为纯虚数，则 $\Re(\lambda) = (1, 0, -1, 0)$，因此这些 λ 的表示型由单个无穷小特征 $(1, 0, -1, 0)$ 处的型决定。下面将在主要结果的证明中用到这一点：

定理 5.12. 假设 $E = \mathbb{R}^3$ 和 $J = M_3(\mathbb{R})$，则 $T^\circ_{E,\ K} \cong (\mathbb{R}^\times)^3/\Delta(\mathbb{R}^\times)$。设 χ 是 $T^\circ_{E,\ K}$的一个酉特征。

(1) 若 $\chi^2 \neq 1$，则 $\Theta(\rho(\chi)) \cong L(\pi(\chi), 1)$。(2) 若 $\chi^2 = 1$ 但 $\chi \neq 1$，则 $\Theta(\rho(\chi)^\pm) \cong L(\pi(\chi)^\pm, 1)$。(3) $\Theta(\rho(1)) \cong L(\pi(1), 1)$，且 $\Theta(\epsilon) \cong \Sigma$ 不可约，具有最小的 K- 型 $V(1, 1, 1, 1)$。

证明。我们从 (3) 开始。利用 atlas，我们可以列出所有无穷小特征为 $(1, 1, 0, 0)$ 且具有平凡中心特征的不可约表示，并验证每个无穷小特征为 $(1, 1, 0, 0)$ 的不可约表示都有一个型 $V(a, b, c, d)$，满足 $abcd = 0$。根据推论 5.10，这些型在 $\Theta(\rho(1))$ 和 $\Theta(\epsilon)$ 中的重数为 0 或 1。此外，这些重数分别与 $L(\pi(1), 1)$ 和 Σ 中的重数相同。因此，由于没有其他可能，$\Theta(\rho(1)) \cong L(\pi(1), 1)$，且 $\Theta(\epsilon) \cong \Sigma$。(2) 可通过类似的显式检验得到。对于 (1)，我们知道 $\Theta(\rho(\chi)) \supseteq L(\pi(\chi), 1)$，并且 $L(\pi(\chi), 1)$ 包含了所有满足 $abcd = 0$ 的型 $V(a, b, c, d)$。但是，根据命题 5.11，任何具有相同无穷小特征的不可约表示都有一个型 $V(a, b, c, d)$，满足 $abcd = 0$（因为这对 $\Re(\lambda) = (1, 1, 0, 0)$ 成立），因此 $\Theta(\rho(\chi)) = L(\pi(\chi), 1)$。□

5.5. 非分裂情形。假设 $E = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$，在此情形下，$T^\circ_{E,\ K} \cong (\mathbb{R}^\times \times \mathbb{C}^\times)/\Delta(\mathbb{R}^\times)$，且特征 χ 是由 $\mathbb{R}^\times$ 和 $\mathbb{C}^\times$ 上的特征组成的一对 $(\chi_\mathbb{R}, \chi_\mathbb{C})$，满足 $\chi_\mathbb{R} \cdot \chi_\mathbb{C} = 1$ 在 $\Delta(\mathbb{R}^\times)$ 上。令 $\nu_1 \in \mathbb{C}$ 为 $\chi_\mathbb{R}$ 的微分。$\chi_\mathbb{C}$ 的微分是一对复数 (ν_2, ν_3)，满足 $\nu_2 - \nu_3 = m \in \mathbb{Z}$。那么 (ν_1, ν_2, ν_3)，$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 0$，是 χ 的无穷小特征，而提升 $\Theta(\chi)$ 的无穷小特征为

$$\beta + \frac{\nu_1}{2}\alpha_1 + \frac{\nu_2}{2}\alpha_2 + \frac{\nu_3}{2}\alpha_3.$$

特征 χ 是酉的，当且仅当 ν_1 是纯虚数，

群 $G = G_E$ 是准分裂的。固定 G的一个极大紧子群 K。它同构于 $(\mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{SU}_2)/\mu_2$。固定这样一个同构。于是，$K$ 的任意不可约表示都同构于 $V_{(x,y)} \otimes V_z$，其中 $x+y+z$ 为偶数。K 的中心 Z_K 是 μ_2^2/μ_2。令 H_J的一个极大紧子群为 $K_J \supseteq K$，并固定一个同构 $K_J \cong \mathrm{Sp}(4)/\mu_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。在 Sp(4)共轭意义下，$K$ 到 K_J 的嵌入由以下序列给出

$$\mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{SU}_2 \subseteq \mathrm{Sp}(2) \times (\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)) \subseteq \mathrm{Sp}(4)$$

其中 $\mathrm{SU}_2 \cong \mathrm{Sp}(1)$ 对角嵌入到 $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)$ 中。引理 5.1 的一个直接推论是，K 固定了 $\mathfrak{p}_J$中的一条直线 $\mathfrak{a}$。令 $A = \exp(\mathfrak{a})$。K 在 K_J 中的中心化子为（同构于）$\mathrm{O}_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。令 $K' \cong \mathrm{O}_2$ 为由满足 $\det(g) = \epsilon$ 的有序对 (g, ϵ) 组成的一个子群。则 $T_{E,\ K} = K'A$，而 $T^\circ_{E,\ K} = \mathrm{SO}_2 A$。

G 在对应中出现的表示是退化主系列的构成成分，它们由抛物子群的一维表示诱导而得

$P = MA_PN$ G的 M导出群是与 A_2 根子系统对应的单连通群。特别地，我们可以将此群识别为 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$。不难验证， $M \cong \mathrm{SL}_3(\mathbb{R}) \cdot \mathrm{SO}_2$。存在一个同构 $i : \mathrm{SO}_2 A_P \to \mathrm{SO}_2 A$，使其满足以下性质，如命题 5.5 所述：

命题 5.13. 设 χ是 $\mathrm{SO}_2 A$ 的一个酉特征，令 χ_P 为将 χ 沿 i拉回而得到的 $\mathrm{SO}_2 A_P$ 的特征。将 χ_P 扩张为 MA_P 的一个特征，使其在 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$上平凡。令 $\mathrm{Ind}_P^G(\chi_P)$为通过诱导 χ_P得到的可酉化退化主系列表示。

- 若 $\chi \neq 1$，则 $\mathrm{Ind}_P^G(\chi_P) \cong L(\pi(\chi), 1)$。
- 若 $\chi = 1$，则 $\mathrm{Ind}_P^G(1) \cong L(\rho(1), 1) \oplus \Sigma$，其中 Σ是不可约的，其最小K-型为 $V_{(2,\ 0)} \otimes V_0$。

令 $K_M \cong \mathrm{SO}_3 \cdot \mathrm{SO}_2$ 为 M的一个极大紧子群。取 $K \supset K_M$ 并固定一个同构 $K \cong (\mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{SU}_2)/\mu_2$。现在， K_M到 K 的嵌入描述如下。因子 $\mathrm{SO}_3 \cong \mathrm{SU}_2/\mu_2$通过嵌入的复合映入 $(\mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{SU}_2)/\mu_2$

$$\mathrm{SU}_2 \subseteq \mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 \subseteq \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{SU}_2,$$

其中第一个嵌入是对角嵌入。群 SO_2 包含在 $\mathrm{Sp}(1)$ 对角嵌入 $\mathrm{Sp}(2)$ 后的中心化子 $(=\mathrm{O}_2)$ 中。考虑退化主系列 $\mathrm{Ind}_P^G(\chi_P)$。令 χ_m 为 χ_P 在 SO_2, 上的特征限制，其中 $m \in \mathbb{Z}$，并且我们已将 SO_2 的对偶与 $\mathbb{Z}$等同。根据 Frobenius 互反律，退化主系列中 K-型 $V_{(x,y)} \otimes V_z$的重数，等于 $\mathrm{Sp}(2)$ 模 $V_{(x,y)}$中 $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{SO}_2$-模$V_z \otimes \chi_m$ 的重数。若忽略因子 SO_2, ，则只有当型 $V_{(x,y)} \otimes V_z$ 具有非零的 SO_3-不变向量时，它才会出现，而这只有在以下情况下才可能发生

$$x + y \geq z.$$

设 χ 是 $T^\circ_{E,\ K} = \mathrm{SO}_2 A$ 的一个特征，且 χ_m 是 χ 在 SO_2 上的限制。设 $V[m]$是极小表示中 SO_2 按 χ_m作用的直和项。设 $\Theta(\chi)$ 是 χ 到 G 的全提升。那么 $\Theta(\chi)$ 是 $V[m]$的一个商。正如刚才所讨论的，我们将证明 $\Theta(\chi)$ 的 K-型及其重数不超过退化主系列的相应型及其重数。关键在于以下两个引理。

引理 5.14. 设 d 是 $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{SO}_2$-模 $V_z \boxtimes \chi_m$ 在 $\mathrm{Sp}(2)$ 模$V_{(x,y)}$ 中的重数。那么

$$\mathrm{Hom}_K(V_{(x,y)} \otimes V_z, V_{i\omega_4}[m])$$

当 $i < x$ 时为平凡，而当 $i \geq x$ 时等于 d。

证明。由引理 5.1 可得。 □

引理 5.15. 设 X 是一个无挠 $\mathbb{C}[x]$-模。假设 X 是有限维空间 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$ 的一个并，且

- $x \cdot X_n \subset X_{n+1}$ 对所有 n均成立。
- $\dim(X_{n+1}/X_n) = d$ 对所有充分大的 n均成立。

那么对每个 $\nu \in \mathbb{C}$，$\dim(X/(x - \nu)X) \leq d$。

证明。反之，取 $d+1$ 个在 X 上线性无关、且在 $(x-\nu)X$ 上消失的线性泛函。取一个有限生成子模 F，使得这些线性泛函在 F 上的限制线性无关。因此，$\dim(F/(x-\nu)F) > d$。另一方面，由于 F 是有限生成的，它是自由模，因此对某个 r，有 $F \cong \mathbb{C}[x]^r$，且 $r > d$。取 k，使得 X_k 包含 F 的所有生成元。令 $F_n = F \cap X_{n+k}$。则 $\dim F_n \geq rn$。另一方面，对某个与 n 无关的常数 c，$\dim X_{n+k} = dn + c$。这与对所有 n □ 都有 $F_n \subseteq X_{n+k}$ 矛盾。

推论 5.16. 设 χ 是一个特征 $T^\circ_{E,\ K}$。$\Theta(\chi)$ 中 K-型的重数小于或等于退化主系列 $\mathrm{Ind}_P^G(\chi_P)$ 中相应的重数。对于重数为一的型，等号成立。

证明。假设 χ 在极大紧子群上的限制为 χ_m。回忆一下，$\mathrm{Ind}_P^G(\chi_P)$ 中 $V_{(x,y)} \otimes V_z$ 的重数 d 等于 $\mathrm{Sp}(2)$ 模 $V_{(x,y)}$ 中 $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{SO}_2$- 模 $V_z \boxtimes \chi_m$ 的重数 d。另一方面，$\Theta(\chi)$ 中 $V_{(x,y)} \otimes V_z$ 的重数等于 $X/(x-\nu)X$，其中

$$X = \oplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_K(V_{(x,y)} \otimes V_z, V_{i\omega_4}[m])$$

以及 $\nu = d\chi(x)$、$U(\mathfrak{a}) \cong \mathbb{C}[x]$。由引理 5.15（其条件由引理 5.14 满足）可知，重数不超过 d。若 $d = 1$，则 X 显然是秩为一的自由$U(\mathfrak{a})$-模，因此该型在 $\Theta(\chi)$ 中的重数为一。□

定理 5.17。假设 $E = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ 和 $J = M_3(\mathbb{R})$，于是 $T^\circ_{E,\ K} \cong \mathbb{C}^\times$。令 χ 为 $T^\circ_{E,\ K}$的一个酉特征。

(1) 若 $\chi \neq 1$，则 $\Theta(\rho(\chi)) \cong L(\pi(\chi), 1)$。(2) $\Theta(\rho(1)) \cong L(\pi(1), 1)$，且 $\Theta(\epsilon) \cong \Sigma$，不可约，具有最小的 K-型 $V_{(2,0)} \otimes V_0$。

证明。环面 $T_{E,K}$ 只有两个一维表示：平凡的 $\rho(1)$ 和符号 ϵ；此外，还有由非平凡特征 χ 参数化的二维表示族 $\rho(\chi) \cong \rho(\chi^{-1})$。因此，若 $\chi \neq 1$，则 $\Theta(\rho(\chi)) \cong \Theta(\chi)$；否则 $\Theta(1) \cong \Theta(\rho(1)) \oplus \Theta(\epsilon)$。根据推论 5.16，若 $\chi \neq 1$，则 $\Theta(\rho(\chi))$ 的型被 $\mathrm{Ind}_P^G(\chi_P) \cong L(\pi(\chi), 1)$ 的型所界。由于根据定理 3.2 后的注记，$L(\pi(\chi), 1)$ 是 $\Theta(\chi)$ 的一个子商，因此对于 $\chi \neq 1$，有 $\Theta(\rho(\chi)) \cong L(\pi(\chi), 1)$。这就证明了 (1)，接下来考察 (2)。我们需要以下结果

引理5.18。当 n 为偶数时，型 $V_{(2n,0)} \otimes V_0$ 出现在 $\Theta(\rho(1))$中；当 n 为奇数时，出现在 $\Theta(\epsilon)$中。重数始终为 1。

证明。对于 $i = 2n$、$2n+1$等，型 $V_{i\omega_4}[0]$ 出现，且重数为一。因此，如推论 5.10 的证明所示，我们需要确定因子 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 对该型的作用，其中 $i = 2n$，以判断它属于 $\Theta(\rho(1))$还是 $\Theta(\epsilon)$。这归结为求 $\mathrm{O}_2/\mathrm{SO}_2$ 在 $V^{\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{SO}_2}{}_{(2n,0)}$ 上的作用符号。但只需注意到 $V_{(2n,0)}$是 $V_{(1,0)}$的 $2n$ 次对称幂，便可轻易算出。答案是$(-1)^n$。□

该引理表明，$\Theta(\rho(1))$ 和 $\Theta(\epsilon)$ 均非零，且前者是球表示。这里有 11 个具有此无穷小特征的表示，见第7.2节。其中只有两个，

$L(\pi(1),1)$ 和 Σ 在锥 $x+y\geq z$ 中具有 K-型。因此， $\Theta(\rho(1))\cong L(\pi(1),1)$ 和$\Theta(\epsilon)\cong\Sigma$，因为没有其他可能。□

6. The correspondences in the case $J=H_3(\mathbb{C})$

这里有两种情形。如果 $E=\mathbb{R}^3$，那么 $T_{E,\ K}$ 是紧的。此情形已在 [Lo97] 中讨论，我们将在此以适当的形式纳入该结果。

6.1. 极小表示。设 K_J 是 H_J 的一个极大紧子群。群 K_J 同构于 $\mathrm{SU}_2\times_{\mu_2}\mathrm{SU}_6\rtimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。更准确地说，由于我们处理的是伴随群，出现的是 SU_6/μ_3 的商，而不是 SU_6,；不过为简化记号，我们常写作 SU_6。生成元 δ 属于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，并在 SU_6 上作用为一个外自同构。设 ω_3 是 SU_6 的第三基本权。与前文一样，令 V_n 表示 SU_2 上最高权为 n 的不可约表示。令 V 表示与 G_J 的极小表示相对应的 $(\mathfrak{h}_J,K_J)$-模。我们有 $\mathrm{SU}_2\times\mathrm{SU}_6$-模之间的同构 [GrW],

$$V=\oplus_{n=0}^{\infty}V_{n+2}\otimes V_{n\omega_3}.$$

元素 δ 作用于每个 $V_{n\omega_3}$，现在我们来描述它的作用。 δ 在 SU_6 中的中心化子是 $\mathrm{Sp}(3)$，因此它在 $V_{n\omega_3}$ 中的特征子空间自然是 $\mathrm{Sp}(3)$-模。事实上，$\mathrm{SU}_2\times_{\mu_2}\mathrm{Sp}(3)$ 是型为 F_4的分裂李群的极大紧子群，而理解 δ 在 V 中的特征子空间，就相当于将 V 限制到 F_4。Lo00] 在 [中完成了这项工作，因此我们得到如下结论。 $V_{n\omega_3}$ 限制到 $\mathrm{Sp}(3)$ 后，是所有不可约表示 $V_{(n,m,m)}$ 的无重数直和，其最高权为 (n,m,m)，其中$n\geq m\geq 0$，且 δ 在 $V_{(n,m,m)}$ 上的作用为 $(-1)^{n-m}$。

6.2. 分裂情形。假设 $E=\mathbb{R}^3$。在这种情形下，$T^{\circ}_{E,\ K}\cong\mathbb{T}^3/\Delta\mathbb{T}$，且特征 χ 是一个给定的整数三元组 (ν_1,ν_2,ν_3)，满足 $\nu_1+\nu_2+\nu_3=0$。该三元组是 χ 的无穷小特征。因此，提升 $\Theta(\chi)$ 的无穷小特征为

$$\beta+\frac{\nu_1}{2}\alpha_1+\frac{\nu_2}{2}\alpha_2+\frac{\nu_3}{2}\alpha_3.$$

群 $G=G_E$ 是分裂的。设 K 为 G的极大紧子群。回忆一下， $K\cong\mathrm{SU}_2^4/\mu_2$。我们有 4 个嵌入 $\mathbb{R}^3\to H_3(\mathbb{C})$，由此得到 G 嵌入到 H_J中的 4 个非共轭嵌入。在极大紧群层面上，这 4 个不同的嵌入很容易区分。我们有 4 个嵌入 $K\to K_J$，每个嵌入都是通过选取 K 的一个 SU_2因子并将其映射到唯一的 SU_2 因子 K_J而得到的。其余三个 SU_2 都被映射到 SU_6, 中，且在 SU_6中的共轭意义下唯一。因此，我们固定一个从 K 到 K_J 的嵌入，并且不失一般性地假设 K 的第一个 SU_2 因子映射到 K_J的 SU_2因子。我们注意到，对于这个 SU_2, V 是 SU_2-可容许的。因此， V 在 G 上的限制也是可容许的，而这一对偶对对应已由 [Lo97]确定。每个 $\Theta(\rho)$ 都是不可约四元数表示，可以描述为一个导出函子模。这里我们用朗兰兹参数重新诠释这一结果。

定理 6.1. 假设 $E=\mathbb{R}^3$ 和 $J=H_3(\mathbb{C})$，因此 $T^{\circ}_{E,K}\cong\mathbb{T}^3/\Delta\mathbb{T}$。设 χ 是$T^{\circ}_{E,K}$的一个特征，而 $P(E,K,\chi)$ 是第 3.2 节中所述利维 M_E的 4 个表示组成的簇。

(1) 对于每个 χ, $\Theta(\rho(\chi))\cong L(\pi,1)$，当 $\pi\in P(E,K,\chi)$ 时。

(2) $\Theta(\rho(1))$ 和 $\Theta(\epsilon)$ 是 G_E 的不可约表示，其无穷小特征为 (1,1,0,0)，最小 K-型分别为 $V_{(2,\,0,\,0,\,0)}$ 和 $V_{(4,\,0,\,0,\,0)}$。

当然，如果我们遍历 $\mathbb{R}^3$ 到 $H_3(\mathbb{C})$ 的全部 4 个嵌入，那么 π 就遍历 $P(E,K,\chi)$ 的所有取值。$\Theta(\epsilon)$ 的极小型为 $V_{(4,\,0,\,0,\,0)}$、$V_{(0,\,4,\,0,\,0)}$、$V_{(0,\,0,\,4,\,0)}$ 和$V_{(0,0,0,\,4)}$。

6.3. 准分裂情形。假设 $E=\mathbb{R}\times\mathbb{C}$，在此情形下 $T^\circ_{E,\,K}\cong(\mathbb{T}\times\mathbb{C}^\times)/\Delta(\mathbb{T})$，且一个特征 χ 是一个有序对 $(m,\chi_{\mathbb{C}})$，其中 $m\in\mathbb{Z}$，使得 $\chi_{\mathbb{C}}=1$ 在 $\mathbb{T}$ 上的限制由 $z\mapsto z^{-m}$给出。在此情形下，$\chi_{\mathbb{C}}$ 的微分是一对复数 (ν_2,ν_3)，满足 $\nu_2+\nu_3=-m$。那么 (m,ν_2,ν_3) 是 χ 的无穷小特征，而提升 $\Theta(\chi)$ 的无穷小特征为

$$\beta+\frac{m}{2}\alpha_1+\frac{\nu_2}{2}\alpha_2+\frac{\nu_3}{2}\alpha_3.$$

特征 χ 是酉的，当且仅当 $\nu_2-\nu_3$ 是纯虚数。

在这种情况下，$G=G_E$ 是准分裂的。设 K 是 G的极大紧子群。回忆一下，$K\cong \mathrm{SU}_2\times_{\mu_2}\mathrm{Sp}(2)$。$K$ 到 K_J 的嵌入由以下一系列映射给出

$$\mathrm{SU}_2\times\mathrm{Sp}(2)\subseteq\mathrm{SU}_2\times\mathrm{Sp}(2)\times\mathrm{SU}_2\subseteq\mathrm{SU}_2\times\mathrm{SU}(6)$$

其中，第一个包含映射在 $\mathrm{Sp}(2)$ 上是恒等映射，并且是将 SU_2 嵌入两个 SU_2中的对角嵌入。第二个嵌入在第一个 SU_2 上是恒等映射，而在 $\mathrm{Sp}(2)\times\mathrm{SU}_2\subseteq\mathrm{SU}_6$上则是唯一的嵌入。$T^\circ_{E,\,K}$ 的极大紧子群与 K对易，因此其李代数由以下元素张成

$$h=\frac{1}{3}(1,1,1,1,-2,-2),$$

将其视为 $\mathfrak{sl}_6(\mathbb{C})$的对角矩阵，其中 $\mathbb{C}$是 SU_6/μ_3的李代数。对李代数生成元的这一选择，确定了 $T^\circ_{E,\,K}$的极大紧子群与 $\mathrm{U}_1\subseteq\mathrm{SU}_6/\mu_3$之间的同构。$T_{E,\,K}$ 的极大紧子群由 $U(1)$ 和 δ生成。

现在我们描述对应中出现的 G 的表示。为此，令 $P=MAN$ 为 G 的极大抛物子群，使得 M 的 M° 的连通分支同构于 $\mathrm{SU}^{2,2}(\mathbb{R})$。$\mathrm{SU}^{2,2}(\mathbb{R})$ 的极大紧子群同构于 $(\mathrm{SU}_2\times\mathrm{SU}_2)\times_{\mu_2}\mathrm{U}_1$，，我们固定这样一个同构。假设 $m\geq 0$。令 σ_m为具有最小类型 $V_0\otimes V_{0+m}[m+2]$的最低权$\mathfrak{su}_{2,2}$-模，且最低 U_1-权为 $m+2$，正如记号所示。我们有如下结果：

命题 6.2. 设 χ 为$T^\circ_{E,K}$ 的酉特征，其在 U_1 上的限制为 χ_m。令 $\mathrm{Ind}_{P^\circ}^G(\sigma_m\otimes e^\lambda)$ 为通过诱导 $\sigma_m\otimes e^\lambda$得到的可酉化主系列表示，其中 P的连通分支为 P°，且 $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$。

- 若 $\chi\neq 1$，则 $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma_m\otimes e^\lambda)\cong L(\pi(\chi),1)$，其中 λ取决于 χ。
- 若 $\chi=1$，则 $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma_0)\cong L(\rho(1),1)\oplus\Sigma$，其中 Σ是具有最小K-型 $V_{(0,\,0)}\otimes V_4$的不可约表示。

命题 6.2 让我们能够掌握 $L(\pi(\chi),1)$ 的 K-型，因为我们可以计算主系列表示的 K-型：

命题 6.3. 如果 $V_{(x,y)} \otimes V_z$ 是 $\mathrm{Ind}_{P^\circ}^{G}(\sigma_m \otimes e^{\lambda})$ 中的一个 K 型，那么 $z \equiv x-y \equiv m$ (模 2) 且 $z > x-y \geq m$。若情况如此，该型的重数等于满足下列条件的整数 t 的个数：

$$x+y-m \geq 2t \geq x-y-m \ and \ z \geq 2t+2+m.$$

证明。 σ_m 的 $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 \times \mathrm{U}_1$ 型为

$$V_0 \otimes V_{0+m}[m+2] + V_1 \otimes V_{1+m}[m+4] + \dots$$

计算这些型在 $V_{(x,y)} \otimes V_z$ 中的重数，即可得到 $\mathrm{Ind}_{P^\circ}^{G}(\sigma_m \otimes e^{\lambda})$ 中 $V_{(x,y)} \otimes V_z$ 的重数。

现在我们计算满足 $V_t \otimes V_{t+m}[2t+2+m]$ 包含于 $V_{(x,y)} \otimes V_z$的 t。显然，$2t+2+m \leq z$ 是必要条件，此外还需满足 $z \equiv m$ （模 2）。接下来，将 $V_{(x,y)}$ 限制到 $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$。那么， $V_t \otimes V_{t+m}$ 包含于 $V_{(x,y)}$ 当且仅当满足引理 5.2 的不等式。但这些条件恰好与所述条件相同。□

现在需要求 $V_{n\omega_3}$从 SU_6/μ_3到 $(\mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{SU}_2) \times \mathrm{U}_1$的限制分支法则。回想一下，$\mathrm{U}_1$是 $T^\circ_{E,K}$ 的极大紧子群。令 $V_{n\omega_3}[m]$ 为满足 U_1 以特征 χ_m 作用的子空间。以下结果由 Gelfand–Zetlin 分支法则推出：应用两次该法则，得到从 SU_6 到 $\mathrm{SU}_4 \times \mathrm{SU}_2$, 的分支法则，再结合从 SU_4 到 Sp(2) 的限制，参见 [HTW]。

引理 6.4. 假设 $m \geq 0$。 $V_{n\omega_3}[m]$ 到 $\mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{SU}_2$ 的限制为

$$V_{n\omega_3}[m] = \sum_{t \geq 0} (\sum V_{(x,y)}) \otimes V_{n-m-2t}$$

其中内层求和遍历所有满足 $x+y \equiv m \,(\mathrm{mod}\ 2)$ 的 $V_{(x,y)}$，且

$$2n-2t-2m \geq x+y-m \geq 2t \geq x-y-m \geq 0.$$

令 χ 为 $T^\circ_{E,J} \cong \mathbb{C}^\times$ 的一个特征，并令 χ_m 为 χ 在 U_1 上的限制。令 $V[m]$ 为极小表示的直和项，其中 U_1 通过 χ_m 作用。令 $\Theta(\chi)$ 为 χ 到 G 的全提升。注意， $\Theta(\chi)$ 是 $V[m]$ 的一个商。

命题 6.5. 假设 $m \geq 0$。除非 $z > x-y \geq m$ 和 $z \equiv x-y \equiv m$（模 2），否则 $V_{(x,y)} \otimes V_z$ 在 $V_{n\omega_3}[m] \otimes V_{n+2}$ 中的重数为 0。在这种情况下，重数随 n 增大而增加，并最终稳定为满足下列条件的 $t \in \mathbb{Z}$ 的数量：

$$x+y-m \geq 2t \geq x-y-m \geq 0 \ and \ z \geq m+2t+2.$$

证明。由前面的引理可知，重数等于满足下列条件的 t 的数量：

$$2n-2t-2m \geq x+y-m \geq 2t \geq x-y-m \geq 0$$

且 V_z 是张量积中的一个直和项

$$V_{n+2} \otimes V_{n-m-2t} = V_{2n-m-2t+2} \oplus \dots \oplus V_{m+2t+2}.$$

因此， t 还必须满足以下不等式

$$2n-m-2t+2 \geq z \geq m+2t+2.$$

将两组不等式结合起来，并令 n 足够大，即可得出该命题。

□

鉴于命题 6.5，我们可以将引理 5.15 应用于 $U(\mathfrak{a})$-模

$$X = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_K(V_{(x,y)} \otimes V_z, V_{n\omega_3}[m] \otimes V_{n+2})$$

给出了 $\Theta(\chi)$ 的型的一个上界。该上界与 $V_{(x,y)} \otimes V_z$ 中 $\mathrm{Ind}_{P^\circ}^{G}(\sigma_m \otimes e^{\lambda})$ 的型的重数相同，后者由命题 6.3 给出，因此我们有以下结论：

推论 6.6. 设 χ 是一个特征 $T^\circ_{E,\ K}$ 其在极大紧子群上的限制为 χ_m。那么， $\Theta(\chi)$ 中的 K-型及其重数不超过退化主系列 $\mathrm{Ind}_{P^\circ}^{G}(\sigma_m \otimes e^{\lambda})$ 中相应的型及其重数。对于重数为一的型，等号成立。

定理 6.7. 假设 $E = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ 和 $J = H_3(\mathbb{C})$，因此 $T^\circ_{E,\ K} \cong \mathbb{C}^\times$。设 χ 是 $T^\circ_{E,K}$ 的一个酉特征。

(1) 如果 $\chi \neq 1$ 那么 $\Theta(\rho(\chi)) \cong L(\pi(\chi), 1)$。(2) $\Theta(\rho(1)) \cong L(\pi(1), 1)$，且 $\Theta(\epsilon) \cong \Sigma$ 是具有最小 K-型$V_{(0,0)} \otimes V_4$ 和无穷小特征 (1, 1, 0, 0) 的唯一不可约表示。

证明。如果 $\chi \neq 1$ 那么 $\Theta(\chi) \cong \Theta(\chi^{-1}) \cong \Theta(\rho(\chi))$。由于 $\Theta(\rho(\chi))$ 包含 $L(\pi(\chi), 1)$，根据定理 3.2 后的注记，(1) 立即由推论 6.6 得出。对于 (2)，我们需要以下引理。

引理 6.8。型 $V_{(0,0)} \otimes V_{2n}$, $n > 0$ 出现在 $\Theta(\rho(1))$ 中（当 n 为奇数时），并以重数一出现在 $\Theta(\epsilon)$ 中（当 n 为偶数时）。

证明。在 Sp(2) 上平凡的 K 型，即 $x = y = 0$，仅在 $V[m]$ 中对 $m = 0$出现。因此，我们可以限制 V，而不只是 $V[0]$，以计算 $\Theta(\rho(1))$ 和 $\Theta(\epsilon)$ 的型。因此，我们取n-型 $V_{n+2} \otimes V_{n\omega_3}$，并将其限制到 $K = \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{SU}_2$。我们将使用以下事实：$V_{n\omega_3}$ 限制到 Sp(3) 后是 $V_{(n,m,m)}$ 之和，并且 $\delta \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在 $V_{(n,m,m)}$ 上按 $(-1)^{n-m}$作用。根据从 Sp(3) 到 Sp(2) $\times$Sp(1) 的分支法则，在 Sp(2) 上平凡的型仅对 $m = 0$出现，并且在 Sp(1) 因子上带有 V_n。注意， δ 在其上的作用为 $(-1)^n$。利用克莱布施－戈丹公式，我们看到， K-型 $V_{(0,0)} \otimes V_{2n+2}$ 首次出现在极小表示的第 n个 K_J型中，并且 δ 在其上的作用为 $(-1)^n$。该型是否出现在$\Theta(\rho(1))$ 或 $\Theta(\epsilon)$ 中，恰恰取决于这个符号，参见推论 5.10 的证明。引理得证。□

上述引理表明， $\Theta(\epsilon) \neq 0$ 且包含型 $V_{(0,0)} \otimes V_4$。我们还知道， $\Theta(\rho(1)) \supseteq L(\pi(1), 1)$，并且我们对和 $\Theta(1) = \Theta(\rho(1)) \oplus \Theta(\epsilon)$ 的所有型都有一个界。因此， $\Theta(\epsilon)$ 的最小类型是 $V_{(0,0)} \otimes V_4$，从而包含 Σ。两个提升都是不可约的，因为没有容纳其他任何东西的余地。□

7. Representations

我们列出无穷小特征为 γ =(1, 1, 0, 0) 的 Spin(4, 4) 和 Spin(5, 3) 表示，以及它们的最低 K-型。利用众多现有参考资料之一（例如 [Vo84]），手工完成这项工作相当简单。不过，为方便起见，我们使用 atlas 软件获取所需的详细信息。这里对 atlas 符号作一些（有限的）说明，并希望大多数读者觉得这些说明已经足够。更多细节可以

通过 www.liegroups.org 网站上大量有关该软件的信息补充。

回忆一下，实群 G 的不可约容许表示 π 可以由一个 Cartan 子群 H 及其（某个覆盖群的）特征 χ 给出， H 的诱导数据由此可得，从而得到一个具有唯一不可约商 π 的标准模。相应地，在 atlas 中， π由一个“参数”表示，它是一个三元组 (x λ, ν)。这里，x 是一个“KGB 元素”，它决定了 H； λ 是 χ 的离散部分（本质上是 G的一个利维子群上离散系列极限的 Harish-Chandra 参数）；而 ν 是该特征的连续部分。

该软件使用的坐标不同于本文所选用的标准坐标；事实上，atlas 的单根由李型 D_4 的嘉当矩阵的列给出。在这些坐标中，权 $\gamma = (1,1,0,0)$ 表示为 (0,1,0,0)。我们先给出 atlas 的输出，然后将数据转换为我们的坐标。此转换也使用该软件完成。

7.1. 分裂情形。我们仅讨论具有无穷小特征 γ 且中心特征平凡的 $Spin(4, 4)$ 的表示。在 atlas 坐标中，其参数如下:

0 终参数(x=108,lambda=[1,1,1,1]/1,nu=[0,1,0,0]/1) 1 终参数(x=108, lambda=[1,2,1,1]/1,nu=[0,1,0,0]/1) 2 终参数(x=94,lambda=[0,3,0,0]/ 1,nu=[0,1,0,0]/1) 3 终参数(x=93,lambda=[0,3,0,0]/1,nu=[0,1,0,0]/1) 4 终参数(x=92,lambda=[0,3,0,0]/1,nu=[0,1,0,0]/1) 5 终参数(x=91, lambda=[0,3,0,0]/1,nu=[0,1,0,0]/1) 6 终参数(x=65,lambda=[-1,4,-1,-1]/ 1,nu=[-1,3,-1,-1]/2) 7 终参数(x=52,lambda=[-1,2,1,-1]/1,nu=[0,1,0,-1]/ 1) 8 终参数(x=51,lambda=[-1,2,1,-1]/1,nu=[0,1,0,-1]/1) 9 终参数(x=50, lambda=[-2,3,0,0]/1,nu=[-1,1,0,0]/1) 10 终参数(x=49,lambda=[- 2,3,0,0]/1,nu=[-1,1,0,0]/1) 11 终参数(x=48,lambda=[0,3,-2,0]/1,nu =[0,1,-1,0]/1) 12 终参数(x=47,lambda=[0,3,-2,0]/1,nu=[0,1,-1,0]/1) 13 终参数(x=19,lambda=[0,1,0,0]/1,nu=[-1,2,-1,-1]/2) 14 终参数(x=18, lambda=[0,1,0,0]/1,nu=[-1,2,-1,-1]/2) 15 终参数(x=17,lambda =[0,1,0,0]/1,nu=[-1,2,-1,-1]/2) 16 终参数(x=16,lambda=[0,1,0,0]/1,nu =[-1,2,-1,-1]/2) 17 终参数(x=9,lambda=[0,1,0,0]/1,nu=[0,0,0,0]/1) 18 终参数(x=7,lambda=[0,1,0,0]/1,nu=[0,0,0,0]/1) 19 终参数(x=6, lambda=[0,1,0,0]/1,nu=[0,0,0,0]/1) 20 终参数(x=5,lambda=[0,1,0,0]/ 1,nu=[0,0,0,0]/1) 21 终参数(x=4,lambda=[0,1,0,0]/1,nu=[0,0,0,0]/ 1) 22 终参数(x=3,lambda=[0,1,0,0]/1,nu=[0,0,0,0]/1) 23 终参数(x=1, lambda=[0,1,0,0]/1,nu=[0,0,0,0]/1) 24 终参数(x=0,lambda=[0,1,0,0]/ 1,nu=[0,0,0,0]/1)

我们将这些参数转换为标准坐标，并计算相应表示的最低 K-型。这里 $K \cong SU_2^4/\mu_2$，我们给出最高

关于单根 $2\epsilon_1$、 $2\epsilon_2$、 $2\epsilon_3$ 和 $2\epsilon_4$ 的权，以及它们的维数。编号采用 atlas 所选的编号。

#	x	λ	ν	最高权 维数	
0	108	[3,2,1,0]	[1,1,0,0]	[0,0,0,0]	1
1	108	[4,3,1,0]	[1,1,0,0]	[0,0,0,2	3
				[0,0,2,0]	3
				[0,2,0,0]	3
				[2,0,0,0]	3
2	94	[3,3,0,0]	[1,1,0,0]	[2,0,0,0]	3
3	93	[3,3,0,0]	[1,1,0,0]	[0,2,0,0]	3
4	92	[3,3,0,0]	[1,1,0,0]	[0,0,2,0]	3
5	91	[3,3,0,0]	[1,1,0,0]	[0,0,0,2]	3
6	65	[2,3,-1,0]	[1/2,1,-1/2,0]	[1,1,1,1]	16
7	52	[1,2,0,-1]	[1/2,1/2,-1/2,-1/2]	[2,2,0,0]	9
8	51	[1,2,0,-1]	[1/2,1/2,-1/2,-1/2]	[0,0,2,2]	9
9	50	[1,3,0,0]	[0,1,0,0]	[0,2,2,0]	9
10	49	[1,3,0,0]	[0,1,0,0]	[2,0,0,2]	9
11	48	[2,2,-1,1]	[1/2,1/2,-1/2,1/2]	[2,0,2,0]	9
12	47	[2,2,-1,1]	[1/2,1/2,-1/2,1/2]	[0,2,0,2]	9
13	19	[1,1,0,0]	[0,1/2,-1/2,0]	[4,0,0,0]	5
14	18	[1,1,0,0]	[0,1/2,-1/2,0]	[0,4,0,0]	5
15	17	[1,1,0,0]	[0,1/2,-1/2,0]	[0,0,4,0]	5
16	16	[1,1,0,0]	[0,1/2,-1/2,0]	[0,0,0,4]	5
17	9	[1,1,0,0]	[0,0,0,0]	[2,2,2,0]	27
18	7	[1,1,0,0]	[0,0,0,0]	[3,1,1,1]	32
19	6	[1,1,0,0]	[0,0,0,0]	[1,3,1,1]	32
20	5	[1,1,0,0]	[0,0,0,0]	[1,1,3,1]	32
21	4	[1,1,0,0]	[0,0,0,0]	[2,2,0,2]	27
22	3	[1,1,0,0]	[0,0,0,0]	[2,0,2,2]	27
23	1	[1,1,0,0]	[0,0,0,0]	[0,2,2,2]	27
24	0	[1,1,0,0]	[0,0,0,0]	[1,1,1,3]	32

KGB 元素 0、1、3、4、5、6、7 和 9 对应于紧 Cartan 子群。这意味着最后八个参数是在给定无穷小特征下 $Spin(4,4)$ 的离散系列表示的极限的参数。KGB 元素 108 属于分裂 CSG，因此前两个是主系列表示，其中一个有四个最低 K-型。表示 2 至 5 与 Cartan 子群 $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}^\times$ 相关联，但也可以将其实现为第三个主系列表示的四个最低 K-型构成成分。其余表示较难描述，但我们会指出它们所关联的 Cartan 子群。KGB 元素 16、17、18、19（以及 91、92、93 和 94）对应于 CSG $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}^\times$。有三个互不共轭且同构于 $\mathbb{T} \times \mathbb{C}^\times \times \mathbb{R}^\times$ 的 CSG，其对应的 KGB 元素分别为 51 和 52、49 和 50，以及 47 和 48。最后，KGB 元素 65 对应于 CSG $\mathbb{C}^\times \times (\mathbb{R}^\times)^2$。

7.2. 准分裂情形。这里在无穷小特征 γ 下有 11 个表示 :

0 终参数(x=36,lambda=[1,2,0,0]/1,nu=[0,1,0,0]/1) 1 终参数(x=36, lambda=[1,3,0,0]/1,nu=[0,1,0,0]/1) 2 终参数(x=32,lambda =[0,3,0,0]/1,nu=[0,1,0,0]/1) 3 终参数(x=16,lambda=[0,3,-1,-1]/1,nu =[-1,3,-1,-1]/2) 4 终参数(x=24,lambda=[-1,1,1,1]/1,nu=[-1,1,0,0]/1) 5 终参数(x=24,lambda=[-2,2,1,1]/1,nu=[-1,1,0,0]/1) 6 终参数(x=14, lambda=[-1,2,0,0]/1,nu=[-1,1,0,0]/1) 7 终参数(x=12,lambda=[- 1,2,0,0]/1,nu=[-1,1,0,0]/1) 8 终参数(x=3,lambda=[0,1,0,0]/1,nu=[- 1,2,-1,-1]/2) 9 终参数(x=1,lambda=[0,1,0,0]/1,nu=[0,0,0,0]/1) 10 终参数(x=0,lambda=[0,1,0,0]/1,nu=[0,0,0,0]/1)

再次，我们将参数转换为标准坐标，并计算相应表示的最低K-型。这里 $K = \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{SU}_2$, 的单根为$\epsilon_1 - \epsilon_2$、 $2\epsilon_2$、 $2\epsilon_3$，我们给出最高权及其维数。

对于这个实形式，Cartan 子群有三个共轭类。KGB 元素 0、1、12、14 对应极大紧 CSG $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}^\times$，元素 24 和 36 对应极大分裂 CSG $\mathbb{C}^\times \times (\mathbb{R}^\times)^2$, ，元素 3、16 和 32 对应中间 CSG，该 CSG 同构于 $(\mathbb{C}^\times)^2$。

#	x	λ	ν	最高权 维数	
0	36	(3,2,0,0)	(1,1,0,0)	(0,0,2)	3
1	36	(4,3,0,0)	(1,1,0,0)	(0,0,0)	1
2	32	(3,3,0,0)	(1,1,0,0)	(0,0,2)	3
3	16	(2,2,-1,0)	(1/2,1, -1/2,0)	(0,0,4)	5
4	24	(1,2,1,0)	(0,1,0,0)	(1,1,0)	5
5	24	(1,3,1,0)	(0,1,0,0)	(1,1,2)	15
	.	.	.	(2,0,0)	10
6	14	(1,2,0,0)	(0,1,0,0)	(2,0,0)	10
7	12	(1,2,0,0)	(0,1,0,0)	(1,1,2)	15
8	3	(1,1,0,0)	(0,1/2,-1/2,0)	(2,0,2)	30
9	1	(1,1,0,0)	(0,0,0,0)	(0,0,6)	7
10	0	(1,1,0,0)	(0,0,0,0)	(1,1,4)	25

8. 致谢

极小表示领域的杰出研究者之一是小林俊行 [HKM]。因此，我们很高兴在 Toshi 六十岁生日之际将本文献给他。撰写本文期间，我们受益于与 Jeff Adams 的讨论。特别感谢他为我们进行了初步的 atlas 计算。G.S. 感谢新加坡国立大学在 2015 年项目及其大型姊妹项目 [GS22] 启动期间给予的热情接待。W.T.G. 获新加坡政府教育部一级资助 R-146-000-320-114 的部分支持。G.S. 获西蒙斯合作基金 946504 的部分支持。

References

[A] 李群与表示图谱软件，2018年。http://www. liegroups.org。[BZ] B. Binegar 和 R. Zierau，《美国数学会会刊》341，第 2 期（1994年），771–785。[B] F. Bruhat，《法国数学会公报》84（1956年），97–205。[BK] R. Brylinski 和 B. Kostant,

Minimal representation of E_6 E_7 and E_8 and the generalized Capelli , 《美国 *Identity.* **91** 1994 2469 2472 国家科学院院刊》（），–。[CM] W. Casselman、D. Mili˘ci´c，《杜克数学杂志》49（1982年），第 4 期，869–930。[GS04] W. T. Gan 和 G. Savin， *Uniqueness of Joseph ideal.*《数学研究快报》11（2004年），第 5–6 期，589–597。[GS14] W. T. Gan 和 G. Savin， *Twisted Bhargava cubes.*《代数与数论》8（2014年），第 8 期，1913–1957。[GS22] W. T. Gan 和 G. Savin,

Twisted composition algebras and Arthur packets of triality Spin(8)。《纯粹与应用数学季刊》18（2022年），第 5 期，1951–2130。[GrW] B. Gross 和 N. Wallach,

On quaternionic discrete series representations and their continuations.《纯粹与应用数学杂志》481（1996年），73–123。[GoW] R. Goodman 和 N. Wallach,

Representations and Invariants of the Classical Groups. 剑桥大学出版社，1998年。[HKM] J. Hilgert、T. Kobayashi 和 J. M¨ollers， *Minimal representations via Bessel operators.*《日本数学会杂志》66（2014年），349–414。[HTW] R. Howe、E.-C. Tan 和 J. Willenbring,

Stable branching rules for classical symmetric pairs.《美国数学会会刊》 **357** 2005 4, 1601 1626 （），第 – 期。KMRT M.-A. Knus、A. [ ] Merkurjev、M. Rost 和 J.-P. Tignol， *The book of involutions.* 美国数学会文集 44，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1998年。[Li] J.-S. Li,

The correspondences of infinitesimal characters for reductive dual pairs in simple Lie groups.《杜克数学杂志》97，第 2 期（1999年），347–377。[Lo97] H. Y. Loke，博士论文，哈佛大学（1997年）。[Lo00] H. Y. Loke,

Restrictions of quaternionic representations.《泛函分析杂志》172，第 2 期（2000年），377–403。[Lo03] H. Y. Loke， *Quaternionic representations of exceptional Lie groups.*《太平洋数学杂志》211，第 2 期（2003年），341–367。[LS15] H. Y. Loke 和 G. Savin， *Rational forms of exceptional dual pairs.*《代数杂志》422（2015年），683–696。[Se] A. Segal, *The degenerate residual spectrum of quasi-split forms of $Spin_8$ associated to the Heisenberg parabolic subgroup.* **372** 2019 9, 6703 6754 《美国数学会会刊》（），第 – 期。[Vo84] D. A. Vogan Jr.， *Unitarizability of certain series of representations.*《数学年刊》120（1984年），第 1 期，141–187。[Vo02] D. A. Vogan Jr.， *Isolated unitary representations.*《自守形式及其应用》（2002年），IAS/帕克城数学丛书 12，379–398。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯（2007年）。

Department of Mathematics, National University of Singapore, Singapore*Email address*: matgwt@nus.edu.sgDepartment of Mathematics, National University of Singapore, Singapore

Email address: matlhy@nus.edu.sg

Department of Mathematics, Western Michigan University, Kalamazoo, MI
Email address: annegret.paul@wmich.edu

Department of Mathematics, University of Utah, Salt Lake City, UT
Email address: savin@math.utah.edu