arXiv:2302.02510v1 [math.CO] 6 Feb 2023

特征拓扑不变量

OLIVER KNILL

Abstract. 有限抽象单纯复形 G 的高阶特征 $w_m(G)$ 是拓扑不变量，满足 k 点格林函数恒等式；对于闭流形，可以用欧拉示性数来计算这些不变量，在此我们给出 $w_m(G) = w_1(G)$ 的一个新证明。此外，球面公式也得到了推广：对于任意单纯复形，偶数维单形的单位球面的高阶特征总和，等于奇数维单形的单位球面的高阶特征总和。

1. Summary

1.1. 我们证明 k**点格林函数公式**

$$w_m(G) = \sum_{x_j \in G} g_m(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{x \in G^k} \prod_{j=1}^{k} w(x_j) w_m(\bigcap_{j=1}^{k} U(x_j))$$

对于 m**阶特征**的 $A \subset G$

$$w_m(A) = \sum_{x \in A^m, \bigcap_j x_j \in A} \prod_{j=1}^{m} w(x_j) \ ,$$

其中 $w(x) = (-1)^{\dim(x)}$，并且其中 G 是有限抽象单纯复形。**星** $U(x) = \{y, x \subset y\}$ 构成 G上的有限非 Hausdorff**拓扑**的拓扑基。对于两个任意开集 U， V，赋值公式

$$w_m(U \cup V) + w_m(U \cap V) = w_m(U) + w_m(V)$$

对所有 $m \geq 1$均成立。这使得高阶特征 w_m **拓扑不变量**具有拓扑不变性：同胚复形的高阶特征相同。这也使得更一般的能量化版本的 w_m层可以使用。对于**流形**， $w_m(M) = w_1(M)$。

1.2. 我们使用简写 $w_m(A) = \sum_{X \in A^m, \bigcap X \in A} w(X)$，对 $X = (x_1, \ldots, x_m) \in A^m$ 求和，其中 $\bigcap X \in A$，意为 $\bigcap_{j=1}^m x_j \in A$ 和 $w(X) = \prod_{j=1}^m (-1)^{\dim(x_j)}$。欧拉示性数为 $w_1(A)$，吴示性数为 $w_2(A)$。 k- 点格林函数将一个 k 点构型 $X \in G^k$ 映射到 $g_m(X) = w(X) w_m(U(X))$，其中 $U(X) = \bigcap_{j=1}^k U(x_j)$。能量公式 $w_m(G) =$

日期：2023年2月5日。关键词和短语。拓扑不变量、格林函数、高阶特征。1

高阶特征

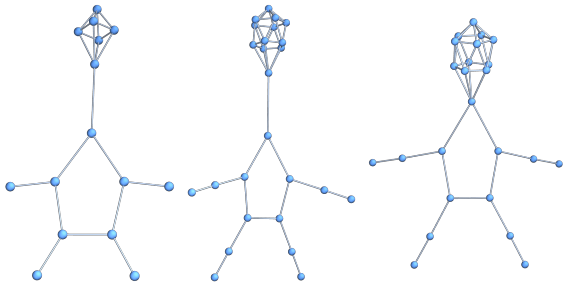

FIGURE 1. 这些复形 G, H, K 都同伦于一个2维球面与一个1维球面的楔和。前两个复形 G, H 同胚。然而，复形 K 与 G不同胚。欧拉 $\omega_1(G) = \omega_1(H) = \omega_1(K) = 1$，贝蒂向量 $b_1(G) = b_1(H) = b_1(K) =$(1,1, 1)。对于吴$\omega_2(G) = \omega_2(H) = 11$，$b_2(G) = b_2(H) =$(0,0,11, 1,1)，且 $\omega_2(K) =$9，$b_2(K) =$(0, 0, 11,3,1)。于是 $\omega_3(G) = \omega_3(H) = -29$，$b_3(G) =b_3(H) =$(0, 0, 0,31, 3,2,1)，且$\omega_3(K) = -23$，$b_3(K) =$(0, 0, 0, 31, 12, 5, 1)。

$\sum_{X\in G^k} g_m(X)$ 涉及 G 中的开集，因此属于层论范畴。与 $w_m(G)$不同，格林部分中没有 $\bigcap X \in G$ 假设。星形$U(x)$的闭包 $B(x)$ 称为单位球。其边界 $S(x)$ 称为单位球面，也称为链接。局部赋值公式

$$w_m(B(x)) = w_m(U(x)) - (-1)^m w_m(S(x))$$

对所有星形 $U(x)$ 都成立，但一般而言，对任意开集 U with with$B(X) = U(X)$ and $S(X) = B(X) \setminus U(X) = \delta U(X)$ 并不成立。

1.3. 特殊的 **单粒子情形** $k = 1$ 对所有 $m \geq 1$ 给出了一个高斯-博内或庞加莱-霍普夫型公式

$$w_m(G) = \sum_{x\in G} w(x) w_m(U(x)) \ ,$$

这将 $w_m(G)$ 的计算归结为局部表达式。我们可以将$g_m(x)$视为“曲率”，或将其解释为一个“指标”。请注意，如果将 G 替换为开集U，那么针对开集的高斯-博内型公式无法推广。只有将 G 替换为更小的单纯复形时才成立。例如，单位球$B(x) = U(x)$ 本身又是单纯复形，而且我们还有 $w_m(G) = \sum_{x\in G} w(x) w_m(B(x))$。

1.4. 对所有复形 G，**球面公式**

$$\sum_{x\in G} w(x) w_m(S(x)) = 0$$

成立。我们已知，对于 $m = 1$， $[7, 10]$ 中的结论成立。由局部赋值公式和**球公式** $w_m(G) = \sum_{x \in G} w(x) w_m(B(x))$ 可得此结论。对于大型复形，这一方法很有用；我们可以再次使用球公式来计算 $w_m(B(x))$，尤其是在许多 $B(x)$ 类型相同或已知时。例如，球面公式证明，若 G 是一个复形，且所有球面 $S(x)$ 的特征 w_m 均为常数 $c \neq 0$，那么 $w_m(G) = 0$。这适用于奇数维流形，或更一般地，适用于由性质 $\chi(G) = 1 + (-1)^d$ 递归定义、且所有单位球面均满足 $S(x) \in \mathcal{X}_{d-1}$ 的奇数维**Dehn-Sommerville d-流形** $\mathcal{X}_d$ [4] 。归纳法从 $\mathcal{X}_{-1} = \{0\}$ 开始，此时**空集** $0 = \{\}$ 是空复形，也就是 (-1)-球面。

1.5. 与流形不同，德恩-索梅维尔空间 $\mathcal{X} = \bigcup \mathcal{X}$ 在**连接运算** $G + H = G \cup H \cup \{xy, x \in G, y \in H\}$下构成一个**幺半群**。它包含**球面幺半群** $\mathcal{S}$，其中包含所有球面，（-1）球面 0 是零元素。利用归纳法， p-球面与 q-球面的连接是一个（$p+q+1$）-球面，并且$S_{G+H}(x) = S_G(x) + H$当 $x \in G$时，或 $S_{G+H}(x) = G + H(x)$ 当 $x \in G$时。自然地，我们可以考察广义 d-流形：这类复形的所有单位球面都属于 $\mathcal{X}_{d-1}$。这类空间比 d-流形更大，但与流形一样，它不是由所有复形构成的幺半群（$\mathcal{G}$, $+$）的子幺半群。

1.6. 我们已经在 $m = 1, k = 2$ 的情形下证明了能量公式，即 $\chi(G) = \sum_{x,y} g(x, y)$，其中

$$g(x, y) = w(x) w(y) \chi(U(x) \cap U(y))$$

是**连接矩阵** $L(x, y)$ 的逆矩阵的矩阵元素，若$x \cap y \neq \emptyset$ 则为 $= 1$，否则为 $L(x, y) = 0$。在 $m = 1, k = 1$ 的情形下，我们考察了超迹表达式 $\chi(G) = w_1(G) = \sum_{x \in G} w(x) \chi(U(x))$，其中涉及 $g(x, x) = \chi(U(x))$。随后，我们将能量公式推广到赋能复形，其中$w(x)$ 被任意环值函数 $h(x)$ 所替代。我们还研究了这类**赋能复形**在 h 取除代数值时的情形。

1.7. 能量定理还可以更一般地视为一种线性变换，它将定义在相交点上的相互作用能函数 $h_m : G^m \to R$ 映射为定义在开星形邻域的 k 元组上的格林函数 $g_m : G^k \to R$。参数 m 和 k 可以是任意正整数。能量

$$w_m(A) = \sum_{X \in A^m, \bigcap X \in A} h_m(X)$$

然后定义 k**点势值**

$$g_m(X) = w(X) w_m(U(X))$$

或 $X \in G^k$。对于任意 $m, k \geq 1$，我们仍有如下关系

$$w_m(G) = \sum_{X \in G^m, \bigcap X > 0} h_m(X) = \sum_{X \in G^k} g_m(X) \, .$$

当然，对于相互作用能 h 的一般选择，并不存在拓扑不变性。事实上，仅要求其满足较弱的组合性质——在重心细分下保持不变——就足以迫使 h 具有 $h(x) = w(x)$ 的形式。

1.8. 更一般的带能量局部相互作用 h_m 图景解释了为何半正定的 h 会产生半正定的 g：若 h_m 除某个固定的 X_0 外均为零，且在该处 $h_m(X_0) = 1$，那么 $g_m : X \in G^k \to g_m(X)$ 是半正定型。h_m 个 m 变量上的半正定型的凸组合，会映射为 k 个变量上的半正定型的凸组合。在 $m = 1$、$k = 2$ 的情形下，例如格林函数矩阵 $g(x, y)$ 是连接矩阵 $L(x, y)$ 的逆矩阵，我们便得到正定二次型之间的对偶性。在这种情况下，L 和 g 甚至是等谱的。它们给出了等谱的正定整数二次型。可以写成 $L(x, y) = w_m(V(x) \cap V(y))$，其中 $V(x) = \{x\}$。对于 $|h(x)| = 1, k = 2, m = 1$，我们发现它们互为逆矩阵。 [5, 8, 6]。

1.9. 关于参考文献，我们还应补充说明，这一主题有着深厚的学术渊源，可追溯至马克斯·德恩和普尔·海加德 [2]，他们于1907年首次定义了抽象单纯复形。再结合帕维尔·亚历山德罗夫 [1] 于1937年首次研究的有限拓扑空间，便构成了一个强大的框架。我们在 [10, 9]中指出了一些不采用几何实现的理由。例如，庞加莱伪同调球面的双重悬挂，其几何实现与五维球面同胚，尽管从离散意义上看，这些组合复形显然并不同胚。坚持采用有限拓扑，可以避免连续统带来的困难。

1.10. 德恩、希加德或亚历山德罗夫的数学不仅在数学上更简单，因为它仅涉及有限集族的组合学；我们还可以转向连续统所在的领域，而在那里连续统处理起来并不容易。例如，我们可以研究单纯复形中**开集的上同调**。这比闭集的上同调更丰富。由于单个集合的贝蒂向量 $\{x\}$（按定义，它是单纯复形中的一个开集 $\{x\}$，且具有局部极大的 x）是基向量$e_{|x|}$，其中 $|x|$ 是该集合的基数，因此我们可以用开集实现任意贝蒂向量。我们不知道如何用单纯复形实现给定的贝蒂向量。在连续统中，开集的上同调通常只被视为紧子集上同调的极限。甚至同伦也有所不同。例如，开区间 $\{\{1, 2\}\}$ 的欧拉示性数为 -1，并且不同伦于单个点 $\{\{1\}\}$，而

其欧拉示性数为 1。对于任何合理的同伦定义，都不应认为这两个空间同伦。但例如，我们可以将 $A = \{\{1,2\}\}$与 $B = \{\{2\},\{1,2\},\{2,3\}\}$ 等同，后者也是一个开区间。开集 A, B彼此同胚。它们的边界 $\delta A = A \setminus \mathcal{A} = \{\{1\},\{2\}\}$和 $\delta B = A \setminus \mathcal{B} = \{\{1\},\{2\}\}$ 都是0维球面。与一般的有限集族（有时称为多重图）不同，上同调和拓扑对开集和闭集都适用。我们在此描述的几乎所有内容，对既非闭集也非开集的一般集合族都不成立。

2. Notations

2.1. 有限抽象单纯复形**有限抽象单纯复形** G 是一个有限集族，对取非空子集的运算封闭。 G 带有有限拓扑$\mathcal{O}$，其中所有**星** $U(x) = \{y, x \subset y\}$ 构成**拓扑基**。如果$V = \bigcup_x x$ 是**顶点集**，那么顶点星的集合 $U(x)$，其中 $x = \{v\}$ 与$v \in V$构成**拓扑子基**；对其取交集闭包可得拓扑基，对其取交集和并集闭包则可得拓扑。该拓扑中的闭集是子单纯复形。如果$x \subset y$，那么 $U(y) \subset U(x)$。映射 $f : G \to H$ 在单纯复形之间**连续**，当且仅当 $f^{-1}(U)$在 G中是开集，且当 U在 H中是开集时。**单纯映射**是从 $V(G)$到 $V(H)$的映射，它可提升为一个保序映射 $G \to H$。单纯映射是连续的；然而，并非所有连续映射都是单纯映射。一个例子是映到一个正维数单形 c 上的常值映射。

2.2. G 上的拓扑是 Kolmogorov（T0）拓扑，但既不是 Fr´echet（T1）拓扑，也不是 Hausdorff（T2）拓扑。与任何有限拓扑一样，它是 Alexandroff 拓扑，这意味着每个 $x \in G$ 都有最小邻域 $U(x)$。这些就是星形 $U(x) = \{y \in G, x \subset y\}$。该拓扑属于 Zariski 型，因为拓扑中的闭集与 G 的子单纯复形相对应。当 G 是图（V, E）的 Whitney 复形（由完全子图的顶点集构成）时，子图定义了闭集。每个 G 也定义一个图，其中 $\Gamma = (V, E) = \{(x, y)\ \ x \subset y$，或 $y \subset x\}$。该图的 Whitney 复形 G 是 G 的重心细分 G_1。该拓扑具有 G 所需的连通性。上述由 G 得到的图，与 G 的拓扑具有相同的连通性。由图的测地距离诱导的拓扑会在 G 上产生离散拓扑，使 G 完全不连通。非 Hausdorff 性质不可避免。ˇ当 G 来自图 Γ时，图 Γ 是顶点星所构成的拓扑子基的 Čech神经。所有星构成的拓扑基的 Čech神经是 Γ_1，即 Γ的重心细分。

2.3. G 中的元素也称为**单形**或**面**，也可简称**集合**。 G是由 V 组成的集合的集合，而拓扑是 $\mathcal{O}$中的集合的集合。闭包A 是

任意集合 $A \subset G$ 是 G 中包含 A的最小闭集。我们需要区分三种不同的对象：（i）集合 $x \in G$ 作为 G的一个元素或点；（ii）子集 $A\ (x) = \{x\} \subset G$；以及（iii）其闭包 $K\ (x) = \{x\} = \{y, y \subset x\} \subset G$，它是由 $\{x\}$生成的单纯复形。集合 $A\ (x)$ 仅当x 是局部极大的单形（即不包含于任何更大的单形中）时才是开集；仅当 x 的维数为 0 时才是闭集。一般来说，集合 $A\ (x) = \{x\} \subset G$ 既非开集也非闭集，但 x 总是定义两个自然的集合：开集$U\ (x)$ 和闭集 $K\ (x)$。开集 $U\ (x)$ 是包含 x的最小开集，闭集 $K\ (x)$ 是包含 x的最小闭集。 $U\ (x)$ 是星形， $K\ (x)$ 是核心。 $U\ (x)$ 的闭包 $B\ (x)$ 是单位球，其边界 $S\ (x) = B\ (x) \setminus U\ (x)$ 是 $U\ (x)$ 的单位球面。 $x \in G$ 的维数 $\dim(x)$ 定义为 $|x| - 1$，其中 $|x|$ 是 x的基数。我们写作 $X = (x_1, \ldots, x_k) \in G^k$ 来表示点 $x_j \in G$的一个 k元组，并定义$w\ (x) = (-1)^{\dim(x)}$ 和 $w\ (X) = \prod_{j=1}^{k} w\ (x_j)$。我们用 $\bigcap X$ 简写 $\bigcap_{j=1}^{k} x_j$。类似地，我们用 $\bigcup X$ 表示 $\bigcup_{j=1}^{k} x_j$。我们通常不关心 X 中元素的顺序，但允许同一元素出现多次。例如，构型 $X = (x, x, x, \ldots, x)$ 是一个 k点构型，其中所有点都相同。

2.4. 我们常常考察函数 $h : G \to R$，其中 R 是某种代数对象，例如**环**。它应具有交换的加法结构。比如，它可以是 $\mathbb{Z}$ 或有限阿贝尔群；也可以具有更多结构，例如域上的向量空间或算子代数。这里我们考察像 $R = \mathbb{Z}$ 这样的环，但环的乘法结构实际上并不起作用。例如，它可以是四元数这样的除代数，其中乘法不满足交换律。由于我们的主要结果中会出现 $w(x)w_m(U(x))$ 这样的表达式，因此需要进行与 1 或 -1 的乘法。如果 R 是加法群，那么 $-r$ 表示群中 r 的加法逆元。由于本文主题属于数学的有限主义方法，我们更倾向于有限对象。即使在 $r = \mathbb{Z}$ 的情况下，函数 $f : G \to R$ 的**值域** 也总是有限的，因此我们处理的仍是有限对象，尽管 R 的大小没有先验上限。与仅有加法群相比，采用环的优势在于，还可以考察行列式这样的对象（或者在非交换环的情况下，考察**迪厄多内 行列式**），它们可能与我们此处所做的工作有关。在数学的其他领域，环也是一种熟悉的框架。

2.5. 不采用固定的环 R，而是可以为每个开集 $R(U)$ 配置一个环 $R(x)$。环 $R(x)$ 称为截面环。要确定这些环之间的关系，需要限制映射。由于开集 $U(x)$ 是极小的，环$R(x)$ 可称为 x 处的茎。它的元素是 x 处的芽。由于 $x \subset y$ 蕴含 $U(y) \subset U(x)$，因此，只要给出满足预层性质 $r(x, x) = Id$ 和 $r(y, z) \circ r(x, y) =$ 的限制映射 $r(x, y) : U(x) \to U(y)$，就能确定一个层。

$r(x,z)$ if $x \subset y \subset z$。固定所有的芽 $R(x)$ 和过渡映射后，就已经具备了层所必需的存在性（称为粘合）和唯一性（称为局部性），而不仅仅是预层。一个例子是$w(x) = (-1)^{\dim(x)}$，其限制映射为 $r(x,y) = w(x)w(y)$，其中 $x \subset y$。存在唯一的延拓，可将 w扩展到所有开集 $w(U) = \prod_{x\in U} w(x)$。类比于 $\chi(U) = w_1(U) = \sum_{x\in U} w(x)$，我们将其称为 $U[7]$ 的费米特征 $\phi(U)$。它等于 $\det(L)$，其中连接矩阵 $L(x,y) = \chi(K(x) \cap K(y))$ 是格林函数矩阵 $g(x,y) = w(x)w(y)\chi(U(x) \cap U(y))$ 的逆矩阵。

2.6. 对于一般函数 $h\colon G^m \to R$，其中我们记 $h(X) = h(x_1, \cdots, x_m)$，可以定义 $w_m(G) = \sum_{X\in G^m,\, \bigcap X\in G} h(X)$，更一般地，

$$w_m(A) = \sum_{X\in A^m, \bigcap X\in A} h(X)$$

对于不一定是单纯复形的集合 $A \subset G$，我们不假设存在类似于 $h(X) = h(Y)$ 的对称性，其中 X 和 Y 是置换。我们主要取 $h(X) = \prod_{j=1}^m (-1)^{\dim(x)}$，因为这能确保 $w_m(G)$ 是组合不变量，也就是说，在重心细分下保持不变。对于任意星形邻域 k，$U(x_1) \ldots, U(x_m)$，定义 $U(X) = \bigcap_{j=1}^k U(x_j)$ 和 $\omega_m(U) = \sum_{X\in G^m, \bigcap X\in G} w(U(X))$。第一特征 $w_1(G) = \sum_{x\in G} w(x)$ 是 G 的欧拉示性数，第二特征 $w_2(G) = \sum_{x,y, x\cap y\in G} w(x)w(y)$ 是吴示性数，而第三特征是

$$w_3(G) = \sum_{x,y,z, x\cap y\cap z\in G} w(x)w(y)w(z) \, .$$

对于任意子集 A、B，我们有 $m = 1$满足性质 $w_1(A\cup B) = w_1(A) + w_1(B) - w_1(A\cap B)$；但对于一般的 A、B，这个赋值公式对 $m > 1$ 不成立，即使 A、B 一般都是闭集也如此。不过，若将 $w_m(G)$ 扩展为 $w_m(G_1, \ldots, G_m)$，其中 $G_j \subset G$ 是 G 的任意子集，则它是一个多重线性赋值。现在，固定其他所有集合 G_i、$i \neq j$ 后，$G_j \to w_m(G_1, \ldots, G_m)$ 满足线性性质 $\omega(A) + \omega(B) = \omega_m(A \cup B) + \omega_m(A \cap B)$。

2.7. 单点复形定义为可缩的。如果 G 是一个复形，且 $G \setminus U$（x）和 S（x）都可缩，则称 G 为**可缩**的。能够通过同伦约化和扩张相互变形的两个复形 G, H 称为**同伦的**。这是所有复形构成的空间上的一个等价关系。同伦不保维数，因此不是拓扑的。同伦保持 w_1（G），但不保持具有 $m > 1$ 的 w_m（G）。高阶特征是拓扑不变量，因为它们在同胚下保持不变。同胚是另一种等价关系：如果存在重心细分 G_m 和连续映射 $f\colon G_m \to H$（当然，使用上文定义的有限拓扑），使得 f^{-1}（S（x））与 S（x）同胚（其定义方式为：S（x）的最大维数小于 G 的最大维数），则称 H 是 G 的**连续像**。

且对于每个维数为 d 的局部极大 $x \in G$，复形 $f^{-1}(B(x))$ 都是一个 d-球。如果 G 是 H 的连续像，且 H 是 G 的连续像，则 G 与 H 同胚。$G-U(x)$ 形式的复形称为 d-球，其中 G 是一个 d-球面。$d(x)$ 可缩的 d-流形称为 d-球面。**d-流形** G 是一个复形，满足对于所有 x，单位球面 $S(x)$ 都是一个 $(d-1)$-球面。空复形是 (-1)-球面。

3. Energy theorem

3.1. 我们假设 $m,k \geq 1$ 为整数。将 k 点构型 $X \in G^k$ 的 m 阶势能定义为 $g_m(X) = w(X)w_m(U(X))$。根据定义，当 $U(X) = \bigcap U(x_j) = \emptyset$ 时，势能为零；如果至少有一个点不在其他点的作用范围内，就会出现这种情况。即使对于不相交的 x,y，也可能出现 $U(x) \cap U(y)$ 非空的情况，例如 x,y 是高维单形 z 的零维部分，且 z 属于 $U(x) \cap U(y)$。在这种情况下，x,y 无法由开集分离。我们的目标是，对于任意 $k \geq 1$ 和任意 $m \geq 1$，m 阶特征都可以用 k 点格林函数项 $g_m(x_1,\dots,x_k) = \prod_{j=1}^{k} w(x_j)w_m(\bigcap_{j=1}^{k} U(x_j))$ 表示。我们将其视为 k 点构型 $X=(x_1,\dots,x_k)$ 的 m 阶势能。

3.2. 我们的主定理表明，m阶特征就是所有可能的 k 点构型的**总能量**。

定理 1（能量）。 $w_m(G) = \sum_{X\in G^k} g_m(X)$。

Proof. </style}如果将定理表述得更一般一些，例如如果

$$h_m(x_1,\dots,x_m) = \prod_{j=1}^{m} w(x_j)$$

将其替换为一个关于 m 个变量的一般函数 $h_m(x_1,\dots,x_m)$，证明就会更简单。原因是映射 $h_m \to g_k$ 是线性的，因此我们只需验证最简单情形下的命题：h 仅在单个构型 $Z=(z_1,\dots,z_m)$ 处取值为 1，在其他情况下均为 0。此时左边为 1。对于右边，我们需要考察所有满足 $Z \in U(X) = U(x_1) \cap U(x_2) \cap \dots \cap U(x_m)$ 的 $X=(x_1,\dots,x_k)$。然而，正如下文将要看到的，这个条件将保证对所有 $j=1,\dots,m$，$\bigcup Z \subset U(x_j)$ 均成立。因此，$\sum_{X\in G^k} w(X)w_m(U(X)) = \prod_{j=1}^{k} \sum_{x_j\in G} w(x_j)w_m(U(x_j)) = 1$。□

3.3. 第二个主要要点是 $S(X) = \delta U(X) = B(x) \setminus U(x)$ 的**球面公式**。

定理 2 (球面公式)。 $0 = \sum_{X\in G^k} w(X)w_m(S(X))$。 8

这意味着，所有偶配置的单位球面的总能量与所有奇配置的单位球面的总能量相同。

证明。 若将 $U(X)$ 替换为 $B(X)$，能量定理同样成立，而后者是 $U(X)$ 的闭包。这两个方程

$$0 = \sum_{X \in G^k} w(X) w_m(U(X))$$

$$0 = \sum_{X \in G^k} w(X) w_m(B(X))$$

以及局部赋值公式

$$w_m(U(X)) - (-1)^m w_m(S(X)) = w_m(B(X))$$

证明了该定理。 □

3.4. 先补充一条注，不过这会引出另一个话题。我们希望将来能对此作更多论述：该定理也适用于**对偶球面** $X = S(x_1) \cap \cdots \cap S(x_k)$，而它与$S(X) = \delta(U(x_1) \cap \cdots \cap U(x_k))$不同。

$$0 = \sum_{X \in G^k} w(X) w_m(\hat{X}) \ .$$

ˆ 3.5. 对偶球面 X 在其他领域也发挥着重要作用，例如图着色。设 G 是一个 d-流形，且 X 中的所有点在如下度量下都彼此相邻：两点 x、$y \in S(x)$之间的距离为 1；那么 X 总是一个ˆ $(d-k)$-球面。若 $k = 1$，则 $X = S(x)$在流形情形下是一个ˆ $(d-1)$-球面。对于 $k = 2$以及 x、$y \in S(x)$，我们有 $(x$、$y) = S(x) \cap S(y)$ 是一个 $(d-2)$-球面。我们此前在图的语境中考察过这一点，其中$X = (v_1, \ldots\ldots, v_k)$是完全图 K_k 的顶点，因此与重心细分图中的一个顶点 x 相关联。若 G 是一个 d-流形，那么根据定义，ˆ$X =$ ˆx是一个 $(d-k)$-球面。我们曾将其视为一种对偶性，因为 $\bigcap_{v \in x} S(v) =$ ˆx且$\bigcap_{v \in \hat{x}} S(v) = x$。这可以看作 $(k-1)$-球面（单形的边界球面）与 $(d-k)$-球面之间的对偶性。将 k 平移后， k-球面与 $(d+1-k)$-球面之间存在对偶性。

3.6. 继续思考这一点，将上同调从单形转移到球面，或许能让我们更优雅地理解**庞加莱′对偶性**，避免使用诸如 CW 复形这样的概念；而在初等情形中，例如立方体是八面体的对偶体，就已经需要这些概念。若将立方体视为一个 2维球面，那么根据定义，它并不是单纯复形；若要将其理解为八面体的对偶体，它就只能是更一般的 CW 复形。因此，如果想避免连续统（正如我们所做的那样），通常就会转向 CW 复形。庞加莱′本人早已为一个难题颇费心力：单纯复形的对偶体并不是

单纯复形。我们将在 δ-集的背景下讨论对偶性； δ-集也能推广单纯复形，而且比 CW 复形更自然。 δ集比单纯集更一般；单纯集是一种结构，其结构比 δ 集稍丰富一些。不过，作为 δ 集的一个子类，单纯集并不容易理解。人们甚至专门撰写了整篇文章来解释其定义。

3.7. 这里还有另一条注，或许更适合数学物理爱好者：受**福克图景**的启发，在该图景中， G^k 被视为 k粒子构型，我们可以对 k 求和，从而得到例如

$$w_m(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{X \in G^k} g_m(X) \, .$$

如果我们用 $h(x) = (-1)^{\dim(x)}/2$ 替换 $w(x)$，并设 $h(X) = \prod_j h(x_j)$，仍然使用 $U(X) = \bigcap_j U(x_j)$，若 $X = (x_1, \ldots, x_k)$并令 $g_m(X) = h(X) w_m(U(X))$，便可以写成 $w_m(G) = \sum_X g_m(X)$，其中 X 遍历所有粒子构型，范围从单个粒子 $k = 1$到成对相互作用 $k = 2$、三体相互作用 $k = 3$ 等。空间的总能量于是等于所有可能粒子构型 X对应的相互作用能之和。如果我们将 $g_m(X)$视为粒子构型 X的势能，那么$w_m(G)$就是在 G中所有可能实现的粒子构型所对应的势能之和。

3.8. 以下是一些特殊情形的详细表述。首先，让我们写出**欧拉示性数**的定义

$$w_1(G) = \sum_{x \in G} w(x)$$

和**吴示性数**

$$w_2(G) = \sum_{x,y \in G^2, x \cap y \neq \emptyset} w(x) w(y) \, .$$

i) 对于 $m = 1$，我们有欧拉示性数的表达式：
$w_1(G) = \sum_x w(x) w_1(U(x)) = \sum_x g_1(x)$
$w_1(G) = \sum_{x,y} w(x) w(y) w_1(U(x) \cap U(y)) = \sum_{x,y} g_1(x, y)$
$w_1(G) = \sum_{x,y,z} w(x) w(y) w(z) w_1(U(x) \cap U(y) \cap U(z)) = \sum_{x,y,z} g_1(x, y, z)$
$w_1(G) = \sum_{x,y,z,w} g_1(x, y, z, w)$
$k = 1$ 和 $k = 2$ 的前两个表达式已在 [7]中出现。矩阵 $g_1(x, y)$ 的逆矩阵为 $L(x, y)$，当 $x = y$时为 $= 1$； 当 $x \neq y$时为 $= 0$ (x, y)。
ii) 接下来是吴示性数的表达式：
$w_2(G) = \sum_x w(x) w_2(U(x)) = \sum_x g_2(x)$
$w_2(G) = \sum_{x,y \in G} w(x) w(y) w_2(U(x) \cap U(y)) = \sum_{x,y} g_2(x, y)$
$w_2(G) = \sum_{x,y,z \in G} w(x) w(y) w(z) w_2(U(x) \cap U(y) \cap U(z)) = \sum_{x,y} g_2(x, y, z)$

$w_2(G) = \sum_{x,y,z,w} g_2(x,y,z,w)$ iii) 以下是第三特征的表达式$w_3(G) = \sum_x w(x) w_3(U(x)) = \sum_x g_3(x) w_3(G) = \sum_{x,y} w(x) w(y) w_3(U(x) \cap U(y)) = \sum_{x,y} g_3(x,y) w_3(G) = \sum_{x,y,z} w(x) w(y) w(z) w_3(U(x) \cap U(y)) \cap U(z)) = \sum_{x,y,z} g_3(x,y,z) w_3(G) = \sum_{x,y,z,w} g_3(x,y,z,w)$

注：1) 如果将 $h(X) = w(X)$ 替换为任意 R 值相互作用函数 $h: G^k \to R$，该定理仍然成立。例如，我们可以设 $w_2(A) = \sum_{x,\ y,\ x \cap y \in A} h(x,\ y)$，并令其等于 $\sum_{x,\ y \in G^2} g_2(x,\ y)$，其中

$$g_2(x,y) = w(x)w(y)w_2(U(x) \cap U(y))$$

或令其等于 $\sum_{x \in G} g_1(x)$，其中 $g_1(x) = w(x) w_2(U(x))$。

2) 在 $k = 1$ 的情形下，能量定理属于高斯-博内型，因为我们将固定曲率 $g_m(x)$ 附加到一个点上。实际上，我们也可以将其解释为庞加莱-霍普夫定理。这里存在某种对偶性，因为 $U(x)$ 可以视为与 $K(x)$ 对偶。

3) 能量公式大幅缩短了计算特征量所需的时间。尤其对于 $k = 1$，我们只需计算 $n = |G|$ 星形 $U(x)$ 的第 m 个特征量。

4) 我们可以不考虑所有 G^j 的自相互作用，而改为取开集 $G_j \subset G$，并得到表达式

$$w_m(G_1, \ldots, G_k) = \sum_{X, x_j \in G_j} g_m(X) \ .$$

例如，$w_m(A,\ B,\ C) = \sum_{x \in A,\ y \in B,\ z \in C} g_m(x,\ y,\ z)$，其中

$$g_m(x,y,z) = w(x)w(y)w(z)w_m(U(x) \cap U(y) \cap U(z)) \ .$$

将其视为三个集合 $A,\ B,\ C$ 的**总和第 m 阶特征能量**。5)我们已经看到，为了证明这些定理，更一般地对 $h(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_m)$ 以及集合 $w_m(G) = \sum_{X \in G^m,\ X>0} h(X)$ 进行能量化会有所帮助。将函数 $h: G^k \to R$ 映射为函数 $g: G^m \to R$，满足$g_m(X) = w(X) w_m(U(X))$ 的格林函数过程是线性的。因此，只需对基元素验证这一命题；其中 h(x) 除在 $h(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_k) = 1$ 处外均为零。

4. Valuation Lemma

4.1. 下述定理是高阶特征成为拓扑不变量的一个主要原因。只要 $m \geq 2$，下述赋值公式一般就不适用于闭集。

引理 1 (赋值)。 $w_m(U \cup V) = w_m(U) + w_m(V) - w_m(U \cap V)$ 对所有开集$U,\ V$ 以及所有 $m \geq 1$。

4.2. 其成立的关键在于：
引理 2 (拼接)。 给定 $X \in G^k$ 和 U，V 是开集，定义 $z = \bigcap X$。若 $z \in U \cap V$，则 x、y 同时属于 U、V，因此 $x \in U \cap V$ 且 $y \in U \cap U$。

拼接。如果 $z = \bigcap X$ 属于 $U \cap V$，那么每个包含 z 的单形 w 既属于 U，也属于 V，因此属于 $U \cap V$，从而 w 也属于 U，以及 V 和 $U \cap V$。由于这对任意 w 都成立，因此对任意点 x_j 也成立。由于所有 x_j 都属于 U，V，$U \cap V$，并集 $z = \bigcup X$ 也属于这三个集合。□

赋值。在 $U \cup V$ 中计算 X，等于在 U 中的计数加上在 V 中的计数；若 X 属于交集，则会被重复计算一次。□

注：
1) 对于 $m > 1$，这通常不适用于闭集；若 $m > 1$，也不适用于闭集与开集的混合情形。我们将看到，对于一般的 m，若有一个开集 $A = U(x)$、一个不相交的闭集 $B = S(x)$，以及闭并集 $B(x)$ 和空交集，则有 $\omega_m(U(x)) - \omega_m(S(x)) = \omega_m(B(x))$；但对于奇数 m，则有 $\omega_m(U(x)) + \omega_m(S(x)) = \omega_m(B(x))$。

a) 对于 $G = \{(1), (2), (3), (12), (23)\}$，这两个闭集 $A = \{(1), (2), (12)\}$，$B = \{(2), (3), (23)\}$ 在 $C = \{(2)\}$ 中相交。现在 $w_2(A) = w_2(B) = -1$ 现在 $\omega_2(A) + \omega_2(B) = w_2(G) - \omega_2(S)$。

b) 若 G 是由连接 $C_4 \oplus \{a, b\}$ 与 $A = G \setminus U(a)$ $B = G \setminus U(b)$ 得到的八面体复形，这两者都是球，并且相交于圆 $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, (x_1x_2), (x_2x_3), (x_3x_4), (x_4x_1)\}$，该圆也是闭的。对 $(ax_1) \subset A$ 与对 $(bx_1) \subset B$ 相交，但这两对都不在 S 中。尽管如此，$w_1(A) + w_2(B) = w_2(G) + w_2(S)$。
示例 a) 表明，寻找更一般的关系意义不大，因为这取决于 m 和维数。

2) 在特殊情形 $m = 1$ 下，也就是讨论欧拉示性数时，赋值公式对所有集合都成立，因为点之间不存在相互作用。这就是为什么对于 $m = 1$，我们有一个同伦不变量，而对于 $m > 1$ 我们有拓扑不变量。

4.3. 局部赋值公式将两个闭集和一个开集联系起来：

引理 3 （局部赋值）。

$$w_m(B(x)) = w_m(U(x)) - (-1)^m w_m(S(x))$$

这对开集 $U(X) = \bigcap U(x_j)$ 和 $B(X) = U(X)$ 以及 $S(X) = B(X) \setminus U(X)$（边界）更一般地也成立。原因在于，$U(X)$ 是若干两两不相交的开集 $U(x)$ 的不交并集。

5. The case of manifolds

5.1. 对于 $x \in G$，单位球 $B(x) = U(x)$ 和单位球面 $S(x) = B(x) \setminus U(x)$ 都是闭集，因此也是单纯复形。若复形 G 的每个 $S(x)$ 都是一个 $(d-1)$-球面，则称其为 d-流形。若存在 x 使得 $G \setminus U(x)$ 可缩，则称 d-流形为 d-球面。当 G 是一个 d- 球面时，$G \setminus U(x))$ 被定义为一个 d- 球。若存在 $x \in G$ 使得 $S(x)$ 和 $G \setminus U(x)$ 都可缩，则称复形 G 可缩。这些定义是关于维数 d 的递归定义。其基础是将空集 $0 = \emptyset$ 视为 (-1)-球面，并假设称为单位 $1 = \{1\}$ 的单点复形是最小的可缩复形。

5.2. 带边界流形是一种复形 G，其中每个 $S(x)$ 要么是一个（$d-1$）球面，要么是一个（$d-1$）球。边界 $\delta G = \{x \in G, S(x)$ 球$\}$是 G 的闭子集。（只需检查，若 $x \in \delta G$ 且 $z \subset x$，则 $S(z)$ 是一个球。）它是一个（$d-1$）流形，因为对于 $z \in \delta G$，集合 $S(z) \cap \delta G$ 是一个球面，这是因为 $B(z) \cap \delta G$ 是一个（$d-1$）单位球。这里我们必须区分"闭合= 无边界"和"闭合=拓扑闭合"。我们还希望讨论无边界开流形（例如开圆盘），以及在拓扑上闭合、但作为流形并非闭合的带边界流形。开流形也可用来刻画连续统中的无限流形；例如，余切对应使得空间（-1，1）可自然地与 $\mathbb{R}$ 同胚。我们用 U 表示无边界开流形，用 G 表示闭包，用 S 表示边界。因此，$S = \delta G$ 是拓扑边界。

5.3. 我们可以在无边界流形的情形下验证 $w_m(B(x)) = w_m(U(x)) - (-1)^m w_m(S(x))$。

引理4 (流形情形下的局部数据). $w_m(U(x)) = (-1)^{dm}$, $w_m(S(x)) = 1 + (-1)^{d-1}$ 以及 $w_m(B(x)) = (-1)^{d(m+1)}$.

定理3 (流形 M). ***(i)*** 对于有边界或无边界的偶数维流形 $w_m(M) = w_1(M)$.
(ii) 对于带边界的奇数维流形$w_m(M) = w_1(M) - (-1)^m w_1(S)$.

证明。对于带边界的偶数维流形 S，在内部有 $w_m(U(x)) = 1$，在边界处有 $w_m(U(x)) = 0$，因此公式 $w_m(M) = \sum_x \omega(x) w_m(U)$ 立即表明 $w_m(M) = \sum_x w(x) = w_1(M)$。对于无边界的奇数维流形，这也成立。对于带边界的奇数维流形 S，在内部有 $w_m(B(x)) = 1$，在边界处有 $w_m(B(x)) = -(-1)^m$。因此，无论有无边界，$w_m(M) = w_1(M) - (-1)^m w_1(S)$。

在流形没有边界这一特殊情形下，我们也可以使用能量定理 $w_m(G) = \sum_x w(x)w_m(U(x))$。前一个引理 $w_m(U(x)) = w(x)^m = (-1)^{dm}$ 表明，若 d 为偶数，则 $w_m(U(x)) = 1$，因此 $w_m(G) = \sum_x w(x) = w_1(G)$。若 d 为奇数，则 $w_1(G) = \sum_x w(x) = 0$，而乘以常数 $w_m(x) = (-1)^{dm}$ 后，这一点不会改变。□

6. Topological invariance

6.1. 若单形 x 不包含在任何更大的单形中，则称其为**局部极大的**。这意味着，局部极大点的星形 $U(x) = \{x\}$ 因此只包含 x 中的一个点。若单纯复形之间的映射 $f: G \to H$ 满足：当 U在 H中为开集时，$f^{-1}(U)$在 G中为开集，则称该映射**连续**。若存在连续映射 $f: G \to H$，使得对于所有 x，$f^{-1}(S(x))$ 与 $S(x)$ 同胚，并且对于每个单位球 $B(x)$，只要 x 在 H中局部极大，$f^{-1}(B(x))$ 就是一个 $dim(x)$- 球，则称复形 H 是 G 的**拓扑像**。如果 G 和 H 互为拓扑像，则称这两个复形**同胚**。此外，这个定义是递归的，它依赖于维数为 $(d-1)$ 时的同胚。 在同胚类上保持不变的量称为**拓扑不变量**。

6.2. 相比之下，如果某个量在**重心细分**下保持不变，它就是**组合不变量**。在这里，我们需要说明开集的重心细分具体指什么。我们不能像处理闭集那样，直接取关联图的 Whitney 复形，因为 Whitney 复形是单纯复形。按照这种定义，开集的重心细分就会是一个闭集。我们可以考虑复形 G 的一个开集 U，并将 U_1 定义为 G 的重心细分 G_1 中重心细分（$G \backslash U$）$_1$ 的补集。Bott 将**组合不变量**定义为进行重心细分时保持不变的量。对于所有 $m \geq 1$，我们有：

定理4（不变性）。 w_m 是拓扑不变量。 w_m 是组合不变量。

证明。首先检查 w_m 在所有 d维球 B上都相同。这由一般流形公式得出，因为 B 是带边界的流形。对于奇数 m，有 $w_m(B) = w_1(B)$。对于偶数 m，有 $w_m(B) = w_1(B) - w_1(S)$，其中S 是边界。关于 w_m 在重心细分下保持不变这一事实，将在下一节关于拓扑乘积的内容中讨论。给定两个一般的G，H 与其同胚。根据定义，存在一个从G_n 到 H的连续映射。现在使用球公式 $w_m(H) = \sum_x w(x)w_m(B(x))$。我们声称，这与 $w_m(G) = \sum_{f^{-1}(B(x))} w(x)w_m(f^{-1}(B(x)))$ □相同

6.3. 具有**德恩-索梅维尔空间**（如上文再次定义）的性质是拓扑性质。如果 G, H 同胚，且 G 是德恩-索梅维尔空间，那么 H 也是德恩-索梅维尔空间。证明可用归纳法完成。验证其对维数不超过 d的情形成立后，由于存在单位球面的拓扑对应关系，确保所有单位球面都是德恩-索梅维尔空间，因此它对维数为 $d+1$ 的情形也成立。

6.4. 另一个值得提及的问题是，如何为开集定义同伦。一种思路是：如果 $U^c = G \setminus U$ 和 V^c 是同伦的闭集，就称两个开集 U，V 在 G 中同伦。不过，我们希望若 U，V 同伦，那么贝蒂向量 $b(U)$ 和 $b(V)$ 应当相同。例如，开三维球的贝蒂向量为 (0，0，0，1)，而闭三维球的贝蒂向量为 (1，0，0，0)。由于欧拉示性数不相等，它们本就不应被视为同伦的。希望今后有论文能对这一问题作进一步探讨。

7. 拓扑乘积

7.1. 两个单纯复形 G，H 的**拓扑乘积** $G \cdot H$，是这样一个图的惠特尼复形：其顶点为笛卡尔积 $G \times H$；若 $(a,\ b)$ 和 $(c,\ d)$ 要么 $a \subset b,\ c \subset d$，要么 $b \subset a,\ d \subset c$，则它们相连。它是 $V = G \times H$ 的子集所构成的集合，并且仍是一个单纯复形。

7.2. 与 **Shannon乘积**等其他乘积不同，拓扑乘积具有拓扑性质。它保留流形，而且正如我们将看到的，它与所有高阶特征兼容。

引理5。 如果 G 和 H 是流形，那么 $G \cdot H$ 是流形。

证明。我们再次概述论证：我们需要考察点（x，y）的单位球面S（x，y），并证明它是一个 $d-1$球面。 S（x，y）是两个圆柱的并集：S（x）$\cdot B$（y）和 B（x）$\cdot S$（y），它们沿着S（x）$\cdot S$（y）粘合在一起。例如，在一个一维流形 G与一个一维流形 H的乘积情形中，单位球面 S（x，y）是一个“正方形”，它由 S（x）$\times B$（y）（左右两部分）和 B（x）$\times S$（y）（上下两部分）组成，两者相交于 4 个点 S（x）$\times S$（y）。要看出这是一个球面，只需将 B（y）压缩为一点，即可看到 S（x，y）与 S（y）和 S（x）的连接同伦，而该连接是一个球面。接着逐一检查 S（x，y）中的每个点，发现其单位球面都是一个 $d-2$ 球面。对于 B（y）或 B（x）中的内点，这可由归纳法得出。对于 S（x）$\times S$（y）中的点，其单位球面是两个（$d-2$）球沿一个（$d-3$）球面粘合而成的副本，因此是一个（$d-2$）球面。□

7.3. 同样，通过进一步分析边界点的单位球面，并利用球与球面的连接是一个球这一事实，可得:

引理 6. 如果 G、H 是带边界流形，那么 $G \cdot H$ 是带边界流形。

例如，两个闭区间的乘积是一个正方形，区间与圆的乘积是一个闭圆柱。

7.4. 拓扑乘积不满足结合律。复形 $G \cdot 1$ 是 G 的重心细分 G_1，因此 $G \cdot (1 \cdot 1) = G_1$，而 $(G \cdot 1) \cdot 1 = G_2$ 是第二次重心细分。

7.5. 这里有一种代数的 **Stanley-Reisner** 描述（可在代码部分看到其实现）。如果 $V = \bigcup_{x \in G} x$ 中的元素用变量 t_1、.....、t_q 标记，那么每个 $x \in G$ 都可以写成单项式 $t(x) = t_{j_0} t_{j_2} \ldots t_{j_{\dim(x)}}$，而且 $x \subset y$ 可通过代数方式编码为 $t(x)|t(y)$。复形 G 是一个多项式 $\sum_{x \in G} t(x)$。同样，复形 H 由多项式 $\sum_{y \in H} t(y)$ 给出。现在，乘积 $G \cdot H$ 表示为这两个多项式的乘积。$G \cdot H$ 的顶点集有 $|G||H|$ 个元素。

7.6. 例如，如果 $G = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ 和 $H = \{\{3\}, \{4\}, \{3,4\}\}$。乘积复形 $G \cdot H$ 是一个顶点集含有 9 个元素的复形。

定理 5 (乘积)。 $w_m(G \cdot H) = w_m(G) w_m(H)$。
证明。 我们有 $w_m(G) = \sum_{x_1, \ldots, x_m, \bigcap X > 0} h(x_1) \cdots h(x_m) = \sum_X h(X)$。类似地，$w_m(H) = \sum_{y_1, \ldots, y_m, \bigcap Y > 0} h(y_1) \cdots h(y_m) = \sum_Y h(Y)$。现在，

$$\begin{aligned} w_m(G \cdot H) &= \sum_{X,Y \bigcap X>0, \bigcap Y>0} h(x_1) \cdots h(x_m) h(y_1) \cdots h(y_m) \\ &= \sum_{X,Y} h(X) h(Y) \\ &= \sum_X h(X) \sum_Y h(Y) = w_m(X) w_m(Y) \ . \end{aligned}$$

□

7.7. **注:**
1) 一个特殊情形是 $H = 1 = \{\{1\}\}$，其中 $G_1 = G \cdot 1$ 是重心细分。而 $w_m(G_1) = w_m(G)$ 是一个特殊的重要情形。
2) 与 $m = 1$ 的情形一样，如果 G 是有限简单图的惠特尼复形，我们想了解取乘积时曲率的变化。在 Shannon 乘积和 $m = 1$ 的情形中，我们已经看到曲率会相乘。

8. Code

8.1. 以下是一些代码。照例，可以从 arXiv 的 LaTeX 源文件中复制粘贴。鉴于 Wolfram 语言允许以类似伪代码的形式编写数学过程，这些过程应该相当容易理解。至于拓扑乘积，我们重复使用了此前采用的代数框架 [3]，（当时甚至还不知道 Stanley–Reisner 环）。

```
闭包[一个_]:=如果[A=={},{},删除[并集[排序[展平[映射[子集,A_],1]]],1]];
边界[A_]:=补集[闭包[A],A];
惠特尼[的_]:=如果[长度[边列表[的_]]==0,映射[{#}&,顶点列表[的_]],
  映射[排序,排序[闭包[查找团[,无穷大,全部_]]]]];
UU[G_,x_]:=模块[{U={}},
  执行[如果[SubsetQ[G[[k_]],x_],U=追加[U,G[[k_]]],{k,长度[G]}];U];
VV[G_,x_]:=模块[{U={}},
  执行[如果[SubsetQ[x,G[[k_]]],U=追加[U,G[[k_]]],{k,长度[G]}];U];
基底[G_]:=表[UU[G,G[[k_]]],{k,长度[G]}];          星号=基底;
核[G_]:=表[VV[G,G[[k_]]],{k,长度[G]}];
子基[G_]:=模[{V=并集[展平[G]]},表[UU[G,{V[[k_]]}],{k,长度[V]}]];
单位球面[G_]:=模[{B=Basis[G]},
  表[补集[闭包[B[[k_]]],B[[k_]]],{k,长度[B]}]];
UnitBalls[G_]:=映射[闭包,Basis[G_]];
闭包[U,A_]:=模[{V=U},Do[V=并集[Append[V,
  并集[V[[k_]],A[[l_]]]]],{k,长度[V]},{l,长度[A]}];V];
拓扑[G_]:=模[{V=B=基[G]},
  Do[V=闭包[V,B],{长度[并集[展平[G]]]}];附加[V,{}]];
图基[s_]:=基[惠特尼[s_]];
零度[Q_]:=长度[零空间[Q_]];          sig[x_]:=符号[x_];
sig[x_,y_]:=如果[SubsetQ[x,y]&&(长度[x]==长度[y]+1),
  sig[前置[y,补集[x,y]][[1]]]*sig[x],0];
Fvector[G_]:=如果[长度[G]==0,{},删除[BinCounts[Map[长度,G]],1]];
F函数[G_,t_]:=模块[{f=Fvector[G],n},清除[t];          n=长度[f];
  若[长度[顶点列表[s_]]==0,1,1+总和[f[[k_]]*t^k,{k,n}]]];
重心图[s_]:=转为图[惠特尼[s_]];
重心复形[G_]:=惠特尼[转为图[G]];
维数[x_]:=长度[x]-1;w[x_]:=(-1)^维数[x];
吴1[A_]:=总和[映射[w,A_]];          Chi=Wu1;                    欧拉示性数=Wu1;
吴2[A_]:=模块[{a=长度[A]},求和[x=A[[k_]]];求和[y=A[[l_]]];
  如果[MemberQ[A,交集[x,y_]],1,0]*w[x]*w[y],{l,a}],{k,a}]];吴=Wu2;
吴3[A_]:=模块[{a=长度[A]},求和[x=A[[k_]];求和[y=A[[l_]];求和[z=A[[o_]];
  如果[MemberQ[A,交集[x,y,z_]],1,0]*
  w[x]*w[y]*w[z],{o,a}],{l,a}],{k,a}]];
由复形构造环[G,a_]:=模[{V=并集[展平[G]],n,T,U},
  n=长度[V];静默[T=表[V[[k]]->a[[k_]],{k,n}]];
  静默[U=G/.T];求和[乘积[U[[k,l_]],
  {l,长度[U[[k_]]]}],{k,长度[U]}]];
由环构造复形[f_]:=模[{s,ff},s={};ff=展开[f_];
  执行[执行[如果[分母[ff[[k_]]/ff[[l_]]]==1&&k!=l,
    s=追加[s,k->l_]],{k,长度[ff]}],{l,1,长度[ff]}];
  惠特尼[无向图[图[范围[长度[ff_]],s_]]]];
拓扑乘积[G_,H_]:=模[{},
  f=由复形构造环[G,"a"_];
  g=由复形构造环[H,"b"_];F=展开[f*g_];          由环构造复形[F_]];
```

8.2. 以下各行展示了随机复形的一些恒等式。

```
G=惠特尼 [随机图 [{9,15}]]; G =排序 [G]; G =映射[排序,                G]; n =长度 [G];
U1=基 础 [G]; U2=表 [交集 [U1[[k]],U1[[l]]], {k, n}, {l, n}];
U3=表 [交集 [U1[[k]],U2[[l,m]]],{k,n},{l,n},{m,n}];
V1=核 [G]; V2=表 [交集 [V1[[k]],V1[[l]]],{k,n},{l,n}];
V3=表 [交集 [V1[[k]],V2[[l,m]]],{k,n},{l,n},{m,n}];
S1=映射[边界,U1]; S2=表 [边界 [U2[[k,l]]],{k,n},{l,n}];
S3=表 [边界 [U3[[k,l,m]]],{k,n},{l,n},{m,n}];
B1=映射[闭包,U1]; B2=表 [闭包 [U2[[k,l]]],{k,n},{l,n}];
B3=表 [闭包 [U3[[k,l,m]]],{k,n},{l,n},{m,n}];

打印 ["  检查能量      公式      "];
吴1[G]==总和 [表 [w[G[[k]]]*吴1[U1[[k]]],{k,n}]];
吴2[G]==总和 [表 [w[G[[k]]]*吴2[U1[[k]]],{k,n}]];
吴1[G]==总和 [展平 [表 [w[G[[k]]]*w[G[[l]]]*吴1[U2[[k,l]]],{k,n},{l,n}]]]
吴2[G]==总和 [展平 [表 [w[G[[k]]]*w[G[[l]]]*吴2[U2[[k,l]]],{k,n},{l,n}]]]
吴1[G]==总和 [展平 [表 [w[G[[k]]]*w[G[[l]]]*w[G[[m]]]*吴1[U3[[k,l,m]]],
   {k, n}, {l, n}, {m, n}]]]
吴2[G]==总和 [展平 [表 [w[G[[k]]]*w[G[[l]]]*w[G[[m]]]*吴2[U3[[k,l,m]]],
   {k, n}, {l, n}, {m, n}]]]

打印 ["  检查能量      球公式      "];
吴1[G]==总和 [表 [w[G[[k]]]*吴1[B1[[k]]],{k,n}]]
吴2[G]==总和 [表 [w[G[[k]]]*吴2[B1[[k]]],{k,n}]]
吴1[G]==总和 [展平 [表 [w[G[[k]]]*w[G[[l]]]*吴1[B2[[k,l]]],{k,n},{l,n}]]]
吴2[G]==总和 [展平 [表 [w[G[[k]]]*w[G[[l]]]*吴2[B2[[k,l]]],{k,n},{l,n}]]]
吴1[G]==总和 [展平 [表 [w[G[[k]]]*w[G[[l]]]*w[G[[m]]]*吴1[B3[[k,l,m]]],
   {k, n}, {l, n}, {m, n}]]]
吴2[G]==总和 [展平 [表 [w[G[[k]]]*w[G[[l]]]*w[G[[m]]]*吴2[B3[[k,l,m]]],
   {k, n}, {l, n}, {m, n}]]]

打印 ["  检查球面      公式      "];
0==总和 [表 [w[G[[k]]]*吴1[S1[[k]]], {k, n}]]
0==总和 [表 [w[G[[k]]]*吴2[S1[[k]]], {k, n}]]
0==总和 [展平 [表 [w[G[[k]]]*w[G[[l]]]*吴1[S2[[k,l]]],{k,n},{l,n}]]]
0==总和 [展平 [表 [w[G[[k]]]*w[G[[l]]]*吴2[S2[[k,l]]],{k,n},{l,n}]]]
0==总和 [展平 [表 [w[G[[k]]]*w[G[[l]]]*w[G[[m]]]*吴1[S3[[k,l,m]]],
   {k, n}, {l, n}, {m, n}]]]
0==总和 [展平 [表 [w[G[[k]]]*w[G[[l]]]*w[G[[m]]]*吴2[S3[[k,l,m]]],
   {k, n}, {l, n}, {m, n}]]]

打印 ["  检查局部      赋值      公式      "];
映射[Wu1, U1]==映射[Wu1, B1]-映射[Wu1, S1]
并集 [展平 [表 [Wu1[U2[[k,l]]]+Wu1[S2[[k,l]]]-Wu1[B2[[k,l]]],{k,n},{l,n}]]]
映射[Wu2, U1]==映射[Wu2, B1]+映射[Wu2, S1]
并集 [展平 [表 [Wu2[U2[[k,l]]]-Wu2[S2[[k,l]]]-Wu2[B2[[k,l]]],{k,n},{l,n}]]]

打印 ["  检查  乘积    "];
G=惠特尼 [随机图 [{6,10}]]; H=惠特尼 [星图 [5]];
GH=拓扑乘积 [G,H];
{吴1[G],吴1[H],吴1[GH]}
{吴2[G],吴2[H],吴2[GH]}

(* A bit more time consuming to compute *)
吴3[G]==总和 [表 [w[G[[k]]]*吴3[B1[[k]]],{k,n}]]
吴3[G]==总和 [展平 [表 [w[G[[k]]]*w[G[[l]]]*吴3[B2[[k,l]]],{k,n},{l,n}]]]
```

References

[1] P. Alexandroff。《离散空间》。《数学文集》*2*，2，1937年。[2] M. Dehn 和 P. Heegaard。位置分析。《数学科学百科全书》，III.1.1:153–220，1907年。[3] O. Knill。图的 K¨unneth 公式。http://arxiv.org/abs/1505.07518，2015年。[4] O. Knill。关于单纯复形的 Dehn-Sommerville泛函。https://arxiv.org/abs/1705.10439，2017年。[5] O. Knill。单纯复形的计数矩阵。https://arxiv.org/abs/1907.09092，2019年。[6] O. Knill。赋能单纯复形。https://arxiv.org/abs/1908.06563，2019年。[7] O. Knill。单纯复形的能量。《线性代数及其应用》，600:96– 129，2020年。[8] O. Knill。赋能复形的格林函数。https://arxiv.org/abs/2010.09152，2020年。[9] O. Knill。有限几何的有限拓扑。https://arxiv.org/abs/2301.03156，2023年。[10] O. Knill。球面公式。https://arxiv.org/abs/2301.05736，2023年。

Department of Mathematics, Harvard University, Cambridge, MA, 02138