arXiv:2302.02517v1 [math.AG] 6 Feb 2023

射影簇上伴随线性系的协同子

Purnaprajna Bangere 和 Justin Lacini

谨以此文献给 David Eisenbud 和 Francisco Javier Gallego

Abstract. 设 X 是一个维数为 n 的光滑复射影簇， A 是一个丰且无基点的除子。我们证明 $K_X + mA$ 满足 N_p 性质，其中 $m \geqslant n + 1 + p$。我们还证明，截面的分次环 $R(X, K_X + mA)$对于$m \geqslant n + 2$是 Koszul 的。

1. Introduction

长期以来，定义代数簇的方程一直是几何学家感兴趣的课题。八十年代初，Mark Green[Gre84a, Gre84b] 从新的视角审视这一课题，将关于射影正规性和正规表示的经典结果视为涉及齐次坐标环最小自由分解这一更普遍现象的特例。Green 和 Lazarsfeld 针对代数曲线的情形证明了优美的结果，将嵌入的几何与最小自由分解的结构联系起来 [Gre84a, GL88, GL86, GL87]。近来，这一方向取得了很大进展（例如参见 [Voi02, Voi05]）。

M. Green 的一项结果格外引人关注，因为它为将曲线上的协同结果推广到更高维度提供了途径。设 L 是亏格为 g 的曲线 C 上的线丛，且 $\deg(L) \geqslant 2g + 1 + p$。则 L 满足性质 N_p，其定义如下。令 $S = \mathrm{Sym}^\bullet H^0(X, L)$，并考虑截面的分次环 $R = R(X, L) = \oplus_k H^0(X, L^{\otimes k})$，其具有自然的 S-模结构。令 $E_\bullet$ 为 R 的极小分次自由分解。

定义 1.1. 线丛 L 满足性质 N_p，如果

(1) $E_0 = S$，如果 $p \geqslant 0$。(2)

$E_i = S(-i-1)^{\oplus b_i}$，对于 $1 \leqslant i \leqslant p$。

因此，Green 的结果表明，当 A 是丰沛除子且 $m \geqslant p + 3$ 时，一个与$K_C + mA$ 同样正的除子满足 N_p。几年后，Reider [Rei88] 证明，对于任意 $m \geqslant 4_1$， $K_S + mA$ 都是非常丰沛的

若 A 是光滑代数曲面 S 上的丰沛除子。继 Reider 的工作之后，Mukai 猜想，对于任意$m \geqslant p+4$，只要 A 是丰沛除子， $K_S + mA$ 就满足 N_p。即使对于 $p = 0$，Mukai 猜想一般仍未解决。已有一些相关研究。对于反典范有理曲面，文献 [GP01]，证明了该猜想的一个更强版本；对于一般型曲面，当 A 是丰沛且无基点时，文献 [GP99, Pur05] 证明了一个一般性版本；而对于 Kodaira 维数为零的曲面，文献 [GP99] 得到了较弱的界。关于挠曲簇，参见 [But94, Par06, AS91, GP96] 等文献。

Fujita 曾提出一个著名猜想：对于维数为 n 的射影簇 X，若 A 是丰沛除子，则对任意 $m \geqslant n+2$， K_X+mA 都是非常丰沛的。受这一系列思想和猜想的启发，Ein 和 Lazarsfeld[EL93] 证明了以下优美的结果：若 A 是 X 上的非常丰沛线丛，则对任意 $m \geqslant n+1+p$， $K_X + mA$ 满足 N_p。此后，这一直是一个未决问题（参见 [EL93，第 4] 节）：若 A 仅为丰沛且无基点，类似结果是否仍然成立？本文旨在对此问题给出肯定的回答：

定理 1.2. 设 X 是维数为 n 的光滑复射影簇，且 A 是丰沛且无基点的除子。那么线丛 $L_m = \mathcal{O}_X(K_X+mA)$ 对任意 $m \geqslant n+1+p$ 均满足性质 N_p。

将 A 的正性假设从非常丰沛放宽到丰且无基点，会带来重大挑战；我们的方法与 [EL93] 的方法大不相同。关于 N_0 和 N_1 的结果已在 [MR19] 中针对具有数值有效 K_X 的簇得到，其方法与 [Pur05]，类似；而阿贝尔簇 [Par00] 和 Calabi–Yau 簇 [GP98, Niu19] 上性质 N_p 的最优界也已得到证明。

每当性质 N_1 成立时，一个自然的问题是截面的齐次环是否为 Koszul。这一课题长期以来一直受到代数学家和几何学家的共同关注。设 R 为一个分次 $\mathbb{C}$-代数，且 $E_\bullet$ 是 $\mathbb{C}$ 作为 R-模的最小分解。

定义 1.3。若对于任意 $i \geqslant 1$，都有 $E_i = R(-i)^{\oplus b_i}$，则称环 R 为 Koszul。

Pareschi [Par93]改进了 [EL93] 的方法，证明若 A非常丰沛，则对任意 $m \geqslant n+2$， $R(X, K_X + mA)$都是 Koszul。若 A 仅为丰且无基点，是否仍成立一直是个未决问题。作为证明主定理所用方法的推论，我们得到如下结果：

定理 1.4. 设 X 是维数为 n 的光滑复射影簇，且 A 是丰沛无基点除子。那么，对于任意 $m \geqslant n+2$，截面的分次环 $R(X, K_X + mA)$ 都是 Koszul 的。

基于藤田猜想、 [EL93] 以及本文的结果，我们最后提出以下自然问题。

问题 1.5. 设 X 是维数为 n 的光滑复射影簇，且 A 是丰沛除子。对于所有 $m \geqslant n+2+p$，线丛 $L_m = \mathcal{O}_X(K_X + mA)$ 是否满足性质 N_p？

我们指出，目前看来这完全超出了我们的能力范围；甚至在 $n = 2$ 和 $p = 0$ 的特殊情形下，这一点也尚不为人所知。

致谢。感谢 Lawrence Ein 对本文的关注、富有帮助的讨论以及鼓励。

2. Notation and conventions

我们在复数域 $\mathbb{C}$ 上工作。当然，所有结论逐字适用于任意零特征代数闭域。即使 L 只是整体生成的，我们也使用定义 1.1 来定义性质 N_p。一对 (X, Δ) 是由正规簇 X 和一个 $\mathbb{Q}$-Weil 除子 Δ 构成的数据，其中 $K_X + \Delta$ 是 $\mathbb{Q}$-Cartier。若 $\Delta \geqslant 0$，则称 (X, Δ) 为对数对。(X, Δ) 的对数消解是一个射影态射 $f\colon Y \to X$，满足 Y 光滑，且 $\mathrm{Ex}(f) \cup \mathrm{Supp}(f^{-1}(\Delta))$ 是简单正规交叉除子。若对于任意曲线 $C \subseteq X$ 都有 $D \cdot C \geqslant 0$，则称 $\mathbb{Q}$-Cartier 除子 D 数值有效。若 L_1 和 L_2 是 X 上的两个层，我们用 $L_1 \boxtimes L_2$ 表示层 $\mathrm{pr}_1^* L_1 \otimes \mathrm{pr}_2^* L_2$ 在 $X \times X$ 上的形式。对于多个乘积以及除子的情形，我们也采用类似的记号。

3. 预备知识

本节汇集一些基本结果，我们将在定理 1.2 和定理 1.4 的证明中用到这些结果。我们先介绍一些初等交换代数。

3.1. 乘积与对角线。设 A 是一个维数为 n 的局部诺特 $\mathbb{C}$-代数。设 $A(r) = A \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} A$ 是由 r 个 A 的张量积。对于 $1 \leqslant j \leqslant r$，设 $i_j\colon A \to A(r)$ 是自然包含，并设 $m_j = i_j(m) \cdot A(r)$。

引理 3.1. 固定 $1 \leqslant j \neq k \leqslant r$。在上述记号下，我们有：

(1) $\mathrm{Tor}_i^{A(r)}(A(r)/m_j, m_k) = 0$ *for any* $i > 0$.

(2) $\mathrm{Tor}_0^{A(r)}(A(r)/m_j, m_k) = m_k \otimes_{A(r)} A(r)/m_j \cong m_k \cdot A(r)/m_j$.
(3) $\mathrm{Tor}_i^{A(r)}(A(r)/m_j, A(r)/m_k) = 0$ *for any* $i > 0$.
(4) $\mathrm{Tor}_i^{A(r)}(m_j, m_k) = 0$ *for any* $i > 0$.

证明。首先，注意到

$$A(r)/m_j \cong (A/m) \otimes_{\mathbb{C}} A(r-1) \cong A(r-1)$$

现在令 $F_\bullet$ 为 m 作为 A-模的一个自由分解。由于 i_k : $A \to A(r)$ 是平坦的，我们有 $F_\bullet \otimes_A A(r)$ 是 $m \otimes_A A(r) \cong m_k$ 作为 $A(r)$-模的一个自由分解。因此，我们可以通过与 $A(r)/m_j$ 取张量积来计算 $\mathrm{Tor}_i^{A(r)}(A(r)/m_j, m_k)$。由同构 $A(r-1) \cong A(r)/m_j$ 可得

$$(F_\bullet \otimes_A A(r)) \otimes_{A(r)} A(r)/m_j \cong F_\bullet \otimes_A A(r-1)$$

由于这是正合的，我们得到 (1) 和 (2)。现在考虑短正合列

$$0 \to m_j \to A(r) \to A(r)/m_j \to 0$$

分别与 $A(r)/m_k$ 和 m_k 取张量积，可得 (3) 和 (4)。□

推论 3.2. 在上述记号下，我们有

$$m_j \otimes_{A(r)} m_k \cong m_j \cdot m_k = m_j \cap m_k$$

证明。再次考虑短正合列

$$0 \to m_j \to A(r) \to A(r)/m_j \to 0$$

那么，通过与 A/m_k 取张量积并使用引理 3.1 (3)，可得 $m_j \cdot m_k = m_j \cap m_k$; 而通过与 m_k 取张量积并使用引理 3.1 (1)，可得 $m_j \otimes_{A(r)} m_k \cong m_j \cdot m_k$。□

引理 3.3。固定 $1 \leqslant s \leqslant r$ 并令 $m_r(s) = m_1 \otimes_{A(r)} \cdots \otimes_{A(r)} m_s$。则

(1) 对所有 $s \leqslant r-1$ 和 $i > 0$, $\mathrm{Tor}_i^{A(r)}(A(r)/m_r(s), m_r) = 0$。(2) 对所有 $s \leqslant r-1$ 和 $i > 0$, $\mathrm{Tor}_i^{A(r)}(m_r(s), A(r)/m_r) = 0$。(3) 对所有 $s \leqslant r-1$ 和 $i > 0$, $\mathrm{Tor}_i^{A(r)}(A(r)/m_r(s), A(r)/m_r) = 0$。(4) 对所有 $s \leqslant r-1$ 和 $i > 0$, $\mathrm{Tor}_i^{A(r)}(m_r(s), m_r) = 0$。(5) 对所有 $s \leqslant r$, $m_r(s) \cong m_1 \cdots m_s = m_1 \cap \cdots \cap m_s$。

证明。我们对 r 作归纳法，证明 (1) – (5)。$r = 2$ 的情形已由引理 3.1 和推论 3.2 解决。因此，假设该结论对 r 成立，并证明它对 $r+1$ 也成立。若 $s \leqslant r-1$，则 (1) – (4) 立即由 $A(r+1)$ 在

$A(r)$ 上平坦这一事实得出。类似地，若 $s \leqslant r$，则 (5) 也成立。现在假设 $s = r$，并考虑以下短正合列。

$$0 \to \frac{A(r+1)}{m_{r+1}(r-1) \cap m_r} \to \frac{A(r+1)}{m_{r+1}(r-1)} \oplus \frac{A(r+1)}{m_r} \to \frac{A(r+1)}{(m_{r+1}(r-1), m_r)} \to 0$$

首先注意到，我们有一个自然同构：

$$\frac{A(r+1)}{(m_{r+1}(r-1), m_r)} \cong \frac{A(r)}{m_r(r-1)}$$

此外，由 (5) 可得

$$\frac{A(r+1)}{m_{r+1}(r-1) \cap m_r} \cong \frac{A(r+1)}{m_{r+1}(r)}$$

因此，在上述短正合列中分别与 m_{r+1} and $A(r+1)/m_{r+1}$ 取张量积，并利用归纳假设，即可得到 (1) 和 (3)。

其余结论的证明与引理 3.1 和推论 3.2 的证明相同。 □

推论 3.4. 设 $C_\bullet$ 是 $m = C_0$ 作为 A-模的一个自由分解。对于任意 $1 \leqslant j \leqslant r$，令 $C_\bullet^j$ 为 $C_\bullet \otimes_A A(r)$，其中模结构由映射 $i_j \colon A \to A(r)$ 给出。令 $C(s) = C^1 \otimes_{A(r)} \cdots \otimes_{A(r)} C^s$，并令 $TC(s)$ 为相应的全复形。则 $C(s)$ 和 $TC(s)$ 正合。

证明。由引理 3.3 可立即得出。 □

我们的下一个目标是引入一些记号，并将引理 3.3 推广到全局。设 $2 \leqslant s \leqslant r$ 和 $1 \leqslant i \neq j \leqslant r$ 为正整数。设 X 为维数为 n 的射影簇。我们用

$$X(r) = X \times \cdots \times X$$

表示 X 的 r 个副本的乘积。我们用

$$\mathrm{pr}_i : X(r) \to X$$

以及

$$\mathrm{pr}_{i,j} = \mathrm{pr}_i \times \mathrm{pr}_j : X(r) \to X \times X$$

表示相应的投影。我们用

$$\Delta^{i,j}_{X(r)} = \mathrm{pr}^*_{i,j} \, \Delta_X$$

相对于条目 i 和 j 的对角线。我们令

$$\Delta^1_{X(r)}(s) = \bigcup_{2 \leqslant i \leqslant s} \Delta^{1,i}_{X(r)}$$

and

$$\Delta^2_{X(r)}(s) = \bigcup_{2\leqslant i\leqslant s} \Delta^{i-1,i}_{X(r)}$$

类似地，我们令

$$\mathcal{I}^1_{\Delta_{X(r)}}(s) = \mathcal{I}_{\Delta^{1,2}_{X(r)}} \otimes \mathcal{I}_{\Delta^{1,3}_{X(r)}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{I}_{\Delta^{1,s}_{X(r)}}$$

and

$$\mathcal{I}^2_{\Delta_{X(r)}}(s) = \mathcal{I}_{\Delta^{1,2}_{X(r)}} \otimes \mathcal{I}_{\Delta^{2,3}_{X(r)}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{I}_{\Delta^{s-1,s}_{X(r)}}$$

当然,

$$\mathcal{I}^1_{\Delta_{X(r)}}(2) = \mathcal{I}^2_{\Delta_{X(r)}}(2) = \mathcal{I}_{\Delta^{1,2}_{X(r)}}$$

推论 3.5. 假设 $r \geqslant 3$、 $s < t \leqslant r$ 和 $i > 0$。则:

(1) $\mathscr{T}or_i^{\mathcal{O}_{X(r)}}(\mathcal{O}_{X(r)}/\mathcal{I}^1_{\Delta_{X(r)}}(s), \mathcal{I}_{\Delta^{1,t}_{X(r)}}) = 0.$

(2) $\mathscr{T}or_i^{\mathcal{O}_{X(r)}}(\mathcal{I}^1_{\Delta_{X(r)}}(s), \mathcal{O}_{X(r)}/\mathcal{I}_{\Delta^{1,t}_{X(r)}}) = 0.$

(3) $\mathscr{T}or_i^{\mathcal{O}_{X(r)}}(\mathcal{O}_{X(r)}/\mathcal{I}^1_{\Delta_{X(r)}}(s), \mathcal{O}_{X(r)}/\mathcal{I}_{\Delta^{1,t}_{X(r)}}) = 0.$

(4) $\mathscr{T}or_i^{\mathcal{O}_{X(r)}}(\mathcal{I}^1_{\Delta_{X(r)}}(s), \mathcal{I}_{\Delta^{1,t}_{X(r)}}) = 0.$

(5) $\mathscr{T}or_i^{\mathcal{O}_{X(r)}}(\mathcal{O}_{X(r)}/\mathcal{I}^2_{\Delta_{X(r)}}(s), \mathcal{I}_{\Delta^{s,s+1}_{X(r)}}) = 0.$

(6) $\mathscr{T}or_i^{\mathcal{O}_{X(r)}}(\mathcal{I}^2_{\Delta_{X(r)}}(s), \mathcal{O}_{X(r)}/\mathcal{I}_{\Delta^{s,s+1}_{X(r)}}) = 0.$

(7) $\mathscr{T}or_i^{\mathcal{O}_{X(r)}}(\mathcal{O}_{X(r)}/\mathcal{I}^2_{\Delta_{X(r)}}(s), \mathcal{O}_{X(r)}/\mathcal{I}_{\Delta^{s,s+1}_{X(r)}}) = 0.$

(8) $\mathscr{T}or_i^{\mathcal{O}_{X(r)}}(\mathcal{I}^2_{\Delta_{X(r)}}(s), \mathcal{I}_{\Delta^{s,s+1}_{X(r)}}) = 0.$

此外，我们有:

$$\mathcal{I}^1_{\Delta_{X(r)}}(s) \cong \mathcal{I}_{\Delta^{1,2}_{X(r)}} \cdots \mathcal{I}_{\Delta^{1,s}_{X(r)}} = \mathcal{I}_{\Delta^{1,s}_{X(r)}} \cap \cdots \cap \mathcal{I}_{\Delta^{1,s}_{X(r)}} = \mathcal{I}_{\Delta^1_{X(r)}(s)}$$

and

$$\mathcal{I}^2_{\Delta_{X(r)}}(s) \cong \mathcal{I}_{\Delta^{1,2}_{X(r)}} \cdots \mathcal{I}_{\Delta^{s-1,s}_{X(r)}} = \mathcal{I}_{\Delta^{1,2}_{X(r)}} \cap \cdots \cap \mathcal{I}_{\Delta^{s-1,s}_{X(r)}} = \mathcal{I}_{\Delta^2_{X(r)}(s)}$$

证明. 经坐标变换后，由引理 3.3 可立即得出。 □

3.2. Koszul 上同调与性质 N_p。这里简要回顾 Koszul 上同调群的一些基本定义和性质。更详细的介绍请参阅 Green 的原始论文 [Gre84a]和 [Gre84b] ，以及 Lazarsfeld 的综述讲义 [Laz89] 。设 V为一个有限维向量空间，设 $S(V)$ 为对称

代数，定义在 V 上，并设 $B = \oplus_{q\in\mathbb{Z}} B_q$ 为一个分次 $S(V)$-模。那么存在一个自然的 Koszul 复形

$$\cdots \to \wedge^{p+1}V \otimes B_{q-1} \xrightarrow{d_{p+1,q-1}} \wedge^{p}V \otimes B_q \xrightarrow{d_{p,q}} \wedge^{p-1}V \otimes B_{q+1} \to \cdots$$

我们将 B 的 Koszul 上同调群定义为

$$\mathcal{K}_{p,q}(B, V) = \frac{\mathrm{Ker}(d_{p,q})}{\mathrm{Im}(d_{p+1,q-1})}$$

现在设 X 为光滑射影簇， L 为线丛， $V \subseteq H^0(X, L)$ 为向量空间， $\mathcal{F}$ 为层。于是我们定义

$$\mathcal{K}_{p,q}(X, \mathcal{F}, L, V) = \mathcal{K}_{p,q}(B, V)$$

其中 $B = \oplus_{q\in\mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{F} \otimes L^{\otimes q})$。通常简写为 $\mathcal{K}_{p,q}(X, \mathcal{F}, L)$，若 $V = H^0(X, L)$；若进一步 $\mathcal{F}$ 是结构层，则简写为 $\mathcal{K}_{p,q}(X, L)$。注意，定义 1.1 可改写为

$$\mathrm{Tor}_i^{S(V)}(R, \mathbb{C})_d = 0$$

对任意 $0 \leqslant i \leqslant p$ 和 $d \geqslant i + 2$ 均成立。利用 $\mathbb{C}$ 作为 $S(V)$-模的标准 Koszul 分解，以及 $\mathrm{Tor}_i^{S(V)}$ 是一个平衡函子这一事实，我们看到，整体生成线丛 L 满足性质 N_p 当且仅当

$$\mathcal{K}_{r,q}(X, L) = 0$$

对所有 $0 \leqslant r \leqslant p$ 和 $q \geqslant 2$ 均成立。鉴于此，接下来我们将通过以下定理证明性质 N_p。

定理 3.6. 设 X 为光滑射影簇， L 为线丛， E 为向量丛。那么

$$\mathcal{K}_{p,q}(X, E, L) = 0$$

对所有 $q \geqslant 2$，只要

$$H^1(X(r), \mathcal{I}^1_{\Delta_{X(r)}}(r) \otimes (E \otimes L^{\otimes k}) \boxtimes L \boxtimes \cdots \boxtimes L) = 0$$

对所有 $2 \leqslant r \leqslant p + 2$ 和 $k \geqslant 1$。

证明。仿照 [Gre84b, 定理 3.2] 的证明，并在需要时使用推论 3.5。另见 [Nor93]。□

注 3.7. Green 在 [Gre84b] 中给出的证明有一个细微的错误：使用了对角层 $\mathcal{I}^2_{\Delta_X}(r)$，而非正确的 $\mathcal{I}^1_{\Delta_X}(r)$。遗憾的是，这个错误似乎在几篇论文中都未被发现；例如， [Ina97] 中也出现了这一错误。

3.3. Koszul 环。设 R 是一个正分次的 $\mathbb{C}$-代数。设

$$\cdots \to P_{n+1} \xrightarrow{\phi_{n+1}} P_n \xrightarrow{\phi_n} \cdots \to P_1 \xrightarrow{\phi_1} P_0 \to \mathbb{C} \to 0$$

是 $\mathbb{C}$ 的极小分次自由分解。注意，当且仅当 R 是多项式环时，此分解才是有限的。若表示 ϕ_n 的矩阵中所有元素的次数均为一，则称环 R 为 Koszul 环。这等价于要求对所有 $i > 0$ 和 $d \neq i$，$\mathrm{Tor}_i^R(\mathbb{C},\mathbb{C})_d = 0$ 。我们将使用以下判据。

定理 3.8. 设 X 是一个射影簇， L 是一个线丛。若截面的分次环 $R(X, L)$ 满足

$$H^1(X(r), \mathcal{I}^2_{\Delta_{X(r)}}(r) \otimes L \boxtimes L \boxtimes \cdots \boxtimes L^{\otimes k}) = 0$$

and

$$H^1(X(r), \mathcal{I}_{\Delta^{r-1,r}_{X(r)}} \otimes L \boxtimes L \boxtimes \cdots \boxtimes L^{\otimes k}) = 0$$

对所有 $r \geqslant 2$ 和 $k \geqslant 1$ 均成立。

证明. 这是 [IM94] 中的命题 1.9。 □

3.4. 对角线的分解。设 $M = \Omega_{\mathbb{P}^n}(1)$。 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 的对角线 $\Delta_{\mathbb{P}^n}$ 的 Beilinson 分解是正合序列：

$$(1) \qquad 0 \to \wedge^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \boxtimes M) \to \cdots \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \boxtimes M \to \mathcal{I}_{\Delta_{\mathbb{P}^n}} \to 0$$

此分解将在定理 1.2 的证明中发挥关键作用。

3.5. 有限态射的对偶。我们在此回顾一个众所周知的对偶性结论。设 $f : Y \to X$ 是正规射影概形之间的有限满射。设 ω_X 是 X 的一个对偶化层，并假设 ω_X 可逆。由 [Har77, Chapter III, Exercise 7.2 (a)],可知，$\omega_Y = f^!\omega_X = \mathscr{H}om_X(f_*\mathcal{O}_Y, \omega_X)$ 是Y 的一个对偶化层（另见 [Har77, Chapter III, Exercise 6.10]）。因此我们得到

$$f_*\omega_Y \cong \mathscr{H}om_X(f_*\mathcal{O}_Y, \omega_X)$$

从而

$$f_*\omega_{Y/X} \cong (f_*\mathcal{O}_Y)^*$$

由于 X 和 Y 均为正规，因此 $f_*\mathcal{O}_Y$ 由迹态射分裂。特别地，结构层 $\mathcal{O}_X$ 是 $f_*\omega_{Y/X}$的一个规范直和项。

4. The very ample case

本节针对 A 非常丰沛这一特殊情形，介绍一种解决该问题的简单初步方法。我们希望这一初步情形能作为一个启发性的例子，并凸显该问题的一些主要难点，但此处并不追求最优界。由于后续讨论不依赖本节的方法，读者也可以直接跳至第5节。

回顾一下，我们的目标是分别通过定理 3.6 和定理 3.8 证明性质 N_p 和 Koszul 性质。一个自然的初步思路是尝试使用 Kodaira 消失定理的知名推广（即 Kawamata-Viehweg 消失定理和 Nadel 消失定理）。下面简要回顾乘子理想的定义。

定义 4.1. 设 (X, Δ) 是一个对数对，其中 X 光滑，并设 $\mu : Y \to X$ 是一个对数消解。我们将 Δ 的乘子理想层定义为

$$\mathcal{I}(X, \Delta) = \mu_* \mathcal{O}_Y(K_{Y/X} - \lfloor \mu^* \Delta \rfloor) \subseteq \mathcal{O}_X$$

定理 4.2（Nadel 消失定理）。设 X 是一个光滑复射影簇， $\Delta \geqslant 0$ 是 X 上的一个 $\mathbb{Q}$-除子。设 L 是任意整除子，使得 $L - \Delta$ 数值有效且大。则

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + L) \otimes \mathcal{I}(X, \Delta)) = 0$$

对于 $i > 0$。

上述消失定理与定理 3.6 和 3.8 中所需的消失定理十分相似。事实上，只需设法使给定的对角理想成为适当除子的乘子理想。为此，取 $M_1, \cdots, M_{n+1}$ 为一般除子，它们属于

$$\wedge^2 H^0(X, A) \subseteq H^0(X, A) \otimes H^0(X, A) \cong H^0(X \times X, A \boxtimes A)$$

并令 $M = (M_1 + \cdots + M_{n+1})/(n+1)$。容易验证，

$$\mathcal{I}(X \times X, n \cdot M) = \mathcal{I}_{\Delta_X}$$

此外，如果我们取

$$M(r) = \sum_{j=2}^{r} \mathrm{pr}_{1,j}^* M$$

我们看到

$$\mathcal{I}(X(r), n \cdot M(r)) = \mathcal{I}^1_{\Delta_{X(r)}}(r)$$

由纳德尔消失定理和定理 3.6，我们得到：

定理 4.3. 设 X 是一个维数为 n 的光滑射影簇， A 是一个非常丰除子， B 是一个数值有效除子。令 $L_m = \mathcal{O}_X(K_X + mA + B)$，其中 $m \geqslant 0$ 为某个量。则 L_m 满足性质 N_p，如果 $m \geqslant np + n + 1$。

通过取

$$M(r) = \sum_{j=2}^{r} \mathrm{pr}_{j-1,j}^{*} M$$

类似的讨论可得:

定理 4.4。设 X 为维数 n的光滑射影簇， A 为一个非常丰除子， B 为一个数值有效除子。令 $L_m = \mathcal{O}_X(K_X + mA + B)$，其中 $m \geqslant 0$。那么， $R(X, L_m)$ 是 Koszul 的，只要$m \geqslant 2n + 1$。

定理 4.3 和定理 4.4 分别以较弱的界恢复了 [EL93] 和[Par93]的主要结果。我们将在下文说明如何将这些结果推广到 A 仅为丰且无基点的情形，并将界加强至最优界。此处我们只需指出，上述方法已不再适用。首先，我们无法再期望利用 $\wedge^2 H^0(X, A)$中的截面将对角线 Δ_X切割出来。若尝试这样做，得到的反而是一个“扩大的对角线”，记作 Γ_X。更严重的问题是，相应的乘子理想会产生非约化概形。事实上，由 Skoda 定理 [Laz04, 定理 9.6.21]，我们有

$$\mathcal{I}(X \times X, n \cdot M) = \mathcal{I}_{\Gamma_X} \cdot \mathcal{I}(X \times X, (n-1) \cdot M)$$

然而，一般而言，

$$\mathcal{I}(X \times X, (n-1) \cdot M) \neq \mathcal{O}_{X \times X}$$

因此，尚不清楚如何将 $\mathcal{I}(X \times X, n \cdot M)$ 与$\mathcal{I}_{\Delta_X}$联系起来。下文将展示如何通过某些对角线的分解和对偶理论来解决这两个问题。

5. Proof

现在我们可以开始证明定理 1.2。为方便读者，我们将证明分成几个较小的步骤。

5.1. 设置。设 X 是一个维数为 n 的光滑射影簇，且 A 是一个丰且无基点除子。设 $V \subseteq H^0(X, A)$ 是一个维数为 $n+1$ 的无基点子空间。设 $\alpha\colon X \to \mathbb{P}^n$ 是相应的有限平坦态射。设 $\beta\colon Y \to X$ 是 α 的伽罗瓦闭包，并设 $\delta = \alpha \circ \beta$。设 $G = \mathrm{Gal}(Y/\mathbb{P}^n)$ 和 $H = \mathrm{Gal}(Y/X)$。照例，我们用 $\Delta_X \subseteq X \times X$ 和 $\Delta_Y \subseteq Y \times Y$ 分别表示相应的对角线。设 Γ_Y 和 Γ_X 是分别由 $\mathcal{I}_{\Delta_{\mathbb{P}^n}} \cdot \mathcal{O}_{Y\times Y}$ 和 $\mathcal{I}_{\Delta_{\mathbb{P}^n}} \cdot \mathcal{O}_{X\times X}$ 定义的概形。我们有 $\Gamma_Y = Y \times_{\mathbb{P}^n} Y$ 和 $\Gamma_X = X \times_{\mathbb{P}^n} X$。我们定义 $\mathcal{I}^j_{\Gamma_Y}(r)(s) = \mathcal{I}^j_{\Delta_{\mathbb{P}(r)}}(s) \cdot \mathcal{O}_Y(r)$，以及 $\mathcal{I}^j_{\Gamma_{X(r)}}(s) = \mathcal{I}^j_{\Delta_{\mathbb{P}(r)}}(s) \cdot \mathcal{O}_{X(r)}$，其中 $j = 1$ 为 2，并将相应的概形记为 $\Gamma^j_Y(r)(s)$。最后，我们将由 $\mathcal{I}^j_{\Delta_{Y(r)}}(s)$ 和 $\mathcal{I}^j_{\Delta_{X(r)}}(s)$（其中 $j = 0$ 为 1）定义的概形分别记为 $\Delta^j_Y(r)(s)$ 和 $\Delta^j_X(r)(s)$。

5.2. 扩大的对角线。这里我们使用 Beilinson 分解 (1) 来得到层 $\mathcal{I}^j_{\Delta_{\mathbb{P}^n(r)}}(s)$ 的分解。尽管这些“分解”并非由局部自由层组成，但事实证明它们对我们的目的同样有用。我们首先通过 $\mathrm{pr}_{j_1,\ j_2}$ for $1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant r$ 将 Beilinson 分解 (1) 拉回到 $\mathbb{P}^n(r)$，以得到以下正合列

$$0 \to \mathrm{pr}^*_{j_1,j_2} \wedge^n (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \boxtimes M) \to \cdots \to \mathrm{pr}^*_{j_1,j_2} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \boxtimes M \to$$
$$(j_1.j_2) \qquad \to \mathcal{I}_{\Delta^{j_1,j_2}_{\mathbb{P}^n}} \to 0$$

我们将每个序列 $(j_1.j_2)$ 视为一个正向分次的正合复形，并将理想层置于次数零处，我们称之为 $C(j_1, j_2, n, r)$。令

$$C^1(s,n,r) = C(1,2,n,r) \otimes C(1,3,n,r) \otimes \cdots \otimes C(1,s,n,r)$$

and

$$C^2(s,n,r) = C(1,2,n,r) \otimes C(2,3,n,r) \otimes \cdots \otimes C(s-1,s,n,r)$$

设 $TC^1(s,n,r)$ 和 $TC^2(s,n,r)$ 为相应的全复形。应用推论 3.4 可得：

引理 5.1. 设 $0 < s \leqslant r$ 和 n 为正整数。则 $C^1(s,n,r)$、$C^2(s,n,r)$、$TC^1(s,n,r)$ 和 $TC^2(s,n,r)$ 均为正合的。

写出 $M_V = \alpha^* M$。将 Beilinson 分解 (1) 经由 α 拉回到 X，得到 Γ_X 的一个分解：

$$0 \to \wedge^n(\mathcal{O}_X(-A) \boxtimes M_V) \to \cdots \to \mathcal{O}_X(-A) \boxtimes M_V \to$$
$$\to \mathcal{I}_{\Gamma_X} \to 0 \tag{2}$$

类似地，将复形 $C(j_1, j_2, n, r)$、$C^1(s, n, r)$ 和 $C^2(s, n, r)$ 拉回到 $X(r)$，得到正合复形，分别记为 $C(X, j_1, j_2, r)$、$C^1(X, s, r)$ 和 $C^2(X, s, r)$。

5.3. 消失。本节将针对定理 3.6 证明关键的消失结果。

引理 5.2. 对某个 $m \geqslant n+1$，令 $L_m = \mathcal{O}_X(K_X + mA)$。则

$$H^i(X, L_m^{\otimes k} \otimes \mathcal{O}_X(lA)) = 0$$

对于任意 $k \geqslant 1$、$m + l \geqslant 1$ 和 $1 \leqslant i \leqslant n$。

证明。直接应用 Kodaira 消失定理。 □

引理 5.3. 对某个 $m \geqslant n+1$，令 $L_m = \mathcal{O}_X(K_X + mA)$。则

$$H^i(X, \wedge^j M_V \otimes L_m^{\otimes k} \otimes \mathcal{O}_X(lA)) = 0$$

如果 $k \geqslant 1$ 且以下任一条件成立

(1) $i > j$ 和 $m + l \geqslant 1$，或 (2)
$i \geqslant 1$ 和 $m + l \geqslant n + 2 - j$。

证明。对于 (1)，我们对 j 进行归纳法，从情形 $j = 1$ 开始。考虑短正合列

$$0 \to M_V \to V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(A) \to 0$$

于是结论由引理 5.2 立即得到。因此，假设该结论对 $j-1$ 成立，并证明它对 j 也成立。考虑短正合列

$$0 \to \wedge^j M_V \to \wedge^j V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \to \wedge^{j-1} M_V \otimes \mathcal{O}_X(A) \to 0 \tag{$*$}$$

由归纳假设，结论立即成立。现在我们对 j 使用递减归纳法证明 (2)，从情形$j = n$ 开始。在此情形下，$\wedge^n M_V \cong \mathcal{O}_X(-A)$，结论由 Kodaira 消失定理得出。于是，假设 (2) 对 j 成立，并证明它对 $j-1$ 成立。再次考虑短正合列 $(*)$。由引理 5.2 和归纳假设，结论随即得出。□

引理 5.4. 固定 $r \geqslant 2$。设对某个 $m \geqslant n+r-1$，有 $L_m = \mathcal{O}_X(K_X + mA)$。设 $i_t \geqslant 0$ for $1 \leqslant t \leqslant r$ 和 $a_t \geqslant 1$ for $1 \leqslant t \leqslant r-1$ 是两个正整数序列。设 $\sum_{t=1}^{r} i_t = i$ 和 $\sum_{t=1}^{r-1} a_t = d$。假设 $i \geqslant d-r+2$。则

$$H^{i_1}(X, \mathcal{O}_X(-dA) \otimes L_m^{\otimes k}) \otimes \bigotimes_{t=2}^{r} H^{i_t}(X, \wedge^{a_{t-1}} M_V \otimes L_m) = 0$$

对任意 $k \geqslant 1$。

证明。若 $i_t > 0$ 对任意 $t \geqslant 2$，则由引理 5.3 (2) 可得结论。因此我们可以假设 $i_1 = i$。由于 $d \geqslant r-1$，我们有$i_1 \geqslant 1$。若 $i_1 > n$，则无需证明任何内容，因此我们可以假设 $i_1 \leqslant n$。因此，

$$d \leqslant n + r - 2$$

由引理 5.2 可得结论。 □

引理 5.5。固定 $r \geqslant 1$。令 $L_m = \mathcal{O}_X(K_X + mA)$，其中某个 $m \geqslant n+2$。令 $i_t \geqslant 1$ 对于 $1 \leqslant t \leqslant r$ 以及 $0 \leqslant a_t \leqslant n$ 对于 $0 \leqslant t \leqslant r$ 为两个正整数序列。令 $\sum_{t=1}^{r} i_t = i$ 和 $\sum_{t=0}^{r} a_t = d$。假设$i \geqslant d - r$。则

$$\bigotimes_{t=1}^{r} H^{i_t}(X, \wedge^{a_{t-1}} M_V \otimes L_m^{\otimes k_t} \otimes \mathcal{O}_X(-a_t A)) = 0$$

对任意 $k_t \geqslant 1$。

证明。若对于任意 $1 \leqslant t \leqslant r$ 都有 $i_t > a_{t-1}$，则由引理 5.3 (1) 可知结论成立。因此，我们可以假设对所有 $1 \leqslant t \leqslant r$ 都有 $i_t \leqslant a_{t-1}$。类似地，若对于任意 $1 \leqslant t \leqslant r$ 都有 $a_t \leqslant a_{t-1}$，则由引理 5.3 (2) 可知结论成立。因此，我们可以假设对所有 $1 \leqslant t \leqslant r$ 都有 $a_t > a_{t-1}$。特别地，$a_r \geqslant r+1$。综合以上各点，我们得到

$$\sum_{t=1}^{r} a_{t-1} \geqslant \sum_{t=1}^{r} i_t \geqslant \sum_{t=0}^{r} a_t - r$$

因此，我们得到 $a_r \leqslant r$，矛盾。 □

引理 5.6。固定 $r \geqslant 2$。设对于某个 $m \geqslant n+2$，$L_m = \mathcal{O}_X(K_X + mA)$。设 $i_t \geqslant 0$（对 $1 \leqslant t \leqslant r$）和 $a_t \geqslant 1$（对 $1 \leqslant t \leqslant r-1$）是两个正整数序列。取两个整数 $0 \leqslant a_0 \leqslant n$ 和 $0 \leqslant a_r \leqslant n$。设 $\sum_{t=1}^{r} i_t = i$ 和 $\sum_{t=0}^{r} a_t = d$。设集合 $\{t \in \{0, r\} | a_t > 0\}$ 的基数为 z。假设 $i \geqslant d - r - z + 2$。则

$$\bigotimes_{t=1}^{r} H^{i_t}(X, \wedge^{a_{t-1}} M_V \otimes L_m^{\otimes k_t} \otimes \mathcal{O}_X(-a_t A)) = 0$$

对于任意 $k_t \geqslant 1$。

证明。我们可以假设对所有 $0 \leqslant t \leqslant n$，都有 $a_t \leqslant n$ 。令 s 为集合 $\{1 \leqslant t \leqslant r | i_t = 0\}$的基数。我们对 s使用归纳法。 $s = 0$ 的情形已由引理 5.5 解决。因此，假设该命题对 s 成立，并证明其对 $s+1$也成立。令 $t_0 = \min\{t | i_t = 0\}$。若 $t_0 = 1$ 或 $t_0 = r$，则舍去指标 t_0后，由归纳假设可得该命题。因此，假设 $1 < t_0 < r$。令 $j = \sum_{t=1}^{t_0-1} i_t$ 和 $e = \sum_{t=0}^{t_0-1} a_t$。若 $j \geqslant e - t_0 + 1$，则由引理 5.5 可知结论成立。因此，我们可以假设 $i - j \geqslant (d-e) - (r-t_0) - z + 2$。由于经过切割后 z 只会增大，由归纳假设可得结论。□

引理 5.7. 固定 $r \geqslant 2$。令 $L_m = \mathcal{O}_X(K_X + mA)$，其中某个 $m \geqslant 0$。令 $a_t \geqslant 0$ for $1 \leqslant t \leqslant r-1$ 为一列整数，并设$\sum_{t=1}^{r-1} a_t = d$。令 s 为集合 $\{t | a_t = 0\}$ 的基数。假设 $i \geqslant d + s - r + 2$。若 $m \geqslant n + 2$ 和 $k \geqslant 1$，则

$$H^i\left(X(r), \bigotimes_{t=1}^{r-1} C(X, t, t+1, r)_{a_t} \otimes L_m \boxtimes L_m \cdots \boxtimes L_m^{\otimes k}\right) = 0$$

若改为 $m \geqslant n + r - 1$ 和 $k \geqslant 1$，则

$$H^i\left(X(r), \bigotimes_{t=1}^{r-1} C(X, 1, t+1, r)_{a_t} \otimes L_m^{\otimes k} \boxtimes L_m \cdots \boxtimes L_m\right) = 0$$

证明. 我们对 s使用归纳法。情形 $s = 0$ 由引理 5.4、引理 5.6 和 K¨unneth 公式立即得到。因此，假设该结论对 s 成立，并证明它对 $s+1$ 也成立。设 t_0 为一个满足 $a_{t_0} = 0$ 的指标。由引理 5.1，只需证明

$$H^{i+j'}\left(X(r), C(X, t_0, t_0+1, r)_j \otimes \bigotimes_{t \neq t_0} C(X, t, t+1, r)_{a_t} \otimes L_m \boxtimes \cdots \boxtimes L_m^{\otimes k}\right) = 0$$

and

$$H^{i+j'}\left(X(r), C(X, 1, t_0+1, r)_j \otimes \bigotimes_{t \neq t_0} C(X, 1, t+1, r)_{a_t} \otimes L_m^{\otimes k} \boxtimes \cdots \boxtimes L_m\right) = 0$$

对于任意的 $j \geqslant 1$ 和 $j' \geqslant j - 1$。由归纳假设可知，此结论成立，证毕。□

定理 5.8. 固定 $r \geqslant 2$。设对于某个 $m \geqslant 0$， $L_m = \mathcal{O}_X(K_X + mA)$。若 $m \geqslant n + 2$，则

$$H^1(X(r), \mathcal{I}^2_{\Gamma_{X(r)}}(r) \otimes L_m \boxtimes L_m \boxtimes \cdots \boxtimes L_m^{\otimes k}) = 0$$

对任意 $k \geqslant 1$。若改为 $m \geqslant n+r-1$，则

$$H^1(X(r), \mathcal{I}^1_{\Gamma_{X(r)}}(r) \otimes L_m^{\otimes k} \boxtimes L_m \boxtimes \cdots \boxtimes L_m) = 0$$

对于任意 $k \geqslant 1$。

证明。将引理 5.7 应用于复形$C^1(X, r, r)$ 和 $C^2(X, r, r)$ 即得。□

5.4. 射影正规性。这里我们证明:

定理 5.9. 设 X 是一个维数为 n 的光滑复射影簇，且 A 是一个丰且无基点的除子。那么线丛 $L_m = \mathcal{O}_X(K_X + mA)$ 对任意 $m \geqslant n+1$都满足性质 N_0。

我们沿用第 5.1 小节中的记号。首先，注意到 Γ_X 是约化的，因为 α 是平坦的，$\mathbb{P}^n$ 是约化的，且 Γ_X 是泛点约化的。此外，Γ_X 是科恩-麦考利的，因为 α 是平坦的且 $\mathbb{P}^n$ 是光滑的。令 ω_Y为 Y的对偶化层。令 Y_0 为 Y的光滑轨迹。注意到 $Y \setminus Y_0$ 的余维至少为二，因为 Y是正规的；特别地$\omega_Y \cong i_*\omega_{Y_0}$。在缩小 Y_0 并保持余维至少为二的前提下，我们可以假设 $X_0 = \beta(Y_0)$是开集，且 $\beta : Y_0 \to X_0$ 是有限平坦的。令 $\Gamma_{Y_0} = Y_0 \times_{\mathbb{P}_n} Y_0$。考虑

$$F = (\omega_Y \otimes \beta^*\mathcal{O}_X(mA)) \boxtimes (\omega_Y \otimes \beta^*\mathcal{O}_X(mA))$$

存在一个单射

$$F|_{\Gamma_{Y_0}} \to \bigoplus_{g \in G} F|_{g^*\Delta_{Y_0}}$$

其中令 G 作用于第二个条目。取不变量后，我们得到一个同构

$$\left(F|_{\Gamma_{Y_0}}\right)^G \cong \left(\bigoplus_{g \in G} F|_{g^*\Delta_{Y_0}}\right)^G$$

因此，我们有一个满射

$$H^0(\Gamma_{Y_0}, F|_{\Gamma_{Y_0}}) \to H^0(\Delta_{Y_0}, F|_{\Delta_{Y_0}})$$

等价地，这也可由以下观察得出：将分歧公式应用于态射 $Y_0 \to \delta(Y_0)$，会得到一个典范同构

$$\mathrm{pr}_1^*(\omega_Y \otimes \beta^*\mathcal{O}_X(mA)|_{\Gamma_{Y_0}} \cong \mathrm{pr}_2^*(\omega_Y \otimes \beta^*\mathcal{O}_X(mA)|_{\Gamma_{Y_0}}$$

伽罗瓦情形。若 X 在 $\mathbb{P}^n$上是伽罗瓦的，则 $Y = X$。因此，下面的引理 5.10 立即成立。

对于一般情形，考虑迹映射

$$\mathrm{Tr} : (\beta \times \beta)_* F \to L_m \boxtimes L_m$$

我们有如下图表，它在伽罗瓦作用下，将从 $H^0(\Delta_{Y_0}, F|_{\Delta_{Y_0}})$ 拉回到$H^0(\Gamma_{Y_0}, F|_{\Gamma_{Y_0}})$ 的截面乘以 $|H|$ 后交换。

$$\begin{array}{ccc} H^0(\Gamma_{X_0}, (\beta \times \beta)_* F|_{\Gamma_{X_0}}) & \xrightarrow{\mathrm{Tr}|_{\Gamma_{X_0}}} & H^0(\Gamma_{X_0}, L_m \boxtimes L_m) \\ \downarrow r & & \downarrow r \\ H^0(\Delta_{X_0}, (\beta \times \beta)_* F|_{\Delta_{X_0}}) & \xrightarrow{\mathrm{Tr}|_{\Delta_{X_0}}} & H^0(\Delta_{X_0}, L_m \boxtimes L_m) \end{array}$$

左侧的垂直映射和迹映射均为满射。因此，右侧的垂直映射也为满射。由于 Δ_X 和 Γ_X 均为约化的科恩-麦考利簇，我们证明了：

引理 5.10。限制映射

$$H^0(\Gamma_X, L_m^{\otimes k} \boxtimes L_m) \to H^0(\Delta_X, L_m^{\otimes k} \boxtimes L_m)$$

是满射。

结合引理 5.10 和定理 5.8，即可得出定理 5.9。

5.5. 性质 N_p 与 Koszul。这里我们证明：

定理 5.11。设 X 是一个维数为 n 的光滑复射影簇，且 A 是一个丰无基点除子。那么，对于任意 $m \geqslant n+1+p$，线丛 $L_m = \mathcal{O}_X(K_X + mA)$ 满足性质 N_p。

我们沿用上一小节中的记号，并进一步类比定义$\Gamma^j_{X_0(r)}(s)$和$\Delta^j_{X_0(r)}(s)$。考虑

$$F = L_m \boxtimes L_m \boxtimes \cdots \boxtimes L_m$$

我们通过对 $1 \leqslant s \leqslant r$ 进行双重归纳证明

$$H^0(\Gamma^1_{X(r)}(r), F) \to H^0(\Gamma^1_{X(r)}(s) \cup \Delta^{1,s+1}_{X(r)} \cup \cdots \cup \Delta^{1,r}_{X(r)}, F)$$

是满射。$r = 2$ 和 $s = 1$ 的情形已在上文证明，而 $r = 2$ 和 $s = 2$ 的情形则显然成立。因此，假设该结论对任意 $1 \leqslant s \leqslant r-1$ 均成立，并证明其对 r成立。我们对 s使用递减归纳。$s = r$ 的情形显然成立。因此，设$1 \leqslant s < r$，并取一个截面

$$u \in H^0(\Gamma^1_{X(r)}(s) \cup \Delta^{1,s+1}_{X(r)} \cup \cdots \cup \Delta^{1,r}_{X(r)}, F)$$

根据归纳假设，存在一个满射

$$H^0(\Gamma^1_{X(r)}(s)\cup\Gamma^{1,s+2}_{X(r)}\cup\cdots\cup\Gamma^{1,r}_{X(r)},F)\to H^0(\Gamma^1_{X(r)}(s)\cup\Delta^{1,s+2}_{X(r)}\cup\cdots\cup\Delta^{1,r}_{X(r)},F)$$

由定理 5.8，存在一个满射

$$H^0(\Gamma^1_{X(r)}(r),F)\to H^0(\Gamma^1_{X(r)}(s)\cup\Gamma^{1,s+2}_{X(r)}\cup\cdots\cup\Gamma^{1,r}_{X(r)},F)$$

因此，我们可以假设 u 在映射下映到

$$H^0(\Gamma^1_{X(r)}(s)\cup\Delta^{1,s+2}_{X(r)}\cup\cdots\cup\Delta^{1,r}_{X(r)},F)$$

考虑短正合列

$$\begin{aligned}0\to\ & H^0(\Gamma^1_{X(r)}(s+1)\cup\Delta^{1,s+2}_{X(r)}\cup\cdots\cup\Delta^{1,r}_{X(r)},F)\to\\ &\to H^0(\Gamma^1_{X(r)}(s)\cup\Delta^{1,s+2}_{X(r)}\cup\cdots\cup\Delta^{1,r}_{X(r)},F)\oplus H^0(\Gamma^{1,s+1}_{X(r)},F)\to\\ &\to H^0((\Gamma^1_{X(r)}(s)\cup\Delta^{1,s+2}_{X(r)}\cup\cdots\cup\Delta^{1,r}_{X(r)})\cap\Gamma^{1,s+1}_{X(r)},F)\end{aligned}$$

按照第 5.4 小节中的伽罗瓦作用，我们可以将 $u|_{\Delta^{1,X^{s+1}_r}()}$ 延拓为 $\Gamma^{1,X^{s+1}_r}()$。根据构造，它与以下内容粘合：

$$u|_{\Gamma^1_{X(r)}(s)\cup\Delta^{1,s+2}_{X(r)}\cup\cdots\cup\Delta^{1,r}_{X(r)}}=0$$

因此，它给出一个截面

$$\tilde{u}\in H^0(\Gamma^1_{X(r)}(s+1)\cup\Delta^{1,s+2}_{X(r)}\cup\cdots\cup\Delta^{1,r}_{X(r)},F)$$

最后，根据归纳假设，我们可以将 $\tilde{u}$ 提升为 $\Gamma^1_{X(r)}(r)$。当然，对于 $\Gamma^2_{X(r)}(r)$，也有完全类似的证明。由特殊情形$s=1$，我们有一个满射

$$H^0(\Gamma^j_{X(r)}(r),F|_{\Gamma^j_{X(r)}(r)})\to H^0(\Delta^j_{X(r)}(r),F|_{\Delta^j_{X(r)}(r)})$$

定理 5.11 是将上述情形$j=1$ 下的满射与定理 5.8 结合而得。改用情形 $j=2$，则得到如下结论。

定理 5.12. 设 X 是维数为 n 的光滑复射影簇，且 A 是一个丰且无基点的除子。那么，对于任意 $m\geqslant n+2$，线丛 $L_m=\mathcal{O}_X(K_X+mA)$ 的截面的分次环都是 Koszul。

Ein 和 Lazarsfeld 证明，若 A是非常丰沛的，那么在满足 $(X,A)\neq(\mathbb{P}^n,H)$ 时，可以得到一个稍强的界。更准确地说，他们证明了若 $p>0$，则 K_X+mA 对所有 $m\geqslant n+p$ 都满足性质 N_p。于是自然会提出：

问题 5.13. 设 X 是一个维数为 n 的光滑复射影簇，且 A 是一个丰且无基点的除子。假设 $(X, A) \neq (\mathbb{P}^n, H)$，其中 H 是一个超平面截面。若 $p > 0$，那么$\mathcal{O}_X(K_X + mA)$是否对 $m \geqslant n + p$ 满足性质 N_p？

5.6. 例子。最后，我们讨论一些例子，说明定理 5.11 的假设不能超出问题 5.13 所允许的范围进一步加强。

取整数 n、 d 和 r。设 $\alpha : X \to \mathbb{P}^n$ 是一个次数为 d 的简单循环覆盖，沿着一个一般的 dr 次超曲面分歧。设 H 是一个超平面截面，并设 $A = \alpha^* H$。我们有

$$K_X = (-(n+1) + (d-1)r)A$$

and

$$\alpha_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-r) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-(d-1)r)$$

照例，我们记作 $L_m = \mathcal{O}_X(K_X + mA)$。由上可知，我们有

$$L_m = \mathcal{O}_X(K_X + mA) = \mathcal{O}_X((m - n - 1 + (d-1)r)A)$$

现在取 $m = n$、 $d = 2$ 和 $r = 2$。于是得到 $L_n = \mathcal{O}_X(A)$,

$$H^0(X, L_n) = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$$

and

$$H^0(X, L_n^{\otimes 2}) = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2)) \oplus H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$$

因此，即使 $X \neq \mathbb{P}^n$， L_n 也不是射影正规。

现在假设 $|A|$ 将 X 实现为 Y 上的一个双重覆盖，且 $Y \neq \mathbb{P}^n$。$\mathcal{O}_X(K_X + nA)$ 是否射影正规仍是一个未决问题。不过， [BCG] 中证明了，对于 Horikawa 簇， $|K_X|$ 将 X 实现为一个最小次数簇 Y 的双重覆盖，并且 nK_X 不是射影正规。因此，即使 $Y \neq \mathbb{P}^n$，这个界也不能降至 $n - 1$。

另一方面，如果去掉 A 无基点这一假设，问题 1.5 中的界就是最优的，这一点在曲线的情形 [GL88] 中已有体现。维数更高时，可以构造出一些例子，使得椭圆挠曲曲面情形下关于射影正规性和 N_1 的界是最优的（参见 [GP99]）。

最后，回到循环覆盖的构造，取 n =2、 $m = 2$、 $d = 3$ 和 $r = 3$。 [Pur05 的例 5.2] 表明，$L_2 = \mathcal{O}_X(K_X + 2A)$ 满足性质 N_0，但不满足 N_1。

References

[AS91] Marco Andreatta 和 Andrew J. Sommese. 关于伴随丛的射影正规性。《Comment. Math. Helv.》，66(3):362–367，1991。

[BCG] PurnaprajnaBangere、Jungkai Alfred Chen 和 Francisco Javier Gallego。关于一般型高维极值簇。（即将在《日本数学会杂志》发表）。[But94] David C. Butler。曲线上向量丛的正规生成。《微分几何杂志》，39(1):1–34，1994。[EL93] Lawrence Ein 和 Robert Lazarsfeld。任意维光滑射影簇的上同调关系与 Koszul 上同调。《数学发明》，111(1):51–67，1993。[GL86] Mark Green 和 Robert Lazarsfeld。关于代数曲线上完整线性系的射影正规性。《数学发明》，83(1):73–90，1986。[GL87] Mark Green 和 Robert Lazarsfeld。曲面上曲线的特殊除子。《数学发明》，89(2):357–370，1987。[GL88] M. Green 和 R. Lazarsfeld。关于有限集和代数曲线上上同调关系的一些结果。《组合数学》，67(3):301–314，1988。[GP96] Francisco Javier Gallego 和 B. P. Purnaprajna。椭圆挠曲曲面上的正规表示。《代数杂志》，186(2):597–625，1996。[GP98] Francisco Javier Gallego 和 B. P. Purnaprajna。Calabi-Yau三维簇的非常丰性与高阶簧。《数学年刊》，312(1):133–149，1998。[GP99] Francisco Javier Gallego 和 B. P. Purnaprajna。代数曲面的射影正规性与上同调关系。《J. Reine Angew. Math.》，506:145–180，1999。[GP01] Francisco Javier Gallego 和 B. P. Purnaprajna。关于有理曲面和 Fano簇的一些结果。《J. Reine Angew. Math.》，538:25–55，2001。[Gre84a] Mark L. Green。Koszul 上同调与射影簇的几何。《微分几何杂志》，19(1):125–171，1984。[Gre84b] Mark L. Green。Koszul 上同调与射影簇的几何。II。《微分几何杂志》，20(1):279–289，1984。[Har77] Robin Hartshorne。《代数几何》。《数学研究生教材》，第52卷。施普林格出版社，纽约—海德堡，1977。[IM94] S. P. Inamdar 和 V. B. Mehta。舒伯特簇的 Frobenius分裂与线性簧。《美国数学杂志》，116(6):1569–1586，1994。[Ina97] S. P. Inamdar。关于射影簇的上同调关系。《太平洋数学杂志》，177(1):71–76，1997。[Laz89] Robert Lazarsfeld。在线性系研究中向量丛方法举例。载于《黎曼曲面讲义》（的里雅斯特，1987），第500–559页。世界科学出版社，新泽西州蒂内克，1989。[Laz04] Robert Lazarsfeld。《代数几何中的正性》第二卷，数学及其边界领域成果第49卷，第3辑《数学研究成果：现代数学专题综述系列》第3辑《数学研究成果：现代数学专题综述系列》。施普林格出版社，柏林，2004。关于向量丛的正性及乘子理想。[MR19] Jayan Mukherjee 和 Debaditya Raychaudhury。关于数值有效典范丛高维簇的射影正规性与正规表示。《代数杂志》，540:121–155，2019。[Niu19] Wenbo Niu。关于 Calabi–Yau 簇与一般型簇的上同调关系。《数学进展》，343:756–788，2019。[Nor93] Madhav V. Nori。代数循环与霍奇理论连通性。《数学发明》，111(2):349–374，1993。

[Par93] Giuseppe Pareschi。与伴随丛相关的 Koszul 代数。代数杂志，157(1)：161–169，1993。[Par00] Giuseppe Pareschi。阿贝尔簇的上同调关系。美国数学学会杂志，13(3)：651–664，2000。[Par06] Euisung Park。关于纤维曲面的高阶簧。美国数学学会汇刊，358(8)：3733–3749，2006。[Pur05] B. P. Purnaprajna。关于一般型曲面的一些结果。加拿大数学杂志，57(4)：724–749，2005。[Rei88] Igor Reider。代数曲面上的秩为 2 的向量丛与线性系。数学年刊（第 2 辑），127(2)：309–316，1988。[Voi02] Claire Voisin。位于一个 $K3$ 曲面上的偶数亏格曲线的 Green 泛型上同调关系猜想。欧洲数学学会杂志（JEMS），4(4)：363–404，2002。[Voi05] Claire Voisin。奇数亏格泛型曲线的 Green 正则上同调关系猜想。组合数学，141(5)：1163–1190，2005。

Department of Mathematics, University of Kansas, 1450 Jayhawk Blvd. , Lawrence, KS 66045, USA电子邮箱：jlacini@ku.edu

Department of Mathematics, University of Kansas, 1450 Jayhawk Blvd. , Lawrence, KS 66045, USA电子邮箱：purna@ku.edu