arXiv:2302.02532v2 [math.AT] 5 Sep 2023

紧复形是戈洛德的

KOUYEMON IRIYE 和 DAISUKE KISHIMOTO

Abstract. 单纯复形的 Golod 性是通过 Stanley-Reisner环从代数角度定义的，而寻找其组合刻画长期以来一直是一个难题。单纯复形的紧性是流形在欧几里得空间中的紧嵌入的组合类比，并且一直以来都与极小流形三角剖分一同受到研究。本文借助环面拓扑中的一个思想，证明紧复形是 Golod 的；作为推论，我们得到：闭连通可定向流形的三角剖分是 Golod 的，当且仅当它是紧的。这为流形三角剖分的 Golod 性提供了一种组合刻画。

1. Introduction

设 K 是一个单纯复形，并令 $\mathbb{F}[K]$ 表示K 在域 $\mathbb{F}$上的 Stanley-Reisner环。以下问题尤为重要。

问题 1.1. 给定 $\mathbb{F}[K]$ 的一个代数性质，找出它的组合刻画。

问题1.1 在某些情况下已有解答。一个典型例子是 Cohen–Macaulay 性，它可由赖斯纳判据刻画。本文考虑问题1.1中的 Golod 性。令 $\mathbb{F}$ 为一个域，并令 $S = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ 其中设每个 x_i 的次数为 2。Serre [32] 证明，对于诺特环 $R = S/I$，其中 I是 S的一个齐次理想，且满足 $I \subset (x_1, .., x_n)^2$,，存在一个逐项不等式

$$P(\mathrm{Tor}^R(\mathbb{F}, \mathbb{F}); t) \leq \frac{(1+t^2)^n}{1 - t(P(\mathrm{Tor}^S(R, \mathbb{F}); t) - 1)}$$

其中 $P(V; t)$ 表示分次向量空间 V 关于不定元 t 的 Poincar´e 级数。若等号成立，则称 R 为 Golod。后来，Golod 证明了 R 是 Golod，当且仅当 R 的 Koszul 同调中（相对于 $x_1, \dots, x_n$）所有乘积和（高阶）Massey积均为平凡。因此，Golod 性是一个相当复杂的性质。

我们称 K 是 $\mathbb{F}$-*Golod*，如果 $\mathbb{F}[K]$ 是 Golod。正如上文所述，Golod 性相当复杂，因此关于 Golod 性的1.1 问题长期以来一直悬而未决。最近，环面拓扑为解决 Golod 性的 1.1 问题提供了新的技术和视角。具体而言，如 [6], 所述，称为 moment-angle 复形的空间 K，或更一般的多面体积，在同伦意义下以其胞腔上链复形实现了 $\mathbb{F}[K]$ 的 Koszul 复形，因此可以运用拓扑学技术，获得关于单纯复形 Golod 性的新结果，例如 [3, 9, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 20, 29]中的结果。利用拓扑学与组合学之间的这种联系，组合学和拓扑学领域还取得了其他成果，例如[1, 11, 18, 16, 19, 24, 22, 27]中的结果。更多详情和结果请参见综述 [2] 及其中的参考文献

Date: 2023年9月6日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 13F55, 55S30, 57Q15。
Key words and phrases. Golod复形，紧复形，流形三角剖分，Massey 积，高阶棱柱算子。

详情和结果。值得注意的是，我们可以从新的角度看待 $\mathbb{F}$-Golod 流形三角剖分可能与三角剖分的极小性有关，具体如下。正如 [9, 17], 所述，圆的一个三角剖分是 $\mathbb{F}$-Golod，当且仅当它是一个三角形，而三角形是圆的极小三角剖分；又如 [13], 所述，一个连通闭 $\mathbb{F}$-可定向曲面的三角剖分是 $\mathbb{F}$-Golod，当且仅当它是邻接的，即任意两个顶点之间都有一条边；而最邻接的三角剖分往往是极小的，如 [30]所示。

我们给出紧复形的定义。对于单纯复形 K 的顶点集中的一个非空子集 I， K 在 I 上的全子复形定义为

$$K_I = \{\sigma \in K \mid \sigma \subset I\}.$$

如果自然映射是单射，则称单纯复形 K 为 $\mathbb{F}$-紧的

$$H_*(K_I;\mathbb{F}) \to H_*(K;\mathbb{F})$$

对于单纯复形 K 的顶点集中的每个非空子集 I ，该映射都是单射。单纯复形的紧性由 K¨uhnel [28] 引入，作为流形到欧几里得空间的紧嵌入的一种组合类比，此后这一概念受到了广泛研究。特别地，K¨uhnel 和 Lutz [27] 猜想，紧流形三角剖分具有强极小性，也就是说，每个维数中的单纯形数目都是最小的；这一猜想已在维数 ≤ 3 [5, 28,27] 中得到验证。既然我们可以预期流形三角剖分的 Golod 性与三角剖分的极小性之间存在联系，也可以预期流形三角剖分的 Golod 性与紧性之间存在联系；这尤其值得关注，因为这两个源自不同背景的概念可能是等价的。作者 [18] 利用矩-角复形从拓扑角度证明，若 K 是闭连通 $\mathbb{F}$-可定向 3-流形的三角剖分，则 K 是 $\mathbb{F}$-Golod 的充要条件是它为 $\mathbb{F}$-紧的。此外，作者 [18] 还证明，若一个单纯复形（不一定是流形三角剖分）是 $\mathbb{F}$-紧的，则它是弱 $\mathbb{F}$-Golod 的，也就是说， $\mathbb{F}[K]$ 的 Koszul 同调中的所有乘积均为平凡。

在本文中，我们将证明：

定理 1.2. 每个 $\mathbb{F}$-紧复形都是 $\mathbb{F}$-Golod。

定理 1.2 的逆命题一般不成立。例如，设 K 是由两个顶点组成的单纯复形。那么， $\mathbb{F}[K]$ 的 Koszul 同调是由一个次数为 3 的元素生成的外代数，因此 K 是 $\mathbb{F}$-Golod。但 K 不是 $\mathbb{F}$-紧的，因为 $\mathbb{F}$紧复形必须是邻接的。

现在我们限制单纯复形，并考虑定理 1.2的逆命题。我们称单纯复形 K 是弱 $\mathbb{F}$-*Golod* 的，若 $\mathbb{F}[K]$ 的 Koszul 同调中的所有乘积（不一定包括所有（高阶）Massey积）均为零。显然，如果单纯复形是 $\mathbb{F}$-Golod，那么它就是弱 $\mathbb{F}$-Golod。文献 [18] 证明，若闭连通 $\mathbb{F}$-可定向流形的三角剖分是弱 $\mathbb{F}$-Golod，则它是 $\mathbb{F}$-紧的。因此，根据定理1.2，我们得到：

推论 1.3. 闭的连通 $\mathbb{F}$可定向流形的三角剖分是 $\mathbb{F}$- Golod，当且仅当它是 $\mathbb{F}$-紧邻点的。

根据定义，直接检验 Golod 性很难。但由推论1.3，我们得到一个易于检验的 Golod 性判据。设 K 是一个维数为 $d \geq 3$的连通流形的三角剖分。若 K 是紧邻点的，则称

$$\binom{m-d-1}{2} = \binom{d+2}{2} \dim H_1(K;\mathbb{Q})$$

其中 m 是 K的顶点数。容易验证其紧邻点性质。与 [5, 7], 一样，若 K 是紧邻点的，则对任意域 $\mathbb{F}$，它都是 $\mathbb{F}$-紧的，其中

反之在维数 3 时成立。因此，由推论 1.3，若 K 是紧邻点的，则对任意域 $\mathbb{F}$，它都是 $\mathbb{F}$-Golod。

要判断一个弱戈洛德复形是否 $\mathbb{F}$戈洛德 $\mathbb{F}$，相当困难，因为我们需要检验所有（高阶）Massey积是否平凡。不过，有些单纯复形类中， $\mathbb{F}$戈洛德性与弱 $\mathbb{F}$戈洛德性是等价的[13, 14, 17, 18, 21]。（Berglund 和 J¨ollenbeck [4] 声称这对每个单纯复形总是成立，但 Katth¨an [21] 证明了这一说法是错误的。）根据上文提到的关于流形三角剖分的弱戈洛德性与紧性的结果 [18] ，结合定理1.2，我们可以找到这样一个有趣的复形类。

推论 1.4. 闭的连通 $\mathbb{F}$可定向流形的一个三角剖分是 $\mathbb{F}$ 戈洛德的，当且仅当它是弱 $\mathbb{F}$戈洛德的。

我们简要说明定理1.2的证明思路。在第3节中，我们将引入微分分次代数（简称 dga） $\mathcal{C}^*(K)$，它与 $\mathbb{F}[K]$的 Koszul 复形同伦等价；而微分分次代数 $\mathcal{C}^*(K)$ 同构于 K对应的矩-角复形的胞腔上链复形。接下来，我们需要证明，只要 $H^*(\mathcal{C}^*(K))$ 是 K - 紧的， $\mathbb{F}$ 中的所有乘积和（高阶） Massey 积都平凡。 $\mathcal{C}^*(K$ 中所有可能非平凡的乘积均由映射给出

$$K_{I\sqcup J} \to K_I \star K_J, \quad \sigma \mapsto (\sigma \cap I) \sqcup (\sigma \cap J)$$

在 K的顶点集的互不相交的非空子集 I、 J 所对应的上同调中，其中$K_1 \star K_2$ 表示单纯复形 K_1 和 K_2的连接。它与包含映射 $K_I \star K_J \to K \star K$ 复合后是零伦的，因为该复合与映入第一个因子 $K \subset K \star K$的包含映射同伦，而后者是零伦的。若 K 是$\mathbb{F}$-紧的，则上同调中复合映射 $K_{I\cup J} \to K \star K$ 的平凡性意味着上同调中的映射 $K_{I\sqcup J} \to K_I \star K_J$ 平凡，从而 $H^*(\mathcal{C}^*(K))$中的所有乘积都平凡。我们将通过考察高阶同伦，把这一论证推广到（高阶）Massey积。具体而言，映射

$$K_{I_0\sqcup\cdots\sqcup I_q} \to K^{\star(q+1)}, \quad \sigma \mapsto (\sigma \cap I_0) \sqcup \cdots \sqcup (\sigma \cap I_q)$$

对于顶点集 $I_0, \ldots, I_q$的两两不交的非空子集， K可以依次变形为 $K^{\star(q+1)} \supset K^{\star q} \supset \cdots \supset K^{\star 2} \supset K$，所用的高阶同伦将在第 2 节中构造。如果 K 是 $\mathbb{F}$-紧的，那么我们将看到，通过考虑与上述高阶同伦相对应的高阶棱柱算子，可以推出 $(q + 1)$-重 Massey积的平凡性。该算子将在第 2 节中构造，并在第 4 节中应用。

致谢。作者获得了 JSPS KAKENHI 资助，项目编号为 JP19K03473 和 JP17K05248。

2. 高阶棱柱算子

本节中，我们定义高阶棱柱算子，并借此控制（高阶）Massey积。下文中的代数和模均取自域 $\mathbb{F}$。我们约定全文通用的记号。设 K 和 L 为单纯复形。我们将 K 和 L 的连接定义为

$$K \star L = \{\sigma \sqcup \tau \mid \sigma \in K, \tau \in L\}.$$

令 $K^{\star n}$ 表示 K 的 n 重连接。令 $C^*(K)$ 表示单纯复形 K 的上链复形。那么对于 $a \in C^p(K)$ 和 $b \in C^q(L)$，我们可以通过以下方式定义 $a \star b \in C^{p+q+1}(K \star L)$: 对于 $\sigma \in K$ 和 $\tau \in L$，有 $(a \star b)(\sigma \sqcup \tau) = a(\sigma)b(\tau)$，于是得到一个同态

$$\star\colon C^p(K) \otimes C^q(L) \to C^{p+q+1}(K \star L), \quad a \otimes b \mapsto a \star b.$$

令 $V(K)$ 表示单纯复形 K 的顶点集。对于 $\emptyset \neq I \subset V(K)$，令

$$j_I \colon K_I \to K$$

表示包含映射。对于 $\emptyset \neq I, J \subset V(K)$，其中 $I \cap J = \emptyset$，我们定义一个单射单纯映射

$$\iota_{I,J} \colon K_{I \cup J} \to K_I \star K_J, \quad \sigma \mapsto (\sigma \cap I) \sqcup (\sigma \cap J).$$

为了定义棱柱算子，我们需要洗牌。回顾一下，(p,q)-洗牌是满足 $0 = s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_q \leq s_{q+1} = p$ 的序列 $(s_0, s_1, \ldots, s_{q+1})$。令 $\mathcal{S}(p,q)$ 表示所有 (p,q)-洗牌的集合。将 (p,q)-洗牌 $(s_0, s_1, \ldots, s_{q+1})$ 看作 $\{0,1,\ldots,p\} \times \{0,1,\ldots,q\}$ 中如下的格路径很有用。

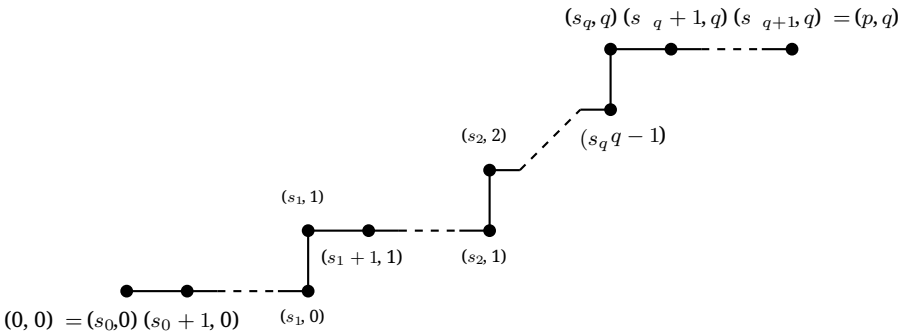


FIGURE 1.

例如，与 (6,3)-洗牌 (0,2,3,3,6) 对应的格路径如下图所示。

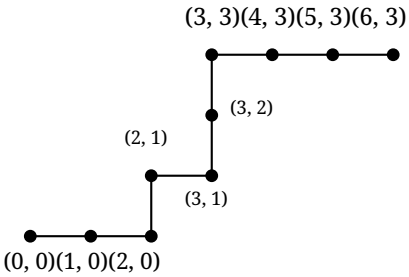


FIGURE 2.

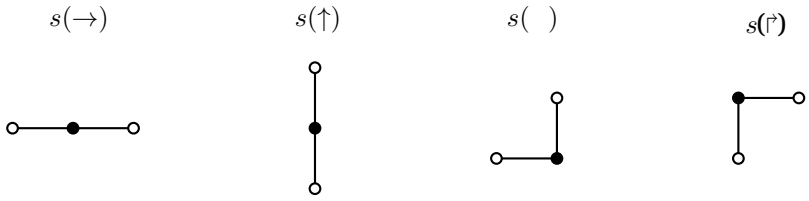
设 $s = (s_0, \ldots, s_{q+1}) \in \mathcal{S}(p,q)$。我们定义

$$\begin{aligned}
s(\rightarrow) &= \{0 < i < p+q \mid s_k + k < i < s_{k+1} + k \text{ for some } 0 \leq k \leq q\} \cup A \cup B \\
s(\uparrow) &= \{0 \leq i < p+q \mid i = s_k + k \text{ and } s_k = s_{k+1} \text{ for some } 0 \leq k \leq q\} \cup C \\
s(\ ) &= \{0 < i < p+q \mid i = s_k + k - 1 \text{ and } s_{k-1} < s_k \text{ for some } 0 \leq k \leq q+1\} \\
s(\uparrow\!\!\!\!\!\rightarrow) &= \{0 < i < p+q \mid i = s_k + k \text{ and } s_k < s_{k+1} \text{ for some } 0 \leq k \leq q\}
\end{aligned}$$

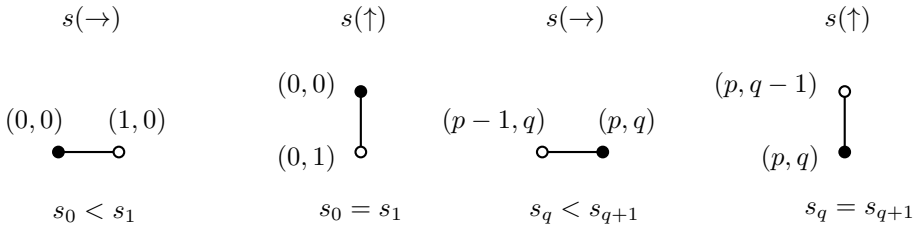
其中我们设定

$$A = \begin{cases} \{0\} & s_0 < s_1 \\ \emptyset & s_0 = s_1 \end{cases} \quad B = \begin{cases} \{p+q\} & s_q < s_{q+1} \\ \emptyset & s_q = s_{q+1} \end{cases} \quad C = \begin{cases} \emptyset & s_q < s_{q+1} \\ \{p+q\} & s_q = s_{q+1}. \end{cases}$$

那么每个 $0 \le i \le p+q$都属于这些集合之一；而对于 $0 < i < p+q$，这些集合中的元素是图 i 的格路径上的第 1 个顶点，如下图中的黑色顶点所示。



此外，如果 0 和 $p+q$ 是下图中的黑色顶点，则它们属于 $s(\rightarrow)$ 或 $s(\uparrow)$。



于是我们有

$$\{0,1,\dots,p+q\} = s(\rightarrow) \sqcup s(\uparrow) \sqcup s(\ ) \sqcup s(\ulcorner)$$

其中，这个划分刻画了洗牌 s。例如，对于一个 (6,3)-洗牌s = (0,2,3,3,6)，我们有

$$s(\rightarrow) = \{0,1,7,8,9\}, \quad s(\uparrow) = \{5\}, \quad s(\ ) = \{2,4\}, \quad s(\ulcorner) = \{3,6\}.$$

对应的格路径如图2所示。对于 $i \in s(\ )$，其中 $i = s_k + k - 1$，我们定义一个 (p,q)-洗牌

$$\alpha_i(s) = (s_0, \dots, s_{k-1}, s_k - 1, s_{k+1}, \dots, s_{q+1}).$$

对于满足 $j = s_l + l$ 的 $j \in s(\ulcorner)$，我们还定义一个 (p,q)-洗牌

$$\beta_j(s) = (s_0, \dots, s_{l-1}, s_l + 1, s_{l+1}, \dots, s_{q+1}).$$

那么，与 $\alpha_i(s)$（分别与 $\beta_j(s)$）对应的格路径，是通过翻转与 (p,q)-洗牌 s 对应的格路径中的第 i（分别为第 j）个顶点处的拐角得到的。

引理 2.1。映射

$$\coprod_{s \in \mathcal{S}(p,q)} s(\ ) \times s \to \coprod_{s \in \mathcal{S}(p,q)} s(\ulcorner) \times s, \quad (i,s) \mapsto (i, \alpha_i(s))$$

是双射。

证明。根据定义，对于 $i \in s(\ )$ 和 $j \in s(\ulcorner)$，我们有 $i \in \alpha_i(s)(\ulcorner)$ 和 $j \in \beta_j(s)(\ )$。此外，我们有

$$\beta_i(\alpha_i(s)) = s \quad \text{and} \quad \alpha_j(\beta_j(s)) = s.$$

那么映射

$$\coprod_{s \in \mathcal{S}(p,q)} s(\ulcorner) \times s \to \coprod_{s \in \mathcal{S}(p,q)} s(\ ) \times s, \quad (i,s) \mapsto (i, \beta_i(s))$$

是陈述中映射的逆映射。 □

对于 $k = 0, 1, \ldots, q$，我们定义映射

$$\lambda_k \colon \mathcal{S}(p-1,q) \to \mathcal{S}(p,q), \quad (s_0, \ldots, s_{q+1}) \mapsto (s_0, \ldots, s_k, s_{k+1}+1, \ldots, s_{q+1}+1)$$

and

$$\nu_k \colon \mathcal{S}(p,q-1) \to \mathcal{S}(p,q), \quad (s_0, \ldots, s_q) \mapsto (s_0, \ldots, s_{k-1}, s_k, s_k, s_{k+1}, \ldots, s_q).$$

显然，映射 λ_k 和 ν_k 是单射。对于 $s = (s_0, \ldots, s_q) \in \mathcal{S}(p,q)$，我们设

$$\operatorname{sgn}(s) = (-1)^{s_1 + \cdots + s_q}.$$

那么对于 $s = (s_0, \ldots, s_{q+1}) \in \mathcal{S}(p-1,q)$ 和 $t = (t_0, \ldots, t_q) \in \mathcal{S}(p,q-1)$，有

$$\operatorname{sgn}(\lambda_k(s)) = (-1)^{q-k} \operatorname{sgn}(s) \quad \text{and} \quad \operatorname{sgn}(\nu_k(t)) = (-1)^{t_k} \operatorname{sgn}(t). \tag{2.1}$$

如果单纯复形 K 配备了全序，则称其为有序的。注意，每个单纯复形都可以成为有序单纯复形；对于我们的目的，任意一种排序都可以。设 K 和 L 是有序单纯复形。于是，我们在 $V(K) \times V(L)$ 上赋予乘积序，使得当且仅当 $v_1 \le v_2$ 且 $w_1 \le w_2$ 时，$(v_1, w_1) \le (v_2, w_2) \in V(K) \times V(L)$。我们将 K 和 L 的乘积记为 $K \otimes L$，定义为顶点集为 $V(K) \times V(L)$、其单纯形为链 $(v_0, w_0) < (v_1, w_1) < \cdots < (v_p, w_p)$，且满足 $\{v_0, \ldots, v_p\} \in K$ 和 $\{w_0, \ldots, w_p\} \in L$ 的单纯复形。

我们始终假设，q-单纯形 Δ^q 的顶点集 $\{0, 1, \ldots, q\}$ 按通常序排列。设 K 为有序单纯复形。对于一个 (p,q)-洗牌 $s = (s_0, \ldots, s_{q+1})$ 以及 K 中的一个 p-单纯形 $\sigma = \{v_0 < \cdots < v_p\}$，我们定义 $K \otimes \Delta^q$ 的一个 $(p+q)$-单纯形如下：

$$\sigma \odot s = [(v_{s_0}, 0), \ldots, (v_{s_1}, 0), (v_{s_1}, 1), \ldots, (v_{s_2}, 1), \ldots, (v_{s_q}, q), \ldots, (v_{s_{q+1}}, q)]$$

这与将洗牌视为图1中的格路径非常相似。设 L 为一个单纯复形。现在，对于一个单纯映射 $H \colon K \otimes \Delta^q \to L$，我们定义一个高阶棱柱算子 $P_H \colon C_*(K) \to C_{*+q}(L)$，如下所示：

$$P_H(\sigma) = \sum_{s \in \mathcal{S}(p,q)} \operatorname{sgn}(s) H_*(\sigma \odot s).$$

注意，对于 $q = 0$, $P_H = H_*$，以及对于 $q = 1$, P_H，这是通常的棱柱算子。我们证明高阶棱柱算子之间具有相容性。

引理 2.2。对于单纯映射 $H \colon K \otimes \Delta^q \to L$，有如下恒等式

$$\partial P_H + (-1)^{q-1} P_H \partial = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i P_{H \circ (1 \otimes d^i)}$$

其中 $d^i \colon \Delta^{q-1} \to \Delta^q$ 表示第 i 个余面算子。

证明。设 $s=(s_0,\ldots,s_{q+1})$ 是一个 (p,q)-洗牌。则

$$\begin{aligned}
&\partial P_H(\sigma)\\
&=\sum_{j=0}^{p+q}(-1)^j\partial_j\left(\sum_{s\in\mathcal{S}(p,q)}\operatorname{sgn}(s)H_*(\sigma\odot s)\right)\\
&=\sum_{j=0}^{p+q}(-1)^j\sum_{s\in\mathcal{S}(p,q)}\operatorname{sgn}(s)H_*(\partial_j(\sigma\odot s))\\
&=\sum_{s\in\mathcal{S}(p,q)}\left(\sum_{j\in s(\rightarrow)}(-1)^j\operatorname{sgn}(s)H_*(\partial_j(\sigma\odot s))+\sum_{j\in s(\uparrow)}(-1)^j\operatorname{sgn}(s)H_*(\partial_j(\sigma\odot s))\right.\\
&\quad\left.+\sum_{j\in s(\uparrow\!\!\!\rightarrow)}(-1)^j\operatorname{sgn}(s)H_*(\partial_j(\sigma\odot s))+\sum_{j\in s(\ \ )}(-1)^j\operatorname{sgn}(s)H_*(\partial_j(\sigma\odot s))\right).
\end{aligned}$$

设 $j\in s(\rightarrow)$。若 $0<j<p+q$，则对于某个 $0\le k_j\le q$，有 $s_{k_j}+k_j<j<s_{k_j+1}+k_j$。对于 $j=0,p+q$，我们分别记 $k_j=0,q$。于是有

$$\begin{aligned}
\partial_j(\sigma\odot s)&=[(v_0,0),\ldots,(v_{j-k_j-1},k_j),(v_{j-k_j+1},k_j),\ldots,(v_p,q)]\\
&=(\partial_{j-k_j}\sigma)\odot\lambda_{k_j}^{-1}(s).
\end{aligned}$$

设 $j\in s(\uparrow)$。若 $0<j<p+q$，则对于某个 $0\le k_j\le q$，有 $j=s_{k_j}+k_j$ 和 $s_{k_j}=s_{k_j+1}$。对于 $j=0,p+q$，我们分别记 $k_j=0,q$。于是有

$$\begin{aligned}
\partial_j(\sigma\odot s)&=[(v_0,0),\ldots,(v_{s_{k_j}},k_j-1),(v_{s_{k_j+1}},k_j+1),\ldots,(v_p,q)]\\
&=(1\otimes d^{k_j})(\sigma\odot\nu_{k_j}^{-1}(s))
\end{aligned}$$

其中 $\lambda_k^{-1}(s)$ 和 $\nu_k^{-1}(s)$ 有意义，这是因为 λ_k 和 ν_k 是单射。因此由（2.1），可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{s\in\mathcal{S}(p,q)}\left(\sum_{j\in s(\rightarrow)}(-1)^j\operatorname{sgn}(s)H_*(\partial_j(\sigma\odot s))+\sum_{j\in s(\uparrow)}(-1)^j\operatorname{sgn}(s)H_*(\partial_j(\sigma\odot s))\right)\\
&=\sum_{s\in\mathcal{S}(p,q)}\left(\sum_{j\in s(\rightarrow)}(-1)^j\operatorname{sgn}(s)H_*((\partial_{j-k_j}\sigma)\odot\lambda_{k_j}^{-1}(s))\right.\\
&\quad\left.+\sum_{j\in s(\uparrow)}(-1)^j\operatorname{sgn}(s)H_*((1\otimes d^{k_j})(\sigma\odot\nu_{k_j}^{-1}(s)))\right)\\
&=(-1)^q\sum_{i=0}^{p}\sum_{s\in\mathcal{S}(p-1,q)}(-1)^i\operatorname{sgn}(s)H_*((\partial_i\sigma)\odot s)\\
&\quad+\sum_{i=0}^{q}\sum_{s\in\mathcal{S}(p,q-1)}(-1)^i\operatorname{sgn}(s)H_*\circ(1\otimes d^i)(\sigma\odot s)\\
&=(-1)^qP_H\partial(\sigma)+\sum_{i=0}^{q}(-1)^iP_{H\circ(1\otimes d^i)}(\sigma).
\end{aligned}$$

对于 $j\in s(\ )$，我们有

$$\partial_j(\sigma\odot s)=\partial_j(\sigma\odot\alpha_j(s))\quad\text{and}\quad\operatorname{sgn}(s)=-\operatorname{sgn}(\alpha_j(s)).$$

根据引理 2.1，可得

$$\begin{aligned}&\sum_{s\in\mathcal{S}(p,q)}\sum_{j\in s(\ \ )}(-1)^j\operatorname{sgn}(s)H_*(\partial_j(\sigma\odot s))\\&=-\sum_{s\in\mathcal{S}(p,q)}\sum_{j\in s(\ \ )}(-1)^j\operatorname{sgn}(\alpha_j(s))H_*(\partial_j(\sigma\odot\alpha_j(s)))\\&=-\sum_{s\in\mathcal{S}(p,q)}\sum_{j\in s(\uparrow)}(-1)^j\operatorname{sgn}(s)H_*(\partial_j(\sigma\odot s))\end{aligned}$$

这意味着

$$\sum_{s\in\mathcal{S}(p,q)}\left(\sum_{j\in s(\uparrow)}(-1)^j\operatorname{sgn}(s)H_*(\partial_j(\sigma\odot s))+\sum_{j\in s(\ \ )}(-1)^j\operatorname{sgn}(s)H_*(\partial_j(\sigma\odot s))\right)=0.$$

因此我们得到

$$\partial P_H(\sigma)=(-1)^qP_H\partial(\sigma)+\sum_{i=0}^{q}(-1)^iP_{H\circ(1\otimes d^i)}(\sigma)$$

这就是所需的恒等式。 □

我们定义一种将在下文中使用的单纯复形之间的高阶同伦。设 K 是一个有序单纯复形，并令 I 表示一个划分$V(K)=I_0\sqcup I_1\sqcup\cdots\sqcup I_q$，使得 $I_0,\ \ldots,I_q$均非空且两两不相交。对于 $i=0,\ 1,\ \ldots,q$，我们定义一个单纯映射 $h_I^i\colon K\to K^{\star(q+1)}$，其定义如下

$$h_I^i(\sigma)=(\sigma\cap I_0)\sqcup\cdots\sqcup(\sigma\cap I_{i-1})\sqcup(\sigma\cap(I_i\sqcup\cdots\sqcup I_q))\sqcup\underbrace{\emptyset\sqcup\cdots\sqcup\emptyset}_{q-i}$$

对于 K的一个单纯形 σ。于是我们有：

引理 2.3。对于 $i=0,1,\ldots,q-1,\ \ h_I^i$的像包含在 $K^{\star q}\subset K^{\star q}\star K=K^{\star(q+1)}$ 中。

根据定义，映射 h_I^q 涉及 $\mathcal{C}^*(K)$ 中的 $(q+1)$ 重乘积；对于 $i=0,1,\ldots,q-1$，我们可以将 h_I^i 视为把 h_I^q变形到第一个 $(i+1)$ 重连接
$K^{\star(i+1)}\subset K^{\star(i+1)}\star K^{\star(q-i)}=K^{\star(q+1)}$中的过程。我们定义这些变形之间的高阶同伦。

引理 2.4。映射

$$V(K)\times\{0,1,\ldots,q\}\to\underbrace{V(K)\sqcup\cdots\sqcup V(K)}_{q+1},\quad(v,i)\mapsto h_I^i(v).$$

定义了一个单纯映射 $H_I\colon K\otimes\Delta^q\to K^{\star(q+1)}$。

证明。设 $\sigma=\{(v_0,w_0)\ldots,(v_p,w_p)\}$ 是 $K\otimes\Delta^q$ 的一个单纯形。那么 $\{v_0,\ldots,v_p\}$是 K 的一个单纯形，因此它的子集都是 K 的单纯形。根据定义，我们有

$$H_I(\sigma)=\sigma_0\sqcup\cdots\sqcup\sigma_q.$$

其中每个 σ_i都是 $\{v_0,\ldots,v_p\}$的一个子集。于是每个 σ_i都是 K 的一个单纯形，因此 $H_I(\sigma)$ 是 $K^{\star(q+1)}$的一个单纯形，证明完成。□

我们将高阶棱柱算子 P_{H_I} 记为 $P(I)$。如上所述，对于 $q=0,\ \ P(I)$ 是 K 的恒等映射。对于 $i=0$、1、$\ldots q-1$，令 $I(i)$ 为划分$V(K)=J_0\sqcup\cdots\sqcup J_{q-1}$，使得

$$J_k=\begin{cases}I_k & 0\le k\le i-1\\ I_i\sqcup I_{i+1} & k=i\\ I_{k+1} & i+1\le k\le q-1.\end{cases}$$

对于 $i=0$、1、.....、$q-1$，我们设

$$\mu_i = (j_{I_0\sqcup\cdots\sqcup I_i} \star j_{I_{i+1}\sqcup\cdots\sqcup I_q}) \circ \iota_{I_0\sqcup\cdots\sqcup I_i, I_{i+1}\sqcup\cdots\sqcup I_q} : K \to K\star K.$$

根据定义，划分 I 定义了 μ_i，当我们指定定义划分 μ_i^I 时，记作 I。我们将引理 2.2 特化到高阶棱柱算子 $P(I)$。

引理 2.5. 等式

$$\partial P(I) + (-1)^{q-1}P(I)\partial = \sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i(1_{K^{\star i}}\star\mu_i\star 1_{K^{\star(q-i-1)}})_*\circ P(I(i)) + (-1)^q P_{H_I\circ(1_K\otimes d^q)}.$$

证明。设 σ 是 K 的一个单纯形。对于 $0\le j<i<q$，有

$$\begin{aligned}
&(1_{K^{\star i}}\star\mu_i\star 1_{K^{\star(q-i-1)}})\circ h^j_{I(i)}(\sigma)\\
&= (1_{K^{\star i}}\star\mu_i\star 1_{K^{\star(q-i-1)}})((\sigma\cap I_0)\sqcup\cdots\sqcup(\sigma\cap I_{j-1})\\
&\quad\sqcup(\sigma\cap(I_j\sqcup\cdots\sqcup I_q))\sqcup\underbrace{\emptyset\sqcup\cdots\sqcup\emptyset}_{q-j-1})\\
&= (\sigma\cap I_0)\sqcup\cdots\sqcup(\sigma\cap I_{j-1})\sqcup(\sigma\cap(I_j\sqcup\cdots\sqcup I_q))\sqcup\underbrace{\emptyset\sqcup\cdots\sqcup\emptyset}_{q-j}\\
&= h^j_I(\sigma).
\end{aligned}$$

对于 $0\le i=j<q$，有

$$\begin{aligned}
&(1_{K^{\star i}}\star\mu_i\star 1_{K^{\star(q-i-1)}})\circ h^i_{I(i)}(\sigma)\\
&= (1_{K^{\star i}}\star\mu_i\star 1_{K^{\star(q-i-1)}})((\sigma\cap I_0)\sqcup\cdots\sqcup(\sigma\cap I_{i-1})\\
&\quad\sqcup(\sigma\cap(I_i\sqcup\cdots\sqcup I_q))\sqcup\underbrace{\emptyset\sqcup\cdots\sqcup\emptyset}_{q-i-1})\\
&= (\sigma\cap I_0)\sqcup\cdots\sqcup(\sigma\cap I_i)\sqcup(\sigma\cap(I_{i+1}\sqcup\cdots\sqcup I_q))\sqcup\underbrace{\emptyset\sqcup\cdots\sqcup\emptyset}_{q-i-1}\\
&= h^{i+1}_I(\sigma) = h^{j+1}_I(\sigma),
\end{aligned}$$

而对于 $0\le i<j<q$，有

$$\begin{aligned}
&(1_{K^{\star i}}\star\mu_i\star 1_{K^{\star(q-i-1)}})\circ h^j_{I(i)}(\sigma)\\
&= (1_{K^{\star i}}\star\mu_i\star 1_{K^{\star(q-i-1)}})((\sigma\cap I_0)\sqcup\cdots\sqcup(\sigma\cap I_{i-1})\sqcup(\sigma\cap(I_i\sqcup I_{i+1}))\\
&\quad\sqcup(\sigma\cap I_{i+2})\sqcup\cdots\sqcup(\sigma\cap I_j)\sqcup(\sigma\cap(I_{j+1}\sqcup\cdots\sqcup I_q))\sqcup\underbrace{\emptyset\sqcup\cdots\sqcup\emptyset}_{q-j-1})\\
&= (\sigma\cap I_1)\sqcup\cdots\sqcup(\sigma\cap I_j)\sqcup(\sigma\cap(I_{j+1}\sqcup\cdots\sqcup I_q))\sqcup\underbrace{\emptyset\sqcup\cdots\sqcup\emptyset}_{q-j-1}\\
&= h^{j+1}_I(\sigma).
\end{aligned}$$

因此，该结论由引理 2.2 得出。 □

引理 2.6. 设 $a_i\in C^*(K)$ 对于 $i=0,\ 1,\ldots,q$。则有

$$(P(I)^*\delta + (-1)^{q-1}\delta P(I)^*)(a_0\star\cdots\star a_q) = \sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i P(I(i))^*(1_{K^{\star i}}\star\mu_i\star 1_{K^{\star(q-i-1)}})^*(a_0\star\cdots\star a_q).$$

证明。由引理 2.3 以及包含映射 $K^{\star q}\to K^{\star q}\star K = K^{\star(q+1)}$在上同调中是平凡的这一事实，我们有（$H_I\circ(1\otimes d^q)$）*（$a_0\star\cdots\star a_q$）$=0$，从而得到$P^*_{H_I\circ(1\otimes d^q)}$（$a_0\star\cdots\star a_q$）$=0$。由引理 2.5，证明完成。 □

3. The dga $\mathcal{C}^*(K)$

设 K 为一个（有序的）单纯复形。在本节中，我们介绍微分分次代数$\mathcal{C}^*(K)$，它与Stanley-Reisner环 $\mathbb{F}[K]$的 Koszul 复形同伦等价，并展示其关于（高阶）Massey积的性质。

我们定义

$$\mathcal{C}^p(K) = \bigoplus_{\emptyset \neq I \subset V(K)} \widetilde{C}^{p-|I|-1}(K_I)$$

对于 $p > 0$ 和 $\mathcal{C}^0(K) = \mathbb{F}$，其中 $\widetilde{C}^*(K)$ 表示~K的约化上链复形。 $\mathcal{C}^*(K)$ 的微分由 $C^*(K_I)$ 的上余边映射 δ 定义，因此我们有

$$H^p(\mathcal{C}^*(K)) = \bigoplus_{\emptyset \neq I \subset V(K)} \widetilde{H}^{p-|I|-1}(K_I)$$

对于 $p > 0$ 和 $H^0(\mathcal{C}^*(K)) = \mathbb{F}$。 $\mathcal{C}^*(K)$ 的乘积定义为

$$\widetilde{C}^{p-|I|-1}(K_I) \otimes \widetilde{C}^{q-|J|-1}(K_J) \to \widetilde{C}^{p+q-|I\cup J|-1}(K_{I\cup J})$$

对于 $I \cap J \neq \emptyset$，令其为平凡映射；并令其为复合映射

$$\widetilde{C}^{p-|I|-1}(K_I) \otimes \widetilde{C}^{q-|J|-1}(K_J) \xrightarrow{\star} \widetilde{C}^{q-|I\cup J|-1}(K_I \star K_J) \xrightarrow{\iota^*_{I,J}} \widetilde{C}^{p+q-|I\cup J|-1}(K_{I\cup J})$$

对于 $I \cap J = \emptyset$。

回忆一下，顶点集为$\{1, 2, \ldots, n\}$ 的单纯复形 K 的 Stanley-Reisner环定义为

$$\mathbb{F}[K] = \mathbb{F}[v_1, \ldots, v_n]/(v_{i_1} \cdots v_{i_k} \mid \{i_1, \ldots, i_k\} \notin K)$$

其中我们令 $|v_i| = 2$。那么， $\mathbb{F}[K]$ 的 Koszul 复形（相对于 v_1、.....、 v_n）是由下式定义的微分分次代数

$$\mathcal{K}(K) = \mathbb{F}[K] \otimes \Lambda(x_1, \ldots, x_n), \quad dv_i = 0, \quad dx_i = v_i$$

其中 $|x_i| = 1$。令

$$\mathcal{R}(K) = \mathcal{K}(K)/(v_i^2,\, v_i x_i \mid i = 1, 2, \ldots, n).$$

那么， $\mathcal{R}$（K）是一个微分分次代数。Baskakov、Buchstaber 和 Panov[6] 研究了一个称为矩-角复形的空间的胞腔上链复形，对于 K，它实际上是 $\mathcal{R}$（K），并证明投影 $\mathcal{K}$（K） $\to \mathcal{R}$（K）是一个同伦等价。另一方面，我们可以定义映射

$$\phi\colon \mathcal{C}^*(K) \to \mathcal{R}(K)$$

~由 $\phi(\sigma^*) = v_{i_1} \cdots v_{i_k} x_{j_1} \cdots x_{j_l}$给出，其中 $\sigma^* \in C^*(K_I) \subset \mathcal{C}^*(K)$，其中$\sigma^*$是单纯形 $\sigma = \{i_1 < \cdots < i_k\} \in K_I$的 Kronecker对偶，而 $I - \sigma = \{j_1 < \cdots < j_l\}$。容易看出，映射 ϕ 是微分分次代数的同构，因此我们得到：

命题3.1。存在一个同伦等价

$$\mathcal{C}^*(K) \simeq \mathcal{K}(K).$$

我们回顾（高阶）Massey积的定义。详情请参阅 [25, 31] ，我们采用 May [31] 的符号约定。设 A 为一个微分分次代数。我们定义

$$\overline{a} = (-1)^{|a|+1} a$$

对于 $a \in A$，其中 $|a|$ 表示 a的次数。设给定上同调类 $\alpha_0, \ldots, \alpha_q \in H^*(A)$，其中 $q \geq 1$。我们称一组 $\{a_{i,j} \in A \mid 0 \leq i \leq j \leq q, (i,j) \neq (0,q)\}$是 $\alpha_0, \ldots, \alpha_q$ 的定义系统，若 $a_{i,\ i}$代表 α_i，其中$i = 0$为 $1, \ldots, q$，并且恒等式

$$da_{i,j} = \sum_{k=i}^{j-1} \overline{a}_{i,k} a_{k+1,j}$$

对 $i<j$成立。如果存在 $\alpha_0,\dots,\alpha_q$的定义系统，那么我们称 Massey积 $\langle\alpha_0,\dots,\alpha_q\rangle$ 有定义，它是由余循环 $\sum_{i=0}^{q-1}\overline{a}_{0,\ i}a_{i+1,\ q}$所代表的所有上同调类组成的集合，其中 $\{a_{i,j}\}$ 遍历 $\alpha_0,\dots,\alpha_q$的所有定义系统。若 $\alpha_0,\dots,\alpha_q$ 的 Massey积是平凡的，则

$$0\in\langle\alpha_0,\dots,\alpha_q\rangle.$$

注意，对于 $q=1$， α_0,α_1 的 Massey积总是有定义的，且 $\langle\alpha_0,\alpha_1\rangle=\{\alpha_0\alpha_1\}$。因此，所有 Massey积都平凡意味着所有乘积都平凡，所以在考虑所有 Massey积的平凡性时，我们不会再提及乘积的平凡性。

注意，Massey积在同伦等价下保持不变。由命题3.1，可得：

命题3.2. 单纯复形 K 是 $\mathbb{F}$-Golod，当且仅当 $H^*(\mathcal{C}^*(K))$ 中的所有 Massey积都平凡。

因此，对于单纯复形 K 的 Golod 性，我们将考虑 $H^*(\mathcal{C}^*(K))$ 中的 Massey积，而不是 $H^*(\mathcal{K}(K))$。

~引理 3.3. 设 $\alpha_i\in H^*(K_{I_i})\subset H^*(\mathcal{C}^*(K))$，其中 $i=0,1,\dots,q$ 满足 $q\geq 1$。如果对于某个 $i<j$，有 $I_i\cap I_j\neq\emptyset$，并且 $H^*(\mathcal{C}^*(K))$ 中 $\alpha_0,\dots,\alpha_q$ 的 Massey积有定义，那么 $\langle\alpha_0,\dots,\alpha_q\rangle$ 是平凡的。

证明。任取一个适用于 α_0、……、α_q 的定义系统 $\{a_{k,l}\}$。对于满足 $(k,l)\neq(0,q)$ 的 $0\leq k\leq l\leq q$，我们定义

$$b_{k,l}=\begin{cases}0 & k\leq i<j\leq l,\\ a_{k,l} & \text{otherwise.}\end{cases}$$

由于 $b_{k,\ k}=a_{k,\ k}$对于 $k=0$、1、……、q，每个 $b_{k,\ k}$都表示 α_k。如果 (k,l) 不满足 $k\leq i<j\leq l$，那么我们有

$$\delta b_{k,l}=\delta a_{k,l}=\sum_{p=k}^{l-1}\overline{a}_{k,p}a_{p+1,l}=\sum_{p=k}^{l-1}\overline{b}_{k,p}b_{p+1,l}.$$

设 $k\leq i<j\leq l$。如果 $p<i$，则 $p+1\leq i<j\leq l$，从而得到 $b_{p+1,\ l}=0$。如果 $p\geq j$，则 $k\leq i<j\leq p$，从而得到 $b_{k,\ p}=0$。此外，如果 $i\leq p<j$，那么 ~$\overline{b}_{k,\ p}b_{p+1,\ l}=0$，因为存在 $\overline{b}_{k,\ p}\in C^*(K_{I_k\sqcup\cdots\sqcup I_p})$ 和 $b_{p+1,\ l}\in C^*(K_{I_{p+1}\sqcup\cdots\sqcup I_l})$，使得 $(I_k\sqcup\cdots\sqcup I_p)\cap(I_{p+1}\sqcup\cdots\sqcup I_l)\neq\emptyset$。因此我们得到

$$\delta b_{k,l}=0=\sum_{p=k}^{l-1}\overline{b}_{k,p}b_{p+1,l}$$

因此，$\{b_{k,j}\mid 0\leq k\leq l\leq q,(k,l)\neq(0,q)\}$是一个定义系统，适用于 $\alpha_0,\dots,\alpha_q$，使得

$$\sum_{p=0}^{q-1}\overline{b}_{0,p}b_{p+1,q}=0.$$

因此，$\alpha_0,\dots,\alpha_q$的 Massey积是平凡的，证明完毕。 □

~设 $\alpha_i\in H^*(K_{I_i})$ 对于 $i=0,1,\dots,q$ 满足 $q\geq 1$。若 $H^*(\mathcal{C}^*(K))$ 中的 $\alpha_0,\dots,\alpha_q$ 的 Massey 积有定义，则称其支撑为 $I_0\cup\cdots\cup I_q$。

引理 3.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个在取全子复形运算下封闭的单纯复形类。若对于每个 $K\in\mathcal{C}$，在 $H^*(\mathcal{C}^*(K))$ 中所有支撑为 $V(K)$ 的 Massey积均为平凡的，则 $\mathcal{C}$ 中所有单纯复形都是 $\mathbb{F}$-Golod。

证明. 根据定义， $\mathcal{C}^*(K)$ 关于 K 的子复形是自然的，也就是说，子复形的包含映射 $i\colon L \to K$ 会诱导一个微分分次代数同态 $i^*\colon \mathcal{C}^*(K) \to \mathcal{C}^*(L)$。于是，对于 $H^*(\mathcal{C}^*(K))$ 中任意给定的、支撑为$\emptyset \neq I \subset V(K)$ 的 Massey积 $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_q\rangle$，我们有

$$j_I^*(\langle \alpha_0, \dots, \alpha_q\rangle) \subset \langle j_I^*(\alpha_0), \dots, j_I^*(\alpha_q)\rangle \subset H^*(\mathcal{C}^*(K_I)).$$

假设 K 属于陈述中的一个类 $\mathcal{C}$。由于 Massey积$\langle j_I^*(\alpha_0) \dots, j_I^*(\alpha_q)\rangle$ 在 $H^*(\mathcal{C}^*(K_I))$ 中的支撑为 $I = V(K_I)$，根据假设，它是平凡的。注意， $\mathcal{C}^*(K_I)$ 是 $\mathcal{C}^*(K)$ 的一个收缩。于是我们得到，Massey积 $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_q\rangle$ 本身是平凡的，证明完毕。□

~引理 3.5. 设 $\alpha_i \in H^*(K_{I_i})$，其中 $i = 0, 1, \dots, q$满足 $q \geq 1$，使得 $V(K) =_\sim I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_q$。假设存在 $a_{i,j} \in C^*(K)$，其中 $0 \leq i \leq j \leq q$满足$j_{I_i}^*(a_{i,i})$ 表示 α_i，其中 $i = 0, 1, \dots, q$，并且

$$\delta a_{i,j} = \sum_{k=i}^{j-1} \mu_k^*(\overline{a}_{i,k} \star a_{k+1,j}) \tag{3.1}$$

对于 $0 \leq i < j \leq q$。那么 $\alpha_0, \dots, \alpha_q$ 的 Massey积有定义且平凡。

证明。对于 $0 \leq i \leq j \leq q$，令 $b_{i,j} = j_{I_i \sqcup \cdots \sqcup I_j}^*(a_{i,j})$。那么对于 $0 \leq i \leq k < j \leq q$,

$$\begin{aligned}
&j_{I_i \sqcup \cdots \sqcup I_j}^* \circ \mu_k^*(\overline{a}_{i,k} \star a_{k+1,j}) \\
&= ((j_{I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_k} \star j_{I_{k+1} \sqcup \cdots \sqcup I_q}) \circ \iota_{I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_k, I_{k+1} \sqcup \cdots \sqcup I_q} \circ j_{I_i \sqcup \cdots \sqcup I_j})^*(\overline{a}_{i,k} \star a_{k+1,j}) \\
&= ((j_{I_i \sqcup \cdots \sqcup I_k} \star j_{I_{k+1} \sqcup \cdots \sqcup I_j}) \circ \iota_{I_i \sqcup \cdots \sqcup I_k, I_{k+1} \sqcup \cdots \sqcup I_j})^*(\overline{a}_{i,k} \star a_{k+1,j}) \\
&= (\iota_{I_i \sqcup \cdots \sqcup I_k, I_{k+1} \sqcup \cdots \sqcup I_j})^*(\overline{b}_{i,k} \star b_{k+1,j}) \\
&= \overline{b}_{i,k} b_{k+1,j}
\end{aligned}$$

其中，最后一行中的乘积取自 $\mathcal{C}^*(K)$。那么对于 $0 \leq i < j \leq q$，我们在 $\mathcal{C}^*(K)$ 中得到一个恒等式

$$\delta b_{i,j} = \sum_{k=i}^{j-1} \overline{b}_{i,k} b_{k+1,j}. \tag{3.2}$$

根据假设，对于每个 i，$b_{i,i}$ 表示 α_i，因此由 (3.2)，$\{b_{i,j} \mid 0 \leq i \leq j \leq q, (i,j) \neq (0,q)\}$ 是 $\alpha_0, \dots, \alpha_q$ 在 $H^*(\mathcal{C}^*(K))$ 中的一个定义系统。于是，$\langle \alpha_0, \dots, \alpha_q\rangle$ 在 $H^*(\mathcal{C}^*(K))$ 中的 Massey积有定义，因此 (3.2) 右端中关于 $(i,j) = (0,q)$ 的项表示 $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_q\rangle$ 中的一个元素。由此，(3.2) 中关于 $(i,j) = (0,q)$ 的式子表明 $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_q\rangle$ 是平凡的，证明完毕。□

4. Proof of Theorem 1.2

在本节中，我们证明定理 1.2。设 K 是一个（有序）单纯复形。为证明定理 1.2，我们需要说明，只要 K 是 $\mathbb{F}$-紧的， $H^*(\mathcal{C}^*(K))$ 中的所有 Massey积都是平凡的。我们考虑 Massey积的支撑~为 $V(K)$ 的特殊情形。任取一个 $\alpha_i \in H^*(K_{I_i}) \subset H^*(\mathcal{C}^*(K))$，满足对 $i = 0$，1，$\dots$，q，有 $\emptyset \neq I_i \subset V(K)$，且 $V(K) = I_0 \cup \cdots \cup I_q$。我们将考察 α_0，$\dots$，α_q 的 Massey 积。由引理 3.3，若 I_0，$\dots$，I_q 并非两两不相交，则只要 α_0，$\dots$，α_q 的 Massey 积有定义，它就是平凡的。因此，我们不妨设 I_0，$\dots$，I_q 两两不相交；由引理 3.5，只需为满足引理 3.5 条件的 $0 \leq i \leq j \leq q$ 构造 $a_{ij} \in C^*(K)$，~

引理 4.1. 若 K 是 $\mathbb{F}$-紧的，则对于每个 $i = 0, 1, \dots, q$，都存在一个余循环 $a_{i,i} \in_\sim C^*(K)$，使得 $j_{I_i}^*(a_{i,i})$ 表示 α_i。

证明. 由于 K 是 $\mathbb{F}$-紧的，对于每个 i，映射 $j_{I_i}^*\colon H^*(K) \to H^*(K_{I_i})$ 都是满射。因此结论成立。□

我们通过对 $j-i$ 进行归纳法，证明 $a_{i,j}$ 对于 $0 \le i < j \le q$ 的存在性。

~引理 4.2. 如果存在余循环 $a_{i,i} \in C^*(K)$，使得每个 $j_{I_i}^*(a_{i,i})$ 对于 $i = 0, 1, \ldots, q$ 都表示$\sim\alpha_i$，那么对于 $i = 0, 1, \ldots, q-1$，存在 $a_{i,i+1} \in C^*(K)$，满足

$$\delta a_{i,i+1} = \mu_i^*(\overline{a}_{i,i} \star a_{i+1,i+1}).$$

证明。令 J 表示划分 $V(K) = J_0 \sqcup J_1$，使得 $J_0 = I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_i$ 且 $J_1 = I_{i+1} \sqcup \cdots \sqcup I_q$。根据引理 2.6，我们有

$$\begin{aligned}\mu_i^*(\overline{a}_{i,i} \star a_{i+1,i+1}) &= P(J(0))^*(\mu_i^*(\overline{a}_{i,i} \star a_{i+1,i+1})) \\ &= (P(J)^*\delta + \delta P(J)^*)(\overline{a}_{i,i} \star a_{i+1,i+1}) \\ &= \delta P(J)^*(\overline{a}_{i,i} \star a_{i+1,i+1})\end{aligned}$$

其中 $P(J(0))$ 是 K 的恒等映射，而 $P(J)^*\delta(\overline{a}_{i,i} \star a_{i+1,i+1}) = 0$ 作为 $a_{i,i}$ 和 $a_{i+1,i+1}$ 都是余循环。于是 $a_{i,i+1} = P(J)^*(\overline{a}_{i,i} \star a_{i+1,i+1})$ 就是所需的元素。□

现在我们假设对于 $j - i < n$，我们已经得到所需的 $a_{i,\,j}$，并证明 $j - i = n$ 情形。令 $s = (s_0, \ldots, s_{k+1}) \in \mathcal{S}(j-i, k)$。我们通过 $V(K) = J_0 \sqcup \cdots \sqcup J_k$ 定义划分 I^s，使得

$$J_p = \begin{cases} I_{i_0} \sqcup \cdots \sqcup I_{i_1} & p = 0 \\ I_{i_p+1} \sqcup \cdots \sqcup I_{i_{p+1}} & p = 1, \ldots, k \end{cases}$$

其中，对于 $p = 0, 1, \ldots, k+1$，有 $i_p = i + s_p$。我们令

$$\epsilon(s) = \begin{cases} (|a_{i_1+1,i_2}| + 1) + (|a_{i_3+1,i_4}| + 1) + \cdots + (|a_{i_{k-1}+1,i_k}| + 1) & (k \text{ is even}) \\ (|a_{i_0,i_1}| + 1) + (|a_{i_2+1,i_3}| + 1) + \cdots + (|a_{i_{k-1}+1,i_k}| + 1) & (k \text{ is odd}) \end{cases}$$

对于 $k \ge 1$，并且

$$a^s = a_{i_0,i_1} \star a_{i_1+1,i_2} \star \cdots \star a_{i_k+1,i_{k+1}}.$$

我们还令

$$\epsilon(k) = \begin{cases} 0 & (k \equiv 1, 2 \mod 4) \\ 1 & (k \equiv 0, 3 \mod 4). \end{cases}$$

^令 $\mathcal{S}(p,q)$ 表示 $\mathcal{S}(p,q)$ 的子集，该子集由满足 $0 = s_0 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_{q+1} = p$ 的 (p,q)- 洗牌 $(s_0, .., s_{q+1})$^ 组成。根据定义，对于 $q > p$，$\mathcal{S}(p,q) = \emptyset$。

引理 4.3。如果对于 $j - i < n$ 存在 $a_{i,\,j}$，那么对于 $j - i = n$ 和 $k = 1, 2, \ldots, j-i$，

$$\sum_{p=i}^{j-1} \mu_p^*(\overline{a}_{i,p} \star a_{p+1,j}) \equiv \sum_{s \in \widehat{\mathcal{S}}(j-i,k)} (-1)^{\epsilon(s)+\epsilon(k)} P(I^s)^*\delta(a^s) \mod \operatorname{Im}\delta. \tag{4.1}$$

证明。我们对 k 进行归纳。由引理 2.6，可得

$$\begin{aligned}\mu_p^*(\overline{a}_{i,p} \star a_{p+1,j}) &= P(I^s(0))^*(\mu_p^*(\overline{a}_{i,p} \star a_{p+1,j})) \\ &= (P(I^s)^*\delta + \delta P(I^s)^*)(\overline{a}_{i,p} \star a_{p+1,j}) \\ &\equiv (-1)^{\epsilon(s)+\epsilon(1)} P(I^s)^*\delta(a^s) \qquad \mod \operatorname{Im}\delta\end{aligned}$$

^其中 $s = (0, p-i, j-i) \in \mathcal{S}(j-i, 1)$，且 $P(I^s(0))$ 是 K 的恒等映射。^由于 $\mathcal{S}(j-i, 1) = \{(0, p-i, j-i) \in \mathcal{S}(j-i, 1) \mid i \le p < j\}$，故 $k = 1$ 情形得证。设 (4.1) 对 k 成立，并考虑 $k+1$ 情形。令~$s = (s_0, \ldots, s_{k+1}) \in \mathcal{S}(j-i, k)$。我们可以定义

$$b_0 = a_{i_0,i_1} \star \overline{a}_{i_1+1,i_2} \quad \text{and} \quad b_p = a_{i_p+1,i_{p+1}} \star \overline{a}_{i_{p+1}+1,i_{p+2}}$$

对 p 为偶数的情形。显然，我们有

$$\overline{b}_0 = \overline{a}_{i_0,i_1} \star a_{i_1+1,i_2} \quad \text{and} \quad \overline{b}_p = \overline{a}_{i_p+1,i_{p+1}} \star a_{i_{p+1}+1,i_{p+2}}$$

对于 p 为偶数的情形。于是当 k 为偶数时，我们有

$$\begin{aligned}(-1)^{\epsilon(s)}\delta(a^s) &= \delta(b_0 \star b_2 \star \cdots \star b_{k-2} \star a_{i_k+1,i_{k+1}}) \\ &= \sum_{p=0}^{\frac{k-2}{2}} \overline{b}_0 \star \cdots \star \overline{b}_{2p-2} \star (\delta b_{2p}) \star b_{2p+2} \star \cdots \star b_{k-2} \star a_{i_k+1,i_{k+1}} \\ &\quad + \overline{b}_0 \star \cdots \star \overline{b}_{k-2} \star (\delta a_{i_k+1,i_{k+1}}).\end{aligned}$$

对于 $p = 0$、1、……、k，令 $\mathcal{S}_p(s)$ 表示所有形如 $(s_0, \dots, s_p, t, s_{p+1}, \dots, s_{k+1})$ 且满足 $s_p < t < s_{p+1}$ 的 $(j-i, k+1)$-洗牌所构成的集合。于是我们有

$$\begin{aligned}&(\delta b_0) \star b_2 \star \cdots \star b_{k-2} \star a_{i_k+1,i_{k+1}} \\ &= (\delta a_{i_0,i_1}) \star \overline{a}_{i_1+1,i_2} \star b_2 \star \cdots \star b_{k-2} \star a_{i_k+1,i_{k+1}} \\ &\quad - \overline{a}_{i_0,i_1} \star \overline{(\delta a_{i_1+1,i_2})} \star b_2 \star \cdots \star b_{k-2} \star a_{i_k+1,i_{k+1}} \\ &= \sum_{l=i_0}^{i_1-1} \mu_l^*(\overline{a}_{i_0,l} \star a_{l+1,i_1}) \star \overline{a}_{i_1+1,i_2} \star b_2 \star \cdots \star b_{k-2} \star a_{i_k+1,i_{k+1}} \\ &\quad - \sum_{l=i_1+1}^{i_2-1} \overline{a}_{i_0,i_1} \star \mu_l^*(a_{i_1+1,l} \star \overline{a}_{l+1,i_2}) \star b_2 \star \cdots \star b_{k-2} \star a_{i_k+1,i_{k+1}} \\ &= \sum_{t \in \mathcal{S}_0(s)} (-1)^{\epsilon(t)} (\mu_0^{I^t} \star 1_{K^{\star k}})(a^t) - \sum_{t \in \mathcal{S}_1(s)} (-1)^{\epsilon(t)} (1_K \star \mu_1^{I^t} \star 1_{K^{\star(k-1)}})^*(a^t).\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}&\overline{b}_0 \star \cdots \star \overline{b}_{2p-2} \star (\delta b_{2p}) \star b_{2p+2} \star \cdots \star b_{k-2} \star a_{i_k+1,i_{k+1}} \\ &= \sum_{t \in \mathcal{S}_{2p}(s)} (-1)^{\epsilon(t)} (1_{K^{\star(2p)}} \star \mu_{2p}^{I^t} \star 1_{K^{\star(k-2p)}})^*(a^t) \\ &\quad - \sum_{t \in \mathcal{S}_{2p+1}(s)} (-1)^{\epsilon(t)} (1_{K^{\star(2p+1)}} \star \mu_{2p+1}^{I^t} \star 1_{K^{\star(k-2p-1)}})^*(a^t)\end{aligned}$$

对于 $p = 1$、2、……、$\frac{k-2}{2}$，以及

$$\overline{b}_0 \star \cdots \star \overline{b}_{k-2} \star (\delta a_{i_k+1,i_{k+1}}) = \sum_{t \in \mathcal{S}_k(s)} (-1)^{\epsilon(t)} (1_{K^{\star k}} \star \mu_k^{I^t})^*(a^t).$$

于是我们得到

$$(-1)^{\epsilon(s)}\delta(a^s) = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \sum_{t \in \mathcal{S}_p(s)} (-1)^{\epsilon(t)} (1_{K^{\star p}} \star \mu_p^{I^t} \star 1_{K^{\star(k-p)}})^*(a^t).$$

对于奇数的 k，我们同样可以得到

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\epsilon(s)}\delta(a^s)\\
&=\delta(\overline{b}_0\star\overline{b}_2\star\cdots\star\overline{b}_{k-1})\\
&=\sum_{p=0}^{\frac{k-1}{2}}b_0\star\cdots\star b_{2p-2}\star(\delta\overline{b}_{2p})\star\overline{b}_{2p+2}\star\cdots\star\overline{b}_{k-1}\\
&=-\overline{(\delta a_{i_0,i_1})}\star a_{i_1+1,i_2}\star\overline{b}_2\star\cdots\star\overline{b}_{k-1}+\overline{a}_{i_0,i_1}\star(\delta a_{i_1+1,i_2})\star\overline{b}_2\star\cdots\star\overline{b}_{k-1}\\
&\quad+\sum_{p=1}^{\frac{k-1}{2}}(-b_0\star\cdots\star b_{2p-2}\star\overline{(\delta a_{i_{2p}+1,i_{2p+1}})}\star a_{i_{2p+1}+1,i_{2p+2}}\star\overline{b}_{2p+2}\star\cdots\star\overline{b}_{k-1}\\
&\quad+b_0\star\cdots\star b_{2p-2}\star a_{i_{2p}+1,i_{2p+1}}\star(\delta a_{i_{2p+1}+1,i_{2p+2}})\star\overline{b}_{2p+2}\star\cdots\star\overline{b}_{k-1})\\
&=-\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\sum_{t\in\mathcal{S}_p(s)}(-1)^{\epsilon(t)}(1_{K^{\star p}}\star\mu_p^{I^t}\star1_{K^{\star(k-p)}})^*(a^t).
\end{aligned}$$

注意到映射

$$\widehat{\mathcal{S}}(j-i,k+1)\times\{0,1,\dots,k\}\to\coprod_{s\in\widehat{\mathcal{S}}(j-i,k)}(\mathcal{S}_0(s)\sqcup\mathcal{S}_1(s)\sqcup\cdots\sqcup\mathcal{S}_k(s))$$

将 $(t,p)\in\mathcal{S}(j-i,k+1)\times\{0,1,\dots,k\}$ 映至 $t\in\mathcal{S}_p(s)$ 的映射是双射，其中 $s=\widehat{(}t_0,\dots,t_p,t_{p+2},\dots,t_{k+2})\in\mathcal{S}(j-i,k)$ 对于 $t=(t_0,\dots,t_{k+2})\in\mathcal{S}(j-i,k+1)$。于是我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=i}^{j-1}\mu_p^*(\overline{a}_{i,p}\star a_{p+1,j})\\
&\equiv\sum_{s\in\widehat{\mathcal{S}}(j-i,k)}(-1)^{\epsilon(s)+\epsilon(k)}P(I^s)^*\delta(a^s)\\
&\equiv\sum_{s\in\widehat{\mathcal{S}}(j-i,k)}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\sum_{t\in\mathcal{S}_p(s)}(-1)^{\epsilon(t)+\epsilon(k+1)}P(I^t(p))^*(1_{K^{\star p}}\star\mu_p^{I^t}\star1_{K^{\star(k-p)}})^*(a^t)\\
&\equiv\sum_{t\in\widehat{\mathcal{S}}(j-i,k+1)}(-1)^{\epsilon(t)+\epsilon(k+1)}\sum_{p=0}^{k}(-1)^pP(I^t(p))^*(1_{K^{\star p}}\star\mu_p^{I^t}\star1_{K^{\star(k-p)}})^*(a^t)
\end{aligned}$$

模去 $\operatorname{Im}\delta$。由引理 2.6，我们也得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{t\in\widehat{\mathcal{S}}(j-i,k+1)}(-1)^{\epsilon(t)+\epsilon(k+1)}\sum_{p=0}^{k}(-1)^pP(I^t(p))^*(1_{K^{\star p}}\star\mu_p^{I^t}\star1_{K^{\star(k-p)}})^*(a^t)\\
&\equiv\sum_{t\in\widehat{\mathcal{S}}(j-i,k+1)}(-1)^{\epsilon(t)+\epsilon(k+1)}(P(I^t)^*\delta+(-1)^k\delta P(I^t)^*)(a^t)\\
&\equiv\sum_{t\in\widehat{\mathcal{S}}(j-i,k+1)}(-1)^{\epsilon(t)+\epsilon(k+1)}P(I^t)^*\delta(a^t)
\end{aligned}$$

模去 $\operatorname{Im}\delta$。因此，对 k 的归纳法继续进行，证明得证。 □

考虑 $k=j-i$ 的恒等式（4.1）。注意到 $\mathcal{S}(j-i,j-i)$ 只包含一个元素 $(0,0,1,\dots,j-i)$，而 $a^{(0,0,1,\dots,j-i)}=a_{i,\ i}\star\cdots\star a_{j,\ j}$ 是一个

余循环，因为每个 $a_{k,\ k}$ 都是余循环。于是我们得到

$$\sum_{k=i}^{j-1} \mu_k^*(\overline{a}_{i,k} \star a_{k+1,j}) \equiv (-1)^{\epsilon((0,0,1,\ldots,j-i))+\epsilon(j-i+1)} P(I^{(0,0,1,\ldots,j-i)})\delta(a_{i,i} \star \cdots \star a_{j,j})$$
$$\equiv 0$$

~模掉 Im δ。因此存在 $a_{i,\ j} \in C^*(K)$ 满足（3.1），所以关于 $j-i$ 的归纳法由引理 4.2 和4.3推进。因此由引理 4.1，我们得到：

~引理 4.4。若 K 是 $\mathbb{F}$-紧的，则存在 $a_{ij} \in C^*(K)$ 对于 $0 \le i \le j \le q$，满足引理3.5的条件。

最后，由引理 3.5，我们得到：

命题 4.5。如果 K 是一个 $\mathbb{F}$-紧复形，那么 $H^*(\mathcal{C}^*(K))$ 中支撑为 $V(K)$ 的每个 Massey积，只要有定义，都是平凡的。

现在我们准备证明定理 1.2。

定理 1.2 的证明。对基数 $|V(K)|$ 作归纳。对于 $|V(K)|=1$，则 K显然是 $\mathbb{F}$-Golod。我们假设，对于 $|V(K)|<m$， $H^*(\mathcal{C}^*(K))$ 中的所有 Massey积均为平凡的，并考虑 $|V(K)|=m$ 的情形。根据定义，$\mathbb{F}$-紧复形在取全子复形后仍属于该类。于是，由引理 3.4 和归纳假设，只需证明支撑为 $V(K)$ 的 $H^*(\mathcal{C}^*(K))$ 中的所有 Massey积均为平凡的。因此，由命题 4.5，证明完成。□

References

[1] S.A. Abramyan 和 T.E. Panov，矩-角复形的高阶怀特海德积与单纯复形的代换，（俄文）Steklov 数学研究所学报 305 (2019)，代数拓扑、组合学与数学物理，7-28；译文载于 Proc. Steklov 数学研究所论文集 **305** 2019 1, 1 21 1 ( )，第 - 期。A. Bahri、M. Bendersky 和 F.R. Cohen，多面[2]体积及其同伦论的特征，载于《同伦论手册》，Chapman and Hall/CRC, 2019 1 。P. Beben 和 J. Grbic，-邻接矩-角[3]复形及其不稳定分裂，《墨西哥数学会公报》(3 **23** 2017 1, 141 152 1) ( )，第 - 期。[4]A. Berglund 和 M. Jollenbeck，关于 Stanley-Reisner 环的 Golod 性质，《代数学杂志》 **315** 2007 249 273 3 ( )，-。[5]B. Bagchi、B. Datta 和 J. Spreer，紧三角剖分 3-流形的刻画，《欧洲组合学杂志》 **61** 2017 133 137 2 ( )，-。I.V. Baskakov、V.M. Buchstaber 和 T.E. Panov，胞腔上链代数与环[6]面作用（俄文），《数学科学进展》59，第 3 期 (2004)，159-160；英文译文载于《俄罗斯数学调查》 **59** 2004 562 563 1, 10 ( )，-。B. Datta 和 S. Murai，关于堆叠三角剖分流形，《电子组合学杂志》[7]24 (2017)，第 4 期，论文编号 4. 12，14 页。2[8] J. Grbi´c 和 S. Theriault，移位复形的多面体积的同伦型，《数学进展》 **245** 2013 690 715 1 ( )，-。J. Grbic、T. Panov、S. Theriault 和 J. Wu，旗复形的矩-角复形的同伦[9]型，《美国数学会汇刊》 **368** 2016 9, 6663 6682 1, 2 ( )，第 - 期。V. Grujic 和 V. Welker，(,) 对的矩-角复形与具有顶点可分解对偶的单纯复形，《数学月刊》[10] D^n S^{n-1} **176** 2015 255 273 1 ( )，-。S. Hasui、D.[11]Kishimoto 和 A. Kizu，矩-角流形的 Stiefel-Whitney 类均为平凡，《数学论坛》 **34** 2022 6, 1463 1474 1 ( )，第 - 期。K. Iriye 和 D. Kishimoto，移位复形的多面[12]体积的分解，《数学进展》 **245** 2013 716 736 1 ( )，-。K. Iriye 和 D. Kishimoto，二维单纯复形的Golod 性与多面体积，《数学论坛》[13] **30** 2018 2, 527 532 1, 2, 3 ( )，第 - 期。K.[14]Iriye 和 D. Kishimoto，具有极小 Taylor 分解的单纯复形的 Golod 性与多面体积，《同调、同伦与应用》 **20** 2018 1, 69 78 1, 3 ( )，第 - 期。K. Iriye 和[15]D. Kishimoto，胖楔过滤与多面体积的分解，《京都数学杂志》59 (2019)，第 1 期，1-51。1

[16] K. Iriye 和 D. Kishimoto，矩-角复形中的怀特黑德积，《日本数学会杂志》 **72** 2020 1239 1257 1 ( )，-。
K. Iriye 和 D. Kishimoto，二维戈洛德复形，《同调、同伦与应用》 **23** 2021[17] 2, 215 226 1, 2, 3 ( )，第 - 期。
K. Iriye 和 D. Kishimoto，戈洛德流形与紧流形，已被《代数与几何拓扑》[18]接受。1、2、3[19] K. Iriye、D. Kishimoto 和 R. Levi，具有有限广义波斯尼科夫分解的多面体积的刻画，《数学论坛》
32 2020 5, 1253 1269 1 ( )，第 - 期。K. Iriye 和 T.
Yano，一个具有非悬挂矩-角复形的 Golod 复形，《拓扑学应用》[20] **225** 2017 145 163 1 ( )，-。L.
Katthan，一个在其 Koszul 同调上乘积平凡的非戈洛德环，《代数学杂志》[21]479 (2017 1, 244 262 3)，第 -
期。D. Kishimoto，直角考克斯特架与多面体积，《美国数学会会刊》[22] **147** 2019 9, 3715 3727 1 ( )，
第 - 期。D. Kishimoto 和 R. Levi，有限偏序集上的多面体积，《京都数学杂志》[23]62 (2022)，第 3 期，615-654。1、2
[24] D. Kishimoto、T. Matsushita 和 R. Yoshise，多面体积中的雅可比恒等式，《拓扑学应用》
312 2022 108079, 9 1 ( )，论文编号 pp。D. Kraines，马西高阶积，《美国数学会汇
刊》[25] **124** 1966 431 449 10 ( )，-。W.
Kuhnel，紧多面体子流形与紧三角剖分，《数学讲义》[26] **1612** 1995 2
Springer-Verlag，柏林，。W. Kuhnel 和 F.H. Lutz，紧三角剖分目录，载于：《离散几何与刚性》，布达佩斯，
1999， **39** 1999 161 183 1, 2《匈牙利数学期刊》（），-。N.H.
Kuiper，浸入的最小总绝对曲率，《数学发明》10 (1970)，209-238。2[29] I. Limonchenko，极小非戈洛德复形及其多
面体积族，《远东数学杂志》[28] **15** 2015 222 237 1 ( )，-。F.H. Lutz，顶点
数较少的三角剖分流形：组合流形，[30] https://
arxiv.org/abs/math/0506372 。
2
[31] J.P. May，矩阵马西积，《代数学杂志》
12 1969 533 568 10 ( )，-。J.-P. Serre，《局部代数、多重性》，
[32]《数学讲义》11，Springer，柏林，（1965）。

1Department of Mathematics,
Osaka Metropolitan University, Sakai, 599-8531, Japan*Email address*: kiriye@omu.ac.jp

Faculty of Mathematics, Kyushu University, Fukuoka 819-0395, Japan
Email address: kishimoto@math.kyushu-u.ac.jp