arXiv:2302.02548v1 [cs.LG] 6 Feb 2023

学习 ℓ_0-最小化问题的树

G. Welper*

摘要

一般而言，计算欠定线性系统的最稀疏解是 NP 困难的。具有额外性质的子集可能允许使用高效算法，其中最著名的是，具有限制等距性质（RIP）的问题可以通过凸 ℓ_1-最小化求解。尽管这些类别已经取得了很大成功，但它们遗漏了许多实际应用。

本文研究这样一些可适应类别：在接受由难度逐渐增加的样本组成的课程训练后，它们可以得到有效处理。这一设置旨在作为人类数学家的候选模型：人类数学家可能无法立即处理任意证明，但在适当课程的训练之后，可能能够处理相对灵活的子类或其专业领域中的问题。

关键词： 压缩感知、学习、 NP-困难**AMS 学科分类：**
68Q32 、 68T20 、 94A12

1 引言

我们研究 NP 困难问题中可高效求解的子类，并在论文末尾讨论 3-SAT 的变体，在主体部分讨论线性系统的稀疏解：给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和右端项 $b \in \mathbb{R}^m$，我们希望找到

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|_0 \quad \text{subject to} \quad Ax = b, \tag{1}$$

其中， $\|x\|_0$ 表示 x中非零元素的数量。从一般意义上说，这个问题是 NP-困难的 [34, 22]，但与许多困难问题一样，它也包含易处理子类。其中一些子类并无实际意义，至少从稀疏度的角度来看是如此，例如核 $\ker(A) = 0$ 为零且具有唯一解的问题，这使得 ℓ_0-最小化变得平凡。其他易处理子类已在文献中得到广泛研究，最著名的是满足（s， ϵ）-限制等距性质（*RIP*）的问题

$$(1-\epsilon)\|x\| \le \|Ax\| \le (1+\epsilon)\|x\| \quad \text{for all } s\text{-sparse } x \in \mathbb{R}^n,$$

*中佛罗里达大学数学系，奥兰多，佛罗里达州 32816，美国，电子邮箱 gerrit.welper@ucf.edu。

对 RIP 参数有严格要求 $\epsilon < 4/\sqrt{41} \overline{\approx} 0.6246$ ，更一般地说，还要求满足阶数为 s 的零空间性质（NSP）

$$\|v_S\|_1 < \|v_{\bar{S}}\|_1 \quad \text{for all } 0 \neq v \in \ker A \text{ and } |S| \leq s,$$

¯其中， v_S 是 v 在索引集 S 上的限制， S 是其补集。在这两种情况下，(1) 的最稀疏解都是通过将稀疏度 $\|\cdot\|_0$松弛为凸的 $\|\cdot\|_1$范数来求得的

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|_1 \quad \text{subject to} \quad Ax = b,$$

详情请参见 [11, 19, 12, 21] 。

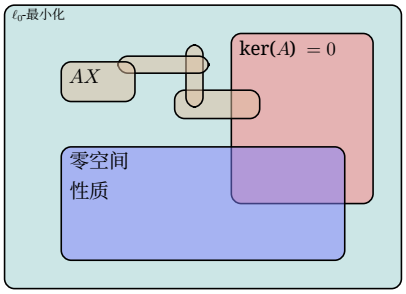
所有这些易处理子类都完全僵化：一个问题要么属于该类别，要么就无计可施。另一种选择是基于先验知识构造子类。显然，如果我们知道解 $x = Xz$ 位于矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$的列空间中，就可以缩小搜索空间

$$\min_{z \in \mathbb{R}^p} \|Xz\|_0 \quad \text{subject to} \quad AXz = b,$$

甚至更简单

$$\min_{z \in \mathbb{R}^p} \|z\|_0 \quad \text{subject to} \quad AXz = b, \tag{2}$$

如果 X 具有稀疏列。同样，我们可以找到易处理子类，其中 AX 是单射，或者 AX 满足限制等距性质（RIP） [30, 49, 50]。对 A施加相对简单的秩约束，这些类别便可以包含所有可能的解 x，但若缺乏关于 X的明确知识，它们便毫无用处。纯粹依靠计算来揭示 X 并不可取，因为这会使我们能够为一般的 NP 困难问题提供高效算法。因此，我们不直接着手解决一个困难的 ℓ_0最小化实例，而是考虑一系列 ℓ_0最小化实例，并将它们组织成由若干独立学习阶段组成的课程，每个阶段都包含来自难度逐渐增加的不同易处理子类的样本。



为了遵循一系列学习阶段，我们采用一种机制，从简单样本中学习一个完整的类别；该机制在 [50] 中介绍，并在第2节中概述。简单问题是指学生掌握了按课程或树组织的先修问题类后，能够高效解决的问题，见第 3 节。在第 4 节中，我们构造了一个树的示例，使学生能够

找到任意的 ℓ_0 最小化器 x，以及其他随机解，以此对规模非平凡、更贴近现实的问题类别建模。最后，在第 5 节中，我们将该学习方法应用于带符号的完全 1-in-3-SAT 问题变体。

人类学习 由先验知识引导的子类，加上迭代学习课程，旨在构建一个关于人类问题求解（更具体地说，是定理证明）的假设模型。

如果 $N \neq NP$，且人类大脑并不比计算机具有根本优势，那么人类就无法有效求解计算困难问题的任意实例。然而，我们经常证明定理，也积累了丰富的成果。但我们只会在各自的专业领域中做到这一点。因此，有人可能会认为，在这些领域内，凭借先验知识和经验，定理证明是易处理的。如果确实如此，我们能否将相应的求解器编入计算机？人工智能的发展史提供了一些警示。专家系统和自然语言处理中的手工编码规则，因其极其复杂而难以奏效；相比之下，学习方法目前更具优势。同样，与其手工构造易处理子类，不如通过学习来发现它们，这似乎更有希望。

作为易处理子类的数学模型，我们考虑线性系统的稀疏解。这些问题是 NP-困难的，而且在（2）中，我们已经识别出一些可适应且易处理的子类。解向量 x 可以作为证明的模型，因为两者都难以计算。线性组合 $x = Xz$与非线性的最小稀疏度共同构成候选解 x，它由 X各列中的基本片段组成，类似于运用已知技巧、方法、引理和定理来构建证明。

当然，如果我们不知道 X，这种解题策略就毫无用处。同样，人类也需要通过训练或研究来获取专业知识。二者的重要组成部分，都是解决许多相关且通常经过简化的问题。对于学生来说，这些问题会被分成若干阶段，并按照先修条件排列成一棵课程树。同样，对于我们的数学模型，我们通过简单的样本学习一棵子类树 X_i，即相应类别中的样本对 $(A_k,\ b_k)$。

正如我们将看到的（注3.3），所有后代节点$[X_1, X_2, \dots]$的综合知识不足以解决根节点 X_0中的所有问题，因为在展开 $x = X_0 z_0 = \sum_i X_i z_i$时，$z_i$ 的组合通常比 z_0 更不稀疏，因此更难找到。因此，在每个树节点，我们都会将知识压缩成列数更少、更加稀疏的矩阵 z。这一步类似于将反复出现的证明步骤总结成引理，然后将其作为黑箱用于后续类别。

贪心搜索与启发式方法 与 ℓ_1 最小化类似，正交匹配追踪这类贪心算法

$$\begin{aligned} j^{n+1} &= \operatorname*{argmax}_j \left| A_{\cdot j}^T (Ax^n - b) \right| \\ S^{n+1} &= S^n \cup \{j^{n+1}\} \\ x^{n+1} &= \operatorname*{argmin}_{\mathrm{supp}(x) \subset S^{n+1}} \|Ax - b\|_2^2, \end{aligned}$$

在 RIP 假设 [21]下也能找到全局 ℓ_0-最小化解。与其系统地遍历数量呈指数级增长的候选支撑集 S，第一行提供了一种准则，根据某一列 $A_{\cdot j}$ 与残差 $Ax^n - b$的相关性，贪心地选择下一个支撑索引。将该方法应用于具有先验知识 X的修改问题 (2) 时，方法变为

$$\begin{aligned} j^{n+1} &= \operatorname*{argmax}_j \left| X_{\cdot j}^T A^T (AXz^n - b) \right| \\ S^{n+1} &= S^n \cup \{j^{n+1}\} \\ z^{n+1} &= \operatorname*{argmin}_{\mathrm{supp}(z) \subset S^{n+1}} \|AXz - b\|_2^2. \end{aligned}$$

在第一行中，学习到的知识 X 改变了索引选择，因此提供了一种学习得到的贪心准则或启发式方法。然而，如下文注3.3所述， X的学习隐含地依赖于一种元启发式。从这一角度看，所提出的方法与人工智能 [37, 45, 26]中的贪心搜索和启发式搜索方法相关。

ℓ_0-最小化（无 RIP）本文主要关注由不满足 NSP 或 RIP 的矩阵 A所构成系统的最稀疏解。文献中求解这类系统的一种常见方法是采用 $p < 1$进行 ℓ_p-最小化，这种方法比凸的 ℓ_1 范数更接近 ℓ_0-范数。尽管较弱的 RIP 变体 [13, 14, 20, 44, 39],也能保证稀疏恢复，但这些问题仍然是 NP 困难的 [22]。尽管如此，用于 ℓ_p-最小化或非 RIP A 问题的迭代求解器往往能取得良好结果 [13, 15, 20, 16, 31, 51]。

ℓ_0-最小化与学习 与我们的方法类似，许多论文研究欠定线性系统 $Ax = b$ 的先验信息。与本文类似， ℓ_1 合成 [33]考虑形如 $x = Xz$ 的解，其中 x 在标准基下并不稀疏，并且针对随机 A。这些论文[10, 24, 28, 17, 53] 假设解 x 属于神经网络 $x = G(z; w)$ 的值域，该网络的权重已在相关数据上进行预训练，随后对 $\min_z \|AG(z; w) - b\|_2$ 进行最小化。另一方面，深度图像先验 [46] 和压缩感知应用 [47, 29, 25] 将未经训练的网络架构用作先验，并针对某个潜在输入 z 对权重 $\min_w \|AG(z; w) - b\|_2$ 进行最小化。这些论文假设独立同分布高斯 A 或受限特征值条件（REC），并利用先验从所有非唯一

解中选出合适的候选解。相比之下，本文旨在求得最稀疏解，并利用先验来应对该问题的困难性。

论文 [52]考虑采用自编码器机制来寻找测量矩阵 A，而不只是像我们这样考虑 X。其他几篇将压缩感知与机器学习相结合的论文，则通过神经网络 [32, 40]近似从右端项到解的映射 $b \to x$ 。

迁移学习 沿树的推进过程将学习问题拆分为多个阶段，分别处理不同但相关的数据集。这让人联想到关于神经网络中迁移学习 [18, 54]和元学习 [27]的实证研究。

1.1 符号

我们用 c 和 C 表示一般常数，它们与维数、方差或ψ_2 范数无关，并且在不同公式中可能有所变化。我们分别用 $a \lesssim b$、 $a \gtrsim b$ 和 $a \sim b$表示 $a \leq cb$、$a \geq cb$和 $ca \leq b \leq Cb$。我们用$[n] = \{1, \dots, n\}$ 表示指标集，并分别用 v_J、$M_{J\cdot}$和 $M_{\cdot J}$表示向量、矩阵行和矩阵列在$J \subset [n]$上的限制。

2 简单问题与困难问题

2.1 ℓ_0 最小化与先验知识

对于给定的矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和向量 $b \in \mathbb{R}^m$，我们考虑以下 ℓ_0-最小化问题

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|_0, \quad \text{s.t.} \quad Ax = b$$

该问题源自引言。我们已经看到，这个问题通常是 NP-困难的，但对于适当的子类而言是可处理的。RIP 和 NSP 条件属于刚性的类别，完全由矩阵 A决定；现在，我们考虑一些更灵活的类别，它们基于这样的先验知识：解属于某个子集

$$\mathcal{C}_{<t} := \{x \in \mathbb{R}^n : x = Xz, \, z \text{ is } t\text{-sparse}\},$$

由某个矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 参数化，并且对 A仅作较弱的假设，具体内容将在下文确定。我们可以将 X的各列视为解分量，因此也假设它们是 s-稀疏的，其中 $s > 0$ 为某个值，这样该类别中的解 $x = Xz$ 就是 st 稀疏的。尽管乍看之下该条件似乎是线性的，但如 [50]中详细探讨的那样，对 z 的稀疏性要求可能导致非线性行为。按照惯例，我们将 ℓ_0 松弛为 ℓ_1 范数，并求解这个凸优化问题

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|z\|_1, \quad \text{s.t.} \quad AXz = b. \tag{3}$$

当然，任何求解器都需要明确了解 X，我们将在下文详细讨论这一点。现在，先假设已知 X。有两种值得注意的极端情况。首先，在没有先验知识 $X = I$的情况下，我们保留标准的 ℓ_1-最小化

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|_1, \quad \text{s.t.} \quad Ax = b,$$

如果 A 满足零空间性质（NSP）或受限等距性质（RIP），通常当 A 充分随机时，它便能为 ℓ_0-最小化问题提供正确的解。

其次，如果充分随机的不是矩阵 A，而是先验知识 X，那么我们可以将 A 的零空间性质要求，弱化为对 A 的稳定秩条件。在这种情况下，乘积 AX 以高概率满足 RIP [30]，因此我们可以恢复唯一的稀疏 z。由于 X 也稀疏，这就为线性系统 $Ax = b$ 得到了一个稀疏解 $x = Xz$。然而，我们还需要一些额外的结构，才能确保 x 确实是 ℓ_0 的最优解。一种可能是，假设 $Ax = b$ 的所有稀疏解都是唯一的；这与 RIP 类似，但不受常数的任何严格限制，因此弱得多。另一种方法是，在第 5 节中，我们考虑从 NP-完全问题到 ℓ_0-最小化问题的归约。这些归约可以高效地验证解，我们利用这一点来确保 $x = Xz$ 是 ℓ_0-最小化问题的最优解。

2.2 学习先验知识

我们已经看到，在矩阵 X中编码了合适的先验知识时，ℓ_0-最小化问题的子类 $\mathcal{C}_{<t}$ 可能是易处理的。因此，我们需要一个合理的模型来获取这些知识。为此，我们考虑教师—学生场景：教师提供样本问题，学生则从样本中推断知识 X。

训练样本必须谨慎选择。实际上，为了适用于各种机器学习场景，我们假设学生收到样本（A，b_i），但没有收到相应的解 x_i。那么，在尚不了解 X 的情况下，学生如何找到解 x_i 呢？而 X 正是她应该学习的那个矩阵。

为解决这个问题，学生在一类简单问题 $\mathcal{C}_{\text{easy}} \subset \mathcal{C}_{<t}$ 上进行训练；即使没有先验知识，她也能（大多时候）有效地求解这些问题。这类问题记作

SOLVE(A，b)：计算 $Ax = b, x \in \mathcal{C}_{\text{easy}}$的 ℓ_0-最小化解。

作为比较，简单问题的存在也可能在神经网络的梯度下降训练中发挥作用 [3]。此时，我们不考虑求解器的实现方式。它可以是普通的 ℓ_1-最小化，也可以是利用先前学习阶段所获先验知识的 ℓ_1-最小化，正如下面第 3 节所讨论的那样。

学生将 $\mathcal{C}_{\text{easy}}$ 中容易求得的解组合成一个矩阵 Y（作为列）。由于 $\mathcal{C}_{\text{easy}}$ 包含于 $\mathcal{C}_{<t}$，它们必定具有以下形式 $Y = XZ$，其中

某个 t 稀疏矩阵 Z。鉴于 Y 包含该类别 $\mathcal{C}_{<t}$ 中足够多的独立样本，稀疏分解算法 [2, 23, 41, 1, 6, 4,35, 5, 8, 38, 42, 43, 36, 55] 可以恢复矩阵 X 和 Z，结果相差一个缩放因子 Γ 和一个置换 P。

SparseFactor(Y)：将 Y分解为 $\bar{X} = XP\Gamma$和 $\bar{Z} = \Gamma^{-1}P^{-1}Z$，其中某个置换为 P，对角缩放为 Γ。Scale：缩放 X 的各列，使 AX 满足 RIP。

置换无关紧要，但要使 ℓ_1 极小化器发挥作用，我们需要适当的缩放，由 Scaling计算得出。在 [50] 中，这是一个简单的归一化；在第 5 节中，则是一个依赖于具体应用的函数。我们将上述讨论整合为以下学习算法。

算法 1易问题训练 $\mathcal{C}_{\text{easy}}$。

函数 Train(A, b_1, ..., b_q)
对于所有 $l \in [q]$，计算 $y_l = \text{Solve}(A, b_l)$。
将所有 y_l 合并为一个矩阵的各列 $\bar{Y}$.
计算 $\bar{X}, Z = \text{SparseFactor}(\bar{Y})$
返回 Scale($\bar{X}$).
结束函数

注 2.1. 一般而言，Y 和 X 具有相同的列空间，因此每个$x \in \mathcal{C}_{<t}$ 都可表示为

$$x = \bar{X}z = \bar{Y}u.$$

为什么不跳过稀疏分解？虽然根据构造，z 是 t-稀疏的，但$u = Y^+x$ 通常不是。因此，即使 Y 具有足够的随机性，使得 AY 满足限制等距性质，也无法确定它是否能让我们通过修正后的ℓ_1-最小化 (3)恢复 u 。

2.3 结果

本节给出前几节所述算法的严格结果。首先，我们需要一个合适的随机矩阵模型。

定义 2.2。矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$ 是 s/n-伯努利-次高斯 的，当且仅当 $M_{jk} = \Omega_{jk}R_{jk}$，其中 Ω 是一个独立同分布伯努利矩阵，而 R 是一个独立同分布次高斯矩阵，其满足

$$\mathbb{E}[\Omega_{jk}] = \frac{s}{n}, \quad \mathbb{E}[R_{jk}] = 0, \quad \mathbb{E}\left[R_{jk}^2\right] = \nu^2, \quad \|R_{jk}\|_{\psi_2} \le \nu C_\psi. \tag{4}$$

我们称之为 M 受限的 s/n伯努利-次高斯，如果还满足

$$\Pr[R_{jk} = 0] = 0, \quad \mathbb{E}[|R_{jk}|] \in \left[\frac{1}{10}, 1\right], \quad \mathbb{E}\left[R_{jk}^2\right] \le 1, \quad \Pr[|R_{jk}| > \tau] \le 2e^{\frac{-\tau^2}{2}}. \tag{5}$$

回顾一下， ψ_2 范数定义为 $\|X\|_{\psi_2} :=$ 上确界$_{p\geq 1}\, p^{-1/2}\mathbb{E}\,[|X|^p]^{1/p}$。

第一个结果给出了训练算法在扰动和缩放下恢复 X 的一些必要条件。为此，教师按照以下模型随机生成训练样本。

(A1) 简单类 $\mathcal{C}_{\text{easy}}$ 由满足以下条件的 $b_l = AXz_l$ 的对(A, b_l)定义：其列z_l 来自受限伯努利-次高斯矩阵 $\bar{t}/2p$ $Z \in \mathbb{R}^{p\times q}$ ，且

$$c\log q \leq \bar{t} \leq t, \qquad q > cp^2\log^2 p, \qquad \frac{2}{p} \leq \frac{\bar{t}}{p} \leq \frac{c}{\sqrt{p}}. \tag{6}$$

¯向量 z_l 的期望稀疏度为 t ，因此相应解Xz_l 的期望稀疏度为 $s\bar{t}$。为了使它们比完整类$\mathcal{C}_{<t}$更简单，我们通常选择 $t < t$。接下来，我们要求学生在简单问题上达到一定的准确度，并在稀疏度上留有安全余量 $\sqrt{2}$

(A2) 对于 Z的所有稀疏列 $\sqrt{2}t$ z_l ，均有 $\textsc{Solve}(A,\ AXz_l) = Xz_l$。

关键在于能够从数据AXz_l中恢复 Xz_l ，而不一定要求Xz_l 是 $Ax = AXz_l$的全局最稀疏解，尽管通常我们的目标确实如此。最后，我们需要以下技术性假设。

(A3) X 具有满列秩。

尽管这意味着 X 的行数多于列数，但对于稀疏恢复 (3) 中使用的 AX ，通常并非如此。这一假设源于稀疏分解 [41], ，其中 X 表示一个基。较新的结果 [1, 6, 4,5, 8] 研究了行数少于列数的超完备基及其相干性条件，最终可能允许采用较弱的假设。无论如何，在给定的设置下，我们得到以下训练结果。

定理 2.3 ([50, 定理 4.2])。 假设 *(A1)*、*(A2)* 和 *(A3)* 成立。那么存在常数 $c > 0$ 和 $C \geq 0$ ，它们与概率模型、维度和稀疏度无关；并且存在 $\textsc{SparseFactor}$ 的一种易于实现的算法，使得其概率至少为

$$1 - Cp^{-c}$$

¯ ¯算法 *1* 的输出 X 是定义类别 $\mathcal{C}_{<t}$的矩阵 X 的一个缩放置换置换 $X = XP\Gamma$ 。

该结果由 [50] 中的定理 4.2 得出，经过附录 A.1 中所述的一些小幅修改即可。学习到 X 后，我们需要确保能够通过 (3) 解决类别 $\mathcal{C}_{<t}$ 中的所有问题，而不仅仅是简单问题。我们针对随机 X 展示这一点：

(A4) 矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ 是 $s/n\sqrt{2}$ 伯努利-次高斯型的，且满足

$$\frac{\|A\|_F^2}{\|A\|^2} \geq CC_\psi^4 \frac{nt}{s\epsilon^2}\log\left(\frac{3p}{\epsilon t}\right) \tag{7}$$

以及伯努利-次高斯模型 (4) 中的 ψ_2-范数界 C_ψ 。

左侧 $\|A\|_F^2/\|A\|^2$ 是 A 的稳定秩。在缩放

$$\textsc{Scale}(\bar{X}) = \frac{\sqrt{n}}{\|A\|_F}, \tag{8}$$

我们得到以下结果，它是在附录 A.1 中所述参考文献的基础上稍作修改后得出的。

定理 2.4 ([50, 定理 4.2])**.** 假设我们为 $\textsc{Scale}$ 选择 (8)，且 ***(A1)*** 和 ***(A4)*** 成立。那么存在常数 $c > 0$ 和 $C \geq 0$，它们与概率模型、维数和稀疏度无关；并且存在 $\textsc{SparseFactor}$ 的一种可处理实现，使得其概率至少为

$$1 - Cp^{-c}$$

矩阵 X 满列秩，具有 s-稀疏列，且 AX 并满足 ***RIP***

$$(1-\epsilon)\|v\|_2 \leq \|A\bar{X}v\|_2 \leq (1+\epsilon)\|v\|_2 \tag{9}$$

对于所有 t-稀疏向量 $v \in \mathbb{R}^p$，均成立。

总之，如果我们在 $\mathcal{C}_{\text{easy}}$中的简单样本上进行训练，就能恢复 X，从而利用修改后的 ℓ_1-最小化 (3) 求解类别 $\mathcal{C}_{<t}$中的所有问题，甚至包括训练前无法求解的问题。

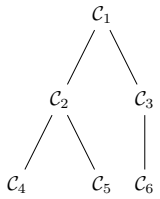
2.4 学生求解器的实现?

学生如何 $\textsc{Solve}$ 简单问题 $\mathcal{C}_{\text{easy}}$? 如果我们通过普通的 ℓ_1-最小化来实现 $\textsc{Solve}$，A 必须满足 $s\bar{t}$ 零空间性质。如果它满足稍强的 st 零空间性质，则 A 会受到很强的假设约束，$\mathcal{C}_{<t}$ 中的所有问题都可以通过 ℓ_1-最小化求解，从而使 X 的训练变得多余。我们将在下一节通过问题类层级解决这一问题，该层级允许我们利用较低层级类别中的先验知识来实现 $\textsc{Solve}$。

3 迭代学习

3.1 概述

我们已经看到，如果提供来自某个更简单子类 $\mathcal{C}_{\text{easy}}$的样本，我们就能学会求解类别 $\mathcal{C}_{<t}$中的所有问题。简单类必须足够丰富，同时其中的样本问题必须无需事先训练即可求解。这导致了一组微妙的假设。如果我们不试图一次性学习 $\mathcal{C}_{<t}$，而是从简单问题开始，逐步转向越来越难的问题，情况就会有利得多。为此，我们将多个问题类别编排成一套课程，这类似于人类学生按照一组先修条件所规定的顺序，从简单类别逐步进阶到困难类别。同样，我们考虑一个问题类集合 $\mathcal{C}_i$，由某个索引集$i \in \mathcal{I}$ 索引，并组织成一棵树，例如:



其根节点为 C_0 ，每个类别 $\mathcal{C}_i$ 都有子节点 $\mathcal{C}_j$、 $j \in$child(i)。学生从学习叶节点开始，只有在所有先修类别或子节点类别都成功学会之后，才能继续学习类别 $\mathcal{C}_i$ 。与之前一样，每个类别由一个矩阵 X_i 给出，该矩阵有 s_i 个稀疏列，稀疏度为 t

$$\mathcal{C}_i := \{x \in \mathbb{R}^n : x = X_i z,\ z \text{ is } t\text{-sparse}\}.$$

每个类别的难度大致对应其稀疏度，叶节点处的问题最简单，沿着树向根节点移动，稀疏度则逐渐降低。为了学习每个类别 $\mathcal{C}_i$，相应的简单问题按上一节所述构造

$$\mathcal{C}_{\text{easy,i}} := \{x \in \mathbb{R}^n : x = X_i z,\ z \text{ is } \bar{t}\text{-sparse}\},$$

这些问题与 $\mathcal{C}_i$ 完全相同，只是向量 z 更稀疏。

至关重要的是，简单类 $\mathcal{C}_{\text{easy, i}}$ 中的实例能够由某个求解器 Solve 有效求解。虽然这会导致定理 2.3 中不切实际的假设，但这一次我们通过利用先修问题类别的结果矩阵 X_j, $j \in$child(i)，避免了这些问题。事实上，我们选择课程，使得所有简单问题都包含在所有子节点的组合中

$$X_i = \sum_{j \in \text{child}(i)} X_j W_j =: X_{\text{child}(i)} W_{\text{child}(i)} \tag{10}$$

并将 AX_i, $i \in \mathcal{I}$ 的 t-零空间性质扩展到其所有兄弟节点，从而特别地，$AX_{\text{child}(i)}$ 是 t-零空间性质。 $W_{\text{child}(i)}$ 的列具有经过精心校准的稀疏度，至多为 $t/\bar{t} > 1$ ，因此

$$t/\bar{t} \geq 1, \qquad\qquad s_i \bar{t} \leq s_j t \tag{11}$$

因此

$$\begin{aligned}
&x \in \text{Child problems} \rightsquigarrow && x = X_{\text{child}(i)} z_{\text{child}(i)}, && \|z_{\text{child}(i)}\|_0 \leq t, \quad \|x\|_0 \leq s_j t,\\
&x \in \mathcal{C}_{\text{easy,i}} \rightsquigarrow && x = X_i z_i, && \|z_i\|_0 \leq \bar{t}, \quad \|x\|_0 \leq s_i \bar{t},\\
&x \in \mathcal{C}_i \rightsquigarrow && x = X_i z_i, && \|z_i\|_0 \leq t, \quad \|x\|_0 \leq s_i t.
\end{aligned}$$

起初，学生满足先修条件，因此掌握了 $X_{\text{child}(i)}$。由此，她可以找到所有 $s_j t$ 稀疏解 $x = X_{\text{child}(i)} z_{\text{child}(i)}$，其中包括 $s_i \bar{t} \leq s_j t$ 稀疏的简单解 $X_i z_i$ ，因此能够实现 Solve。完整类别 $\mathcal{C}_i$ 中的解通常只是 $X_{\text{child}(i)}$ 的 $s_j t^2/\bar{t} > s_j t$ 稀疏线性组合，因此学生目前还无法掌握。但

通过实现 SOLVE，她可以应用算法 1 并学习 X_i，从而掌握整个类别 $\mathcal{C}_i$。将 X_i 与其兄弟节点结合后，学生可以重复这一过程，并沿课程树逐层向上学习。划分 (10) 大致模拟了一组大学课程，其中更高层级的课程会重新组合多门先修课程中的概念。

剩下的任务是学习叶节点，而对此我们无法依赖任何先验知识。理想情况下，它们的稀疏度为 1 $\mathcal{O}(1)$，可以通过暴力搜索在亚指数时间内求解。对于某些应用而言，这可能代价高昂；但对于另一些应用，例如第 5 节讨论的将 SAT 归约到压缩感知及相关问题，这通常用于求解规模适中的问题 [26]。

注3.1。 类别 $\mathcal{C}_i$ 中的所有问题 x 都是 $t^2/\bar{t}$-稀疏线性组合 $X_{\mathrm{child}(i)}$。因此，如果 $AX_{\mathrm{child}(i)}$ 满足 $t^2/\bar{t}$ ，而不只是满足 t-零空间性质，那么学生无需训练算法 *1*，就能求解类别 $\mathcal{C}_i$中的所有问题。实际上，她可以直接跨越一个类别；但要跨越所有类别则越来越困难，而这会使整个学习过程失去意义。

注3.2。 易／难划分是通过一个满足 $\bar{t}$ 但不满足 t 限制等距性质的矩阵实现的。在第*2*节中，这个矩阵是 A，因此这种设定的限制很大。在本节中，这个矩阵是 $AX_{\mathrm{child}(i)}$ ，因此取决于教师的自由裁量权，并且在很大程度上独立于问题矩阵 A。

注3.3。 算法 *1* 中的稀疏分解将知识$X_{\mathrm{child}(i)}$ 压缩为 X_i，从而允许更多稀疏的 z_i 而非$^{z_{\mathrm{child}(i)}}$ ，因此能够处理更困难或稀疏性更低的问题 x。这种压缩对于课程的推进至关重要，但其本身是一种用于巩固知识的元启发式。它类似于奥卡姆剃刀以及人类对简单解的偏好。更灵活的元启发式留待未来研究。

3.2 可学习树

上一节的算法总结于算法 2 中。所有假设以及一些技术性假设都包含在以下定义中。

定义3.4。 如果问题类别 $\mathcal{C}_i$的树 $i \in \mathcal{I}$ 可学习 ，则称其为

1. $X_i = X_{\mathrm{child}(i)}W_{\mathrm{child}(i)}$ 对所有 $j \in$子节点(i)均成立，其中 X_i 具有 s_i 稀疏列， $W_{\mathrm{child}(i)}$ 具有 $t/\bar{t} \geq 1$ 稀疏列，使得 $s_i\bar{t} \leq s_j t$。*2.* 每个节点至多有 γ 个子节点。*3.* 对于每个树节点 i，矩阵 X_i 具有满列秩。*4.* 对于所有树节点 i ，矩阵乘积 $A[\textsc{Scale}(X_{\mathrm{child}(i)})]$ 满足阶数为 $\sqrt{2t}$的零空间性质。

–

此外，我们还有以下实现

5. 在每个树节点上，我们都有 SCALE 的实现。

6. 对于叶节点，我们有一个满足假设（*A2*）的求解器 SolveL 。

教师按照以下方式生成学习问题：

7. 对于每个节点 i，训练问题的抽样满足假设（*A1*），其中 $X = X_i$。

如上所述，我们得到以下学习保证。形式化证明见附录 A.3。

命题 3.5。 设 $\mathcal{C}_i$, $i \in \mathcal{I}$ 根据定义*3.4*是可学习的。那么，存在 SparseFactor 的一种实现以及常数 $c > 0$ 和$C \geq 0$ ，它们与概率模型、维度和稀疏度无关，使得其概率至少为

$$1 - C\gamma s_0^{\frac{\log \gamma}{\log(c_s t/t)}} p^{-c}$$

¯算法 *2* 的输出 $X_i = \textsc{TreeTrain}(\mathcal{C}_i)$ 是缩放置换置换¯*tation* $\textsc{Scale}(X_i) = \textsc{Scale}(X_i P)$ ，其中 P是某个置换矩阵。

注 3.6。 该结果表明，我们可以在置换和缩放意义下恢复根节点。相应类别 $\mathcal{C}_i$ 中的解不一定必须是全局 ℓ_0 极小值，当然，这正是预期的应用场景。第 *5.3.2* 节和第 *5.3.3* 节的应用中会单独确保这一点。

定理 2.3 中从 $\mathcal{C}_{<t}$ 简单问题$\mathcal{C}_{\text{easy}}$ 学习困难问题的最大难点，在于需要一个简单问题的求解器，正如第 2.4 节所讨论的那样。命题 3.5 的层次结构彻底消除了这一假设，但叶节点除外；理想情况下，叶节点的稀疏度为 $\mathcal{O}(1)$，这样暴力求解器便切实可用。

算法 2树训练

Solve$_X$：使用给定的矩阵 X 求解修改后的 ℓ_1-最小化问题 (3)
SolveL：叶节点求解器。
Train(A, b_1, ..., b_q, Solve)：使用给定的求解器子程序执行算法 1。

函数 TreeTrain(类别 $\mathcal{C}_i$)
  从教师处获取矩阵 A 和训练样本 b_1, ..., b_q。
  如果 $\mathcal{C}_i$ 有子节点**则**
    计算 $j \in$子节点(i)对应的 $X_j = \textsc{TreeTrain}(\mathcal{C}_j)$
    连接所有子矩阵 $X = [X_j]_{j \in \text{child}(i)}$
    返回 $X_i = \textsc{Train}(A, b_1, \ldots, b_q, \textsc{Solve}_X)$
  否则，如果 $\mathcal{C}_i$ 没有子节点**则**
    返回 $X_i = \textsc{Train}(A, b_1, \ldots, b_q, \textsc{SolveL})$
  结束条件判断
结束函数

3.3 成本

我们来考察定义3.4中可学习树的成本。节点数量随树的深度呈指数增长，但只要我们按照式（11）所允许的最快速度推进稀疏度 s_i ，树的深度相对于根节点的稀疏度 s_0 仅呈对数增长。

引理 3.7. 令 s_0 为树的根节点的稀疏度。假设树中的每个节点最多有 γ 个子节点，且对于 $c \geq 0$ ，所有 $j \in$子节点(i)都满足 $s_i \bar{t} \gtrsim c s_j t$ 。那么这棵树至多有

$$\gamma^{N+1} = \gamma s_0^{\frac{\log \gamma}{\log(ct/\bar{t})}}$$

个节点。

证明见附录A.2。由于每个节点上的训练样本数量和训练算法的运行时间都是多项式级的，这条引理保证整个课程可以在多项式时间内学完，其指数取决于 γ 和比率 $t/\bar{t}$。

4 树构造

定义3.4和命题 3.5 给出了关于类别 $\mathcal{C}_i$ 及其矩阵 X_i 的若干条件，使学生能够成功学完整棵树。虽然其中大多数是相对简单的维数要求，但最严格的是关于 $A[\textsc{Scale}(X_{\text{child}(i)})]$ 的 NSP 条件。根据 [30] 或定理 2.4，对于随机 X_i ，这一条件是预期成立的；对于更现实的模型场景，我们加入一个确定性部分。

确定性部分保证每个全局 ℓ_0-最小化解

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|_0, \quad \text{s.t.} \quad Ax = b \tag{12}$$

都可以被学习，且适用于任意右端项 b ，对 A 只需较弱的秩假设。随机部分被用作模型，以便在课堂上进一步求解。尽管这一模型类可能并非完全符合实际，但它提供了一个原则性证明，其效果略优于单独使用确定性部分或随机部分。

注4.1。 该模型旨在说明任何确定性问题都可以被学习，但并非用作实际课程设计。

4.1 树的结果

给定 A 和 x，我们构造一棵部分随机可学习树，其根类别包含 x。为此，我们首先将支撑集 supp(x) 划分为互不重叠的分块 $\{J_1, \ldots, J_q\} = \mathcal{J}$，然后将 x 划分为包含在矩阵各列中的对应部分

$$S_{jl} := \begin{cases} x_j & j \in J_l \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \tag{13}$$

这些列分布在以下可学习树的各个类别中，条件数为 $\kappa(\cdot)$。

命题 4.2。 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，并将 $x \in \mathbb{R}^n$ 分解为由(13)给出的 $q = 2^L$、$L \geq 1$ 个分量 S。若

1. AS 具有满列秩。
2. 在每个树节点上，我们都有 SCALE的实现。
3. SOLVEL 在叶节点上满足假设（*A2*）。
4. $$t \gtrsim \log p^2 + \log^3 p, \qquad 1 \lesssim t \lesssim \sqrt{p} \tag{14}$$
5. $$\min_{J\in\mathcal{J}} \frac{\|A_{\cdot J}\|_F^2}{\|A_{\cdot J}\|^2} \gtrsim t\kappa(AS)L + t\kappa(AS)\log\frac{cp}{t} \tag{15}$$

对于某个通用常数 c，其概率至少为

$$1 - 2\exp\left(-c\frac{1}{\kappa(AS)}\min_{J\in\mathcal{J}}\frac{\|A_{\cdot J}\|_F^2}{\|A_{\cdot J}\|^2}\right)$$

存在一个深度为 L的问题类别 $\mathcal{C}_i$、$i \in \mathcal{I}$ 的可学习二叉树，由矩阵 X_i 和稀疏度 t 给出，使得

1. 根类别 i 包含 $x \in \mathcal{C}_i$。
2. $t/\bar{t} = 2$。
3. 每个类别的矩阵 X_i 包含 p 列，由一部分 X 和其余随机元素组成（不同类别之间存在依赖关系）。

x 是(12)的全局极小值。

根据以下引理（证明见附录 A.4），第一个假设 1 对全局 ℓ_0 优化器自动成立。

引理 4.3。 假设 $S \in \mathbb{R}^{n\times q}$ 的列具有不重叠支撑集，且 $z \in \mathbb{R}^q$ 的非零元素。如果向量 $x = Sz$ 是ℓ_0-最小化问题 *12* 的解，那么 AS 的列线性无关。

对于 SOLVEL 的可能实现方式，我们来估算叶节点处的稀疏度。由于 $\min_{J\in\mathcal{J}} \frac{\|A_{\cdot J}\|_F^2}{\|A_{\cdot J}\|^2} \leq |J|$，在最有利的情况下，$\min_{J\in\mathcal{J}} \frac{\|A_{\cdot J}\|_F^2}{\|A_{\cdot J}\|^2} \backsim |J|$ 且 t 尽可能小，条件(15) 可化简为

$$|J| \gtrsim Lt + t\log p \gtrsim L\log p + (\log p)^2, \tag{16}$$

这对我们在树的叶节点处能够达到的最小支撑大小施加了限制。为了消去 L，我们假设所有 J 的大小都相同，并令$s = \|x\|_0$。由于树有 2^L 个叶节点，这意味着 $s = |J|2^L$，因此 $\log\ s = \log|J| + L \geq L$。于是，条件 (16) 可化简为

$$|J| \gtrsim \log s \log p + (\log p)^2.$$

因此，在叶节点上，暴力搜索 $|J|$稀疏解需要考虑约 $n^{|J|} \geq n^{\log s}$ 个可能的支撑集。虽然相比于直接寻找 x 而言，前者的数量远少于n^s 个可能的支撑集，但仍然不是多项式规模。为了将搜索规模降至 $\mathcal{O}(1)$，我们可以针对每个叶节点中的每一列迭代树构造。正如下一节所示，这样得到的整棵树规模为多项式级。

4.2 树扩展

命题 4.2 中的课程将支撑大小从 s 缩减至 $\log s$。为了进一步缩小规模，如果每个叶节点 X_i中的列都能以满秩 AS进行拆分，从而生成$p2^L \leq ps$ 个新课程，我们就可以针对每个叶节点中的每一列构建一个新课程。对于随机部分，这一假设似乎合理；对于确定性部分，则由以下引理予以证明，该引理的证明见附录 A.4。

引理 4.4。 假设 $S \in \mathbb{R}^{n\times q}$ 的列具有不重叠支撑，且 $z \in \mathbb{R}^q$ 具有非零元素。如果向量 $x = Sz$ 是 ℓ_0-最小化问题 *12* 的解，那么列 $S_{\cdot k}$、 $k \in [q]$ 是以下问题的全局 ℓ_0 优化解

$$S_{\cdot k} \in \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|_0 \quad subject\ to \quad Ax = AS_{\cdot k}.$$

注 4.5。 新的课程提供了包含 *leave*X_i 列的类别，但不提供这些列本身。教师必须将它们作为训练样本提供（右端项 $A(X_i)_{\cdot j}$，而不是列 $(X_i)_{\cdot j}$）。更精细的构造或许能够像可学习树中那样，从组合样本重构这些列；这留待未来研究。

由于我们的目标是使 leave 列的支撑大小为 $|J| \sim 1$，且其下界包含 p（其大小可由我们决定），因此我们通过选择 $p \sim s$，将其与初始（子）课程的支撑大小 s 一同缩小。

注 4.6。 通过选择较大的常数或 $p \sim s^\alpha$，最初 p 可以大于 m。但根据 (16)，趋近叶节点时， p 必须变小，从而使 $p \leq m$ 和矩阵 AX_i 的行数多于列数。根据 AX_i 的核，这可能会使 ℓ_0 或 ℓ_1-最小化失效，并允许在树的底部采用更简单的构造。

我们反复迭代该过程，直到剩余支撑集 $|J| \sim \mathcal{O}(1)$ 的大小为 1。初始支撑

$$\#(s) \sim ps\#\left(\log s \log p + (\log p)^2\right) \geq s^2\#\left((\log s)^2\right)$$

通过归纳法，很容易验证 #(*s*) $\lesssim s^3$，因此我们只使用数量为多项式的课程，并且每门课程都可以在多项式时间内学习。总之，将所有问题类别合并到一棵主树中，**这就为学生提供了一门学习根节点的课程 $\mathcal{C}_0$，并且可在多项式时间内完成学习，其中包括一个预先确定的解** $x_\circ$。树顶端的问题类别可以相当大，而叶节点处的问题类别必须较小。在不同课程之间的衔接处，训练样本必须为单位大小，只包含下一棵树的一列。

4.3 构造思路

在命题 4.2 中，所有类别矩阵 X_i 均由单个矩阵导出

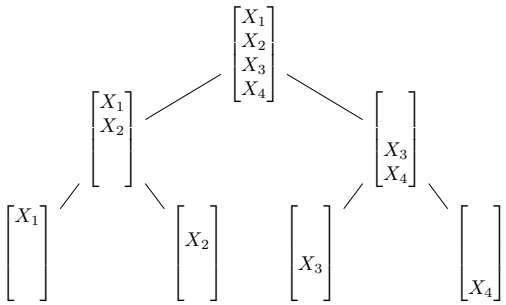
$$X := SZ^T + DR(I - ZZ^T).$$

第一个加项是确定性部分，其分量 S 由（13）中定义的 x 构成，并配有具有正交列的矩阵 Z，以确保维度正确。第二个加项是随机部分，使用随机矩阵 $R_\circ$ 投影算子（$I - ZZ^T$）确保它不会干扰确定性部分，而 D是用于平衡两个部分的缩放矩阵。

我们选择 Z 和 R，使得经过行列置换后，X 成为一个分块矩阵

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_q \end{bmatrix}$$

每个块都包含一个部分 $x_{J\circ}$ 在 $q = 4$ 的情况下，树按如下方式由这些块构造而成；更大的情况也类似。



详情请参见附录 A.5.1 和 A.6。

5 应用

5.1 3-SAT 和 1-in-3-SAT

作为应用示例，我们考虑从 NP-完全的 3-SAT 和 1-in-3-SAT 到稀疏线性系统的归约。论文 [7] 则考虑相反方向。问题定义如下。

- 文字：布尔变量或其否定，例如：x 或 $\neg x$。
- 子句：一个或多个文字的析取，例如：$x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$。
- *3SAT*：由含三个文字的子句构成的合取的可满足性。若结果为肯定，则每个子句中至少有一个文字必须为真。
- *1-in-3-SAT*：与 3-SAT 一样，但若结果为肯定，则每个子句中必须恰好有一个文字为真。

这两个问题都是 NP-完全的，并且很容易相互转换。本节按照 [22] 中的技术，将一个含有子句 c_k, $k \in [m]$ 和布尔变量 x_i, $i \in [n]$ 的 1-in-3-SAT 问题约化为一个稀疏线性系统。对于每个布尔变量 x_i，我们引入两个变量 $y_i \in \mathbb{R}$，分别对应 x_i 和 $z_i \in \mathbb{R}$，对应 $\neg x_i$，用于 $i \in [n]$。对于每个子句c_k，我们定义一对向量 C_k, D_k。向量 C_k 在每个满足以下条件的条目 i 上取值为 1：相应的文字（而非变量）x_i 出现在子句 c_k 中；同样，D_k 在每个满足以下条件的条目 i 上取值为 1：文字 $\neg x_i$ 出现在 c_k 中。C_k 和 D_k 的所有其他条目均为零。容易看出

$$
\begin{aligned}
&y \in \{0,1\}^n \text{ and } z_i = \neg y_i \\
&\qquad \Rightarrow \text{Exactly one literal in } c_k \text{ is true if and only if } C_k^T y + D_k^T z = 1. \quad (17)
\end{aligned}
$$

我们将这些线性条件组合成线性系统

$$
A := \begin{bmatrix}
\cdots & C_1^T & \cdots & \cdots & D_1^T & \cdots \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
\cdots & C_m^T & \cdots & \cdots & D_m^T & \cdots \\
\ddots & & & \ddots & & \\
 & I_{nn} & & & I_{nn} & \\
 & & \ddots & & & \ddots
\end{bmatrix}, \qquad b := \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{18}
$$

再加上一些单位块，这些单位块与 ℓ_0-最小化一起

$$
\min_{y,z \in \mathbb{R}^n} \|y\|_0 + \|z\|_0 \quad \text{subject to} \quad A \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = b. \tag{19}
$$

尽可能确保 $y \in \{0,1\}^n$。

引理 5.1. 当且仅当(19) 存在一个 n 稀疏解时，与 C_k 和 D_k, $k \in [m]$ 对应的子句 c_k 是 *1-in-3* 可满足的。

证明。 单位块的第 i 行是 $y_i + z_i = 1$。该解要么是 2-稀疏的，要么是满足 $y_i = 1, \quad z_i = 0$ 或 $y_i = 0, \quad z_i = 1$ 的 1-稀疏解。后两种情况对所有 i 成立，当且仅当 y 和 z 合并后是 n 稀疏的。于是由 (17) 可得结论。

□

5.2 模型类

1-in-3-SAT 归约不适用于我们的课程学习，因为解的分量均为非负，因此不可能来自均值为零的随机采样，而这正是满足 RIP 性质所必需的。因此，我们考虑以下更大的类别

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ I_{n/2} & I_{n/2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

其中有两个稀疏矩阵 $A_{1j} \in \{0,1\}^{(m-n/2)\times(n/2)}$ 以及任意解向量$x \in \mathbb{R}^n$。与引理 5.1 中一样，两个单位块确保 $Ax = b$ 的任何解x 的支撑集大小至少为 $\|x\|_0 \geq \|b_2\|_0$。在 1-in-3-SAT 情形中，等号成立对应于问题可满足。同样，我们确保所有训练问题都满足 $\|x\|_0 = \|b_2\|_0$，这会自动意味着它们是全局 ℓ_0 优化器。

注 5.2. 如果 $\|x\|_0 = \|b_2\|_0$，那么 x 是一个全局 ℓ_0 极小化器。

5.3 课程

5.3.1 课程 I

我们首先考虑命题 4.2 中的一个课程，如图 1 所示。
$*$ 项是均值为零的随机 ± 1 ，而 x 项是随机 $\{0,1\}$。后者具有非零均值，这不适用于 RIP 条件，并被用作该理论中确定性部分的模型。在所有实验中，SCALE 通过将 SPARSEFACTOR 的输出舍入到离散值$\{-1,0,1\}$来实现，从而无需数值误差即可精确恢复所有节点 X_i。

形式上，该课程满足命题 4.2 证明中的构造 (M1) – (M8)，其指标集为

$$\Big[\underbrace{1,\ldots,|J|}_{J_1}, \quad \ldots \quad ,\underbrace{n-|J|,\ldots,n}_{J_q}\Big], \quad \Big[\underbrace{1,\ldots,|K|}_{K_1}, \quad \ldots \quad ,\underbrace{p-|K|,\ldots,p}_{K_q}\Big]$$

并且 $Z = \begin{bmatrix} e_1 & e_{|K|+1} & e_{2|K|+1} & \ldots \end{bmatrix}$ 在每个块 K_i中首个索引处使用单位基向量 e_k。

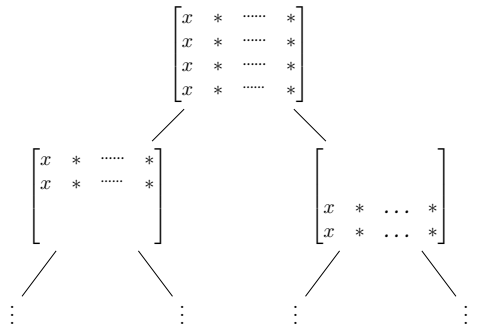


图 1：用于课程（M1）–（M8）和命题 4.2 的 X_i 矩阵。每一行中的 x 可以不同，且 $*$ 为随机元素。

5.3.2 课程 II

对于课程 I 中问题类别里的所有解，我们都不知道它们是否为全局 ℓ_0 极小解。正如注 3.6 所述，这对于树构造而言不一定是个问题，但这并不完全令人满意；我们可以按如下方式得到全局极小解。首先，按照 A中的单位块对各列进行拆分，如图 2 所示。上块 y 或 $*$中的每个分量，在下块 z 或 $+$中都有且仅有一个对应分量，因此每一对分量中至多有一个非零项。这样，每一列都具有所需的稀疏度，根据注 5.2 可确保其为全局 ℓ_0 极小值。

5.3.3 课程 III

在课程 II 中，各列都是全局 ℓ_0 极小化解，但它们在类别 $\mathcal{C}_i$ 或训练样本中的线性组合通常并非如此；图 3 中的修改可以解决这一问题。各个块仍像以前一样单独发挥作用，但我们不再允许列的所有可能稀疏线性组合，而只允许每个块列有一个非零贡献。这样便满足了注 5.2 中的稀疏性要求，从而该类别中的所有问题都有全局ℓ_0 极小化解。

由于 y 和 z 项均为非负数，这使我们能够为任意 1-in-3-SAT 问题构建课程。不过，该课程属于更大的带符号问题类。我们能否直接在 1-in-3-SAT 中构建课程，仍是一个悬而未决的问题。

5.4 数值实验

表 1 列出了课程 II 和 III 的结果。所有 ℓ_1-最小化问题均通过在 $Ax = b$ 的核中进行梯度下降求解，稀疏因子分解则通过 ℓ_4-最大化 [55]实现。叶节点上的解

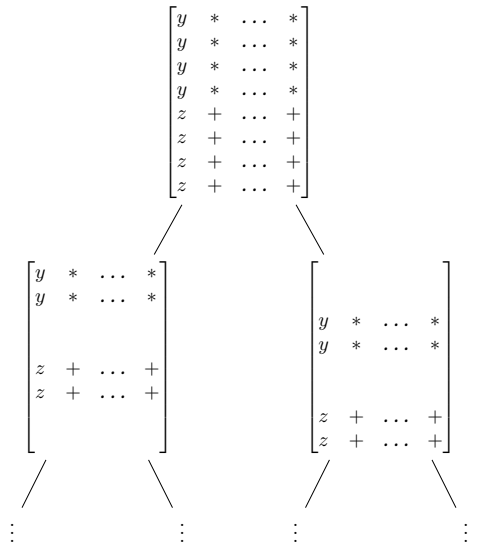


图 2： X_i 具有 ℓ_0 最少列的课程的矩阵。

直接给出，而非通过暴力搜索求解。与 [50], 算法 1 一样，其中还包含一个额外的评分器，用于从 SOLVE中筛除错误的解；这些解往往取决于梯度下降的精度。

- 课程 *II*： 我们在两个层级上训练三个树节点。评分器测试的准确率为 10^{-4}。结果是 5 次独立运行的平均值。
- 课程 *III*： 我们训练一个树节点。训练样本矩阵 (18) 按节点进行预条件处理，而不像下面命题 4.2 中那样进行全局预条件处理。评分器的测试准确度为 10^{-3}。结果为 2 次独立运行的平均值。

表 1 包含了结果。其中列出了平均秩，以表明这些系统AX 并非平凡系统，且具有非零核；%VALIDATE行显示了根据评分器正确恢复的训练样本百分比。一个主要瓶颈是每个节点的训练样本数量；对于 ℓ_4 最大化，该数量按对数平方级增长（而对于不使用算法 [41]的唯一分解，则仅按对数线性级增长）。最后一行显示，在大多数情况下，我们能够恢复树节点 X_i。未能恢复的情况取决于求解器参数，例如迭代次数和随机矩阵的大小。

6 结论

尽管线性系统的稀疏解通常很难求得，但许多子类都可以有效求解。尤其是，先验知识 $x = Xz$ 与稀疏

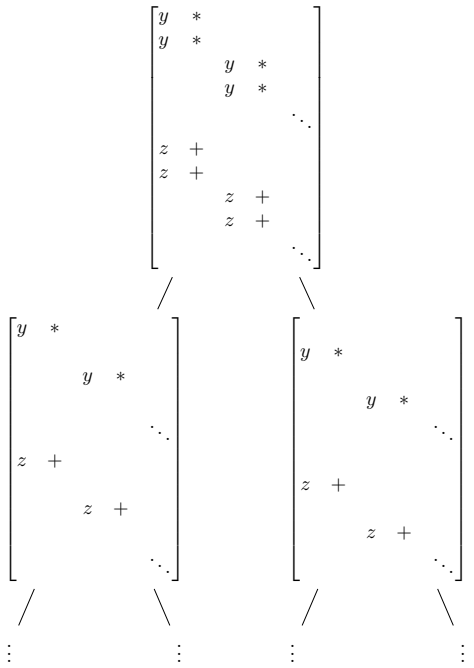


图 3： X_i 适用于具有 ℓ_0 最少列的课程的矩阵。

z 使我们只需对 A 作出较弱的假设，就能求解问题。我们通过由简单样本构成的课程以及在每个树节点上凝练知识来学习 X。每个类别中的问题必须彼此兼容，以使 AX 满足零空间性质。为证明该方法的可行性，我们展示了这些算法能够学习一个规模不小的类别 X ，其中包含任意解 x。

这些结果为人类推理中的一些假设原则提供了严谨的数学模型，包括专家知识及其在课程中的训练。若要在实践中应用，还需要进一步研究，例如：

- 将 SAT类型问题映射为稀疏线性问题时，缺少若干不变性，例如，简单地重新排列项就可能使已获取的知识失效。这个问题与机器学习中的特征工程类似。

- 对于稀疏分解，所需样本数量呈二次增长（至多相差一个对数因子），这是数值实验中最大的计算瓶颈。

- 课程的设计旨在通过稀疏分解来凝缩知识，而稀疏分解本身就是一种元启发式方法。可能需要根据真实数据动态调整凝缩启发式方法。由于稀疏

	Curr. I		Curr. II
深度	0	1	0
m	96	96	121
n	128	128	162
$p\left(X_{\mathrm{child}(i)}\right)$	102	102	459
秩$\left(AX_{\mathrm{child}(i)}\right)$	96.00	62.80	113.00
样本数	10000	10000	90000
% VALIDATE	0.55	0.91	0.98
#$(X_{student} = X)$	5/5	7/10	2/2

表 1：第5.4节数值实验的结果，对所有运行和给定深度的所有节点取平均。倒数第二行显示评分器判定的成功训练解所占百分比。最后一行显示在给定层级的所有试验中，成功恢复的 X_i 数量。

因子分解算法本身通常依赖于 ℓ_1 最小化，因此也可以采用论文中讨论的类似方法。

- 并非所有知识都能合并到一个类别 X 中，使得 AX 满足零空间性质。因此，相较于只有一个根节点的知识树，采用更灵活的知识图谱，并配合针对给定问题选择节点的决策准则，似乎更为合理。

参考文献

[1] A. Agarwal、A. Anandkumar、P. Jain、P. Netrapalli 和 R. Tandon。《学习稀疏使用的超完备字典》。载于 M. F. Balcan、V. Feldman 和 C. Szepesv´ari 编，第 *27* 届学习理论会议论文集，第 35 卷，机器学习研究论文集，第 123–137 页，西班牙巴塞罗那，2014年6月13日至15日。PMLR。

[2] M. Aharon、M. Elad 和 A. M. Bruckstein。关于超完备字典的唯一性及一种实用的恢复方法。线性代数及其应用，416(1):48–67，2006年。专刊，献给2005年海法矩阵理论会议。

[3] Z. Allen-Zhu 和 Y. Li。反向特征校正：深度学习如何实现深度学习，2020年。https://arxiv.org/abs/2001.04413。

[4] S. Arora、A. Bhaskara、R. Ge 和 T. Ma。更多可证明字典学习算法，2014年。https://arxiv.org/abs/1401.0579。

[5] S. Arora、R. Ge、T. Ma 和 A. Moitra。用于稀疏编码的简单、高效神经算法。载于 P. Gr¨unwald、E. Hazan 和 S. Kale,

编，《第*28*届学习理论会议论文集》，机器学习研究论文集第40卷，第113–149页，法国巴黎，2015年7月3日至6日。PMLR。[6] S. Arora、R. Ge 和 A. Moitra。用于学习非相干超完备字典的新算法。载于 M. F. Balcan 、 V. Feldman 和 C. Szepesv´ari，编，《第*27*届学习理论会议论文集》，机器学习研究论文集第35卷，机器学习研究论文集，第779–806页，西班牙巴塞罗那，2014年6月13日至15日。PMLR。[7] R. Ayanzadeh、M. Halem 和 T. Finin。基于SAT的压缩感知，2019年。[8] B. Barak、J. A. Kelner 和 D. Steurer。通过平方和方法进行字典学习和张量分解。载于第*47*届*ACM*计算理论年度研讨会论文集，STOC ’15，第143–151页，美国纽约州纽约市，2015年。计算机协会。[9] R. Baraniuk、M. Davenport、R. DeVore 和 M. Wakin。随机矩阵受限等距性质的一个简单证明。构造逼近，28(3):253–263，2008年12月。[10] A. Bora、A. Jalal、E. Price 和 A. G. Dimakis。使用生成模型进行压缩感知。载于 D. Precup 和 Y. W. Teh，编，第*34*届国际机器学习会议论文集，机器学习研究论文集第70卷，机器学习研究论文集，第537–546页，澳大利亚悉尼国际会议中心，2017年8月6日至11日。PMLR。[11] E. J. Candes、J. Romberg 和 T. Tao。稳健不确定性原理：利用高度不完整的频率信息实现精确信号重建。《*IEEE*信息论汇刊》，52(2):489–509，2006年2月。[12] E. J. Cand`es、J. K. Romberg 和 T. Tao。基于不完整且不准确的测量值实现稳定的信号恢复。《纯粹与应用数学通讯》，59，2006年8月。[13]E. J. Cand`es、M. B. Wakin 和 S. P. Boyd。通过重加权最小化增强稀疏度。《傅里叶分析与应用杂志》，14(5):877–905，2008年12月。[14] R. Chartrand 和 V. Staneva。受限等距性质与非凸压缩感知。《逆问题》，24(3):035020，2008年5月。[15] R. Chartrand 和 Wotao Yin。压缩感知的迭代重加权算法。载于*2008*年*IEEE*国际声学、语音与信号处理会议，第3869–3872页，2008年3月。

[16] I. Daubechies、R. DeVore、M. Fornasier 和 C. S. G¨unt¨urk。用于稀疏恢复的迭代重加权最小二乘最小化。《纯粹与应用数学通讯》，63(1):1–38，2010年。[17] M. Dhar、A. Grover 和 S. Ermon。使用生成模型对压缩感知中的稀疏偏差进行建模，2018年。https://arxiv.org/abs/ 1807.01442。[18] J. Donahue、Y. Jia、O. Vinyals、J. Hoffman、N. Zhang、E. Tzeng 和 T. Darrell。Decaf：用于通用视觉识别的深度卷积激活特征。载于 E. P. Xing 和 T. Jebara（编），第*31*届国际机器学习会议论文集，机器学习研究论文集第32卷，第647–655页，中国北京，2014年6月22日至24日。PMLR。[19] D. L. Donoho。压缩感知。《*IEEE*信息论汇刊》，52(4):1289–1306，2006年4月。[20] S. Foucart 和 M.-J. Lai。通过 ℓ_q-最小化求欠定线性系统的最稀疏解。《应用与计算调和分析》，26(3):395–407，2009年。[21] S. Foucart 和 H. Rauhut。《压缩感知数学导论》。Birkh¨auser，2013年。[22] D. Ge、X. Jiang 和 Y. Ye。关于 l_p 最小化复杂度的注记。《数学规划》，129(2):285–299，2011年10月。[23] R. Gribonval 和 K. Schnass。字典识别——通过 ℓ_1 -最小化进行稀疏矩阵分解。《*IEEE*信息论汇刊》，56(7):3523–3539，2010年。[24] P. Hand 和 V. Voroninski。通过经验风险强制施加深度生成先验的全局保证。载于 S. Bubeck、V. Perchet 和 P. Rigollet（编），第*31*届学习理论会议论文集，机器学习研究论文集第75卷，第970–978页。PMLR，2018年7月6日至9日。[25] R. Heckel 和 M. Soltanolkotabi。使用未经训练的神经网络进行压缩感知：梯度下降找到光滑近似。载于 H. Daum´e III 和 A. Singh（编），第*37*届国际机器学习会议论文集，机器学习研究论文集第119卷，第4149–4158页，线上，2020年7月13日至18日。PMLR。[26] S. B. Holden。用于自动定理证明的机器学习：学习求解 SAT 和 QSAT。基础与趋势® 机器学习，14(6):807–989，2021年。[27] T. Hospedales、A. Antoniou、P. Micaelli 和 A. Storkey。神经网络中的元学习：综述，2020年。https://arxiv.org/abs/2004.05439。

[28] W. Huang、P. Hand、R. Heckel 和 V. Voroninski。一种可证明收敛的方案，用于带随机生成先验的压缩感知，2018年。https://arxiv.org/abs/1812.04176。[29] G. Jagatap 和 C. Hegde。使用未训练网络先验进行逆成像的算法保证。载于 H. Wallach、H. Larochelle、A. Beygelzimer、F. d' Alch´e-Buc、E. Fox 和 R. Garnett（编），神经信息处理系统进展，第32卷，第14832–14842页。Curran Associates, Inc.，2019年。[30] S. P. Kasiviswanathan 和 M. Rudelson。高相关性下的受限等距性质，2019年。https://arxiv.org/abs/1904.05510。[31] M.-J. Lai、Y. Xu 和 W. Yin。无约束光滑 ℓ_q 最小化的改进迭代重加权最小二乘。*SIAM* 数值分析杂志，51(2):927–957，2013年。[32] M. Mardani、Q. Sun、D. Donoho、V. Papyan、H. Monajemi、S. Vasanawala 和 J. Pauly。用于压缩成像的神经近端梯度下降。载于 S. Bengio、H. Wallach、H. Larochelle、K. Grauman、N. Cesa-Bianchi 和 R. Garnett（编），神经信息处理系统进展，第31卷，第9573–9583页。Curran Associates, Inc.，2018年。[33] M. M¨ arz、C. Boyer、J. Kahn 和 P. Weiss。$$\ell ˆ1$$-合成的采样率。计算数学基础，2022年8月。[34] B. K. Natarajan。线性系统的稀疏近似解。*SIAM* 计算杂志，24(2):227–234，1995年。[35] B. Neyshabur 和 R. Panigrahy。稀疏矩阵分解，2014年。https: //arxiv.org/abs/1311.3315。[36] L. Rencker、F. Bach、W. Wang 和 M. D. Plumbley。通过非线性压缩测量进行稀疏恢复和字典学习。*IEEE* 信号处理汇刊，67(21):5659–5670，2019年。[37] S. J. Russell、P. Norvig 和 E. Davis。《人工智能：一种现代方法》。Prentice Hall 人工智能系列。Prentice Hall，上萨德尔河，第三版，2010年。[38] K. Schnass。超完备字典的局部识别。机器学习研究期刊，16(35):1211–1242，2015年。[39] Y. Shen 和 S. Li。受限 p–等距性质及其在非凸压缩感知中的应用。计算数学进展，37:441–452，2012年。[40] W. Shi、F. Jiang、S. Zhang 和 D. Zhao。用于压缩图像感知的深度网络。载于*2017*年 *IEEE* 多媒体与博览会国际会议（*ICME*），第877–882页，2017年。

[41] D. A. Spielman、H. Wang 和 J. Wright。稀疏使用字典的精确恢复。载于第 23 卷《机器学习研究论文集》，第 37.1–37.18 页，苏格兰爱丁堡，2012年6月25–27日。JMLR 研讨会与会议论文集。[42] J. Sun、Q. Qu 和 J. Wright。球面上的完备字典恢复 I：概述与几何图景。《IEEE信息论汇刊》，63(2):853–884，2017年。[43] J. Sun、Q. Qu 和 J. Wright。球面上的完备字典恢复 II：通过黎曼信赖域方法进行恢复。《IEEE信息论汇刊》，63(2):885–914，2017年。[44] Q. Sun。通过 ℓ_q-最小化恢复最稀疏信号。《应用与计算调和分析》，32(3):329–341，2012年。[45] R. S. Sutton 和 A. G. Barto。《强化学习：导论》。自适应计算与机器学习丛书。麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥，第二版，2018年。[46] D. Ulyanov、A. Vedaldi 和 V. Lempitsky。深度图像先验。《国际计算机视觉期刊》，128:1867–1888，2020年。[47] D. V. Veen、A. Jalal、M. Soltanolkotabi、E. Price、S. Vishwanath 和 A. G. Dimakis。结合深度图像先验和学习得到的正则化的压缩感知，2020年。https://arxiv.org/abs/1806.06438。[48] R. Vershynin。《高维概率：数据科学应用导论》。剑桥统计与概率数学丛书第 47 卷。剑桥大学出版社，剑桥；纽约州纽约，2018年。[49] G. Welper。神经网络与非凸压缩感知优化的一种松弛论证，2020年。https://arxiv.org/abs/2002. 00516。[50]G. Welper。利用训练数据进行非凸压缩感知，2021年。https://arxiv.org/abs/2101.08310。[51] J. Woodworth 和 R. Chartrand。通过非凸收缩惩罚进行压缩感知恢复。《逆问题》，32(7):075004，2016年5月。[52] S. Wu、A. Dimakis、S. Sanghavi、F. Yu、D. Holtmann-Rice、D. Storcheus、A. Rostamizadeh 和 S. Kumar。通过梯度展开学习压缩感知测量矩阵。载于 K. Chaudhuri 和 R. Salakhutdinov 编，《第36届国际机器学习会议论文集》，《机器学习研究论文集》第 97 卷，第 6828–6839 页。PMLR，2019年6月9–15日。

[53] Y. Wu、M. Rosca 和 T. Lillicrap。深度压缩感知。载于第 97 卷《机器学习研究论文集》，第 6850–6860 页，美国加利福尼亚州长滩，2019年6月9–15日。PMLR。

[54] J. Yosinski、J. Clune、Y. Bengio 和 H. Lipson。深度神经网络中的特征具有多大的可迁移性？载于第 *27* 届国际神经信息处理系统大会论文集——第 *2* 卷，NIPS'14，第 3320–3328 页，剑桥，马萨诸塞州，美国，2014年。麻省理工学院出版社。

[55] Y. Zhai、Z. Yang、Z. Liao、J. Wright 和 Y. Ma。通过在正交群上进行 ℓ^4-范数最大化实现完备字典学习。机器学习研究期刊，21(165):1–68，2020年。

A 细节与证明

A.1 易问题与难问题：定理 2.3、2.4

定理 2.3 对原始参考文献 [50] 做了一些小改动。在原始版本中，(A1) 包含另外两个不等式

$$n \geq \bar{c}_1 p \log p, \qquad \frac{1}{p} \leq \frac{s}{n} \leq \bar{c}_2,$$

这些条件用于确保 X 满秩 [50, 定理 4.2 的证明中，条件为 (A3) 的第 4] 项。我们在 (A3) 中直接作此假设，因此省略这些不等式。

对于定理 2.4，参考文献 [50] 要求额外假设：$Ax = b$ 具有唯一的 st 稀疏解，而这一假设仅用于验证SOLVE 的解是否正确。在我们的情形中，这一点已隐含在 (A2) 中。

A.2 树大小：引理 3.7

引理 A.1（引理 3.7 重述）。令 s_0 为树根节点的稀疏度。假设树的每个节点至多有 γ 个子节点，并且对于 $c \geq 0$，以及所有 $j \in$ 子节点（i），均有 $s_i \bar{t} \gtrsim c s_j t$。那么这棵树至多有

$$\gamma^{N+1} = \gamma s_0^{\frac{\log \gamma}{\log(ct/\bar{t})}}$$

个节点。

证明。令 ℓ_i 表示节点的层级，即它到根节点的距离，并令 N 表示所有节点的最大层级。每一层至多有 γ^{N-i} 个节点，因此整棵树至多有

$$\sum_{i=0}^{N} \gamma^{N-i} = \frac{\gamma^{N+1} - 1}{\gamma - 1} \leq \gamma \gamma^N$$

节点。

接下来需要估计 N。根据假设 $s_i t \geq c s_j t$ ，通过归纳法可得

$$s_j \leq \left(\frac{\bar{t}}{ct}\right)^{\ell_j} s_0$$

因此，由于必然有 $s_j \geq 1$，我们得出

$$s_0 \geq \left(\frac{ct}{\bar{t}}\right)^{N}.$$

代入 $\gamma^N = \left(\frac{ct}{\bar{t}}\right)^{N_{\log_\gamma \log \frac{ct}{\bar{t}}}}$后，节点数有如下界

$$\gamma\gamma^N = \gamma\left(\frac{ct}{\bar{t}}\right)^{N\frac{\log\gamma}{\log ct/\bar{t}}} \leq \gamma s_0^{\frac{\log\gamma}{\log ct/\bar{t}}}.$$

□

A.3 可学习树：命题 3.5

命题 A.2 (重述命题 3.5)。 设 $\mathcal{C}_i$, $i \in \mathcal{I}$ 按照定义*3.4*是可学习的。那么，存在 SparseFactor的一种实现，以及常数 $c > 0$ 和 $C \geq 0$ ，它们与概率模型、维度和稀疏度无关，使得其概率至少为

$$1 - C\gamma s_0^{\frac{\log\gamma}{\log(cst/\bar{t})}} p^{-c}$$

算法 *2* 的输出 $X_i = \textsc{TreeTrain}(\mathcal{C}_i)$ 是缩放置换 ***permu-tation*** $\textsc{Scale}(X_i) = \textsc{Scale}(X_i P)$ ，其中某个置换矩阵为 P。

证明。 该结果可通过从树的叶节点开始，对树中的每个节点归纳应用定理 2.3 得出。定理 2.3 的假设很容易与给定条件对应，唯有 (A2) 例外；我们将分别对叶节点和非叶节点验证这一条件。

1. 叶节点：对于叶节点，假设 (A2) 成立。之所以需要这一假设，是因为 $Ax = b$ 的全局最稀疏解可能不唯一，此时 (A2) 可确保我们选取一个属于该类别的解。

2. 非叶节点：设 z 是训练样本 Z 的一列，且 $x = X_i z$。根据 (10)，我们有

$$x = X_i z = X_{\text{child}(i)} W_{\text{child}(i)} z =: X_{\text{child}(i)} w$$

其中 t 是稀疏的 w ，因为 $W_{\text{child}(i)}$ 具有 $t/\bar{t}$ 个稀疏列，且 z 是 $\sqrt{2\bar{t}}$ 稀疏的，其概率至少为 $1 - 2p^{-c}$ （参见 [50] 中定理 2.3 的证明第 2 项）。由于 $AX_{\text{child}(i)}$ 满足 $\sqrt{2t}$-RIP，因此可通过修正后的 ℓ_1-最小化 (3) 恢复正确的解 x ，进而也可通过 $\textsc{Solve}_{X_i}$ 恢复。

最后，我们将这些概率相加。根据定理 2.3，每个节点上失败的概率至多为 Cp^{-c}。根据引理 3.7，节点数至多为 $\gamma s_{\log\gamma \log(ct/\bar{t})\, 0}$，因此由并集界可得结论。

□

全局 ℓ_0 最小化解的拆分

本节包含两个引理，说明 ℓ_0 极小化器的分裂仍是ℓ_0 极小化器，并且它们线性无关。

引理 A.3 (引理 4.3 重述)**.** 假设 $S \in \mathbb{R}^{n\times q}$ 的各列具有不重叠支撑，且 $z \in \mathbb{R}^q$ 含有非零元素。若向量 $x = Sz$ 是 ℓ_0-最小化问题 *12* 的解，则 AS 的各列线性无关。

证明。 设 x_i 为 S 的各列，并假设 Ax_i、 $i \in [t]$ 线性相关。则存在一个非零的 $y \in \mathbb{R}^t$，使得 $\sum_{i=1}^t Ax_i y_i = 0$。不失一般性，令 $y_1 \neq 0$，则

$$Ax_1 = -A\sum_{i=2}^{t} x_i \frac{y_i}{y_1}.$$

我们利用这一恒等式消去 x_1:

$$b = Ax = A\sum_{i=1}^{t} x_i z_i, = Ax_1 z_1 + A\sum_{i=2}^{t} x_i z_i, = A\sum_{i=2}^{t} x_i z_i \left(1 - \frac{y_i}{y_1} z_0\right) =: A\bar{x}.$$

由于所有 x_i 的支撑集互不相交，且所有 z_i 均非零，因此有 $\|\bar{x}\|_0 < \|x\|_0$，这与 x 是一个 ℓ_0 最小化解的假设矛盾，因此所有 Ax_i、$i \in [n]$ 都必须线性无关。

□

引理 A.4 (引理 4.4 重述)。 假设 $S \in \mathbb{R}^{n\times q}$ 的各列具有不重叠支撑，且 $z \in \mathbb{R}^q$ 含有非零元素。如果向量 $x = Sz$ 是 ℓ_0-最小化问题 *12* 的解，那么列 $S_{\cdot k}$、 $k \in [q]$ 是以下问题的全局 ℓ_0 优化解

$$S_{\cdot k} \in \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|_0 \quad \textit{subject to} \quad Ax = AS_{\cdot k}.$$

证明。 假设该命题不成立。那么对于某个 $k \in [q]$，存在一个 y_k，使得

$$\|y_k\|_0 \leq \|S_{\cdot k}\|_0, \quad Ay_k = AS_{\cdot k}.$$

定义

$$\bar{x} := y_k z_k + \sum_{l\neq k} S_{\cdot l} z_l.$$

于是，我们有

$$A\bar{x} = Ay_k z_k + A\sum_{l\neq k} S_{\cdot l} z_l. = A\sum_{l} S_{\cdot l} z_l = ASz = Ax$$

并且由于所有 $S_{\cdot l}$ 的支撑集互不相交，且 $z_l \neq 0$

$$\|\bar{x}\|_0 = \|y_k\|_0 + \sum_{l\neq k} \|S_{\cdot l}\|_0 < \sum_{l} \|S_{\cdot l}\|_0 = \|x\|_0.$$

这与 x 是全局 ℓ_0 最小化者的假设相矛盾，因此所有$S_{\cdot k}$ 也都必须是 ℓ_0 最小化者。

□

A.5 命题 4.2 的树节点

本节介绍命题 4.2 中树节点所用矩阵 X 的构造。

A.5.1 X 的构造

我们沿用第 4.3 节中概述的思路。给定矩阵 A 和向量 x，我们构造分解矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ 和 z，使得 $x = Xz$ 对于 t-稀疏的 z 和 AX 满足零空间性质。第一个条件确保 x 属于类别 $\mathcal{C}_{<t}$，第二个条件则提供求解器 SOLVE。此构造将在后续章节中用于定义课程树中的节点。我们先给出一些简单的定义

(M1) 用 $\mathcal{S}^{m\times n}$ 表示 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 中所有列的支撑集互不重叠的矩阵。

(M2) $\mathbf{1}:$ 维度由上下文确定的 $= \begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\end{bmatrix}^T$。

我们将 x 拆分为 q 个互不重叠的分量，并将它们组合成矩阵 $S \in \mathcal{S}^{n\times q}$ 的各列，使得 $x = S\mathbf{1}$。矩阵 S 有 q 列，这通常少于我们为丰富类别X所需的 p 列。一种便捷的解决方法是选取一个列正交归一的矩阵 $Z \in \mathbb{R}^{p\times q}$，使得 $x = SZ^TZ\mathbf{1} = SZ^Tz$，其中 $z := Z\mathbf{1}$。为确保 z的稀疏度并便于后续树构造，我们将 Z 限制在 $\mathcal{S}^{p\times q}$内。

(M3) $S \in \mathcal{S}^{n\times q}$ 具有非零列。

(M4) $Z \in \mathcal{S}^{p\times q}$ 具有 ℓ_2-归一化列。

虽然矩阵 SZ^T 与 X的维度相同，但它通常是低秩的，无法满足零空间性质（NSP）。此外，我们希望类别矩阵 X 具有丰富的类别，并能产生更多可能的随机解。为此，我们加入一个随机矩阵 R，但只将其添加到 SZ^T 中非零的块上，以保持稀疏度。我们定义 R 如下

（M5）将 x 和 $[p]$ 的支撑集划分为不相交集合

$$\mathcal{J} := \{\mathrm{supp}(X_{\cdot l}) : l \in [q]\}, \quad \mathcal{K} := \{K_l : l \in [q]\}, \quad \mathrm{supp}(Z_{\cdot l}) \subset K_l, l \in [q]$$

使每个集合 $J \in \mathcal{J}$ 对应于 S 各列中x 的一个分量的支撑集， Z也同样如此。我们还需要块的匹配对$[J, K]$

$$\mathcal{J}\mathcal{K} := \{[\mathrm{supp}(X_{\cdot l}), \mathrm{supp}(Z_{\cdot l})] : l \in [q]\},$$

分别源自 S 和 Z 中相同的列。

(M6) $R \in \mathbb{R}^{n\times p}$ 是分块矩阵

$$R_{jk} = \begin{cases} \text{i.i.d random} & j,k \in [J,K] \in \mathcal{J}\mathcal{K} \\ 0 & \text{else,} \end{cases}$$

其随机元素满足

$$\mathbb{E}\left[R_{jk}\right] = 0, \qquad \mathbb{E}\left[R_{jk}^2\right] = 1, \qquad \|R_{jk}\|_{\psi_2} \le C_\psi$$

对于某个常数 C_ψ，且相对于勒贝格测度绝对连续。

最后，我们需要一个将在下文确定的缩放矩阵。

(M7) $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个将在下文确定的对角缩放矩阵。

然后，我们定义如下类别矩阵

(M8)

$$X := SZ^T + DR(I - ZZ^T), \tag{20}$$

它在 Z^T 的核上是随机的，并且在正交补空间上与先前构造的 SZ^T 相匹配。

下面的引理总结了在下文证明中会用到的 (M1) - (M8) 中矩阵和向量的若干基本性质。特别是，它们满足 $x = Xz$ 对于 $z = Z\mathbf{1}$。

引理 A.5。对于构造 *(M1) - (M8)*，我们有：

1. $Z^T Z = I$。
2. ZZ^T 是一个正交投影算子。
3. 设 支撑$(Z_{\cdot l}) \subset K \in \mathcal{K}$，其中 l 是某一列。那么

$$(ZZ^T)_{KL} = \begin{cases} Z_{Kl}Z_{Kl}^T & \text{if } K = L \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

4. $(ZZ^T)_{KL} = 0$，对所有 $K \neq L \in \mathcal{K}$ 均成立。
5. 对所有 $K \in \mathcal{K}$，$(ZZ^T)_{KK}$ 都是正交投影算子。
6. 对所有 $u \in \mathbb{R}^p$，我们有

$$\sum_{K\in\mathcal{K}} \left\|(ZZ^T)_{KK}u_K\right\|^2 = \left\|Z^T u\right\|^2.$$

7. 对所有 $u \in \mathbb{R}^p$，我们有

$$\sum_{K\in\mathcal{K}} \left\|(I - ZZ^T)_{K\cdot}u\right\|^2 \le \|u\|^2.$$

8. 对于 $z = Z\mathbf{1}$，我们有 $ZZ^T z = z$。

9. 对于 $x = S\mathbf{1}$ 和 $z = Z\mathbf{1}$，我们有 $SZ^T z = x$。

10. 对于 $x = S\mathbf{1}$ 和 $z = Z\mathbf{1}$，我们有 $Xz = x$。

证明。 1. 由于 Z 已归一化且 $Z \in \mathcal{S}^{p\times q}$，所有列都是正交归一的。

2. ZZ^T 是对称的，结合第1项，我们有 $(ZZ^T)(ZZ^T) = Z(Z^TZ)Z^T = ZZ^T$。

3. 我们有 $(ZZ^T)_{KL} = \sum_{l=1}^{q}(Z_{\cdot l}Z_{\cdot l}^T)_{KL} = \sum_{l=1}^{q} Z_{Kl}Z_{Ll}^T$，由于 $K \neq L$ 互不相交且 $\operatorname{supp} Z_{\cdot l} \subset K$，这可化简为引理中的公式。

4. 由第3项可直接得出。

5. 由第3项可直接得出，因为向量 Z_{Kl} 已归一化。

6. 对于每个 $K \in \mathcal{K}$，令 $l \in [q]$ 为满足 $\operatorname{supp}(Z_{\cdot l}) \subset K$ 的对应索引。于是，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{K\in\mathcal{K}} \left\|(ZZ^T)_{KK}u_K\right\|^2 &= \sum_{K,l=1}^{q} \left\|Z_{Kl}Z_{Kl}^T u_K\right\|^2 \\ &= \sum_{K,l=1}^{q} (Z_{Kl}^T u_K)^2 = \sum_{l=1}^{q}(Z_{\cdot l}^T u)^2 = \left\|Z^T u\right\|^2,\end{aligned}$$

其中，在第一个等式中我们用到了第3项，在第二个等式中用到了所有 Z_{Kl} 都已归一化这一事实，在第三个等式中用到了 $\operatorname{supp}(Z_{Kl}) \subset K$。

7. 由第3项可得

$$(I - ZZ^T)_{K\cdot}u = u_K - \sum_{L\in\mathcal{K}}(ZZ^T)_{KL}u_L = u_K - (ZZ^T)_{KK}u_K.$$

由于根据第5项，矩阵 $(I - ZZ^T)_{KK}$ 是一个投影算子，因此可得

$$\begin{aligned}\sum_{K\in\mathcal{K}} \left\|(I - ZZ^T)_{K\cdot}u\right\|^2 &= \sum_{K\in\mathcal{K}} \left\|(I - ZZ^T)_{KK}u_K\right\|^2 \\ &\leq \sum_{K\in\mathcal{K}} \left\|(I - ZZ^T)_{KK}\right\|^2 \|u_K\|^2 \leq \|u\|^2.\end{aligned}$$

8. 根据第1项，我们有 $ZZ^T z = ZZ^T Z\mathbf{1} = Z\mathbf{1} = z$。

9. 根据第1项，我们有 $SZ^T z = SZ^T Z\mathbf{1} = S\mathbf{1} = x$。

10. 直接由前面的各项得出。

□

A.5.2 期望与集中性

为了证明限制等距性质和零空间性质，我们需要关于任意 u 的 $\|AXu\|$ 的期望与集中结果。

引理 A.6. 令 $u \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 X 为 (20) 中定义的矩阵。则

$$\mathbb{E}\left[\|AXu\|^2\right] = \left\|ASZ^Tu\right\|^2 + \sum_{[J,K]\in\mathcal{JK}} \|AD_{\cdot J}\|_F^2 \left[\|u_K\|^2 - \left\|(ZZ^T)_{KK}u_K\right\|^2\right].$$

证明。 由于 R在 $[J,K]\in\mathcal{JK}$对应的块 R_{JK}之外为零，因此

$$Xu = [SZ^T + DR(I-ZZ^T)]u = SZ^Tu + \sum_{[J,K]\in\mathcal{JK}} D_{\cdot J}R_{JK}(I-ZZ^T)_{K\cdot}u$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|AXu\|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left\|SZ^Tu + \sum_{[J,K]\in\mathcal{JK}} D_{\cdot J}R_{JK}(I-ZZ^T)_{K\cdot}u\right\|^2\right] \\
&= \left\|ASZ^Tu\right\|^2 + \sum_{[J,K]\in\mathcal{JK}} \left\|AD_{\cdot J}R_{JK}(I-ZZ^T)_{K\cdot}u\right\|^2 \\
&= \left\|ASZ^Tu\right\|^2 + \sum_{[J,K]\in\mathcal{JK}} \|AD_{\cdot J}\|_F^2 \left\|(I-ZZ^T)_{K\cdot}u\right\|^2,
\end{aligned}$$

其中，第二行用到了所有块 R_{KJ} 彼此独立，而第三行用到了引理 B.1。我们化简最后一项

$$\begin{aligned}
\left\|(I-ZZ^T)_{K\cdot}u\right\|^2 &= \left\|u_K - \sum_{L\in\mathcal{K}}(ZZ^T)_{KL}u_L\right\|^2 \\
&= \left\|u_K - (ZZ^T)_{KK}u_K\right\|^2 \\
&= \|u_K\|^2 - \left\|(ZZ^T)_{KK}u_K\right\|^2,
\end{aligned}$$

其中，第二行和第三行分别由引理 A.5 中的第 4 项和第 5 项得出。因此，我们得到

$$\mathbb{E}\left[\|AXu\|^2\right] = \left\|ASZ^Tu\right\|^2 + \sum_{[K,J]\in\mathcal{JK}} \|AD_{\cdot K}\|_F^2 \left[\|u_K\|^2 - \left\|(ZZ^T)_{KK}u_K\right\|^2\right].$$

□

如果 AS 具有正交归一列，我们可以简化该期望。由于通常并非如此，我们将 $A \to M$重新命名；稍后它将成为 A的预条件变体。

引理 A.7。令 $u \in \mathbb{R}^p$ 和 $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$。设 (20) 中定义了 X、S 和 D，假设 MS具有正交归一列，并且对于块 $J \in \mathcal{J}$ 中的所有 j，对角缩放选为 $D_j = \|M_{\cdot J}\|_F^{-1}$。则

$$\mathbb{E}\left[\|MXu\|^2\right] = \|u\|^2 .$$

证明。经过若干项化简后，该结论可由引理 A.6 得出。首先，由于 MS具有正交归一列，因此有 $(MS)^T(MS) = I$，于是

$$\left\|MSZ^T u\right\|^2 = u^T Z(MS)^T(MS)Z^T u = u^T ZZ^T u = \left\|Z^T u\right\|^2 .$$

其次，对任意 $j \in J$，根据缩放 D 的定义，有

$$\|MD_{\cdot J}\|_F^2 = \|M_{\cdot J}\|_F^2 \, |D_j|^2 = \|M_{\cdot J}\|_F^2 \, \|M_{\cdot J}\|_F^{-2} = 1.$$

最后，由引理 A.5 第 6 项可得

$$\sum_{K\in\mathcal{K}} \left\|(ZZ^T)_{KK} u_K\right\|^2 = \left\|Z^T u\right\|^2 .$$

代入引理 A.6，得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|MXu\|^2\right] &= \left\|MSZ^T u\right\|^2 + \sum_{[J,K]\in\mathcal{J}\mathcal{K}} \|MD_{\cdot J}\|_F^2 \left[\|u_K\|^2 - \left\|(ZZ^T)_{KK} u_K\right\|^2\right] . \\
&= \left\|Z^T u\right\|^2 + \left(\sum_{[J,K]\in\mathcal{J}\mathcal{K}} \|u_K\|^2\right) - \left\|Z^T u\right\|^2 \\
&= \|u\|^2 .
\end{aligned}$$

□

接下来，我们证明随机矩阵 X 的集中不等式。

引理 A.8。设 $u \in \mathbb{R}^p$ 和 $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$。令 (20) 中定义的 X、S 和 D 满足：MS具有正交归一列，且对块 $J \in \mathcal{J}$ 中的所有 j，对角缩放选为 $D_j = \|M_{\cdot J}\|_F^{-1}$。则

$$\left\|\|MXu\|^2 - \|u\|\right\|_{\psi_2} \le CC_\psi^2 \max_{J\in\mathcal{J}} \frac{\|M_{\cdot J}\|}{\|M_{\cdot J}\|_F} \|u\| .$$

证明。将 R 向量化后，结果即可由引理 B.4 得出。为此，令 vec(·) 表示向量化，它将矩阵 $\mathbb{R}^{a\times b}$ 与向量 $(\mathbb{R}^a) \otimes (\mathbb{R}^b)'$ 相对应，其中维度为 a、b。于是，由于对所有矩阵$ABu = (A \otimes u^T)\,\mathrm{vec}(B)$，我们有

$$MD_{\cdot J}R_{JK}(I - (ZZ^T)_{K\cdot}u = \left[MD_{\cdot J} \otimes u^T(I - (ZZ^T)_{K\cdot}^T\right] \mathrm{vec}\left(R_{JK}\right)$$

因此

$$\begin{aligned} MXu &= [MSZ^T + MDR(I - ZZ^T)]u \\ &= MSZ^T u + \sum_{[J,K]\in\mathcal{JK}} MD_{\cdot J} R_{JK} (I - ZZ^T)_{K\cdot} u \\ &= MSZ^T u + \sum_{[J,K]\in\mathcal{JK}} \left[MD_{\cdot J} \otimes u^T (I - ZZ^T)_{K\cdot}^T\right] \operatorname{vec}(R_{JK}) \\ &=: \mathcal{B} + \mathcal{AR}, \end{aligned}$$

其中包含分块矩阵和向量

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \left[MD_{\cdot J} \otimes u^T (I - ZZ^T)_{K\cdot}^T\right]_{[J,K]\in\mathcal{JK}} \\ \mathcal{R} &:= \left[\operatorname{vec}(R_{JK})\right]_{[J,K]\in\mathcal{JK}} \\ \mathcal{B} &:= MSZ^T u. \end{aligned}$$

在第一个等式中使用引理 B.2，在最后一个等式中使用引理 A.7，可得

$$\|\mathcal{A}\|_F^2 + \|\mathcal{B}\|^2 = \mathbb{E}\left[\|\mathcal{AR} + \mathcal{B}\|^2\right] = \mathbb{E}\left[\|MXu\|^2\right] = \|u\|^2.$$

此外，我们有

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\| &\le \left(\sum_{[J,K]\in\mathcal{JK}} \left\|MD_{\cdot J} \otimes u^T (I - ZZ^T)_{K\cdot}^T\right\|^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{[J,K]\in\mathcal{JK}} \|MD_{\cdot J}\|^2 \left\|(I - ZZ^T)_{K\cdot} u\right\|^2\right)^{1/2} \\ &= \max_{J\in\mathcal{J}} \|MD_{\cdot J}\| \left(\sum_{K\in\mathcal{K}} \left\|(I - ZZ^T)_{K\cdot} u\right\|^2\right)^{1/2} \\ &\le \max_{J\in\mathcal{J}} \|MD_{\cdot J}\| \, \|u\|, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式用到了引理 A.5 的第 7 项。因此，由引理 B.4 可得

$$\begin{aligned} \left\|\|MXu\| - \|u\|\right\|_{\psi_2} &= \left\|\|\mathcal{AR} + \mathcal{B}\| - \left(\|\mathcal{A}\|_F^2 + \|\mathcal{B}\|^2\right)^{1/2}\right\|_{\psi_2} \\ &\le CC_\psi^2 \|\mathcal{A}\| \le CC_\psi^2 \max_{J\in\mathcal{J}} \|MD_{\cdot J}\| \, \|u\|. \end{aligned}$$

根据对角缩放的定义，我们还可以进一步估计右端项 D

$$\|MD_{\cdot J}\| = \|M_{\cdot J} D_{JJ}\| = \frac{\|M_{\cdot J}\|}{\|M_{\cdot J}\|_F},$$

至此证明完毕。

□

MX的限制等距性质

我们不直接证明 AX 的限制等距性质，而是证明其预条件变体。由于预条件器要在后文确定，我们先给出一般矩阵 MX 的相关结果。利用上一节中的期望与集中不等式，限制等距性质的证明是标准的，参见例如 [9, 21, 30]。我们先证明一个技术引理。

引理 A.9。令 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，并假设存在单位球面 S^{n-1} 的一个 $\frac{\epsilon}{4}$ 覆盖 $\mathcal{N} \subset S^{n-1}$，满足

$$|\|Ax_i\| - 1| \le \frac{\epsilon}{2} \quad \textit{for all } x_i \in \mathcal{N}.$$

Then

$$(1-\epsilon)\|x\| \le \|Ax\| \le (1+\epsilon)\|x\| \quad \textit{for all } x \in \mathbb{R}^n.$$

证明。令 $x \in S^{n-1}$ 为范数的最大化元，使得 $\|Ax\| = \|A\|$。于是，覆盖中存在一个元素 $x_i \in \mathcal{N}$，满足 $\|x - x_i\| \le \frac{\epsilon}{4}$，从而得到上界

$$\begin{aligned}\|A\| = \|Ax\| &\le \|Ax_i\| + \|A(x-x_i)\| \le \|Ax_i\| + \|A\|\frac{\epsilon}{4}\\ &\Rightarrow \left(1-\frac{\epsilon}{4}\right)\|A\| \le \|Ax_i\|\\ &\Rightarrow \|A\| \le \frac{1+\epsilon/2}{1-\epsilon/4} \le 1+\epsilon.\end{aligned}$$

结合上界和给定的假设，对于任意 $x \in S^{n-1}$，我们通过以下方式估计下界

$$\begin{aligned}\|Ax\| &\ge \|Ax_i\| - \|A(x-x_i)\| \ge \|Ax_i\| - (1+\epsilon)\|x-x_i\|\\ &\ge \left(1-\frac{\epsilon}{2}\right) - (1+\epsilon)\frac{\epsilon}{4} = 1 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{4} - \frac{\epsilon^2}{4} \ge 1-\epsilon.\end{aligned}$$

通过缩放，这些界可从球面扩展到所有 $x \in \mathbb{R}^n$。

□

对于以下限制等距性质结果，我们加入一个等距映射 $W \in \mathbb{R}^{p\times p'}$，其中 $\|W\cdot\| = \|\cdot\|$，这使我们能够根据下面的式（10）从其子节点构造树节点 X_i。

引理 A.10. 设 $W \in \mathbb{R}^{p\times p'}$ 是一个等距映射，对于 $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$，其中 (20) 中定义了 X、S 和 D，假设 MS 具有正交归一列，且对块 $J \in \mathcal{J}$ 中的所有 j，对角缩放均取为 $D_j = \|M_{\cdot J}\|_F^{-1}$。如果最小值$_{J\in\mathcal{J}} \frac{\|M_{\cdot J}\|_F^2}{\|M_{\cdot J}\|^2} \ge \frac{2tC_\psi^4}{c\epsilon^2}$对数 $\frac{12ep}{t\epsilon}$，那么以至少 $1-2$ 指数 $\left(-\frac{c}{2}\frac{\epsilon^2}{C_\psi^4}\right.$ 最小值$_{J\in\mathcal{J}} \left.\frac{\|M_{\cdot J}\|_F^2}{\|M_{\cdot J}\|^2}\right)$的概率，矩阵 MXW 满足限制等距性质

$$(1-\epsilon)\|z\| \le \|MXWz\| \le (1+\epsilon)\|z\| \quad \textit{for all } z \textit{ with } \|z\|_0 \le t.$$

证明。固定一个支撑集 $T \subset [p']$，满足 $|T| = t$，并令 $\Sigma_T \subset \mathbb{R}^{p'}$ 为所有支撑集包含于 T的向量构成的子空间。根据标准体积估计 [9, 48]， Σ_T 中的单位球面存在一个$\frac{\epsilon}{4}$ 覆盖 $\mathcal{N}$，其基数为

$$|\mathcal{N}| \leq \left(\frac{12}{\epsilon}\right)^t.$$

由于 $\|Wz_i\| = \|z_i\|$, $z_i \in \mathcal{N}$，根据引理 A.8 和并集界，我们得到

$$\Pr\left[\exists z_i \in \mathcal{N} : \left|\|MXWz_i\| - 1\right| \geq \epsilon\right] \leq 2\left(\frac{12}{\epsilon}\right)^t \exp\left(-c\frac{\epsilon^2}{C_\psi^4} \min_{J\in\mathcal{J}} \frac{\|M_{\cdot J}\|_F^2}{\|M_{\cdot J}\|^2}\right).$$

假设该事件未发生，因此对于所有 $z_i \in \mathcal{N}$， $\left|\|MXWz_i\| - 1\right| \leq \tau$。那么，根据引理 A.9，我们有

$$(1-\epsilon)\|z\| \leq \|MXWz\| \leq (1+\epsilon)\|z\| \quad \text{for all } z \in \Sigma_T.$$

共有 $\binom{p}{t} \leq \left(\frac{ep}{t}\right)^t$ 个大小为 t 的支撑集 T，因此根据并集界，我们得到

$$(1-\epsilon)\|z\| \leq \|MXWz\| \leq (1+\epsilon)\|z\| \quad \text{for all } z \text{ with } \|z\|_0 \leq t$$

失败概率的上界为

$$\begin{aligned}
&2\left(\frac{ep}{t}\right)^t \left(\frac{12}{\epsilon}\right)^t \exp\left(-c\frac{\epsilon^2}{C_\psi^4} \min_{J\in\mathcal{J}} \frac{\|M_{\cdot J}\|_F^2}{\|M_{\cdot J}\|^2}\right) \\
&\qquad = 2\exp\left(-c\frac{\epsilon^2}{C_\psi^4} \min_{J\in\mathcal{J}} \frac{\|M_{\cdot J}\|_F^2}{\|M_{\cdot J}\|^2} + t\log\frac{12ep}{t\epsilon}\right) \\
&\qquad\qquad \leq 2\exp\left(-\frac{c}{2}\frac{\epsilon^2}{C_\psi^4} \min_{J\in\mathcal{J}} \frac{\|M_{\cdot J}\|_F^2}{\|M_{\cdot J}\|^2}\right)
\end{aligned}$$

if

$$t\log\frac{12ep}{t\epsilon} \leq \frac{c}{2}\frac{\epsilon^2}{C_\psi^4} \min_{J\in\mathcal{J}} \frac{\|M_{\cdot J}\|_F^2}{\|M_{\cdot J}\|^2} \Leftrightarrow \min_{J\in\mathcal{J}} \frac{\|M_{\cdot J}\|_F^2}{\|M_{\cdot J}\|^2} \geq \frac{2tC_\psi^4}{c\epsilon^2}\log\frac{12ep}{t\epsilon}.$$

□

A.5.4 AX 的零空间性质

RIP 结果中的矩阵 MS 必须具有正交归一列，而对于 $M = A$，通常并非如此。不过，使用我们接下来构造的合适预条件器后，这一点便能成立。零空间性质在预条件化下保持不变，这使我们之后能够将其消去。

引理 A.11. 设 $M \in \mathbb{R}^{m\times q}$ 满列秩，且 $m \geq q$ 也具有满列秩。那么存在一个矩阵 $T \in \mathbb{R}^{m\times m}$，其条件数为 $\kappa(T) = \kappa(M)$，使得 TM 的列正交归一。

证明。 设 $M = U\Sigma V^T$ 是 M 的奇异值分解。定义

$$T := DU^T, \qquad D^{-1} := \mathrm{diag}[\sigma_1, \ldots, \sigma_q, \sigma, \ldots, \sigma]$$

对于 $q \le m$ 个奇异值 σ_i，以及区间 $[\sigma_1, \ldots, \sigma_q]$ 内其余的 $m - q$ 个值 σ。于是，我们有

$$M^T T^T T M = (V\Sigma^T U^T)(UD^T)(DU^T)(U\Sigma V^T) = V\Sigma^T D^T D\Sigma V^T = VV^T = I,$$

这里用到了 $\Sigma^T D^T D\Sigma = I$。根据构造， T 的奇异值为 σ_1、.....、 σ_q，另有一个额外值 σ，其上界不超过前述值，因此

$$\kappa(T) = \frac{\sigma_1}{\sigma_q} = \kappa(M).$$

□

引理 A.12. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 可逆。则

$$\frac{\|A\|_F}{\|A\|} \le \kappa(T)\frac{\|TA\|_F}{\|TA\|}.$$

证明。 我们首先证明

$$\|TA\|_F \ge \left\|T^{-1}\right\|^{-1} \|A\|_F .$$

事实上， $\|x\| \le \left\|T^{-1}\right\| \|Tx\|$ 意味着 $\|Tx\| \ge \left\|T^{-1}\right\|^{-1} \|x\|$，因此将其应用于 A 的列 a_j，可得

$$\|TA\|_F^2 = \sum_{j=1}^{n} \|Ta_j\|^2 \ge \sum_{j=1}^{n} \left\|T^{-1}\right\|^{-2} \|a_j\|^2 = \left\|T^{-1}\right\|^{-2} \|A\|_F^2 .$$

利用这一估计，我们得到

$$\kappa(T)\frac{\|TA\|_F}{\|TA\|} \ge \|T\| \left\|T^{-1}\right\| \frac{\left\|T^{-1}\right\|^{-1} \|A\|_F}{\|T\| \|A\|} = \frac{\|A\|_F}{\|A\|}.$$

□

推论 A.13。 设 $W \in \mathbb{R}^{p\times p'}$ 为一个等距映射，对于在(20)中定义的 X、 S 和 D，假设 AS 满列秩，且 $\min_{J\in\mathcal{J}} \frac{\|A_{\cdot J}\|_F^2}{\|A\|_J^2} \ge \frac{2tC_\psi^4}{c\epsilon^2}\kappa(AS)\log\frac{12ep}{t\epsilon}$。~~那么存在一个可逆矩阵~~ $T \in \mathbb{R}^{m\times m}$，使得对于块 $J \in \mathcal{J}$ 中的所有 j，采用对角缩放 $D_j = \|TA_{\cdot J}\|_F^{-1}$ 后，以至少 $1 - 2\exp\left(-\frac{c}{2}\frac{\epsilon^2}{C_\psi^4\kappa}^{-1}(AS)\min_{J\in\mathcal{J}}\frac{\|A_{\cdot J}\|_F^2}{\|A_{\cdot J}\|^2}\right)$ 的概率，矩阵 $TAXW$ 满足限制等距性质

$$(1-\epsilon)\|z\| \le \|TAXWz\| \le (1+\epsilon)\|z\| \quad \textit{for all } z \textit{ with } \|z\|_0 \le t.$$

证明。 根据引理 A.11 和 A.12，矩阵 AS 满列秩，因此存在一个可逆矩阵 T，使得

$$\begin{aligned} \kappa(T) &= \kappa(AS), && TAS \text{ has orthogonal columns} \\ \frac{\|A_{\cdot J}\|_F}{\|A_{\cdot J}\|} &\le \kappa(T)\frac{\|TA_{\cdot J}\|_F}{\|TA_{\cdot J}\|} && \text{for all } J \in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

因此，由引理 A.10 可得该推论，其中 $M = TA$。

□

最后一个推论使我们能够通过 ℓ_1-最小化恢复 $x = S\mathbf{1}$

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|_1 \quad \text{subject to} \quad TAx = b,$$

经过某个矩阵 T的预条件化。学生尚无法解决这个问题，因为学生通常无法访问矩阵 T；该矩阵仅由教师用于构造 X。不过，恢复 ℓ_1并不需要矩阵 T，因为 RIP 蕴含零空间性质，而零空间性质足以实现恢复，且与左预条件化无关。

推论 A.14。 设 $W \in \mathbb{R}^{p\times p'}$ 是一个等距映射，对于 (20)中定义的 X、 S 和 D，假设 AS 满列秩，且 $\min_{J\in\mathcal{J}} \frac{\|A_{\cdot J}\|_F^2}{\|A_{\cdot J}\|^2} \ge \frac{2tC_\psi^4}{c\epsilon^2}\kappa(AS)\log\frac{12ep}{t\epsilon}$。那么，存在一个可逆矩阵 $T \in \mathbb{R}^{m\times m}$，使得对于块 $J \in \mathcal{J}$中的所有 j，采用对角缩放 $D_j = \|TA_{\cdot J}\|_F^{-1}$后，以至少 $1-2\exp\left(-\frac{c}{2}\frac{\epsilon^2}{C_\psi^4}\kappa^{-1}(AS)\min_{J\in\mathcal{J}}\frac{\|A_{\cdot J}\|_F^2}{\|A_{\cdot J}\|^2}\right)$ 的概率，矩阵 AXW满足阶数为 t的零空间性质

$$\|z_T\|_1 < \|z_{\bar{T}}\|_1 \qquad \textit{for all } z \in \ker(AXW) \textit{ and } T \subset [p],\ |T| \le t.$$

$\bar{}$及其补集 T 的 T。

证明。 令 $\epsilon = \frac{1}{3}$，改变 $t \to 2t$并相应调整常数，在给定条件和概率下，矩阵 TAX满足 $(2t,\ \frac{1}{3})$-RIP。因此，根据定理 6。9 的 [21], 证明， TAX 满足 $\bar{}$

$$\|z_T\|_1 < \frac{1}{2}\|z\|_1 \qquad \text{for all } z \in \ker(TAX) \text{ and } T \subset [p],\ |T| \le t.$$

这直接推出了阶为 t的零空间性质

$$\|z_T\|_1 < \|z_{\bar{T}}\|_1 \qquad \text{for all } z \in \ker(TAX) \text{ and } T \subset [p],\ |T| \le t.$$

由于 T 可逆，$\ker(TAX) = \ker(AX)$，因此 AX 也满足零空间性质。

□

注 A.15. 对于推论 *A.13* 和 *A.14*，我们尤其关注这样的应用： $x = S\mathbf{1}$ 是 *12* 中 $Ax = b$ 的全局 ℓ_0-极小化解。此时，根据引理 *A.3*， AS 自动满足满列秩条件。

A.6 模型树：命题4.2

命题 A.16 (命题 4.2 重述)。 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，并将 $x \in \mathbb{R}^n$拆分为 $q = 2^L$、$L \geq 1$ 个分量 S，如(13)所示。若

1. AS 具有满列秩。
2. 在每个树节点上，我们都有 SCALE 的实现。
3. SOLVEL 在叶节点上满足假设（*A2*）。
4. $$t \gtrsim \log p^2 + \log^3 p, \qquad 1 \lesssim t \lesssim \sqrt{p} \tag{21}$$
5. $$\min_{J\in\mathcal{J}} \frac{\|A_{\cdot J}\|_F^2}{\|A_{\cdot J}\|^2} \gtrsim t\kappa(AS)L + t\kappa(AS)\log\frac{cp}{t} \tag{22}$$

对于某个通用常数 c，其概率至少为

$$1 - 2\exp\left(-c\frac{1}{\kappa(AS)}\min_{J\in\mathcal{J}}\frac{\|A_{\cdot J}\|_F^2}{\|A_{\cdot J}\|^2}\right)$$

存在一个深度为 L 的可学习问题类别二叉树 $\mathcal{C}_i$, $i \in \mathcal{I}$，由矩阵 X_i 和稀疏度 t 给出，使得

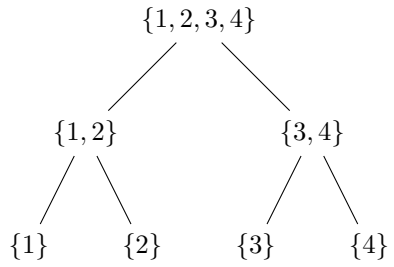
1. 根类别 i 包含 $x \in \mathcal{C}_i$。
2. $t/\bar{t} = 2$。
3. 每个类别的矩阵 X_i 包含 p 列，由一部分 X 和其余的随机元素组成（不同类别之间存在依赖关系）。

证明。 我们根据 (M1) - (M8) 构造矩阵 X，并使用推论 A.14 中的额外矩阵W由此构造一棵树。根据假设， x 的支撑集被划分为若干分块 $\{J_1, \ldots, J_q\} = \mathcal{J}$，我们据此定义 $[p]$ 和 Z 的相应划分 $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_q\}$，如下所示

$$Z_{kl} := \begin{cases} 1 & k = k_l \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

对于某些选择 $k_l \in K_l$。指标集 $\mathcal{J}$ 和 $\mathcal{K}$ 按其指标自然组合，得到这些配对 $\mathcal{J}\mathcal{K}$。按照这些选择，矩阵 X 由 (M1) - (M8) 给出。

X 仅在块 $[J, K] \in \mathcal{J}\mathcal{K}$ 上非零，因此我们可以构建一棵树，并用适当索引集 $\mathcal{I}$ 中的 i 为其节点编索引。每个节点 i 都关联一个子集 $K_i \subset [q]$，该子集是两个子节点 $K_i = \bigcup_{j\in\text{子节点 }(i)} K_j$ 的并集，首先从叶节点 $K_i \in \mathcal{K}$ 开始，例如。



现在，我们从叶节点开始，为每个节点定义矩阵 X_i

$$X_i := X_{\cdot K_i}$$

对于叶节点 i，然后通过连接两个子矩阵进行归纳

$$X_i := \begin{bmatrix} X_{j_1} & X_{j_2} \end{bmatrix} \bar{W}_i, \qquad \bar{W}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_{K_{j_1}, K_{j_1}} \\ I_{K_{j_2}, K_{j_2}} \end{bmatrix}$$

¯对于子节点 $(i) = \{j_1, j_2\}$。很容易将通向节点 i 的所有 W_i 个矩阵连接成一个等距映射 W_i，使得

$$X_i = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_q \end{bmatrix} W_i.$$

这意味着

$$X_{\mathrm{child}(i)} = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_q \end{bmatrix} W_{\mathrm{child}(i)}, \qquad W_{\mathrm{child}(i)} = \begin{bmatrix} W_{j_1} & W_{j_2} \end{bmatrix},$$

其中，再次有 $W_{\mathrm{child}(i)}$ 是等距映射，因为 W_{j_1} 和 W_{j_2} 的列具有不重叠支撑。根据引理 3.7，这棵树至多有 2^{L+1} 个节点，因此，如果

$$\min_{J \in \mathcal{J}} \frac{\|A_{\cdot J}\|_F^2}{\|A_{\cdot J}\|^2} \geq \frac{2tC_\psi^4}{c\epsilon^2} \kappa(AS) \log \frac{12ep}{t\epsilon} \tag{23}$$

根据推论 A.14，并对所有树节点应用并集界，以至少

$$1 - 42^L \exp\left(-\frac{c}{2} \frac{\epsilon^2}{C_\psi^4} \frac{1}{\kappa(AS)} \min_{J \in \mathcal{J}} \frac{\|A_{\cdot J}\|_F^2}{\|A_{\cdot J}\|^2} \right)$$

所有节点 $X_{\mathrm{child}(i)}$ 都满足 t-零空间性质。要使该概率接近 1，$\log 2^L$ 必须小于指数的一半左右

$$L \gtrsim \log 2^L \leq -\frac{c}{4} \frac{\epsilon^2}{C_\psi^4} \frac{1}{\kappa(AS)} \min_{J \in \mathcal{J}} \frac{\|A_{\cdot J}\|_F^2}{\|A_{\cdot J}\|^2} \quad \Leftrightarrow \quad \min_{J \in \mathcal{J}} \frac{\|A_{\cdot J}\|_F^2}{\|A_{\cdot J}\|^2} \gtrsim \frac{tC_\psi^4}{\epsilon^2} \kappa(AS) \log s.$$

将此与 NSP 条件 (23) 结合，如果

$$\min_{J \in \mathcal{J}} \frac{\|A_{\cdot J}\|_F^2}{\|A_{\cdot J}\|^2} \gtrsim \frac{tC_\psi^4}{\epsilon^2} \kappa(AS) L + \frac{tC_\psi^4}{\epsilon^2} \kappa(AS) \log \frac{12ep}{t\epsilon},$$

以至少.....的概率

$$1-2\exp\left(-\frac{c}{2}\frac{\epsilon^2}{C_\psi^4}\frac{1}{\kappa(AS)}\min_{J\in\mathcal{J}}\frac{\|A_{\cdot J}\|_F^2}{\|A_{\cdot J}\|^2}\right)$$

所有节点 $X_{\mathrm{child}(i)}$ 都满足 t-NSP。因此，在不失一般性的前提下，若选择 $\epsilon\sim 1$ 和 $C_\psi\sim 1$，即可得到命题中的结论。

接下来验证可学习树的其余性质。根据构造，我们有 $t/\bar{t}=2$和 $\gamma=2$。由于 X 中的所有随机样本都相对于勒贝格测度绝对连续，因此发生秩亏X_i 的概率为零。其余假设均已给出，但 (A1) 中的前两个不等式除外。将训练样本数 q（其名称在此处另有用途）重命名为 r，这两个不等式表明 $t\geq c\log r$ 且$r>cp^2\log^2 p$，因而推出 $t\geq\log p^2+\log^3 p$。这已足够，因为教师可以自行决定训练样本数 r 。

□

B 技术补充

引理 B.1. 设 $R\in\mathbb{R}^{n\times p}$ 为一个元素均值为零、方差为一的独立同分布随机矩阵。则对于任意 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $u\in\mathbb{R}^p$，我们有

$$\mathbb{E}\left[\|ARu\|^2\right]=\|A\|_F^2\|u\|^2.$$

证明。由于 $\mathbb{E}\left[R_{ik}R_{jl}\right]=\delta_{ij}\delta_{kl}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|ARu\|^2\right]&=\mathbb{E}\left[\langle ARu,ARu\rangle\right]\\&=\mathbb{E}\left[\sum_{ijkl}u_kR_{ik}(A^TA)_{ij}R_{jl}u_l\right]\\&=\sum_{ijkl}(A^TA)_{ij}u_ku_l\mathbb{E}\left[R_{ik}R_{jl}\right]\\&=\sum_{ik}(A^TA)_{ii}u_ku_k\\&=\|A\|_F^2\|u\|^2.\end{aligned}$$

□

引理 B.2。设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 为一个矩阵，$b\in\mathbb{R}^m$ 为一个向量，$x\in\mathbb{R}^n$ 为一个独立同分布随机向量，满足 $\mathbb{E}\left[x_j\right]=0$、$\mathbb{E}\left[x_j^2\right]=1$。则

$$\mathbb{E}\left[\|Ax+b\|^2\right]=\|A\|_F^2+\|b\|^2.$$

证明。 由于 b 不是随机的，我们有

$$\mathbb{E}\left[\|Ax+b\|^2\right]=\mathbb{E}\left[\|Ax\|^2\right]+\|b\|^2=\|A\|_F^2+\|b\|^2,$$

其中在最后一个等式中，我们使用了引理 B.1，其中 $\mathbb{R}^{n\times 1}$ 为矩阵， $R = x$和 $u = [1] \in \mathbb{R}^1$。

□

以下结果是 [48, 定理 6.3.2] 的一个略微变体。

引理 B.3。 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为一个矩阵， $b \in \mathbb{R}^m$ 为一个向量， $x \in \mathbb{R}^n$ 为一个独立同分布随机向量，且满足 $\mathbb{E}[x_j] = 0$、 $\mathbb{E}\left[x_j^2\right] = 1$ 和 $\|x\|_{\psi_2} \le C_\psi$。则

$$\Pr\left[\left|\|Ax+b\|^2 - \|A\|_F^2 - \|b\|^2\right| \ge \epsilon\left(\|A\|_F^2 + \|b\|^2\right)\right] \le 8\exp\left[-c\min(\epsilon^2,\epsilon)\frac{\|A\|_F^2 + \|b\|^2}{C_\psi^4\|A\|^2}\right].$$

证明。 我们分解为

$$\begin{aligned}\|Ax+b\|^2 - \|A\|_F^2 - \|b\|^2 &= \|Ax\|^2 + 2\langle Ax, b\rangle + \|b\|^2 - \|A\|_F^2 - \|b\|^2 \\ &= \left(\|Ax\|^2 - \|A\|_F^2\right) + 2\langle Ax, b\rangle\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\Pr\left[\pm\left(\|Ax+b\|^2 - \|A\|_F^2 - \|b\|^2\right) \ge \epsilon\left(\|A\|_F^2 + \|b\|^2\right)\right] \\ &\quad\le \Pr\left[\pm\left(\|Ax\|^2 - \|A\|_F^2\right) \pm 2\langle Ax, b\rangle \ge \epsilon\left(\|A\|_F^2 + \|b\|^2\right)\right] \\ &\quad\le \Pr\left[\pm\left(\|Ax\|^2 - \|A\|_F^2\right) \ge \epsilon\|A\|_F^2\right] + \Pr\left[\pm 2\langle Ax, b\rangle \ge \epsilon\|b\|^2\right].\end{aligned}$$

还需要估计右端项中的两个概率。由于$\mathbb{E}\left[x_j^2\right] = 1$，我们有 $C_\psi \gtrsim 1$，因此根据[48],中定理 6。3。2 的证明可得

$$\Pr\left[\pm\left(\|Ax\|^2 - \|A\|_F^2\right) \ge \epsilon\|A\|_F^2\right] \le 2\exp\left[-c\min(\epsilon^2,\epsilon)\frac{\|A\|_F^2}{C_\psi^4\|A\|^2}\right]$$

根据霍夫丁不等式，我们有

$$\Pr\left[\pm 2\langle Ax, b\rangle \ge \epsilon\|b\|^2\right] \le 2\exp\left[-c\epsilon^2\frac{\|b\|^4}{C_\psi^2\|A^Tb\|^2}\right] \le 2\exp\left[-c\epsilon^2\frac{\|b\|^2}{C_\psi^4\|A^T\|^2}\right].$$

□

以下结果是对 [48, 定理 6.3.2]的略微变体。

引理 B.4。 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为矩阵， $b \in \mathbb{R}^m$ 为向量， $x \in \mathbb{R}^n$ 为一个独立同分布随机向量，且满足 $\mathbb{E}[x_j] = 0$、 $\mathbb{E}\left[x_j^2\right] = 1$ 和 $\|x\|_{\psi_2} \le C_\psi$。则

$$\left\|\|Ax+b\| - \left(\|A\|_F^2 + \|b\|^2\right)^{1/2}\right\|_{\psi_2} \le CC_\psi^2\|A\|$$

对于某个常数 $C \ge 0$。

证明。 我们采用一个标准论证，例如 [48] 中定理 6.3.2 的证明。通过初等计算可知，对于 $\delta^2 = \min(\epsilon^2, \epsilon)$ 以及任意 $a, b \in \mathbb{R}$，我们有

$$|a - b| \geq \delta b, \quad \Rightarrow \quad |a^2 - b^2| \geq \epsilon b^2.$$

结合 $a = \|Ax + b\|$ 、 $b = \left(\|A\|_F^2 + \|b\|^2\right)^{1/2}$ 和引理 B.3，可得

$$\Pr\left[\left|\|Ax + b\| - \left(\|A\|_F^2 - \|b\|^2\right)^{1/2}\right| \geq \delta\left(\|A\|_F^2 + \|b\|^2\right)^{1/2}\right] \leq 8\exp\left[-c\delta^2 \frac{\|A\|_F^2 + \|b\|^2}{C_\psi^4 \|A\|^2}\right].$$

这表明存在次高斯集中，因此该引理的 ψ_2-范数为此。

□