arXiv:2302.02549v1 [math.NT] 6 Feb 2023

哥德巴赫计数函数及其相关狄利克雷级数的函数域类比

江上茂樹 和 KOHJI MATSUMOTO

Abstract. 我们考察与哥德巴赫计数函数相关的狄利克雷级数的函数域类比，并证明它是否能亚纯延拓到整个复平面。当它不能亚纯延拓时，我们进一步证明其自然边界的存在。

1. Introduction

设 $\mathbb{N}$为正整数集， $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$为有理整数集， $\mathbb{Q}$ 为有理数集， $\mathbb{R}$ 为实数集， $\mathbb{C}$为复数集。

在研究哥德巴赫问题时， [6] 哈代和利特尔伍德考察了函数

$$G_2(n) = \sum_{\substack{k,m\in\mathbb{N}\\ k+m=n}} \Lambda(k)\Lambda(m) \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{1.1}$$

其中 $\Lambda(\cdot)$ 表示冯·曼戈尔特函数。之后，藤井 [4] 深入研究了平均值 $\sum_{n\le X} G_2(n)$。

受藤井的研究启发，作者 [3]考察了狄利克雷级数

$$\Phi_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_2(n)}{n^s}, \tag{1.2}$$

该级数在区域 $\Re s > 2$ 内绝对收敛。在 [3] 中证明了，若黎曼ζ函数 $\zeta(s)$ 满足黎曼猜想（RH），则 $\Phi_2(s)$ 可亚纯延拓至 $\Re s > 1$。随后，作者提出了以下

猜想 1.1。直线 $\Re s = 1$ 是 $\Phi_2(s)$的自然边界。

2020 年数学主题分类。主要分类：11M41；次要分类：11M06，11M26。关键词和短语：哥德巴赫计数函数；函数域；冯·曼戈尔特函数；亚纯延拓；自然边界。本研究得到日本学术振兴会科学研究补助金资助，项目编号 22K03267（K. Matsumoto）。

设 $\mathcal{I}$ 为 $\zeta(s)$的所有非平凡零点的虚部所组成的集合。一个著名猜想预言， $\mathcal{I}$ 的正元素在 $\mathbb{Q}$上是线性无关的。以下陈述是该猜想的一个特例:

(A) 若 $\gamma_j \in \mathcal{I}(1 \leq j \leq 4)$ 且 $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_3 + \gamma_4 (\neq 0)$，则 (γ_3, γ_4) 等于 (γ_1, γ_2) 或 (γ_2, γ_1)。

在 [3], 中，作者提出了猜想（A）的以下定量版本:

(B) 存在一个常数 α，满足 $0 < \alpha < \pi/2$，使得若 $\gamma_j \in \mathcal{I}(1 \leq j \leq 4)$、$\gamma_1 + \gamma_2 \neq 0$，且 (γ_3, γ_4) 既不等于 (γ_1, Γ_2)，也不等于 (γ_2, γ_1)，则

$$|(\gamma_1 + \gamma_2) - (\gamma_3 + \gamma_4)| \geq \exp(-\alpha(|\gamma_1| + |\gamma_2| + |\gamma_2| + |\gamma_4|)) \tag{1.3}$$

成立。

在 [3] 中，作者证明了若假设黎曼猜想和猜想（B），则可推出猜想 1.1。Bhowmik 和 Schlage-Puchta [2]证明了推出猜想 1.1 实际上并不需要猜想（B）；只需假设黎曼猜想和猜想（A）。

本文旨在考察上述结果的函数域类比。情形变得简单得多，因此这可以算是一种“玩具模型”。然而，这仍然很有意义，因为在函数域情形下，我们可以无条件地证明自然边界的存在性或不存在性。

2. STATEMENT OF RESULTS

设 $\mathbb{F}_i$ $(i = 1,2)$ 为有限域，其基数为 $q_i = p_i^{r_i}$，且素数为 p_1、p_2。设 K_i 为 $\mathbb{F}_i$ 上的一元函数域。K_i 的ζ函数定义为

$$\zeta_{K_i}(s) = \sum_{A_i} (NA_i)^{-s} = \prod_{P_i} (1 - (NP_i)^{-s})^{-1}, \tag{2.1}$$

其中，s 为复变量，A_i 遍历 K_i 的所有有效除子，P_i 遍历 K_i 的所有素数，且 $NA_i = q_i^{\deg A_i}$。上述级数表达式可以改写为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_i(n) q_i^{-ns}$，其中 $b_i(n)$ 表示 K_i 中次数为 n 的有效除子数。因此，(2.1) 在区域 $\Re s > 1$ 内绝对收敛，因为

$$b_i(n) = O(q_i^n) \tag{2.2}$$

成立（见 [7,第 52] 页）。

众所周知，上述ζ函数可写为$\zeta_{K_i}(s) = Z_{K_i}(q_i^{-s})$，其中（令 $u_i = u_i(s) = q_i^{-s}$）

$$Z_{K_i}(u_i) = \frac{L_{K_i}(u_i)}{(1 - u_i)(1 - q_i u_i)}, \quad L_{K_i}(u_i) = \prod_{j=1}^{2g_i} (1 - \pi_{ji} u_i), \tag{2.3}$$

其中 g_i 是 K_i 和 $\pi_{ji} \in \mathbb{C}$的亏格， $|\pi_{ji}| = q_i^{1/2}$ （例如参见[7,定理 5.9 和 5.10]）。

由 (2.1) 可容易推出

$$\frac{\zeta'_{K_i}}{\zeta_{K_i}}(s) = -\sum_{P_i}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\log(NP_i)}{(NP_i)^{hs}} = -\sum_{A_i}\frac{\Lambda_{K_i}(A_i)}{(NA_i)^s}, \tag{2.4}$$

其中 $\Lambda_{K_i}(A_i)$ 是下列函数所定义的冯·曼戈尔特函数的函数域类比

$$\Lambda_{K_i}(A_i) = \begin{cases} \log(NP_i) & \text{if } A_i = hP_i \text{ with some } P_i, h \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.5}$$

利用 (2.5)，我们现在将 (1.1) 的类比定义为

$$G_2^{FF}(n) = \sum_{\substack{A_1,A_2 \\ NA_1+NA_2=n}} \Lambda_{K_1}(A_1)\Lambda_{K_2}(A_2). \tag{2.6}$$

这个函数可视为函数域中哥德巴赫问题类比的计数函数，即 $n \in \mathbb{N}$ 可写成 $n = NP_1 + NP_2$ 的频率，其中 P_i 是 $K_i(i = 1, 2)$ 的素数。与 (2.6) 相关联的狄利克雷级数为

$$\Phi_2^{FF}(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{G_2^{FF}(n)}{n^s}. \tag{2.7}$$

我们首先注意到以下事实

命题 2.1. 狄利克雷级数 (2.7) 在区域 $\Re s > 2$ 内绝对收敛。

本文的主要结果如下。

定理 2.2. 若 $p_1 = p_2$，则 $\Phi_2^{FF}(s)$ 可亚纯延拓至整个平面 $\mathbb{C}$。

定理 2.3. 若 $p_1 \neq p_2$，则垂直直线 $\Re s = 2$ 是 $\Phi_2^{FF}(s)$ 的自然边界。

首先，我们将在第 3 节证明命题 2.1。随后，在第 4 节进行一些准备工作后，我们将在第 5 节证明主要定理。

3. Proof of Proposition 2.1

根据定义 (2.5)，显然 $\Lambda_{K_1}(A_1)\Lambda_{K_2}(A_2) \neq 0$ 仅当 $A_1 = h_1P_1$ 且 $A_2 = h_2P_2$，其中 h_1、$h_2 \in \mathbb{N}$ 以及素数 P_1、P_2。因此

$$\Phi_2^{FF}(s) = \sum_{P_1,P_2}\sum_{h_1,h_2=1}^{\infty}\frac{\log(NP_1)\log(NP_2)}{(N(h_1P_1) + N(h_2P_2))^s} \tag{3.1}$$

$$= \sum_{P_1,P_2} \sum_{h_1,h_2=1}^{\infty} \frac{\deg P_1 \log q_1 \cdot \deg P_2 \log q_2}{(q_1^{\deg(h_1P_1)} + q_2^{\deg(h_2P_2)})^s}$$
$$\leq \sum_{k_1,k_2=1}^{\infty} \sum_{\substack{P_1,P_2,h_1,h_2 \\ \deg(h_1P_1)=k_1 \\ \deg(h_2P_2)=k_2}} \frac{k_1 \log q_1 \cdot k_2 \log q_2}{(q_1^{k_1} + q_2^{k_2})^s}.$$

满足 $\deg(h_iP_i) = k_i$ 的数对 (h_i, P_i)、$(i = 1, 2)$ 的数量由 (2.2) 得为 $O(q_i^{k_i})$。因此，(3.1) 的右端为

$$\ll_{q_1,q_2} \sum_{k_1,k_2=1}^{\infty} \frac{k_1 q_1^{k_1} \cdot k_2 q_2^{k_2}}{(q_1^{k_1} + q_2^{k_2})^{\Re s}} \leq \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{k_1}{q_1^{k_1(\Re s/2-1)}} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{k_2}{q_2^{k_2(\Re s/2-1)}}, \tag{3.2}$$

该级数在 $\Re s > 2$ 时收敛。命题 2.1 的断言由此得证。

4. An integral expression

我们先回顾 $\zeta_{K_i}(s)$ 的零点和极点分布信息。由表达式 (2.3) 可知，$\zeta_{K_i}(s)$ 的极点为 $u_i = 1$ 和 $q_iu_i = 1$，也就是说，它们可以写成

$$\rho(a_i) = \frac{2a_i\pi\sqrt{-1}}{\log q_i}, \quad \rho(b_i) = 1 + \frac{2b_i\pi\sqrt{-1}}{\log q_i} \quad (a_i, b_i \in \mathbb{Z}). \tag{4.1}$$

这些极点没有被分子抵消，因此确实是极点，而且都是单极点；对于 $a_i = 0$ 和 $b_i = 0$，这一事实见 [7, 定理 5.9]，而其他 a_i 和 b_i 的情形则可由 $\zeta_{K_i}(s)$ 关于 $\Im s$ 以 $2\pi\sqrt{-1}/\log q_i$ 为周期的周期性推出。（关于 $s = 1$ 处的留数，见 [7, 第 309 页，公式 (4)]。）

另一方面，零点由 $\pi_{ji}u_i = 1$ 给出。由于 $|\pi_{ji}| = q_i^{1/2}$，我们可以写成 $\pi_{ji} = q_i^{1/2}\exp(\sqrt{-1}\arg\ \pi_{ji})$。于是，零点 s 应满足

$$q_i^{1/2} \exp(\sqrt{-1} \arg \pi_{ji} - s \log q_i) = 1,$$

因此，零点可写为

$$\rho(c_{ji}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{\log q_i}(\arg \pi_{ji} + 2c_{ji}\pi) \quad (c_{ji} \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq 2g_i). \tag{4.2}$$

对（2.3）求导，得到

$$\frac{\zeta'_{K_i}}{\zeta_{K_i}}(s) = -u_i \log q_i \times \frac{(dL_{K_i}(u_i)/du_i)(1-u_i)(1-q_iu_i) + L_{K_i}(u_i)(1+q_i-2q_iu_i)}{L_{K_i}(u_i)(1-u_i)(1-q_iu_i)}, \tag{4.3}$$

因此，上面列出的 $\zeta_{K_i}(s)$ 的所有极点和零点都是 $\zeta'_{K_i}/\zeta_{K_i}(s)$ 的简单极点。

现在我们给出 $\Phi_2^{FF}(s)$ 的一个积分表达式。首先假设 $\Re s > 2 + 2\varepsilon$，其中 $\varepsilon > 0$ 很小。于是

(4.4)

$$\Phi_2^{FF}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{\substack{A_1, A_2 \\ NA_1 + NA_2 = n}} \Lambda_{K_1}(A_1)\Lambda_{K_2}(A_2)$$

$$= \sum_{A_1, A_2} \frac{\Lambda_{K_1}(A_1)\Lambda_{K_2}(A_2)}{(NA_1 + NA_2)^s} = \sum_{A_1, A_2} \frac{\Lambda_{K_1}(A_1)\Lambda_{K_2}(A_2)}{(NA_1)^s} \left(1 + \frac{NA_2}{NA_1}\right)^{-s}.$$

这里引用梅林–巴恩斯积分公式

$$(1+\lambda)^{-s} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{(\alpha)} \frac{\Gamma(s-z)\Gamma(z)}{\Gamma(s)} \lambda^{-z} dz, \tag{4.5}$$

其中 $s, \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, $|\arg \lambda| < \pi$, $\Re s > 0$, $0 < \alpha < \Re s$，积分路径是从 $\alpha - \sqrt{-1}\infty$ 到 $\alpha + \sqrt{-1}\infty$ 的垂直直线。将此公式用于 $\lambda = NA_2/NA_1$，可得 (4.4) 右端为

$$= \sum_{A_1, A_2} \frac{\Lambda_{K_1}(A_1)\Lambda_{K_2}(A_2)}{(NA_1)^s} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{(\alpha)} \frac{\Gamma(s-z)\Gamma(z)}{\Gamma(s)} \left(\frac{NA_2}{NA_1}\right)^{-z} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{(\alpha)} \frac{\Gamma(s-z)\Gamma(z)}{\Gamma(s)} \sum_{A_1} \frac{\Lambda_{K_1}(A_1)}{(NA_1)^{s-z}} \sum_{A_2} \frac{\Lambda_{K_2}(A_2)}{(NA_2)^z} dz.$$

若取 $\alpha = 1 + \varepsilon$，即可验证右端两个无穷级数绝对收敛。于是有

$$\Phi_2^{FF}(s) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{(\alpha)} \frac{\Gamma(s-z)\Gamma(z)}{\Gamma(s)} \frac{\zeta'_{K_1}}{\zeta_{K_1}}(s-z) \frac{\zeta'_{K_2}}{\zeta_{K_2}}(z) dz. \tag{4.6}$$

令 $N \in \mathbb{N}$，并将积分路径移至 $\Re z = -N + \varepsilon$。由于 ζ'_{K_i}/ζ_{K_i} 关于 $\Im s$ 是周期函数，根据斯特林公式，这种移动是可行的。被积函数的相关极点为

(A) $z = 0, -1, -2, \ldots, -(N-1)$，来自 $\Gamma(z)$；(B) $z = \rho(a_2)$ $\rho(b_2)$ $\rho(c_{j2})$ $(a_2, b_2, c_{j2} \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq 2g_2)$，来自 $(\zeta'_{K_2}/\zeta_{K_2})(z)$。

点 $z = 0$ 同时属于 (A) 和 (B)。因此 $z = 0$ 是二阶极点，其留数为

$$R_0(s) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \Gamma'(1) + \frac{(\zeta'_{K_1}/\zeta_{K_1})'}{\zeta'_{K_1}/\zeta_{K_1}}(s) + \frac{C_{0,K_2}}{C_{-1,K_2}},$$

其中 $C_{0,\ K_2}$、$C_{-1,\ K_2}$ 由洛朗展开确定

$$\zeta_{K_2}(s) = \frac{C_{-1,K_2}}{s} + C_{0,K_2} + \cdots$$

在 $s=0$处。(A) 和 (B) 中列出的所有其他极点都是简单极点。因此，通过移动积分路径并计算留数，我们得到

$$\Phi_2^{FF}(s)=\Sigma_1(s)+\Sigma_{1/2}(s)+\Sigma_0(s)+R_0(s)+\Sigma_N(s)+I_N(s) \tag{4.7}$$

对于 $\Re s>2+2\varepsilon$，其中

$$\Sigma_1(s)=-\sum_{b_2\in\mathbb{Z}}\frac{\Gamma(s-\rho(b_2))\Gamma(\rho(b_2))}{\Gamma(s)}\frac{\zeta'_{K_1}}{\zeta_{K_1}}(s-\rho(b_2)),$$

$$\Sigma_{1/2}(s)=-\sum_{j=1}^{2g_2}\sum_{c_{j2}\in\mathbb{Z}}\frac{\Gamma(s-\rho(c_{j2}))\Gamma(\rho(c_{j2}))}{\Gamma(s)}\frac{\zeta'_{K_1}}{\zeta_{K_1}}(s-\rho(c_{j2})),$$

$$\Sigma_0(s)=-\sum_{a_2\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{\Gamma(s-\rho(a_2))\Gamma(\rho(a_2))}{\Gamma(s)}\frac{\zeta'_{K_1}}{\zeta_{K_1}}(s-\rho(a_2)),$$

$$\Sigma_N(s)=\sum_{n=1}^{N-1}\binom{-s}{n}\frac{\zeta'_{K_1}}{\zeta_{K_1}}(s+n)\frac{\zeta'_{K_2}}{\zeta_{K_2}}(-n),$$

and

$$I_N(s)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{(-N+\varepsilon)}\frac{\Gamma(s-z)\Gamma(z)}{\Gamma(s)}\frac{\zeta'_{K_1}}{\zeta_{K_1}}(s-z)\frac{\zeta'_{K_2}}{\zeta_{K_2}}(z)dz.$$

5. Proof of theorems

现在我们来考察如何将 (4.7) 右端亚纯延拓到某个更大的区域。右端各项的（可能）极点如下（其中 $a_i, b_i, c_{ji}\in\mathbb{Z}$, $1\le j\le 2g_i$）。

- $\Sigma_1(s)$ 的极点：$s=\rho(b_2)-n$ $(n\in\mathbb{N}_0)$、$\rho(a_1)+\rho(b_2)$、$\rho(b_1)+\rho(b_2)$，以及 $\rho(c_{j1})+\rho(b_2)$。
- $\Sigma_{1/2}(s)$ 的极点：$s=\rho(c_{j2})-n$ $(n\in\mathbb{N}_0)$、$\rho(a_1)+\rho(c_{j2})$、$\rho(b_1)+\rho(c_{j2})$，以及 $\rho(c_{j1})+\rho(c_{j2})$。
- $\Sigma_0(s)$的极点：$s=\rho(a_2)-n$ $(n\in\mathbb{N}_0)$、$\rho(a_1)+\rho(a_2)$、$\rho(b_1)+\rho(a_2)$，以及 $\rho(c_{j1})+\rho(a_2)$。
- $\Sigma_N(s)$的极点：$s=\rho(a_1)-n$、$\rho(b_1)-n$、$\rho(c_{j1})-n$ $(1\le n\le N-1)$。

- $R_0(s)$ 的极点：项 $(\zeta'_{K_1}/\zeta_{K_1})'/(\zeta'_{K_1}/\zeta_{K_1})(s)$ 的极点来自 $(\zeta'_{K_1}/\zeta_{K_1})(s)$ 的零点和极点。(4.3) 的分子（对于 $i=1$）是关于 u_1 的 $2g_1+1$ 阶多项式。将此多项式的根记为 $w_k=|w_k|\exp(\sqrt{-1}\arg w_k)$ $(1\le k\le 2g_1+1)$。那么 $(\zeta'_{K_1}/\zeta_{K_1})(s)$ 的零点具有以下形式

$$\rho(d_{k1})=\frac{-1}{\log q_1}(\log|w_k|+\sqrt{-1}(\arg w_k+2d_{k1}\pi)) \tag{5.1}$$
$$(d_{k1}\in\mathbb{Z}, 1\le k\le 2g_1+1).$$

$(\zeta'_{K_1}/\zeta_{K_1})(s)$ 的极点来自 $\zeta_{K_1}(s)$ 的零点和极点，这些我们已经知道。因此， $R_0(s)$ 的极点为$s=-n(n\in\mathbb{N}_0)$ $\rho(a_1)$ $\rho(b_1)$ $\rho(c_{j1})$，以及 $\rho(d_{k1})$。

定理 2.2 的证明。现在我们考虑 $p_1=p_2$ 的情形，记作 p。上述列表表明，(4.7) 右端有无穷多个（可能的）极点，但它们是离散分布的。事实上，在水平方向上，它们以 1 为周期分布；而在垂直方向上，由于 $\log q_i = r_i \log p\,(i=1,2)$，极点以 $2\pi/r_1\log p$ or$2\pi/r_2\log p$ or $2\pi/[r_1,r_2]\log p$ 为周期分布（其中 $[r_1,r_2]$ 是 r_1 和 r_2 的最小公倍数）。因此，在考虑解析延拓时，这些极点并不构成障碍。

$\Sigma_1(s)$、 $\Sigma_{1/2}(s)$ 和 $\Sigma_0(s)$ 是无穷级数，但鉴于 ζ'_{K_1}/ζ_{K_1} 在垂直方向上的周期性以及斯特林公式，很容易看出，这些无穷级数绝对收敛，并且在 $\mathbb{C}$ 的任意不包含极点的紧子集上一致收敛。

最后，当 $\Re s>1-N+\varepsilon$ 时， $I_N(s)$ 的被积函数没有极点。因此，我们可以将 $I_N(s)$ 全纯延拓到区域 $\Re s>1-N+\varepsilon$，且在此区域内，$\Phi_2^{FF}(s)$ 是亚纯的。由于 N 是任意的，我们完成了定理 2.2 的证明。□

当 $p_1\neq p_2$ 时，情况截然不同。在上述极点列表中，形如 $\rho(b_1)+\rho(b_2)$ 的极点，其实部为 2。令

$$\mathcal{K}=\{\rho(b_1)+\rho(b_2)\mid b_1,b_2\in\mathbb{Z}\}.$$

我们先证明:

引理 5.1. 当 $p_1\neq p_2$ 时，集合 $\mathcal{K}$ 在垂直直线$\{s\mid \Re s=2\}$上稠密。

证明。由于

$$\begin{aligned}\rho(b_1)+\rho(b_2)&=2+2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{b_1}{r_1\log p_1}+\frac{b_2}{r_2\log p_2}\right)\\&=2+\frac{2\pi\sqrt{-1}}{r_1\log p_1}\left(b_1+b_2\cdot\frac{r_1\log p_1}{r_2\log p_2}\right),\end{aligned}$$

只需证明集合

$$\mathcal{K}'=\left\{b_1+b_2\cdot\frac{r_1\log p_1}{r_2\log p_2}\;\middle|\;b_1,b_2\in\mathbb{Z}\right\}$$

在 $\mathbb{R}$ 中稠密。由于 $p_1\neq p_2$，数 $(r_1\log p_1)/(r_2\log p_2)$ 是无理数。因此，集合 $\{b_2\cdot(r_1\log p_1)/(r_2\log p_2)\mid b_2\in\mathbb{Z}\}\pmod 1$ 在 $[0,1)$ 中稠密，故 $\mathcal{K}'$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密。□

这里引用 Gel'fond 的以下引理 [5]:

引理 5.2. 设 α_1、α_2 是非零代数数，其高度至多为 A；β_1、β_2 是代数数，其高度至多为 B（≥ 2），且 $\Lambda = \beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2$。那么，要么 $\Lambda = 0$，要么 $|\Lambda| > B^{-C}$，其中 $C > 0$ 仅取决于 α_is、β_is 和 A 的次数。

这个引理现在是一个更一般定理的特例；参见 [1,定理 3.1]。

利用引理 5.2，我们得到以下引理，它是定理 2.3 证明中的关键事实。

引理 5.3. 对任意元素 $\rho(b_1^0) + \rho(b_2^0) \in \mathcal{K}$，和式 $\Sigma_1(s)$ 在 s 从右侧趋于 $\rho(b_1^0) + \rho(b_2^0)$ 时趋于无穷大。

证明。由 (4.3)，对任意 $b_2 \in \mathbb{Z}$，有

$$\begin{aligned}
&\frac{\zeta'_{K_1}}{\zeta_{K_1}}(s - \rho(b_2)) \\
&\quad = -u_1(s-\rho(b_2)) \log q_1 \frac{dL_{K_1}(u_1(s-\rho(b_2)))/du_1(s-\rho(b_2))}{L_{K_1}(u_1(s-\rho(b_2)))} \\
&\qquad - \frac{1 + q_1 - 2q_1 u_1(s-\rho(b_2))}{(1-u_1(s-\rho(b_2)))(1-q_1 u_1(s-\rho(b_2)))} \\
&\quad = B^*(s, b_2) + B^{**}(s, b_2),
\end{aligned}$$

也就是说，其中 $u_1(s-\rho(b_2)) = q_1^{-s+\rho(b_2)}$。因此我们将

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(s) &= -\sum_{b_2 \in \mathbb{Z}} \frac{\Gamma(s-\rho(b_2))\Gamma(\rho(b_2))}{\Gamma(s)} B^*(s, b_2) \\
&\quad - \sum_{b_2 \in \mathbb{Z}} \frac{\Gamma(s-\rho(b_2))\Gamma(\rho(b_2))}{\Gamma(s)} B^{**}(s, b_2) \\
&= -\Sigma_1^*(s) - \Sigma_1^{**}(s),
\end{aligned} \tag{5.2}$$

也就是说。令 $s = \rho(b_1^0) + \rho(b_2^0) + \eta$，其中 η 是一个较小的正数。于是$u_1(s-\rho(b_2)) = q^{-\rho(b_1^0)}$ $^{-\rho\ b_2^0\ +\rho\ b_2\ -\eta()()}$，其绝对值为 $q_1^{-1-\eta}$，因此我们看到 $L_{K_1}(u_1(s-\rho(b_2^0))) \neq 0$，从而 $B^*(s, b_2)$ 在 $\eta \to 0$ 时保持有界。因此，再次注意到斯特林公式，我们看到 $\Sigma_1^*(s)$ 在 $\eta \to 0$ 时保持有限。

考虑 $B^{**}(s, b_2)$。当 $b_2 = b_2^0$ 时，我们有 $u_1(s-\rho(b_2^0)) = q^{-\rho(b_1^0)_1}$ $^{-\eta}$，因此

$$1 - q_1 u_1(s-\rho(b_2^0)) = 1 - q_1^{-2b_1^0\pi\sqrt{-1}/\log q_1 - \eta} = 1 - q_1^{-\eta} = \eta \log q_1 + O(\eta^2).$$

这意味着 $B^{**}(s, b_2^0)$ 在 $\eta \to 0$ 时发散。

当 $b_2 \neq b_2^0$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
1 - q_1 u_1(s-\rho(b_2)) &= 1 - q_1^{-\rho(b_1^0)-\rho(b_2^0)+\rho(b_2)-\eta} \\
&= 1 - q_1^{2\pi\sqrt{-1}(b_2 - b_2^0)/\log q_2 - \eta}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$= 1 - \exp\left(2\pi\sqrt{-1}(b_2 - b_2^0)\frac{\log q_1}{\log q_2}\right) q_1^{-\eta}$$
$$= 1 - \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\left((b_2 - b_2^0)\frac{\log q_1}{\log q_2} - m\right)\right) q_1^{-\eta},$$

其中 m 是最接近 $(b_2 - b_2^0)\log q_1/\log q_2$ 的整数。令

$$X = (b_2 - b_2^0)\frac{\log q_1}{\log q_2} - m = \frac{1}{\log q_2}((b_2 - b_2^0)\log q_1 - m\log q_2).$$

由于现在 $b_2 \neq b_2^0$，我们有 $X \neq 0$。因此，将引理 5.2 应用于上述内容，并取 $\alpha_1 = q_1$、$\alpha_2 = q_2$、$\beta_1 = b_2 - b_2^0$ 和 $\beta_2 = -m$，可得

$$|X| > \frac{1}{\log q_2} B^{-C}$$

其中 $C = C(q_1, q_2) > 0$，而 B 是 $b_2 - b_2^0$ 和 m 的高度的最大值。由于 $m \leq (b_2 - b_2^0)\log q_1/\log q_2 + 1$，我们得到

$$B \leq (|b_2| + |b_2^0|)\left(1 + \frac{\log q_1}{\log q_2}\right) + 1,$$

因此

$$|X| \gg_{q_1,q_2} (|b_2| + |b_2^0|)^{-C}. \tag{5.4}$$

(5.3) 的右端为

$$= 1 - \exp(2\pi\sqrt{-1}X)q_1^{-\eta} = q_1^{-\eta}(q_1^{\eta} - \exp(2\pi\sqrt{-1}X)). \tag{5.5}$$

由于 $q_1^{\eta} \geq 1$，我们得到

$$|q_1^{\eta} - \exp(2\pi\sqrt{-1}X)| \geq |1 - \exp(2\pi\sqrt{-1}X)|,$$

因此 (5.5)（从而 (5.3)）为

$$\gg q_1^{-\eta}|1 - \exp(2\pi\sqrt{-1}X)| \gg_{q_1} |X|.$$

将此估计与 (5.4) 结合，我们得到

$$|1 - q_1 u_1(s - \rho(b_2))| \gg_{q_1,q_2} (|b_2| + |b_2^0|)^{-C}. \tag{5.6}$$

因此，$b_2 \neq b_2^0$ 到 $\Sigma_1^{**}(s)$ 各项的总贡献为

$$\ll \sum_{b_2 \neq b_2^0} \left|\frac{\Gamma(s - \rho(b_2))\Gamma(\rho(b_2))}{\Gamma(s)}\right| \cdot (|b_2| + |b_2^0|)^C,$$

根据斯特林公式，该级数绝对收敛。

结论是，在 (5.2) 的右端，$\Sigma_1^{**}(s)$ 中对应于 b_2^0 的项在 $\eta \to 0$ 时发散，而其余各和均有界，这就证明了引理的断言。□

注 5.4. 在上述证明中，一个关键不等式是 (5.4)，它可视为第 1 节提到的猜想（B）的函数域类比。

定理 2.3 的证明。现在我们完成定理 2.3 的证明。由引理 5.1 和引理 5.3 可知， $\mathcal{K}$ 在 $\{s \mid \Re s = 2\}$中稠密，且 $\mathcal{K}$ 的所有点都是 $\Sigma_1(s)$的奇点。也就是说， $\{s \mid \Re s = 2\}$是 $\Sigma_1(s)$的自然边界。另一方面，容易看出 $\Sigma_{1/2}(s)$、 $\Sigma_0(s)$、 $\Sigma_N(s)$在 $\{s \mid \Re s = 2\}$上没有极点。

因此，如果我们能够看出 $R_0(s)$ 在 $\{s \mid \Re s = 2\}$ 上也没有极点，那么 $\Sigma_1(s)$ 在 $\{s \mid \Re s = 2\}$ 上的奇点集合恰好就是 $\Phi_2^{FF}(s)$ 的奇点集合，从而结论成立。

到目前为止，我们无法排除 $R_0(s)$ 在 $\{s \mid \Re s = 2\}$ 上存在极点的可能性，但即使如此，这些极点也会离散地分布（见下文注 5.5），因此不会影响结论。□

注 5.5。项 $R_0(s)$ 具有形如 $\rho(d_{k1})$ 的极点，其实部为 $-(\log |w_k|)/(\log q_1)$（见（5.1））。

（i）根 w_k 的分布尚未得到充分研究，因此目前我们无法排除对于某些 k 而有 $|w_k| = q_1^{-2}$ 的可能性。若确实如此，则相应的 $\rho(d_{k1})$ 位于 $\{s \mid \Re s = 2\}$ 上。但这些点是离散分布的；事实上，它们以 $2\pi\sqrt{-1}/\log q_1$ 为周期周期性分布。

(ii) 若 $|w_k| < q_1^{-2}$对某个 k成立，则相应的$\rho(d_{k1})$的实部大于 2。因此， $\Phi_2^{FF}(s)$在区域 $\Re s > 2$内有极点，但这与命题 2.1 矛盾。因此，作为我们理论的一个副产品，我们发现对所有 k， $|w_k| \geq q_1^{-2}$成立。

References

[1] A. Baker，《超越数论》，Cambrisdge Univ. Press，1975。[2] G. Bhowmik 和 J.-C. Schlage-Puchta，哥德巴赫生成函数的亚纯延拓，Funct. Approx. Comment. Math. 45 (2011)，43–53。[3] S. Egami 和 K. Matsumoto，冯·曼戈尔特函数的卷积及相关狄利克雷级数，载于《数论：在数论之海上航行》，第四届中日研讨会论文集（中国威海），S. Kanemitsu 和 J.-Y. Liu（编），Ser. Number Theory Appl. 2，World Sci. Publ. Co.，2007，第 1–23 页。[4] A. Fujii，素数加法问题，Acta Arith. 58 (1991)，173–179；II，Proc. Japan Acad. 67A (1991)，248–252；III，同上，278–283。[5] A. O. Gel'fond，关于代数数对超越数的逼近，Dokl. Akad. Nauk 2 (1935)，177–182。[6] G. H. Hardy 和 J. E. Littlewood，《整数分拆》的若干问题（V）：对哥德巴赫问题研究的进一步贡献，Proc. London Math. Soc. (2)22 (1924)，46–56。[7] M. Rosen，《函数域中的数论》，施普林格，2002。

S. Egami: 1-2-704 Naito-machi, Shinjuku-ku, Tokyo 160-0014, Japan电子邮箱:
egami-sg@shibaura-it.ac.jp

K. Matsumoto: Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Chikusa-ku, Nagoya 464-8602, Japan电子邮箱:
kohjimat@math.nagoya-u.ac.jp