arXiv:2302.02600v1 [math.NA] 6 Feb 2023

多孔介质中的接触问题*

L. BANZ† 和 F. BERTRAND‡

摘要。 将 Signorini 接触条件引入孔隙弹性 Biot 问题。我们将由此得到的 Biot 接触问题表述为具有扰动鞍点结构的双场变分不等式问题，并对其进行分析。我们针对一般离散化以及 hp-有限元离散化进行先验误差分析，并给出后一种离散化的收敛性及有保证的收敛率。特别是，对于流体压力，这些收敛率相对于离散化参数始终是最优的；对于最低阶 h 版本，收敛率还可以达到线性。此外，我们给出一种基于残差的后验误差估计器。数值结果印证了我们的理论发现，并表明对于二维问题，采用自适应格式可达到最优收敛率，尤其是指数收敛率。

关键词。 多孔介质，Biot，接触问题，先验误差估计， hp-有限元法

AMS 学科分类。 65N30

1. 引言。 接触问题广泛存在于诸多领域，包括机械工程和生物力学。由于相互碰撞的结构不能彼此穿透，因此需要施加非穿透不等式约束，从而将问题描述为一个变分不等式。有关相应数值分析的概述，请参见 [13, 14, 17, 18] 及其中的参考文献。

然而，在生物力学中，结构通常由多孔材料构成。因此，生物医学工程中的典型应用包括预测（多孔）软骨与假体之间的应力，如 [15], 所示；预测多孔骨与软骨之间的应力，如 [24] 所示；以及预测软骨替代材料的变形[26]。据作者所知，对应变分不等式的数值分析仅限于椭圆双线性形式，并忽略了材料的多孔性。

关于多孔材料的描述，我们参考 Biot 的开创性著作[11]。该著作描述了流体流动引起的流体饱和弹性多孔介质变形，以及介质变形对流体流动的影响。这导出了一个双场 formulation，其中机械动量守恒和流体质量守恒分别以位移场$\mathbf{u}$ 和流体压力 p 表示。文献 [21] 证明了 H^1-协调的 Taylor–Hood 有限元组合可获得最优先验误差估计。此后，为提高对模型参数的稳健性，研究者提出了若干采用不同离散方法的三场 formulation，参见例如 [23, 22, 19, 10, 9]。下一节将介绍我们提出的新型 Biot 接触问题，并在第 3 节证明其适定性。第 4 节将引入一个抽象的 Galerkin逼近框架，并在第 hp节给出高效的有限元离散方法，该方法还包括收敛性（速率）分析。随后，我们将在第5 节通过一个计算示例展示理论结果。6。

2. Biot 接触问题。本节旨在推导描述带有流体源的多孔材料平衡位置的方程

*提交给编辑：2023年2月7日。
†萨尔茨堡大学数学系，萨尔茨堡，奥地利（lothar.banz@plus.ac.at）。
‡特温特大学电气工程、数学与计算机科学学院，恩斯赫德，荷兰（f.bertrand@utwente.nl）。

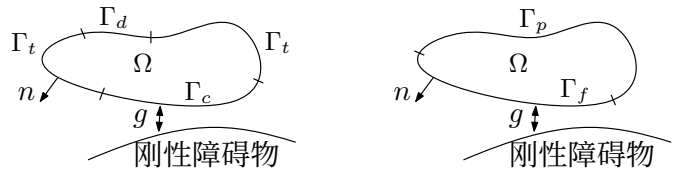


图 1：Biot 接触问题所研究的区域

f_f 该材料承受载荷力 $\boldsymbol{f}_e$，并被限制在由间隙函数 g表示的给定刚性障碍物之上。为此，考虑 Lipschitz 域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 中的 Biot 方程，其中 $d = 2, 3$，即该问题旨在求出一个向量值位移场 $\boldsymbol{u}$ 和一个标量值压力场 p，使得由下式定义的有效应力张量 $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{u})$、总应力张量 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}, p)$ 以及流体含量 $\phi(\boldsymbol{u}, p)$ 满足

$$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{u}) = 2\tau\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \iota \operatorname{div} \boldsymbol{u}\boldsymbol{I} \tag{2.1a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}, p) = \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{u}) - \alpha p\boldsymbol{I} \tag{2.1b}$$

$$\phi(\boldsymbol{u}, p) = \frac{\alpha^2}{\iota} p + \alpha \operatorname{div} \boldsymbol{u}, \tag{2.1c}$$

其中，$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = (\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^\top \boldsymbol{u})/2$ 是线性化应变张量，$\iota > 0$ 和 $\tau > 0$ 是第一和第二 Lam´e 参数（通常分别记作 λ 和 μ，但这些字母另有用途），$\alpha > 0$ 是 Biot–Willis 常数，$\boldsymbol{\kappa} > 0$ 是描述渗透率的对称一致正定矩阵，满足

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}, p) = \boldsymbol{f}_e \tag{2.2a}$$

$$\operatorname{div} (\boldsymbol{\kappa} \nabla p) - \phi(\boldsymbol{u}, p) = f_f. \tag{2.2b}$$

由于 $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}, p) = \operatorname{div} \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{u}) - \alpha \nabla p$，因此双场系统可写为

$$-\operatorname{div} (2\tau\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \iota \operatorname{div} \boldsymbol{u}\boldsymbol{I}) + \alpha \nabla p = \boldsymbol{f}_e \tag{2.3a}$$

$$\operatorname{div} (\boldsymbol{\kappa} \nabla p) - \frac{\alpha^2}{\iota} p - \alpha \operatorname{div} \boldsymbol{u} = f_f. \tag{2.3b}$$

关于这些方程的进一步缩放，请参见 [19]。为补全系统（2.3），必须指定适当的边界条件。为此，将边界两次分解为互不重叠且覆盖整个边界的子集，即 $\Gamma = \partial \Omega = \Gamma_p \cup \Gamma_f = \Gamma_c \cup \Gamma_d \cup \Gamma_t$. 假设二者 Γ_p 和Γ_d 均具有正测度，$\Gamma_d \cap \Gamma_c = \emptyset$ 为简便起见，并指定齐次混合边界条件—

$$\begin{aligned} p &= 0 \text{ on } \Gamma_p, \qquad & \boldsymbol{\kappa} \nabla p \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ on } \Gamma_f \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_d, & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_t \end{aligned}$$

其中$\mathbf{n}$ 是指向外的单位法向量。纳入非齐次诺伊曼数据很直接，只会使公式和证明变长。在剩余的边界部分 Γ_c上，该部分可能与刚性障碍物发生无摩擦接触，我们采用所谓的 Signorini 接触条件，参见例如 [18]，

$$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}} \leq g, \qquad \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}} \leq 0, \qquad \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}} [\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}} - g] = 0 \qquad \text{on } \Gamma_c \tag{2.4}$$

其中法向位移为 $\boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}$，接触压力为 $\boldsymbol{\sigma_n} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n}$，并且在 Γ_c 上满足无摩擦条件 $\boldsymbol{\sigma_t} = \mathbf{0}$，其中切向应力由 $\boldsymbol{\sigma_t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{\sigma_n} \boldsymbol{n}$给出。

这些边界条件自然导出 Hilbert 空间

$$V = H^1_{0,\Gamma_p}(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_p} = 0 \right\} \quad \text{and} \quad \mathbf{V} = \left[H^1_{0,\Gamma_d}(\Omega) \right]^d$$

以及以下变分形式

$$-\langle \operatorname{div} (2\tau \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \iota \operatorname{div} \boldsymbol{u} \boldsymbol{I}), \boldsymbol{v} \rangle + (\alpha \nabla p, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}_e, \boldsymbol{v} \rangle \tag{2.5a}$$

$$\langle \operatorname{div} (\boldsymbol{\kappa} \nabla p) - \frac{\alpha^2}{\iota} p - \alpha \operatorname{div} \boldsymbol{u}, q \rangle = \langle f_f, q \rangle \tag{2.5b}$$

其中，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是相关 Hilbert 空间之间的对偶配对，自然扩展了 L^2内积 $(\cdot, \cdot)$。下标表示积分区域（若该区域不是 Ω）。分部积分得

$$\begin{aligned}(2\tau \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \iota (\operatorname{div} \boldsymbol{u}) \boldsymbol{I}, \nabla \boldsymbol{v}) - (\alpha p, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) - \langle (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \iota \operatorname{div} \boldsymbol{u} \boldsymbol{I} - \alpha p \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v} \rangle_\Gamma = \langle \boldsymbol{f}_e, \boldsymbol{v} \rangle \\ - (\boldsymbol{\kappa} \nabla p, \nabla q) + \langle \boldsymbol{\kappa} \nabla p \cdot \boldsymbol{n}, q \rangle_\Gamma - (\frac{\alpha^2}{\iota} p + \alpha \operatorname{div} \boldsymbol{u}, q) = \langle f_f, q \rangle.\end{aligned}$$

利用边界条件，任意 $(\boldsymbol{v}, \ q) \in \mathbf{V} \times V$均可得到

$$2\tau(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})) + (\iota \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \alpha p, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}_e, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v} \rangle_{\Gamma_c} \tag{2.6a}$$

$$-\alpha (\operatorname{div} \boldsymbol{u}, q) - \frac{\alpha^2}{\iota} (p, q) - (\boldsymbol{\kappa} \nabla p, \nabla q) = \langle f_f, q \rangle. \tag{2.6b}$$

如果将测试函数 $\boldsymbol{v}$ 限制在

$$\mathbf{K} = \{ \boldsymbol{v} \in \mathbf{V} : \ \boldsymbol{v_n} \leq g \text{ on } \Gamma_c \} \tag{2.7}$$

我们可以消去右端的未知量 $\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v} \rangle_{\Gamma_c}$。显然，$\mathbf{K}$ 是 $\mathbf{V}$的一个闭凸子集。如果进一步 $g \in H^{1/2}(\Gamma_c)$ 足够大，例如 $g \geq 0$，那么 $\mathbf{K} \neq \emptyset$，以下我们假设这一点。在（2.6a）中取试验函数为 $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$，其中 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{K}$ 为任意元素，结合（2.4）和无摩擦条件可得

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \rangle_{\Gamma_c} &= \langle \boldsymbol{\sigma_n}, \boldsymbol{v_n} - \boldsymbol{u_n} \rangle_{\Gamma_c} + \langle \boldsymbol{\sigma_t}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \rangle_{\Gamma_c} \\ &= \langle \boldsymbol{\sigma_n}, \boldsymbol{v_n} - g \rangle_{\Gamma_c} \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

由此，Biot 接触问题可以写成具有扰动鞍点问题结构的变分不等式问题。即：求一对 $(\boldsymbol{u}, \ p) \in \mathbf{K} \times V$，使得

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) - b(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}, p) \geq \langle \boldsymbol{f}_e, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \rangle \quad \forall \ \boldsymbol{v} \in \mathbf{K} \tag{2.8a}$$

$$-b(\boldsymbol{u}, q) - c(p, q) = \langle f_f, q \rangle \quad \forall \ q \in V \tag{2.8b}$$

由这三个双线性形式

$$\begin{aligned}a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= 2\tau(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})) + \iota(\operatorname{div} \boldsymbol{u}, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) \\ b(\boldsymbol{u}, q) &= \alpha (\operatorname{div} \boldsymbol{u}, q) \\ c(p, q) &= \frac{\alpha^2}{\iota} (p, q) + (\boldsymbol{\kappa} \nabla p, \nabla q).\end{aligned}$$

我们强调，对于 $|\Gamma_c| = 0$ 有 $\mathbf{K} = \mathbf{V}$，且系统（2.8）简化为 Biot 问题的经典双场公式 [21]。注意，$a(\cdot, \cdot)$ 和 $c(\cdot, \cdot)$ 是对称的，甚至是内积，并诱导出依赖于参数的范数

$$\begin{aligned} |||\boldsymbol{v}|||_{\mathbf{V}}^2 &= a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 2\tau \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|_0^2 + \iota \|\operatorname{div} \boldsymbol{v}\|_0^2 \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V} \\ |||q|||_V^2 &= c(q, q) = \frac{\alpha^2}{\iota} \|q\|_0^2 + (\boldsymbol{\kappa} \nabla q, \nabla q) \qquad \forall\, q \in V. \end{aligned}$$

由于 Korn不等式，这些范数与标准的 $[H^1_{0,\Gamma_d}(\Omega)]^d$ 和$H^1_{0,\ \Gamma_p}(\Omega)$ 范数等价，但能够进行对参数稳健的估计。对于后者，我们还需要对偶范数

$$|||\cdot|||_{\mathbf{V}^*} = \sup_{\boldsymbol{v} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{\langle \cdot, \boldsymbol{v} \rangle}{|||\boldsymbol{v}|||_{\mathbf{V}}} \quad \text{and} \quad |||\cdot|||_{V^*} = \sup_{q \in V \setminus \{0\}} \frac{\langle \cdot, q \rangle}{|||q|||_V}, \tag{2.9}$$

它们也分别与 $([H^1_{0,\Gamma_d}(\Omega)]^d)^*$ 和 $(H^1_{0,\ \Gamma_p}(\Omega))^*$ 的标准（对偶）范数等价。设 $\gamma : \mathbf{V} \to H^{1/2}(\Gamma_c)$，使得 $\gamma \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}|_{\Gamma_c} \cdot \boldsymbol{n}$ 是迹的法向分量在 Γ_c 上的限制。此外，我们需要为迹空间 $H^{1/2}(\Gamma_c)$ 配备如下范数

$$|||v|||_{\mathbf{V},\Gamma_c} = \inf_{\boldsymbol{w} \in \mathbf{V},\ \gamma \boldsymbol{w} = v} |||\boldsymbol{w}|||_{\mathbf{V}} \tag{2.10}$$

它与各种标准 $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)}$ 范数等价，并记为

$$|||\mu|||_{\mathbf{V}^*,\Gamma_c} = \sup_{v \in H^{1/2}(\Gamma_c) \setminus \{0\}} \frac{\langle \mu, v \rangle_{\Gamma_c}}{|||v|||_{\mathbf{V},\Gamma_c}} \tag{2.11}$$

其对偶范数与 $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$ 的对偶范数等价。我们在以下引理中总结这些等价常数。

LEMMA 2.1. 成立

$$\begin{aligned} 2\tau c_{Korn} \|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 &\le |||\boldsymbol{v}|||_{\mathbf{V}}^2 \le (2\tau + d\iota) \|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ \operatorname{ev}_{\min}(\boldsymbol{\kappa}) c_{Poin} \|q\|_{H^1(\Omega)}^2 &\le |||q|||_V^2 \le \max\left\{ \frac{\alpha^2}{\iota}, \operatorname{ev}_{\max}(\boldsymbol{\kappa}) \right\} \|q\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ (2\tau + d\iota)^{-1} \|\boldsymbol{f}\|_{([H^1_{0,\Gamma_d}(\Omega)]^d)^*}^2 &\le |||\boldsymbol{f}|||_{\mathbf{V}^*}^2 \le (2\tau c_{Korn})^{-1} \|\boldsymbol{f}\|_{([H^1_{0,\Gamma_d}(\Omega)]^d)^*}^2 \\ \left(\max\left\{ \frac{\alpha^2}{\iota}, \operatorname{ev}_{\max}(\boldsymbol{\kappa}) \right\} \right)^{-1} \|f\|_{(H^1_{0,\Gamma_p}(\Omega))^*}^2 &\le |||f|||_{V^*}^2 \le (\operatorname{ev}_{\min}(\boldsymbol{\kappa}) c_{Poin})^{-1} \|f\|_{(H^1_{0,\Gamma_p}(\Omega))^*}^2 \\ 2\tau c_{Korn} \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)}^2 &\le |||v|||_{\mathbf{V},\Gamma_c}^2 \le (2\tau + d\iota) \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)}^2 \\ (2\tau + d\iota)^{-1} \|\mu\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)}^2 &\le |||\mu|||_{\mathbf{V}^*,\Gamma_c}^2 \le (2\tau c_{Korn})^{-1} \|\mu\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)}^2 \end{aligned}$$

其中，c_{Korn}、c_{Poin} 分别是*Korn*不等式和*Poincar´e*不等式中的椭圆性常数，$\operatorname{ev}_{\min}(\boldsymbol{\kappa})$、$\operatorname{ev}_{\max}(\boldsymbol{\kappa})$ 分别是 $\boldsymbol{\kappa}$的最小特征值和最大特征值，标准迹范数定义为

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)} = \inf_{\boldsymbol{w} \in \mathbf{V},\ \gamma \boldsymbol{w} = v} \|\boldsymbol{w}\|_{H^1(\Omega)}.$$

3. 适定性。 在本文余下部分，令 $\boldsymbol{f}_e \in \mathbf{V}^*$ 以及 $f_f \in V^*$。由于 $a(\cdot、\cdot)$和 $c(\cdot、\cdot)$分别是诱导范数 $|||\cdot|||_{\mathbf{V}}$ 和 $|||\cdot|||_V$的内积，因此它们的椭圆性常数和连续性常数均为1。此外，柯西-施瓦茨不等式意味着 $b(\cdot、\cdot)$关于这些范数具有连续性，即

$$b(\boldsymbol{v},q) \le \left(\iota \|\operatorname{div}\boldsymbol{v}\|_0^2\right)^{1/2} \left(\frac{\alpha^2}{\iota}\|q\|_0^2\right)^{1/2} \le |||\boldsymbol{v}|||_{\mathbf{V}}\, |||q|||_V\,. \tag{3.1}$$

对于分析而言，消去压力场很有帮助，但对于数值计算则不然 p 从2.8式中。为此，令 $A:\ \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$，$B:\ \mathbf{V} \to V^*$ 以及 $C:\ V \to V^*$ 为与三个双线性形式相关联的算子，即

$$\begin{aligned}
\langle A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle &= a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \quad \forall\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}\\
\langle B\boldsymbol{v},q\rangle &= b(\boldsymbol{v},q) \quad \forall\ \boldsymbol{v} \in \mathbf{V},\ \forall\ q \in V\\
\langle Cp,q\rangle &= c(p,q) \quad \forall\ p,q \in V.
\end{aligned}$$

记 $B^\top:\ V \to \mathbf{V}^*$ 为 B的伴随算子。请注意，这些算子继承了各自双线性形式的所有性质。借助 C，我们可以将（2.8b）求解为

$$p = -C^{-1}\left(B\boldsymbol{u} + f_f\right) \tag{3.2}$$

从而将（2.8）化为如下变分不等式：求 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{K}$ 使得

$$\langle D\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\rangle \ge \langle \boldsymbol{l},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\rangle \quad \forall\ \boldsymbol{v} \in \mathbf{K} \tag{3.3}$$

其中 $D = A + B^\top C^{-1} B:\ \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$，且 $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{f}_e - B^\top C^{-1} f_f \in \mathbf{V}^*$。由于 A 和 C是对称、连续且椭圆的，而 B 是连续的，因此我们发现，新算子 D 也是对称、连续且 $\mathbf{V}$-椭圆的。

LEMMA 3.1. *算子 C^{-1} 是连续的，连续性常数为 1。算子 D 是对称、连续且具有椭圆性的，其连续性常数为 2，椭圆性常数为 1。*

证明。 令 $f \in V^*$ 为任意元素。则

$$\left|\left|\left|C^{-1}f\right|\right|\right|_V^2 = \langle C(C^{-1}f), C^{-1}f\rangle = \langle f, C^{-1}f\rangle \le |||f|||_{V^*}\left|\left|\left|C^{-1}f\right|\right|\right|_V,$$

这表明 C^{-1} 的连续性常数为 1。

令 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ 为任意元素。则

$$\begin{aligned}
\langle D\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle &= \langle A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle + \langle B^\top C^{-1}B\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle\\
&= \langle A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle + \langle C^{-1}B\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{v}\rangle\\
&\le |||\boldsymbol{u}|||_{\mathbf{V}}\, |||\boldsymbol{v}|||_{\mathbf{V}} + |||B\boldsymbol{u}|||_{V^*}\, |||B\boldsymbol{v}|||_{V^*}\\
&\le 2\, |||\boldsymbol{u}|||_{\mathbf{V}}\, |||\boldsymbol{v}|||_{\mathbf{V}}\,.
\end{aligned}$$

因此，D 的连续性常数为 2。椭圆性由下式可得

$$\langle D\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle = \langle A\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle + \langle C^{-1}B\boldsymbol{v}, B\boldsymbol{v}\rangle = |||\boldsymbol{v}|||_{\mathbf{V}}^2 + \left|\left|\left|C^{-1}B\boldsymbol{v}\right|\right|\right|_V^2 \ge |||\boldsymbol{v}|||_{\mathbf{V}}^2$$

对所有 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$。 D 的对称性直接由 A 和 C 的对称性得出。 □

前述引理保证，约化问题（3.3）属于第一类椭圆变分不等式的范畴，而原问题（2.8）则不属于。

注记 3.2. 将 (2.8b) 从 (2.8a) 中相减，可得到等价的变分不等式：求 $(\boldsymbol{u}, p) \in \mathbf{K} \times V$ 使得

$$\tilde{a}((\boldsymbol{u}, p), (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}, q - p)) \geq \langle \boldsymbol{f}_e, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \rangle - \langle f_f, q - p \rangle \quad \forall\, (\boldsymbol{v}, q) \in \mathbf{K} \times V \tag{3.4}$$

with

$$\tilde{a}((\boldsymbol{u}, p), (\boldsymbol{v}, q)) = a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{v}, p) + b(\boldsymbol{u}, q) + c(p, q).$$

事实上， $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ 是连续且具有椭圆性的，因此可以将 Biot 接触问题作为第一类椭圆变分不等式来分析。由于

$$\begin{aligned} \tilde{a}((\boldsymbol{v}, q), (\boldsymbol{v}, q)) &= a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + c(q, q) = |||\boldsymbol{v}|||_{\mathbf{V}}^2 + |||q|||_V^2, \\ \tilde{a}((\boldsymbol{u}, -C^{-1}B\boldsymbol{u}), (\boldsymbol{v}, q)) &= \langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle B\boldsymbol{v}, C^{-1}B\boldsymbol{u} \rangle = \langle D\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \leq 2\, |||\boldsymbol{u}|||_{\mathbf{V}}\, |||\boldsymbol{v}|||_{\mathbf{V}} \end{aligned}$$

椭圆性常数和连续性常数并不优于 D 的相应常数。因此，我们不一定能在后续估计中得到更好的常数，但证明会更简短、更简单。将已知的椭圆变分不等式结果直接或简单地应用于 (3.4)，会导致 $\boldsymbol{u}$和 p 中的保证收敛率降低；而我们的方法仅使 $\boldsymbol{u}$ 中的收敛率降低，并在 p中达到最优收敛率，见定理 5.5。此外，由于 $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ 不对称，问题 (3.4) 并不能（直接）等价于一个极小化问题，这与 (3.3) 不同。若要通过（Tresca）摩擦推广 Biot 接触问题，则问题 (3.4) 和 (3.3) 都将成为第二类变分不等式，但只有对于 (3.3)，才能立即通过等价的极小化问题保证解的存在。因此，我们采用 (3.3)，以获得更有保障的收敛率，并为日后将摩擦纳入 Biot 接触问题的推广奠定基础。

THEOREM 3.3. 存在且仅存在一个解 $(\boldsymbol{u}, p)$ 满足 (2.8)。此外，该解关于数据 $(\boldsymbol{f}_e, f_f, g)$*Lipschitz* 连续地依赖，即

$$\left(|||\boldsymbol{u} - \widetilde{\boldsymbol{u}}|||_{\mathbf{V}}^2 + |||p - \widetilde{p}|||_V^2 \right)^{1/2} \leq \left| \left| \left| \boldsymbol{f}_e - \widetilde{\boldsymbol{f}_e} \right| \right| \right|_{\mathbf{V}^*} + \left| \left| \left| f_f - \widetilde{f_f} \right| \right| \right|_{V^*} + 3\, |||g - \widetilde{g}|||_{\mathbf{V},\Gamma_c}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$对于 $(\boldsymbol{u}, p)$、$(\widetilde{\boldsymbol{u}}, \widetilde{p})$，分别为数据 $(\boldsymbol{f}_e, f_f, g)$、$(\boldsymbol{f}_e, f_f, \widetilde{g})$对应的解。

证明。 由于 D 是连续的，且 $\mathbf{V}$-椭圆（见引理 3.1）， $\boldsymbol{l} \in \mathbf{V}^*$ 并且 $\mathbf{K}$ 是非空闭凸集，因此 Stampacchia 定理保证存在唯一的 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{K}$ 满足（3.3）。对于给定的 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}$ ，Lax-Milgram 引理保证（2.8b）有唯一解 p，由（3.2）给出。由于（3.2）-（3.3）与（2.8）等价，因此这一对（$\boldsymbol{u}, p$）是（2.8）的唯一解。

将两个分别对应于数据（$\boldsymbol{f}_e$， f_f， g）和（ $\widetilde{\boldsymbol{f}_e}$, $\widetilde{\ }$ f_f， $\widetilde{g}$）的（2.8b）相减，得到

$$-b(\boldsymbol{u} - \widetilde{\boldsymbol{u}}, q) - c(p - \widetilde{p}, q) = \langle f_f - \tilde{f}_f, q \rangle \quad \forall\, q \in V. \tag{3.5}$$

接下来，令$\mathbf{G} \in \mathbf{V}$ 为 g 的一个提升，即 $\gamma\mathbf{(G)} = g$，其存在性由$\widetilde{\ }$迹定理保证。同理，$\mathbf{G} \in \mathbf{V}$ 是 $\widetilde{g}$ 的一个提升。此外，令$\mathbf{K}_0 = \{\boldsymbol{v} \in$

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\mathbf{V}}$： $\boldsymbol{v_n} \le 0$在 $\Gamma_c\}$，即 $\boldsymbol{u} = \mathbf{G} + \boldsymbol{u}_0 \in \mathbf{G} + \mathbf{K}_0$以及 $\widetilde{\boldsymbol{u}} = \mathbf{G} + \widetilde{\boldsymbol{u}}_0 \in \mathbf{G} + \mathbf{K}_0$。由此，两个式子（2.8a）变为

$$a(\boldsymbol{u}_0 + \mathbf{G}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_0) - b(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_0, p) \ge \langle \boldsymbol{f}_e, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_0 \rangle \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \mathbf{K}_0$$
$$a(\widetilde{\boldsymbol{u}}_0 + \widetilde{\mathbf{G}}, \widetilde{\boldsymbol{v}} - \widetilde{\boldsymbol{u}}_0) - b(\widetilde{\boldsymbol{v}} - \widetilde{\boldsymbol{u}}_0, p) \ge \langle \widetilde{\boldsymbol{f}_e}, \widetilde{\boldsymbol{v}} - \widetilde{\boldsymbol{u}}_0 \rangle \quad \forall\, \widetilde{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{K}_0.$$

选取 $\boldsymbol{v} = \widetilde{\boldsymbol{u}}_0$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{u}_0$，然后将所得不等式相加，得到 s

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{\boldsymbol{f}_e} - \boldsymbol{f}_e, \widetilde{\boldsymbol{u}}_0 - \boldsymbol{u}_0 \rangle + a(\mathbf{G} - \widetilde{\mathbf{G}}, \widetilde{\boldsymbol{u}}_0 - \boldsymbol{u}_0) &\ge a(\boldsymbol{u}_0 - \widetilde{\boldsymbol{u}}_0, \boldsymbol{u}_0 - \widetilde{\boldsymbol{u}}_0) + b(\widetilde{\boldsymbol{u}}_0 - \boldsymbol{u}_0, p - \widetilde{p}) \\
&= a(\boldsymbol{u}_0 - \widetilde{\boldsymbol{u}}_0, \boldsymbol{u}_0 - \widetilde{\boldsymbol{u}}_0) + c(p - \widetilde{p}, p - \widetilde{p}) \\
&\quad - b(\widetilde{\mathbf{G}} - \mathbf{G}, p - \widetilde{p}) + \langle f_f - \widetilde{f_f}, p - \widetilde{p} \rangle \\
&= |||\boldsymbol{u}_0 - \widetilde{\boldsymbol{u}}_0|||_{\mathbf{V}}^2 + |||p - \widetilde{p}|||_V^2 \\
&\quad - b(\widetilde{\mathbf{G}} - \mathbf{G}, p - \widetilde{p}) + \langle f_f - \widetilde{f_f}, p - \widetilde{p} \rangle
\end{aligned}$$

其中第二行使用了（3.5）。对偶论证、 $a(\cdot,\cdot)$ 的连续性以及 $b(\cdot,\cdot)$ 现在可推出

$$\begin{aligned}
|||\boldsymbol{u}_0 - \widetilde{\boldsymbol{u}}_0|||_{\mathbf{V}}^2 + |||p - \widetilde{p}|||_V^2 \le &\left(\left|\left| \boldsymbol{f}_e - \widetilde{\boldsymbol{f}_e} \right|\right|_{\mathbf{V}^*} + \left|\left| \mathbf{G} - \widetilde{\mathbf{G}} \right|\right|_{\mathbf{V}} \right) |||\boldsymbol{u}_0 - \widetilde{\boldsymbol{u}}_0|||_{\mathbf{V}} \\
&+ \left(\left|\left| \mathbf{G} - \widetilde{\mathbf{G}} \right|\right|_{\mathbf{V}} + \left|\left| f_f - \widetilde{f_f} \right|\right|_{V^*} \right) |||p - \widetilde{p}|||_V .
\end{aligned}$$

选取提升 $\mathbf{G}$ 和 $\widetilde{\mathbf{G}}$，使 $\left|\left| \mathbf{G} - \widetilde{\mathbf{G}} \right|\right|_{\mathbf{V}}$ 最小，利用迹范数的定义 $|||\cdot|||_{\mathbf{V},\Gamma_c}$ 以及简单的代数运算，可得

$$\left(|||\boldsymbol{u}_0 - \widetilde{\boldsymbol{u}}_0|||_{\mathbf{V}}^2 + |||p - \widetilde{p}|||_V^2 \right)^{1/2} \le \left|\left| \boldsymbol{f}_e - \widetilde{\boldsymbol{f}_e} \right|\right|_{\mathbf{V}^*} + \left|\left| f_f - \widetilde{f_f} \right|\right|_{V^*} + 2\,|||g - \widetilde{g}|||_{\mathbf{V},\Gamma_c} .$$

最后，利用三角不等式即可得证。 □

Corollary 3.4. 解 $(\boldsymbol{u}, p)$ 满足 (2.8) 的先验估计

$$\left(|||\boldsymbol{u}|||_{\mathbf{V}}^2 + |||p|||_V^2 \right)^{1/2} \le |||\boldsymbol{f}_e|||_{\mathbf{V}^*} + |||f_f|||_{V^*} + 3\,|||g|||_{\mathbf{V},\Gamma_c} .$$

若 $\mathbf{0} \in \mathbf{K}$，则有

$$\left(|||\boldsymbol{u}|||_{\mathbf{V}}^2 + |||p|||_V^2 \right)^{1/2} \le |||\boldsymbol{f}_e|||_{\mathbf{V}^*} + |||f_f|||_{V^*} .$$

证明。第一个断言直接由解关于数据的 Lipschitz 连续依赖性得出，见定理 3.3，因为 $(\boldsymbol{u},\ p) = (\mathbf{0},\ 0)$ 是数据为 (2.8) 的解，其中数据为 $(\boldsymbol{f}_e,\ f_f,\ g) = (\mathbf{0},\ 0,\ 0)$。

若 $\mathbf{0} \in \mathbf{K}$，则在 ($\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ 和 $q = p$ 中取值2.8，得到

$$\langle \boldsymbol{f}_e, \boldsymbol{u} \rangle \ge a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - b(\boldsymbol{u}, p) = a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + c(p, p) + \langle f_f, p \rangle = |||\boldsymbol{u}|||_{\mathbf{V}}^2 + |||p|||_V^2 + \langle f_f, p \rangle.$$

对偶论证得出第二个断言。 □

对于先验误差分析，将接触压力$\boldsymbol{\sigma_n}$ 与某个变分不等式的残差形式上联系起来会很有帮助。事实上， D的定义、（2.6a）以及无摩擦条件表明:

$$\langle D\boldsymbol{u} - \boldsymbol{l}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{u}, p), \boldsymbol{v_n} \rangle_{\Gamma_c} \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}. \tag{3.6}$$

此外，

$$-\boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{u},p)\in\Lambda=\left\{\mu\in\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c):\langle\mu,v\rangle\geq 0\ \forall\ v\in H_+^{1/2}(\Gamma_c)\right\}$$

其中

$$H_+^{1/2}(\Gamma_c)=\left\{v\in H^{1/2}(\Gamma_c):v\geq 0\right\}.$$

4. 一般伽辽金近似。设$\mathbf{V}_N\subset\mathbf{V}$ 和 $V_M\subset V$是两个有限维子集。此外，设$\mathbf{K}_N\subset\mathbf{V}_N$ 是一个非空、闭且凸的集合，但不一定是$\mathbf{K}$的子集。$\mathbf{K}_N$ 的非协调性源于对不可穿透约束 $\gamma(\boldsymbol{v})\leq g$可能进行的离散化。

离散问题是求一对 $(\boldsymbol{u}_N,\ p_M)\in\mathbf{K}_N\times V_M$，使得

$$a(\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}_N)-b(\boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}_N,p_M)\geq\langle\boldsymbol{f}_e,\boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}_N\rangle\quad\forall\ \boldsymbol{v}_N\in\mathbf{K}_N \tag{4.1a}$$

$$-b(\boldsymbol{u}_N,q_M)-c(p_M,q_M)=\langle f_f,q_M\rangle\qquad\forall\ q_M\in V_M. \tag{4.1b}$$

与连续情形一样，我们可以将（4.1）化简为仅关于 $\boldsymbol{u}_N$的变分不等式，但所需步骤稍微复杂一些。Lax-Milgram 引理表明，存在一个线性映射 $R_M:\ V^*\to CV_M$ 使得

$$\langle R_Mf,q_M\rangle=\langle f,q_M\rangle\quad\forall\ q_M\in V_M,\ \forall\ f\in V^*. \tag{4.2}$$

事实上，R_M 将右端数据投影到这样一个集合上，使得（4.1b）的伽辽金解p_M 成为 $p_M=-C_M^{-1}(B\boldsymbol{u}_N+f_f)$，其中 $C_M^{-1}=C^{-1}R_M:\ V^*\to V_M$是 C^{-1}的一个近似。将 p_M 代入（4.1a）可得化简后的变分不等式：求 $\boldsymbol{u}_N\in\mathbf{K}_N$，使得

$$\langle D_M\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}_N\rangle\geq\langle\boldsymbol{l}_M,\boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}_N\rangle\quad\forall\ \boldsymbol{v}_N\in\mathbf{K}_N \tag{4.3}$$

与 $D_M=A+B^\top C_M^{-1}B:\ \mathbf{V}\to\mathbf{V}^*$ 以及 $\boldsymbol{l}_M=\boldsymbol{f}_e-B^\top C_M^{-1}f_f\in\mathbf{V}^*$。与（3.3）相比，不仅集合 $\mathbf{K}$ 被离散化，算子 D 和右端项 $\boldsymbol{l}$ 本身也被离散化。

LEMMA 4.1. 离散算子 C_M^{-1} 是 M-一致连续的，连续性常数为 *1*。离散算子 D_M 是对称的、 M-一致连续的，并且是 M-一致椭圆的，其连续性常数为 *2*，椭圆性常数为 *1*。

证明。设 $f\in V^*$ 为任意元素。则

$$\left|\left|\left|C_M^{-1}f\right|\right|\right|_V^2=\langle C(C_M^{-1}f),C_M^{-1}f\rangle=\langle R_Mf,C_M^{-1}f\rangle=\langle f,C_M^{-1}f\rangle\leq|||f|||_{V^*}\left|\left|\left|C_M^{-1}f\right|\right|\right|_V$$

当 $C_M^{-1}f\in V_M$时。因此， C_M^{-1} 的连续性常数为 1。

设 $\boldsymbol{u}$、 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{V}$ 为任意元素。则有

$$\begin{aligned}\langle D_M\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle&=\langle A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle+\langle B^\top C_M^{-1}B\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle\\&=\langle A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle+\langle C_M^{-1}B\boldsymbol{u},B\boldsymbol{v}\rangle\\&\leq|||\boldsymbol{u}|||_{\mathbf{V}}\,|||\boldsymbol{v}|||_{\mathbf{V}}+|||B\boldsymbol{u}|||_{V^*}\,|||B\boldsymbol{v}|||_{V^*}\\&\leq 2\,|||\boldsymbol{u}|||_{\mathbf{V}}\,|||\boldsymbol{v}|||_{\mathbf{V}}\end{aligned}$$

这意味着 D_M 的连续性常数为二。

设 $f \in V^*$ 仍为任意值。则

$$\langle C_M^{-1} f, f\rangle = \langle C_M^{-1} f, R_M f\rangle = \langle C^{-1} R_M f, R_M f\rangle = \left|\left|\left| C^{-1} R_M f \right|\right|\right|_V^2 \geq 0$$

作为 $C_M^{-1} f \in V_M$。由此，我们得到

$$\langle D_M \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle C_M^{-1} B\boldsymbol{v}, B\boldsymbol{v}\rangle \geq \langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = |||\boldsymbol{v}|||_{\mathbf{V}}^2$$

对于所有 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$。关于 D_M 的对称性，我们注意到 A 和 C^{-1} 关于对称，并且 $C_M^{-1} = C^{-1} R_M$ 映射到 V_M。因此，根据 R_M 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}
\langle D_M \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle &= \langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle C_M^{-1} B\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{v}\rangle \\
&= \langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle C_M^{-1} B\boldsymbol{u}, R_M B\boldsymbol{v}\rangle \\
&= \langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle R_M B\boldsymbol{u}, C^{-1} R_M B\boldsymbol{v}\rangle \\
&= \langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle R_M B\boldsymbol{u}, C_M^{-1} B\boldsymbol{v}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}\rangle + \langle B\boldsymbol{u}, C_M^{-1} B\boldsymbol{v}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}, D_M \boldsymbol{v}\rangle
\end{aligned}$$

对于所有 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$。 □

THEOREM 4.2. 存在唯一的解 $(\boldsymbol{u}_N, p_M)$ 满足 (4.1)。此外，该解满足稳定性估计

$$\left(|||\boldsymbol{u}_N|||_{\mathbf{V}}^2 + |||p_M|||_{\mathbf{V}}^2\right)^{1/2} \leq 2\,|||\boldsymbol{f}_e|||_{\mathbf{V}^*} + |||f_f|||_{V^*} + 3 \inf_{\boldsymbol{v}_N \in \mathbf{K}_N} |||\boldsymbol{v}_N|||_{\mathbf{V}}$$

并且如果 $\mathbf{0} \in \mathbf{K}_N$，那么甚至有

$$\left(|||\boldsymbol{u}_N|||_{\mathbf{V}}^2 + |||p_M|||_{\mathbf{V}}^2\right)^{1/2} \leq |||\boldsymbol{f}_e|||_{\mathbf{V}^*} + |||f_f|||_{V^*}\,.$$

证明。由引理 4.1 可知，存在性与唯一性的证明以及第二个稳定性估计可类似于定理 3.3 和推论 3.4。对于第一个稳定性估计，利用（4.1）和对偶论证可得

$$\begin{aligned}
|||\boldsymbol{u}_N|||_{\mathbf{V}}^2 + |||p_M|||_{\mathbf{V}}^2 &= a(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{u}_N) + c(p_M, p_M) \\
&= a(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{u}_N) - b(\boldsymbol{u}_N, p_M) - \langle f_f, p_M\rangle \\
&\leq \langle \boldsymbol{f}_e, \boldsymbol{u}_N - \boldsymbol{v}_N\rangle + a(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}_N) - b(\boldsymbol{v}_N, p_M) - \langle f_f, p_M\rangle \\
&\leq |||\boldsymbol{u}_N|||_{\mathbf{V}} \left(|||\boldsymbol{f}_e|||_{\mathbf{V}^*} + |||\boldsymbol{v}_N|||_{\mathbf{V}}\right) + |||\boldsymbol{f}_e|||_{\mathbf{V}^*}\,|||\boldsymbol{v}_N|||_{\mathbf{V}} \\
&\quad + |||p_M|||_{\mathbf{V}} \left(|||f_f|||_{\mathbf{V}^*} + |||\boldsymbol{v}_N|||_{\mathbf{V}}\right).
\end{aligned}$$

杨氏不等式和平方根的次可加性现在给出

$$\begin{aligned}
\left(|||\boldsymbol{u}_N|||_{\mathbf{V}}^2 + |||p_M|||_{\mathbf{V}}^2\right)^{1/2} &\leq \Big[\left(|||\boldsymbol{f}_e|||_{\mathbf{V}^*} + |||\boldsymbol{v}_N|||_{\mathbf{V}}\right)^2 + |||\boldsymbol{f}_e|||_{\mathbf{V}^*}^2 + |||\boldsymbol{v}_N|||_{\mathbf{V}}^2 \\
&\qquad + \left(|||f_f|||_{\mathbf{V}^*} + |||\boldsymbol{v}_N|||_{\mathbf{V}}\right)^2\Big]^{1/2} \\
&\leq 2\,|||\boldsymbol{f}_e|||_{\mathbf{V}^*} + |||f_f|||_{\mathbf{V}^*} + 3\,|||\boldsymbol{v}_N|||_{\mathbf{V}}
\end{aligned}$$

对任意 $\boldsymbol{v}_N \in \mathbf{K}_N$。 □

我们指出，关于间隙函数的稳定性估计明确取决于 $\mathbf{K}$ 中约束的离散方式（针对 $\mathbf{K}_N$）。由于此处未予说明，我们得到 $3\inf_{\boldsymbol{v}_N\in\mathbf{K}_N}|||\boldsymbol{v}_N|||_{\mathbf{V}}$，并且与推论 的先验估计相比，还多出一个 3.4。

在 [2] 最优控制问题中，已证明结合第一 Strang 引理和 Falk 定理可以得到先验误差估计。这个思路也适用于此处的约化问题（3.3）和（4.3）。

LEMMA 4.3. 有

$$\begin{aligned}|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N|||_{\mathbf{V}}^2 \leq 18\,|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_N|||_{\mathbf{V}}^2 + 4\langle D\boldsymbol{u}-\boldsymbol{l}, \boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_N\rangle \\ + 4\,|||(D-D_M)\boldsymbol{v}_N-(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}_M)|||_{\mathbf{V}^*}^2\end{aligned}$$

对所有 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{K}$ 和所有 $\boldsymbol{v}_N\in\mathbf{K}_N$ 均成立。

证明。由引理4.1、引理3.1、两个变分不等式（3.3）和（4.3），利用对偶论证和 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}|||\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N|||_{\mathbf{V}}^2 &\leq \langle D_M(\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N), \boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N\rangle \\ &\leq \langle \boldsymbol{l}_M - D_M\boldsymbol{v}_N, \boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N\rangle + \langle D\boldsymbol{u}-\boldsymbol{l}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\rangle \\ &= \langle D\boldsymbol{u}-\boldsymbol{l}, \boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_N\rangle + \langle D(\boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}_N\rangle \\ &\quad + \langle (D-D_M)\boldsymbol{v}_N-(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}_M), \boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N\rangle \\ &\leq \langle D\boldsymbol{u}-\boldsymbol{l}, \boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_N\rangle + 4\,|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_N|||_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2}\,|||\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N|||_{\mathbf{V}}^2 \\ &\quad + |||(D-D_M)\boldsymbol{v}_N-(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}_M)|||_{\mathbf{V}^*}^2 .\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}|||\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N|||_{\mathbf{V}}^2 \leq 2\langle D\boldsymbol{u}-\boldsymbol{l}, \boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_N\rangle + 8\,|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_N|||_{\mathbf{V}}^2 \\ + 2\,|||(D-D_M)\boldsymbol{v}_N-(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}_M)|||_{\mathbf{V}^*}^2 .\end{aligned}$$

现在，由三角不等式，即 $|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N|||^2{}_{\mathbf{V}} \leq 2\,|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_N|||^2{}_{\mathbf{V}} + 2\,|||\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N|||^2{}_{\mathbf{V}}$，可得该结论。 □

为了得到完整的先验误差估计，我们需要进一步估计左侧和右侧的离散误差，即 $|||(D-D_M)\boldsymbol{v}_N-(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}_M)|||_{\mathbf{V}^*}$，并将误差估计扩展到还能界定 p中的误差。

THEOREM 4.4. 有

$$\begin{aligned}|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N|||_{\mathbf{V}}^2 &\leq 42\,|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_N|||_{\mathbf{V}}^2 + 12\,|||p-q_M|||_V^2 \\ &\quad + 4\langle \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{u},p), (\boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_N)\cdot\boldsymbol{n}\rangle_{\Gamma_c} \\ |||p-p_M|||_V^2 &\leq 126\,|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_N|||_{\mathbf{V}}^2 + 39\,|||p-q_M|||_V^2 \\ &\quad + 12\langle \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{u},p), (\boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_N)\cdot\boldsymbol{n}\rangle_{\Gamma_c}\end{aligned}$$

对所有 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{K}$、所有 $\boldsymbol{v}_N\in\mathbf{K}_N$ 以及所有 $q_M\in V_M$，均成立。

证明。 利用（3.6），可得

$$\langle D\boldsymbol{u}-\boldsymbol{l}, \boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_N\rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{u},p), (\boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_N)\cdot\boldsymbol{n}\rangle_{\Gamma_c}.$$

设 $G_M = C_M^{-1}C$ 为伽辽金投影算子。由（3.2）可得

$$\begin{aligned} -(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}_M) &= B^\top C^{-1} f_f - B^\top C_M^{-1} f_f \\ &= B^\top \left(-p - C^{-1}B\boldsymbol{u}\right) - B^\top C_M^{-1}\left(-Cp - B\boldsymbol{u}\right) \\ &= B^\top \left(G_M - I\right) p + B^\top \left(C_M^{-1} - C^{-1}\right) B\boldsymbol{u}. \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} (D-D_M)\boldsymbol{v}_N - (\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}_M) &= B^\top \left(C^{-1} - C_M^{-1}\right) B\boldsymbol{v}_N - (\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}_M) \\ &= B^\top \left(C^{-1} - C_M^{-1}\right) B\left(\boldsymbol{v}_N - \boldsymbol{u}\right) + B^\top \left(G_M - I\right) p. \end{aligned}$$

的连续性 B， $B^\top$， C^{-1} (引理 3.1) 以及 C_M^{-1} (引理 4.1)，再结合三角不等式和杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned} & 4\left|\!\left|\!\left|(D-D_M)\boldsymbol{v}_N - (\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}_M)\right|\!\right|\!\right|_{\mathbf{V}^*}^2 \\ & \quad \le 4\left|\!\left|\!\left|\left(C^{-1} - C_M^{-1}\right) B\left(\boldsymbol{v}_N - \boldsymbol{u}\right) + \left(G_M - I\right) p\right|\!\right|\!\right|_V^2 \\ & \quad \le 12\left(\left|\!\left|\!\left|C^{-1}B\left(\boldsymbol{v}_N - \boldsymbol{u}\right)\right|\!\right|\!\right|_V^2 + \left|\!\left|\!\left|C_M^{-1}B\left(\boldsymbol{v}_N - \boldsymbol{u}\right)\right|\!\right|\!\right|_V^2 + \left|\!\left|\!\left|\left(I - G_M\right) p\right|\!\right|\!\right|_V^2\right) \\ & \quad \le 24\left|\!\left|\!\left|B\left(\boldsymbol{v}_N - \boldsymbol{u}\right)\right|\!\right|\!\right|_{V^*}^2 + 12\left|\!\left|\!\left|\left(I - G_M\right) p\right|\!\right|\!\right|_V^2 \\ & \quad \le 24\left|\!\left|\!\left|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_N\right|\!\right|\!\right|_{\mathbf{V}}^2 + 12\left|\!\left|\!\left|\left(I - G_M\right) p\right|\!\right|\!\right|_V^2. \end{aligned}$$

由于 $(I - G_M)\ p$ 是 p 到 V_M的伽辽金投影误差，C´ea 引理结合诱导范数 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_V$ 的 $c(\cdot,\ \cdot)$ 可得

$$12\left|\!\left|\!\left|\left(I - G_M\right) p\right|\!\right|\!\right|_V^2 = 12\inf_{q_M \in V_M}\left|\!\left|\!\left|p - q_M\right|\!\right|\!\right|_V^2.$$

现在，第一个断言由引理4.3即可得出。

对于第二个断言，注意从 (2.8b) 中减去 (4.1b) 可得

$$c(p - p_M, q_M) = -b(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_M, q_M) \quad \forall\ q_M \in V_M.$$

因此，

$$\begin{aligned} \left|\!\left|\!\left|p - p_M\right|\!\right|\!\right|_V^2 &= c(p - p_M, p - p_M) \\ &= c(p - p_M, p - q_M) - b(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_M, q_M - p_M) \\ &\le \left|\!\left|\!\left|p - p_M\right|\!\right|\!\right|_V \left|\!\left|\!\left|p - q_M\right|\!\right|\!\right|_V + \left|\!\left|\!\left|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_M\right|\!\right|\!\right|_{\mathbf{V}} \left|\!\left|\!\left|q_M - p_M\right|\!\right|\!\right|_V \\ &\le \left|\!\left|\!\left|p - p_M\right|\!\right|\!\right|_V \left|\!\left|\!\left|p - q_M\right|\!\right|\!\right|_V + \left|\!\left|\!\left|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_M\right|\!\right|\!\right|_{\mathbf{V}} \left(\left|\!\left|\!\left|p - q_M\right|\!\right|\!\right|_V + \left|\!\left|\!\left|p - p_M\right|\!\right|\!\right|_V\right) \\ &\le \frac{1}{2}\left|\!\left|\!\left|p - p_M\right|\!\right|\!\right|_V^2 + \frac{3}{2}\left|\!\left|\!\left|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_M\right|\!\right|\!\right|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{3}{2}\left|\!\left|\!\left|p - q_M\right|\!\right|\!\right|_V^2. \end{aligned}$$

将第一个断言代入上述估计可得

$$\begin{aligned} \left|\!\left|\!\left|p - p_M\right|\!\right|\!\right|_V^2 &\le 3\left|\!\left|\!\left|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_M\right|\!\right|\!\right|_{\mathbf{V}}^2 + 3\left|\!\left|\!\left|p - q_M\right|\!\right|\!\right|_V^2 \\ &\le 126\left|\!\left|\!\left|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_N\right|\!\right|\!\right|_{\mathbf{V}}^2 + 39\left|\!\left|\!\left|p - q_M\right|\!\right|\!\right|_V^2 \\ &\quad + 12\langle\boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{u}, p), (\boldsymbol{v}_N - \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_N)\cdot\boldsymbol{n}\rangle_{\Gamma_c}. \end{aligned}$$

□

与接触问题的通常情形一样，先验误差估计由若干最佳逼近项的平方项，以及若干线性项组成；后者衡量离散化$_N$ $\not\subset\mathbf{K}_N$ $\not\subset\mathbf{K}$的不协调性等。我们强调，上述误差估计在 p中是准最优的。

5. hp**有限元离散**。设 $\mathcal{T}_h$ 和 $\mathcal{T}_k$ 是 Ω 上两个相互独立、局部准一致的有限元网格，由四边形或六面体组成。这些网格分别生成单元边/面集合 $\mathcal{E}_h$ 和 $\mathcal{E}_k$，并假设它们分别与边界分解为 Γ_d、Γ_t、Γ_c，或分解为 Γ_p、Γ_f相一致。单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 的直径为 h_T，其多项式次数为$r_T \geq 1$。对于 $T \in \mathcal{T}_k$，k_T 和 $s_T \geq 1$ 分别表示另一网格 $\mathcal{T}_k$的局部单元尺寸和多项式次数。假设相邻单元的多项式次数按通常意义可比。我们用 h、k、r 和 s 表示 $(h_T)_{T\in\mathcal{T}_h}$、$(k_T)_{T\in\mathcal{T}_k}$、$(r_T)_{T\in\mathcal{T}_h}$和$(s_T)_{T\in\mathcal{T}_k}$的向量，以及全局网格尺寸和全局多项式次数

$$h = \max_{T\in\mathcal{T}_h} h_T, \quad k = \max_{T\in\mathcal{T}_k} k_T, \quad r = \min_{T\in\mathcal{T}_h} r_T, \quad s = \min_{T\in\mathcal{T}_k} s_T$$

类似。其含义总是可以从上下文中明确得知。对于每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$ and$T \in \mathcal{T}_k$，我们都关联一个从参考单元 $\hat{T} = [-1,1]^d$映射到物理单元 T的（双/三）线性双射映射 $\mathcal{F}_T$。标准的 hp有限元空间为

$$V_{ks} = \left\{ v_{ks} \in V : v_{ks}|_T \circ \mathcal{F}_T \in \mathbb{P}_{s_T}(\hat{T}) \ \forall\, T \in \mathcal{T}_k \right\}$$
$$\mathbf{V}_{hr} = \left\{ \boldsymbol{v}_{hr} \in \mathbf{V} : \boldsymbol{v}_{hr}|_T \circ \mathcal{F}_T \in [\mathbb{P}_{r_T}(\hat{T})]^d \ \forall\, T \in \mathcal{T}_h \right\}$$

其中 $\mathbb{P}_p(\hat{T})$ =张成$\{x_1^i x_2^j : 0 \leq i,j \leq p\}$或 $\mathbb{P}_p(\hat{T})$ =张成$\{x_1^i x_2^j x_3^k : 0 \leq i,j,k \leq p\}$，具体取决于维数 $d \in \{2,3\}$。这些网格中的每条边/面 e 都是直线或四边形，因此存在一个仿射/双线性映射 $\mathcal{F}_e : [-1,1]^{d-1} \to e$，它正是 $\mathcal{F}_T$ 在相应局部边/面上的限制。位于接触边界 Γ_c 上的边/面集合 e 记为 $\mathcal{E}_{h,\Gamma_c}$。令 r_e, s_e分别表示边/面 $e \in \mathcal{E}_h$, $e \in \mathcal{E}_k$上的多项式次数，并由最小值规则确定。我们强调，对于 $e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_c}$，有 $r_e = r_T$。我们将$\{\hat{x}_{i,e}\}_{i=1,\dots,n_e} \subset [-1,1]^{d-1}$且 $n_e = (r_e+1)^{d-1}$记为（张量积）Gauss–洛obatto求积点。由此，

$$\mathbf{K}_{hr} = \{ \boldsymbol{v}_{hr} \in \mathbf{V}_{hr} : (\boldsymbol{v}_{hr}|_e \cdot \boldsymbol{n}) \circ \mathcal{F}_e(\hat{x}_{i,e}) \leq g(\mathcal{F}_e(\hat{x}_{i,e})) \ \forall\, 1 \leq i \leq n_e,\ e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_c} \}.$$

若 $g \in C^0(\Gamma_c)$，则 $\mathbf{K}_{hr}$ 是良定义的，且是$\mathbf{V}_{hr}$的一个闭凸子集。由于 g也足够大，例如 $g \geq 0$，根据先前的假设可知，$\mathbf{K}_{hr}$ 非空。

令 $\mathcal{I}_{ks} : V \to V_{ks}$ 为 $H^1(\Omega)$-投影。根据经典插值估计以及 Sobolev 空间的实插值，有

$$\|v - \mathcal{I}_{ks} v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_I \frac{k^{\min\{s,\beta_p-1\}}}{s^{\beta_p-1}} |v|_{H^{\beta_p}(\Omega)} \tag{5.1}$$

对任意 $\beta_p \geq 1$。我们将 $\mathcal{J}_{hr} : \mathbf{H}^{\beta_u}(\Omega) \cap \mathbf{V} \to \mathbf{V}_{hr}$ 满足 $\beta_u > (d+1)/2$的、基于张量积的 Gauss–洛obatto节点插值算子（逐分量作用）记为 [8]。根据缩放以及 [8]，有

$$\frac{r}{h}\|\boldsymbol{v} - \mathcal{J}_{hr}\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{v} - \mathcal{J}_{hr}\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C_J \frac{h^{\min\{r,\beta_u-1\}}}{r^{\beta_u-1}} |\boldsymbol{v}|_{\mathbf{H}^{\beta_u}(\Omega)}. \tag{5.2}$$

我们强调，$\mathcal{J}_{hr} : \mathbf{H}^{\beta_u}(\Omega) \cap \mathbf{K} \to \mathbf{K}_{hr}$ 由$\mathbf{K}_{hr}$的构造得到。作为第三种也是最后一种插值算子，我们需要（基于张量积的）Gauss–洛obatto

节点插值 $\mathcal{Q}_{hr}$： $H^{\beta_g}(\Gamma_c) \to \gamma(\mathbf{V}_{hr})$，参见 [8]，

$$\|v - \mathcal{Q}_{hr} v\|_{L^2(\Gamma_c)} \le C_Q \frac{h^{\min\{r+1,\beta_g\}}}{r^{\beta_g}} |v|_{H^{\beta_g}(\Gamma_c)} \quad \text{for } \beta_g > \frac{d-1}{2} \tag{5.3}$$

$$\|v - \mathcal{Q}_{hr} v\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)} \le C_Q \frac{h^{\min\{r+1/2,\beta_g-1/2\}}}{r^{\beta_g-1/2}} |v|_{H^{\beta_g}(\Gamma_c)} \quad \text{for } \beta_g > \frac{d-1}{2} + \frac{1}{4}. \tag{5.4}$$

利用有限元空间、插值算子以及第 4 节的抽象结果，我们可以分析 hp-有限元 Biot 接触问题：求解 $(u_{hr}, p_{ks}) \in \mathbf{K}_{hr} \times V_{ks}$ 使得

$$a(\boldsymbol{u}_{hr}, \boldsymbol{v}_{hr} - \boldsymbol{u}_{hr}) - b(\boldsymbol{v}_{hr} - \boldsymbol{u}_{hr}, p_{ks}) \ge \langle \boldsymbol{f}_e, \boldsymbol{v}_{hr} - \boldsymbol{u}_{hr} \rangle \quad \forall\, \boldsymbol{v}_{hr} \in \mathbf{K}_{hr} \tag{5.5a}$$

$$-b(\boldsymbol{u}_{hr}, q_{ks}) - c(p_{ks}, q_{ks}) = \langle f_f, q_{ks} \rangle \quad \forall\, q_{ks} \in V_{ks}. \tag{5.5b}$$

Corollary 5.1. 设 $0 \le g \in H^{\beta_g}(\Gamma_c)$ 满足 $\beta_g > (d-1)/2$。则方程 (5.5)恰有一个解。该解满足稳定性估计

$$\left(|||\boldsymbol{u}_{hr}|||_{\mathbf{V}}^2 + |||p_{ks}|||_{\mathbf{V}}^2 \right)^{1/2} \le |||\boldsymbol{f}_e|||_{\mathbf{V}^*} + |||f_f|||_{V^*}.$$

证明。 由 $H^{\beta_g}(\Gamma_c) \subset C^0(\Gamma_c)$ 对 $\beta_g > (d-1)/2$ 可得 $\mathbf{K}_{hr}$ 的适定性；由定理 4.2 可得离散有限元解存在且唯一，并且

$$\left(|||\boldsymbol{u}_{hr}|||_{\mathbf{V}}^2 + |||p_{ks}|||_{\mathbf{V}}^2 \right)^{1/2} \le |||\boldsymbol{f}_e|||_{\mathbf{V}^*} + |||f_f|||_{V^*}. \qquad \square$$

本节其余部分将用于推导先验误差估计。为此，我们采用以下简写记号。若存在正常数 C，使得对所有可容许的 ξ， $a(\xi) \le C b(\xi)$ 均成立，则简写为 $a(\xi) \lesssim b(\xi)$。此外，若 $a(\xi) \lesssim b(\xi)$ 和 $b(\xi) \gtrsim a(\xi)$ 均成立，则简写为 $a(\xi) \equiv b(\xi)$。

Lemma 5.2. 设 $\boldsymbol{v}_{hr} \in \mathbf{K}_{hr}$，并令 $g \in H^{\frac{d-1}{2}+\frac{1}{4}+\epsilon}(\Gamma_c)$ 对于某个 $\epsilon > 0$，则

$$\inf_{\boldsymbol{v} \in \mathbf{K}} \|\gamma(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{hr})\|_{L^2(\Gamma_c)} \lesssim \left(\frac{h}{r}\right)^{1/2} \left(\|\boldsymbol{v}_{hr}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{d-1}{2}+\frac{1}{4}+\epsilon}(\Gamma_c)} \right).$$

证明。我们沿用 [20, 16] 中提出的思路，并将其推广到三维情形。设 $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}_{hr} - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr}) \cdot \boldsymbol{n}$ 在 Γ 上，且 $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}} = \min\{\gamma(\boldsymbol{v}_{hr}) - \mathcal{Q}_{hr}(g),\, 0\} + g$ 在 Γ_c 上。由于 $\Gamma_c \cap \Gamma_d = \emptyset$，存在 $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}}$ 到整个 Γ 上的一个延拓，使得如今定义在 Γ 上的 $\boldsymbol{v}$ 可以提升到某个 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{K}$。我们强调，$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}} \le g$ 在 Γ_c 上，且 $\min\{\gamma(\boldsymbol{v}_{hr}) - \mathcal{Q}_{hr}(g),\, 0\}$ 是连续的分片多项式，因此对任意 $\epsilon > 0$，均属于 $H^{3/2-\epsilon}(\Gamma_c)$。此外，在 Γ_c 上，$\gamma(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{hr}) = \min\{0, \mathcal{Q}_{hr}(g) - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\} + g - \mathcal{Q}_{hr}(g)$，并且

$$\mathcal{Q}_{hr}\left(\min\{0, \mathcal{Q}_{hr}(g) - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\}\right) = \mathcal{Q}_{hr}\left(\min\{0, g - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\}\right) = 0$$

因为 $\boldsymbol{v}_{hr} \in \mathbf{K}_{hr}$。若 $d = 2$ 我们由（5.3）得到

$$\begin{aligned}
\|\min\{0, \mathcal{Q}_{hr}(g) - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\} - 0\|_{L^2(\Gamma_c)} &\le \|\mathcal{Q}_{hr}(g) - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\|_{L^2(\Gamma_c)}, \\
\|\min\{0, \mathcal{Q}_{hr}(g) - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\} - 0\|_{L^2(\Gamma_c)} &\le C_Q \frac{h}{r} \|\min\{0, \mathcal{Q}_{hr}(g) - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\}\|_{H^1(\Gamma_c)} \\
&\le C_Q \frac{h}{r} \|\mathcal{Q}_{hr}(g) - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\|_{H^1(\Gamma_c)}.
\end{aligned}$$

Sobolev 空间的实插值，参见例如 [12, 问题 14.1.5，第 14 节。3], 可得

$$\|\min\{0, \mathcal{Q}_{hr}(g) - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\} - 0\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq C \left(\frac{h}{r}\right)^{1/2} \|\mathcal{Q}_{hr}(g) - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)}.$$

如果 $d = 3$，我们需要 $\beta_g > 1$ 在 (5.3) 中，即

$$\|\min\{0, \mathcal{Q}_{hr}(g) - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\} - 0\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq \|\min\{0, \mathcal{Q}_{hr}(g) - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\}\|_{L^2(\Gamma_c)} \|\min\{0, \mathcal{Q}_{hr}(g) - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\} - 0\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq C_Q \left(\frac{h}{r}\right)^{1/2} \|\min\{0, \mathcal{Q}_{hr}(g) - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\}\|_{H^{1+\epsilon}(\Gamma_c)}$$

对于某个任意小的 $\epsilon > 0$。与之前一样，我们对 Sobolev 空间应用实插值，但注意到对于 Hilbert 空间，甚至有以下结论，见 [12,公式 14.2。5],

$$\left[L^2(\Gamma_c), H^{1+\epsilon}(\Gamma_c)\right]_{\frac{1}{2(1+\epsilon)},2} = H^{1/2}(\Gamma_c) \tag{5.6}$$

具有等价范数。因此，

$$\begin{aligned}\|\min\{0, \mathcal{Q}_{hr}(g) - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\} - 0\|_{L^2(\Gamma_c)} &\lesssim \left(\frac{h}{r}\right)^{1/2} \|\min\{0, \mathcal{Q}_{hr}(g) - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\}\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)} \\ &\lesssim \left(\frac{h}{r}\right)^{1/2} \|\mathcal{Q}_{hr}(g) - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)}.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\|\gamma(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{hr})\|_{L^2(\Gamma_c)} &\leq \|\min\{0, \mathcal{Q}_{hr}(g) - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\} - 0\|_{L^2(\Gamma_c)} + \|g - \mathcal{Q}_{hr}(g)\|_{L^2(\Gamma_c)} \\ &\lesssim \left(\frac{h}{r}\right)^{1/2} \|\mathcal{Q}_{hr}(g) - \gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)} + \|g - \mathcal{Q}_{hr}(g)\|_{L^2(\Gamma_c)} \\ &\lesssim \left(\frac{h}{r}\right)^{1/2} \left(\|\gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)}\right) \\ &\quad + \left(\frac{h}{r}\right)^{1/2} \|g - \mathcal{Q}_{hr}(g)\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)} + \|g - \mathcal{Q}_{hr}(g)\|_{L^2(\Gamma_c)} \\ &\lesssim \left(\frac{h}{r}\right)^{1/2} \left(\|\gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)} + \|g\|_{H^{\frac{d-1}{2}+\frac{1}{4}+\epsilon}(\Gamma_c)}\right)\end{aligned}$$

由（5.4）可知，其中 $\epsilon > 0$ 任意小。现在，利用 $\|\gamma(\boldsymbol{v}_{hr})\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)}$ 的迹估计即可得出结论。 □

由 $\mathbf{K}_{hr} \not\subset \mathbf{K}$ 引起的非协调误差，其保证收敛率可在最低阶 h-版本中得到提高。

COROLLARY 5.3. 设 $r = 1$、 $\boldsymbol{v}_{hr} \in \mathbf{K}_{hr}$ 和 $g \in H^{\beta_g}(\Gamma_c)$ 满足 $\beta_g > \frac{d-1}{2}$，则有

$$\inf_{\boldsymbol{v} \in \mathbf{K}} \|\gamma(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{hr})\|_{L^2(\Gamma_c)} \lesssim h^{\min\{2,\beta_g\}} \|g\|_{H^{\beta_g}(\Gamma_c)}.$$

证明。 证明思路与引理 5.2类似，但我们注意到，对于 $r = 1$插值函数 $\mathcal{Q}_{hr}g$ 而言，它与 $\gamma(\boldsymbol{v}_{hr})$ 一样是连续的分片线性函数。由于在$\mathbf{K}_{hr}$ 中，非穿透条件是在网格顶点处施加的，因此我们有 $\gamma(\boldsymbol{v}_{hr}) \leq \mathcal{Q}_{hr}g$在 Γ_c上处处成立。因此，对于引理 $\gamma(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{hr}) = g - \mathcal{Q}_{hr}g$中的 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{K}$，我们采用引理 5.2证明中构造的5.3插值误差估计（5.3）即可得到结论。 □

有了前述结果，我们便可轻松证明有限元方法的收敛性。

THEOREM 5.4. 若 $0 \le g \in H^{\frac{d-1}{2}+\frac{1}{4}+\epsilon}(\Gamma_c)$ 对于某个 $\epsilon > 0$ 成立，则有

$$\lim_{h/r,k/s\to 0} |||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{hr}|||_{\mathbf{V}}^2 + |||p-p_{ks}|||_V^2 = 0.$$

证明。 应用定理 4.4 的一般先验误差估计，并证明右端趋于零。

由于 $\mathcal{J}_{hr}: \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{K} \to \mathbf{K}_{hr}$，且 $\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{K}$ 在 $\mathbf{K}$ 中稠密，由经典稠密性论证可得

$$\lim_{h/r\to 0} \inf_{\boldsymbol{v}_{hr}\in\mathbf{K}_{hr}} \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_{hr}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = 0 \text{ and } \lim_{k/s\to 0} \inf_{q_{ks}\in V_{ks}} \|p-q_{ks}\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

由对偶性和迹定理可得

$$\langle \boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{u},p), \gamma(\boldsymbol{v}_{hr}-\boldsymbol{u})\rangle_{\Gamma_c} \le \|\boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{u},p)\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)} \|\boldsymbol{v}_{hr}-\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

利用范数等价性和引理 2.1，只需估计 $\langle \boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{u},p)\ \gamma(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_{hr})\rangle_{\Gamma_c}$。由于 $L^2(\Gamma_c)$ 在 $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$ 中稠密，我们知道，对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个 $\boldsymbol{\sigma}_\epsilon \in L^2(\Gamma_c)$，使得 $\|\boldsymbol{\sigma}_\epsilon - \boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{u},p)\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)} < \epsilon$。因此，结合引理 5.2（包括其证明中构造的 $\boldsymbol{v}$）、迹估计、(5.4) 和推论 5.1，可得

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{u},p), \gamma(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_{hr})\rangle_{\Gamma_c} &= \langle \boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{u},p)-\boldsymbol{\sigma}_\epsilon, \gamma(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_{hr})\rangle_{\Gamma_c} + \langle \boldsymbol{\sigma}_\epsilon, \gamma(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_{hr})\rangle_{\Gamma_c} \\
&\le \|\boldsymbol{\sigma}_\epsilon - \boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{u},p)\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)} \|\gamma(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_{hr})\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)} \\
&\quad + \|\boldsymbol{\sigma}_\epsilon\|_{L^2(\Gamma_c)} \|\gamma(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_{hr})\|_{L^2(\Gamma_c)} \\
&\lesssim \epsilon \left(\|\gamma(\boldsymbol{u}_{hr})\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)} + \|g-\mathcal{Q}_{hr}g\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_c)} \right) \\
&\quad + \|\boldsymbol{\sigma}_\epsilon\|_{L^2(\Gamma_c)} \left(\frac{h}{r}\right)^{1/2} \left(\|\boldsymbol{v}_{hr}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{d-1}{2}+\frac{1}{4}+\epsilon}(\Gamma_c)} \right) \\
&\lesssim \epsilon \left(\|\boldsymbol{u}_{hr}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{d-1}{2}+\frac{1}{4}+\epsilon}(\Gamma_c)} \right) \\
&\quad + \|\boldsymbol{\sigma}_\epsilon\|_{L^2(\Gamma_c)} \left(\frac{h}{r}\right)^{1/2} \left(\|\boldsymbol{u}_{hr}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{d-1}{2}+\frac{1}{4}+\epsilon}(\Gamma_c)} \right) \\
&\lesssim \epsilon + \|\boldsymbol{\sigma}_\epsilon\|_{L^2(\Gamma_c)} \left(\frac{h}{r}\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

选取足够小的 h/r，可得 $\langle \boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{u},\ p)\ \gamma(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_{hr})\rangle_{\Gamma_c} \lesssim \epsilon$，从而得证。

□

可以将收敛定理的正则性要求从 $g \in H^{\frac{d-1}{2}+\frac{1}{4}+\epsilon}(\Gamma_c)$ 降至 $g \in H^{\frac{d-1}{2}+\epsilon}(\Gamma_c)$，这是离散问题适定所需的最低要求；但这需要采用不同的技巧，参见 [16] 中关于二维接触问题的讨论。

THEOREM 5.5. 设 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^{\beta_u}(\Omega)$ 满足 $\beta_u > (d+1)/2$，$p \in H^{\beta_p}(\Omega)$ 满足 $\beta_p \ge 1$，$\boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{u},p)|_{\Gamma_c} \in L^2(\Gamma_c)$，且 $g \in H^{\frac{d-1}{2}+\frac{1}{4}+\epsilon}(\Gamma_c)$ 成立。则对某个 $\epsilon > 0$，有

$$|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{hr}|||_{\mathbf{V}}^2 + |||p-p_{ks}|||_V^2 \lesssim \left(\frac{h}{r}\right)^{1/2} + \frac{k^{2\min\{s,\beta_p-1\}}}{s^{2(\beta_p-1)}}.$$

证明。 我们应用定理 4.4 的一般先验误差估计，并证明右端以给定速率趋于零。

根据定理4.4、范数等价性（见引理2.1）、柯西-施瓦茨不等式 $\boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{u},p)|_{\Gamma_c} \in L^2(\Gamma_c)$以及迹估计，可得

$$\begin{aligned}
|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{hr}|||_{\mathbf{V}}^2 + |||p-p_{ks}|||_V^2 &\lesssim \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_{hr}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|p-q_{ks}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\
&\quad + \|\boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{u},p)\|_{L^2(\Gamma_c)}\|\gamma(\boldsymbol{v}_{hr}-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_{hr})\|_{L^2(\Gamma_c)} \\
&\lesssim \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_{hr}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|p-q_{ks}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\
&\quad + \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_{hr}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{1/2}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_{hr}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{1/2} \\
&\quad + \|\gamma(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_{hr})\|_{L^2(\Gamma_c)}.
\end{aligned}$$

引理5.2、推论5.1， $q_{ks}=\mathcal{I}_{ks}p$, (5.1)， $\boldsymbol{v}_{hr}=\mathcal{J}_{hr}\boldsymbol{u}$ 以及 (5.2) 推得

$$\begin{aligned}
|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{hr}|||_{\mathbf{V}}^2 + |||p-p_{ks}|||_V^2 &\lesssim \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_{hr}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|p-q_{ks}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\
&\quad + \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_{hr}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{1/2}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_{hr}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{1/2} \\
&\quad + \|\gamma(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_{hr})\|_{L^2(\Gamma_c)} \\
&\lesssim \frac{h^{2\min\{r,\beta_u-1\}}}{r^{2(\beta_u-1)}}|\boldsymbol{u}|_{\mathbf{H}^{\beta_u}(\Omega)}^2 + \frac{k^{2\min\{s,\beta_p-1\}}}{s^{2(\beta_p-1)}}|p|_{H^{\beta_p}(\Omega)}^2 \\
&\quad + \frac{h^{\min\{r+1/2,\beta_u-1/2\}}}{r^{\beta_u-1/2}}|\boldsymbol{u}|_{\mathbf{H}^{\beta_u}(\Omega)} \\
&\quad + \left(\frac{h}{r}\right)^{1/2}\left(\|\boldsymbol{u}_{hr}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{d-1}{2}+\frac{1}{4}+\epsilon}(\Gamma_c)}\right) \\
&\lesssim \left(\frac{h}{r}\right)^{1/2} + \frac{k^{2\min\{s,\beta_p-1\}}}{s^{2(\beta_p-1)}}.
\end{aligned}$$

在最后一行中，利用 $\beta_u > (d+1)/2 \geq 3/2$，我们消去了支配收敛速率。 ∎

我们强调， k 和 s 中的收敛率是最优的，而 h 和 r 中的收敛率则有所降低，这正如接触问题 [16]所预期的那样。对于最低阶h-版本，即 $r=1$，若所有条件都足够光滑，则可恢复最优的、可保证的收敛率。

COROLLARY 5.6. 令 $r=1$, $\boldsymbol{u}\in\mathbf{H}^{\beta_u}(\Omega)$ 满足 $\beta_u>(d+1)/2$, $p\in H^{\beta_p}(\Omega)$ 满足 $\beta_p\geq 1$, $\boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{u},p)|_{\Gamma_c}\in L^2(\Gamma_c)$ 且 $g\in H^{\beta_g}(\Gamma_c)$ 满足 $\beta_g>(d-1)/2$。于是有

$$|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{hr}|||_{\mathbf{V}}^2 + |||p-p_{ks}|||_V^2 \lesssim h^{\min\{2,\beta_u-1/2,\beta_g\}} + \frac{k^{2\min\{s,\beta_p-1\}}}{s^{2(\beta_p-1)}}.$$

证明。 证明方法与定理5.5 类似，但使用推论5.3代替

引理 5.2 和 $\gamma(\mathcal{J}_{hr}(\boldsymbol{u})) = \mathcal{Q}_{hr}(\gamma(\boldsymbol{u}))$，接着应用迹估计，得到

$$\begin{aligned}
|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{hr}|||_{\mathbf{V}}^2 + |||p-p_{ks}|||_V^2 &\lesssim \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_{hr}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|p-q_{ks}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\
&\quad + \|\gamma(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_{hr})\|_{L^2(\Gamma_c)} + \|\gamma(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_{hr})\|_{L^2(\Gamma_c)} \\
&\lesssim h^{2\min\{1,\beta_u-1\}}|\boldsymbol{u}|_{\mathbf{H}^{\beta_u}(\Omega)}^2 + \frac{k^{2\min\{s,\beta_p-1\}}}{s^{2(\beta_p-1)}}|p|_{H^{\beta_p}(\Omega)}^2 \\
&\quad + h^{\min\{2,\beta_u-1/2\}}|\gamma(\boldsymbol{u})|_{H^{\beta_u-1/2}(\Gamma_c)} \\
&\quad + h^{\min\{2,\beta_g\}}\|g\|_{H^{\beta_g}(\Gamma_c)} \\
&\lesssim h^{\min\{2,\beta_u-1/2,\beta_g\}} + \frac{k^{2\min\{s,\beta_p-1\}}}{s^{2(\beta_p-1)}}.
\end{aligned}$$

□

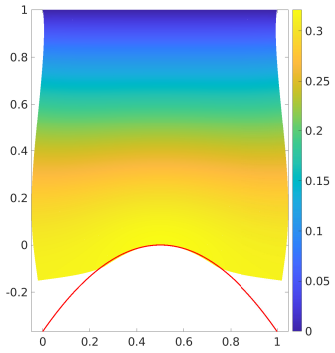
证明收敛率的关键在于存在一个插值算子 $\mathcal{J}$，它将 $\mathbf{K}$ 中足够光滑的函数映射到 $\mathbf{K}_{hr}$，并具有如下附加性质：对于一个经过充分分析的插值算子$\mathcal{Q}$，$\gamma(\mathcal{J}\boldsymbol{u}) = \mathcal{Q}(\gamma(\boldsymbol{u}))$。对于四边形和六面体，我们可以利用张量结构来定义$\mathcal{J}$和 $\mathcal{Q}$。例如，对于三角形，据我们所知，一般的 hp 结果仍未解决，因此我们选择 $\mathcal{J}$ 为 Fekete 点上的节点插值，并采用文献 [25] 中经数值验证的猜想：参考三角形边上的 Fekete 点与一维 Gauss–洛obatto 点相对应。因此，我们可以像上文那样选择 $\mathcal{Q}$。

6. 数值实验。 在数值实验中，我们选择 $\Omega = (0,1)^2$, $\Gamma_d = \Gamma_p = [0,1]\times\{1\}$, $\Gamma_c = [0,1]\times\{0\}$, $\Gamma_t = \partial\Omega \setminus (\Gamma_d \cup \Gamma_c)$ 和 $\Gamma_f = \partial\Omega \setminus \Gamma_p$。数据为 $\boldsymbol{f}_e = (0,-1)^\top$, $f_f = -1$ 和 $g = 3(1-\cos(x_1-0.5))$。材料参数为 $\iota = \tau = \alpha = 1$ 和 $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{I}$。作为 $\Gamma_d = \Gamma_p$，我们对 $\boldsymbol{u}$ 和 p 使用相同的有限元网格和多项式次数，即 $\mathbf{V}_{hr} = [V_{ks}]^2$，或简写为 $k = h$ 和 $s = r$。每条边上的悬挂节点最多为一个，且相邻单元的多项式次数之差不超过一。采用自适应时，我们使用局部误差指示子的总和

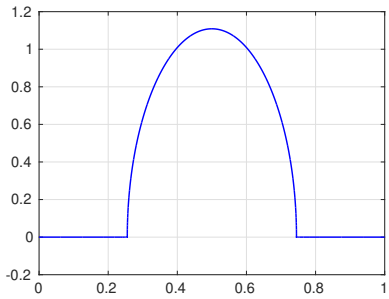
$$\begin{aligned}
\eta_{u,T}^2 &= \frac{h_T^2}{r_T^2}\|\operatorname{div}\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{u}_{hr}) - \alpha\nabla p_{hr} + \boldsymbol{f}_e\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e\in\partial T\cap\Omega}\frac{h_e}{2r_e}\|[\![\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{u}_{hr})\cdot\boldsymbol{n}]\!]\|_{L^2(e)}^2 \\
&\quad + \sum_{e\in\partial T\cap\Gamma_t}\frac{h_e}{r_e}\|\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{u}_{hr})\cdot\boldsymbol{n} - \alpha p_{hr}\boldsymbol{n}\|_{L^2(e)}^2 \\
&\quad + \sum_{e\in\partial T\cap\Gamma_c}\frac{h_e}{r_e}\|\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{u}_{hr})\cdot\boldsymbol{n} - (\alpha p_{hr} - \lambda_{hr})\boldsymbol{n}\|_{L^2(e)}^2, \\
\eta_{p,T}^2 &= \frac{h_T^2}{r_T^2}\left\|\operatorname{div}(\boldsymbol{\kappa}\nabla p_{hr}) - \frac{\alpha^2}{\iota}p_{hr} - \alpha\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{hr} - f_f\right\|_{L^2(T)}^2 \\
&\quad + \sum_{e\in\partial T\cap\Omega}\frac{h_e}{2r_e}\|[\![\boldsymbol{\kappa}\nabla p_{hr}\cdot\boldsymbol{n}]\!]\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e\in\partial T\cap\Gamma_f}\frac{h_e}{r_e}\|\boldsymbol{\kappa}\nabla p_{hr}\cdot\boldsymbol{n}\|_{L^2(e)}^2,
\end{aligned}$$

其中，$[\![\cdot]\!]$ 是通常的跳跃，而

$$\left\|\frac{h^{1/2}}{r^{-1/2}}(\lambda_{hr}-\mu)\right\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 + \left\|\frac{r^{1/2}}{h^{-1/2}}\zeta\right\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 + \frac{90}{469}\left(\langle\lambda_{hr},\zeta\rangle_{\Gamma_c} + \langle\mu, g-\boldsymbol{u}_{hr}\cdot\boldsymbol{n}\rangle_{\Gamma_c}\right).$$



(a) 变形体（颜色表示 p的值）和障碍物（红色曲线）



(b) 负接触压力：$-\boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{u},\ p)|_\Gamma$ $_c$

图 2：解的可视化

此处，通过求解重构负离散接触应力 $\lambda_{hr} \in V_{hr}|_{\Gamma_c} = \gamma(\mathbf{V}_{hr}) \subset \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$

$$\langle \lambda_{hr}, \boldsymbol{v}_{hr} \cdot n \rangle_{\Gamma_c} = -a(\boldsymbol{u}_{hr}, \boldsymbol{v}_{hr}) + b(\boldsymbol{v}_{hr}, p_{ks}) + \langle \boldsymbol{f}_e, \boldsymbol{v}_{hr} \rangle \quad \forall\ \boldsymbol{v}_{hr} \in \mathbf{V}_{hr}, \tag{6.1}$$

并且截断函数的选取依据

$$\mu = \sup\left\{0, \lambda_{hr} - \frac{45}{469}\frac{r}{h}(g - \widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{n}})\right\}, \quad \zeta = \sup\left\{\boldsymbol{u}_{hr} \cdot \boldsymbol{n} - g, -\frac{45}{469}\frac{h}{r}\lambda_{hr}\right\}.$$

将在后文分析该误差指示量的可靠性和效率。 r

贡献。

由于 Ω 各角的开角为 $\pi/2$，且左上角和右上角存在从狄利克雷边界条件到诺伊曼边界条件的转换，因此只有在数据 $(\boldsymbol{f}_e, \nabla p, \boldsymbol{\sigma_n}) \in \mathrm{L}^2(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma_c)$ 或更好的情况下，我们才能期待 $\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}^2(\Omega)$。显然，$(\boldsymbol{f}_e, \nabla p) \in \mathrm{L}^2(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega)$；从离散解的图像（网格非常精细）中，参见图2，我们可以期待任意 $\epsilon > 0$ 下的 $\boldsymbol{\sigma_n} \in H^{3/2-\epsilon}(\Gamma_c)$。基于同样的原因，在数据 $(f_f, \operatorname{div} \boldsymbol{u}) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 或更好的情况下，我们可以期待 $p \in H^2(\Omega)$，而这里显然满足这一条件。此外，狄利克雷到诺伊曼边界条件的转换似乎比接触到非接触的转换具有更强的奇异性。

由于没有已知的精确解，我们通过过度加密的 Galerkin 解来近似它，并据此计算误差。该解的构造方法是：将给定加密方案所得最细解的每个单元四等分，并将多项式次数提高一阶。图3绘出了不同加密技术下的结果：使用 $r = 1$ 的均匀 h-版本、使用 $h = 0.25$、h 的均匀 r-版本、使用$r = 2$、3 的 hr-自适应格式，以及一种 hr-自适应方案。对于自适应格式，我们采用各向同性加密和 D¨orfer 标记，整体误差参数为 $1/2$；此外，根据r 中误差估计量的衰减率，在 h 和 r 加密之间进行选择，以估计局部 Sobolev 正则性，参见例如 [3, 4, 1]。我们观察到，使用 $r = 1$ 的均匀 h-版本具有最佳的实验收敛阶（eoc），即相对于总自由度 N 的收敛阶为 0.5，正如推论 5.6 所预测的那样。与定理 5.5 的结论相反，但与接触问题中的常见情况一致，我们没有观察到高阶格式下 $(\boldsymbol{u}, p)$ 的收敛率低于最佳逼近的情况。

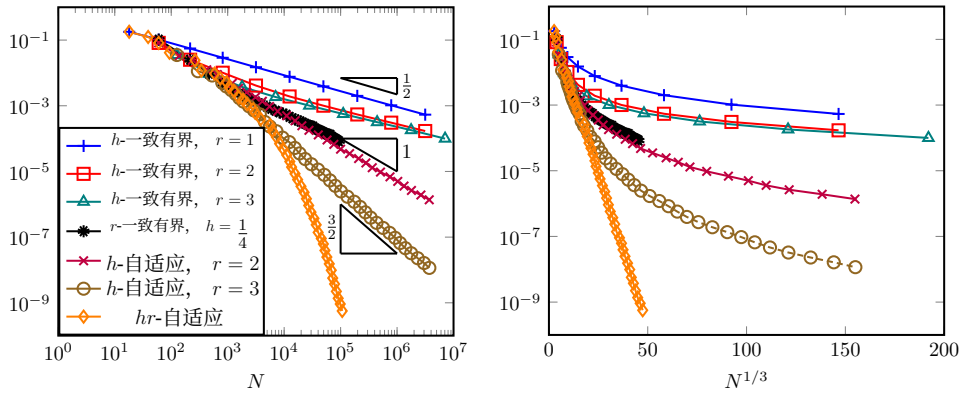


图 3：误差与自由度的关系 N

提高 r 至二或三并不会提高 eoc，只会改善误差常数，这表明 $(\boldsymbol{u},\ p) \in \mathbf{H}^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ 仅如此。均匀 r-版本的 eoc 随着 r 增加，并似乎趋近于一，这与预期 $\boldsymbol{\sigma_n} \in H^{3/2-\epsilon}(\Gamma_c)$ 相符；此外， H^2 极限奇异性位于网格的角点。采用自适应策略后，我们恢复了最优收敛阶：对于使用 h 的自适应，分别为 1 和 1.5 $r=2,\ 3$；对于hr-自适应，则呈指数收敛。后者可从图3右侧图中的橙色直线看出。

在二维情形下，所有这些奇异性都是点奇异性，因此各向同性加密可以带来指数收敛。然而，在三维情形下，与自由边界重合的奇异性通常会形成一维流形，无法通过各向同性加密得到充分分辨。因此，我们预计 hr-方法的收敛率为代数收敛率，与二维障碍问题的情形类似 [7, 6, 5]。

参考文献

[1] L. Banz, M. Hintermüller, and A. Schröder, *A posteriori error control for distributed elliptic optimal control problems with control constraints discretized by hp-finite elements*, Comput. Math. Appl., 80 (2020), 第2433–2450页。[2] L. Banz, M. Hintermüller, and A. Schröder, *hp-Finite Elements for Elliptic Optimal Control Problems with Control Constraints* 2022 。预印本， 。[3] L. Banz, B. P. Lamichhane, and E. P. Stephan, *Higher order FEM for the obstacle problem of the p-Laplacian—A variational inequality approach* 76 2018 , Comput. Math. Appl., ( ), 第1639–1660页。[4] L. Banz, B. P. Lamichhane, and E. P. Stephan, *Higher order mixed FEM for the obstacle problem of the p-Laplace equation using biorthogonal systems* , Comput. Methods Appl. Math., 19 (2019), 第169–188页。[5] L. Banz, J. Pietsche, and A. Schröder, *Hybridization and stabilization for hp-finite element methods* 136 2019 66 102 , Appl. Numer. Math., ( ), 第–页。[6] L. Banz and A. Schröder, *Biorthogonal basis functions in hp-adaptive FEM for elliptic obstacle problems* 70 2015 1721 1742 , Comput. Math. Appl., ( ), 第–页。[7] L. Banz and E. P. Stephan, *A posteriori error estimates of hp-adaptive IPDG-FEM for elliptic obstacle problems* 76 2014 76 92 , Appl. Numer. Math., ( ), 第–页。[8] C. Bernardi and Y. Maday, *Polynomial interpolation results in Sobolev spaces*, J. Comput.

Appl. Math., 43 (1992), 第53–80页。[9] F. Bertrand, M. Brodbeck, and T. Ricken, *On robust discretization methods for poroelasticproblems: Numerical examples and counter-examples*,《实例与反例》, 2 (2022), 第 100087 页。[10] F. Bertrand and G. Starke, *A posteriori error estimates by weakly symmetric stress reconstruction for the Biot problem* 91 2020 3 16 , Comput. Math. Appl., ( ), 第–页。[11] M. A. Biot, *General Theory of Three-Dimensional Consolidation*,《应用物理学杂志》, 12 (1941), 第155–164页。[12] S. C. Brenner and L. R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, 施普林格, 第3版, 2008。[13] G. Duvaut and J. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, 施普林格出版社, 1976。[14] R. Glowinski, *Numerical methods for nonlinear variational problems.*, 施普林格出版社, 1984。[15] H. Guo, S. A. Maher, and R. L. Spilker, *Biphasic finite element contact analysis of the knee joint using an augmented Lagrangian method*,《医学工程与物理》, 35 (2013), 第1313–1320页。[16] J. Gwinner, *hp-FEM convergence for unilateral contact problems with Tresca friction in plane linear elastostatics* 254 2013 175 184 , J. Comput. Appl. Math., ( ), 第 – 页。[17] I. Hlavacek, J. Haslinger, J. Nečas, and J. Lovisek, *Solution of Variational Inequalities in Mechanics* 1988 , 施普林格出版社, 。[18] N. Kikuchi and J. T. Oden, *Contact Problems in Elasticity. A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods* 1988 , 工业与应用数学学会, 。[19] J. J. Lee, K.-A. Mardal, and R. Winther, *Parameter-Robust Discretization and Preconditioning of Biot's Consolidation Model* 39 2017 1 24 , SIAM J. Sci. Comput., ( ), 第A–A页。[20] M. Maischak and E. P. Stephan, *Adaptive hp-versions of BEM for Signorini problems*, Appl. Numer. Math., 54 (2005), 第425–449页。[21] M. Murad, V. Thomée, and A. Loula, *Asymptotic Behavior of Semidiscrete Finite-Element Approximations of Biot's Consolidation Problem* 33 1996 ,《SIAM 数值分析杂志》, ( ), 第1065–1083页。[22] R. Oyarzúa and R. Ruiz-Baier, *Locking-Free Finite Element Methods for Poroelasticity*,《SIAM 数值分析杂志》, 54 (2016), 第2951–2973页。[23] P. J. Phillips and M. F. Wheeler, *A Coupling of Mixed and Discontinuous Galerkin Finite Element Methods for Poroelasticity* 12 2008 417 435 ,《计算地球科学》, ( ), 第–页。[24] N. K. Sahu and A. K. Kavitt, *A review of use FEM techniques in modeling of human knee joint* 28 2016 14 ,《仿生学、生物材料与生物医学工程杂志》, ( ), 第–25页。[25] M. A. Taylor, B. A. Wingate, and R. E. Vincent, *An algorithm for computing Fekete points in the triangle* 38 2000 1707 1720 ,《SIAM 数值分析杂志》, ( ), 第–页。[26] F. Yang, J. Zhao, W. J. Koshut, J. Watt, J. C. Riboh, K. Gall, and B. J. Wiley, *A Synthetic Hydrogel Composite with the Mechanical Behavior and Durability of Cartilage*,《先进功能材料》, 30 (2020)。