arXiv:2302.02616v1 [math.OC] 6 Feb 2023

带不等式约束的非完整系统*

Alexandre Anahory Simoes[1] 和 Leonardo Colombo[2]

[1] 科学与技术学院，IE大学，西班牙。alexandre.anahory@ie.edu[2] 自动化与机器人中心（CSIC-UPM），Ctra. M300 Campo Real，Km 0,200，阿尔甘达-德尔雷伊 - 28500 马德里，西班牙。leonardo.colombo@csic.es

摘要。本文推导了受不等式约束的非完整系统在连续时间和离散时间下的运动方程。离散时间情形通过离散化连续时间变分原理得到，该原理定义了受不等式约束的非完整系统的运动方程。文中通过一个示例说明理论结果。

关键词：非完整系统 · 不等式约束 · 变分积分器。

1 引言

某些机械系统的构型或允许的运动速度会受到限制。具有这类限制的系统通常称为受约束系统。非完整系统 [2,4,8,12] 粗略而言，是指其速度约束无法由位置约束推导出的机械系统。例如，具有滚动接触（如车轮无滑动滚动）或某些类型滑动接触的机械系统中，就会出现这类系统。

受不等式约束的机械系统被限制在空间中具有边界的区域内。与边界发生碰撞时，约束力会阻止系统越过边界进入不允许的空间区域。不等式约束例如出现在刚体碰撞问题、机械抓取模型和生物力学运动中 [1,11]。

由于适用于需要非光滑技术的工程问题，带不等式约束的系统的保结构积分已在许多论文中得到研究（见 [10]）。在 [9,10]，中，作者运用变分技术推导出带不等式约束的无约束机械系统的运动方程和积分器。在 [9]，中，作者将解空间扩展为依赖时间的非自治空间，以消除与边界碰撞过程中的非光滑性。

*作者感谢由 MCIN/AEI 资助的 Grant PID2019-106715GB-C21 提供的经费支持，项目编号为 10.13039/501100011033。

然而，在 [10], 中，作者运用非光滑分析处理碰撞，从而获得更好的保结构性质：例如，近似能量守恒。

本文研究受不等式约束的非完整系统。我们考察的典型示例是一个在圆形桌面内无滑动滚动的车轮。我们扩展了 [9] 中的技术，通过对受不等式约束的非完整系统的拉格朗日-达朗贝尔原理进行改编，推导运动方程；随后，我们对离散拉格朗日-达朗贝尔原理 [7] 进行修改，为这些系统构造变分积分器。尽管我们的积分器能够平稳处理与边界的碰撞，但它也存在 [10], 中指出的同类问题，尤其是在碰撞过程中无法守恒能量。不过，我们认为本文首次尝试对带不等式约束的非完整系统进行几何积分，并促使人们为非完整系统探索其他策略，例如 DELI 方程（见 [10]）。

本文其余部分安排如下：第 2 节介绍带不等式约束的机械系统。第 3 节回顾非完整系统，并介绍推导带不等式约束的非完整系统运动方程的变分原理。第 4 节给出上一节结果的离散对应形式。最后，第 5 节考察一个在圆形桌面上无滑动滚动的圆盘示例。

2 带不等式约束的力学系统

本文将分析在构型流形 Q 上演化、且受不等式约束的非完整系统的动力学；也就是说，这些约束由流形 Q的带边界子流形 C 确定。边界 ∂C 是 Q 的一个余维为 1 的光滑流形。局部而言，边界 ∂C 是类型为 $\partial C = \{q \in Q \mid g(q) = 0\}$ 的光滑流形，而流形 C 是 $C = \{q \in Q \mid g(q) \leqslant 0\}$，其中 $g\colon Q \to \mathbb{R}$是某个光滑函数。

在凸几何中，给定 $\mathbb{R}^n$的一个闭凸集 K， K的极锥是集合 $K^p = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, y\rangle \leqslant 0, \forall y \in K\}$（见 [5]）。点 $x \in K$处 K的法锥由 $N_K(x) = K^p \cap \{x\}^T$给出，其中 $\{x\}^T$是相对于欧几里得内积而言与 x 正交的子空间。

基于这一构造，我们将仅采用一个最简定义的法锥，以适用于我们将要讨论的不等式约束。给定前文所述的带边界子流形 C，点 $q \in \partial C$处的法锥是集合 $N_C(q) = \{\lambda dg(q) | \lambda \geqslant 0\}$。如果 C 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭凸集，且其边界是维数为 $n-1$ 的超曲面，那么这两个定义是一致的。

给定描述动力学的拉格朗日函数 $L\colon TQ \to \mathbb{R}$，其局部坐标为 $(q^i, \dot{q}^i)$，$i = 1, \ldots, n = \dim Q$，存在不等式约束时的运动方程在轨迹位于约束子流形 $C \setminus \partial C$ 的内部时由欧拉-拉格朗日方程 $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \dfrac{\partial L}{\partial q^i} = 0$ 给出。在轨迹与边界$q(t_i) \in \partial C$ 发生碰撞的碰撞时刻 $t_i \in \mathbb{R}$，系统的状态变量会发生不连续变化，通常

称为跳变。该跳变由以下方程决定：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}|_{t=t_i^+} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}|_{t=t_i^-} \in -N_C,\ \ E_L|_{t=t_i^+} = E_L|_{t=t_i^-}. \tag{1}$$

注1. 我们注意到，前一个方程中出现负号，是约束的不可穿透性所致。也就是说，机械系统不能穿过允许的变分约束的边界。我们将在下一节准确说明负号为何出现。

在全文中，L 将是一个正则机械拉格朗日量，即其形式为动能减去势能 [2]，且勒让德变换$\mathbb{F}L$：$TQ \to T^*Q$ 满足 $\mathbb{F}L(q,\dot{q}) = (q, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}})$是一个局部微分同胚。

3 带有不等式约束的非完整系统

假设系统受到速度约束。我们将限制讨论对速度呈线性的约束。考虑构形空间 Q 上的一个分布 $\mathcal{D}$，用以描述这些约束；也就是说，$\mathcal{D}$ 是 TQ ($\mathcal{D}_q \subset T_qQ$) 的一族线性子空间（对每个 $q \in Q$而言）。若曲线 $q(t) \in Q$ 满足 $\dot{q}(t) \in \mathcal{D}_{q(t)}$，对所有 t均成立，则称其满足这些约束。局部而言，约束分布可写为 $\mathcal{D} = \{\dot{q} \in TQ | \mu_i^a(q)\, \dot{q}^i = 0, \quad a = 1, \ldots, m\}$。

该系统的拉格朗日-达朗贝尔运动方程由 $\delta \int_a^b L(q,\dot{q})dt = 0$ 确定，其中我们选择曲线 $q(t)$ 的变分 $\delta q(t)$，使其对每个 $t \in [a,b]$ 都满足 $\delta q(a) = \delta(b) = 0$ 和 $\delta q(t) \in \mathcal{D}_{q(t)}$。请注意，此处曲线 $q(t)$ 本身满足约束。施加约束之前先进行变分，因此，定义这些变分的曲线族不受约束。

非完整运动方程由拉格朗日-达朗贝尔原理导出，其局部表达式为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \lambda_a \mu_i^a, \quad \mu_i^a(q)\dot{q}^i = 0 \tag{2}$$

其中 λ_a 是一个可利用约束求得的拉格朗日乘子。

如果 C 是非完整系统上的不等式约束，那么在 C 的内部，拉格朗日-达朗贝尔方程仍然成立。不过，跳跃条件现在必须作相应修改，以适应系统对速度的约束，正如我们将在下面的结果中看到的那样。

定理1. 设 $q: [0,h] \to Q$ 是非完整系统 $(L, \mathcal{D})$ 的一条非完整轨迹，该系统受不等式约束 $q(t) \in C$。假设该系统在时刻 $t_i \in [0,h]$与边界 ∂C 发生碰撞。那么，该轨迹在区间 $[0, t_i^-[$和 $]t_i^+, h]$ 内满足拉格朗日-达朗贝尔方程 (2)，并且在碰撞时刻 t_i满足以下条件：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}|_{t=t_i^+} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}|_{t=t_i^-} \in -N_C \cup \mathcal{D}^o,\ \ E_L|_{t=t_i^+} = E_L|_{t=t_i^-},\ \ \dot{q}(t_i^+) \in \mathcal{D}_{q(t_i^+)}, \tag{3}$$

其中 $\mathcal{D}^o$ 表示分布 $\mathcal{D}$的湮灭子。

证明。碰撞系统的拉格朗日-达朗贝尔原理定义在路径空间 $\Omega = \{(c, t_i) \mid c$ 上：$[0, h] \to Q$ 是一条光滑曲线，且 $t_i \in \mathbb{R}\}$。

若映射 $\mathcal{A} : \Omega \to \mathbb{R}$ 是作用量，那么拉格朗日-达朗贝尔原理指出，作用量的导数应当在所有满足 $\delta q \in \mathcal{D}$ 的变分 $(\delta q, \delta t_i)$ 上为零。由于，

$$\delta\mathcal{A} = \int_0^{t_i^-} \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right] \delta q \; dt + \int_{t_i^+}^{h} \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right] \delta q \; dt - \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q + L\delta t_i\right]_{t_i^-}^{t_i^+}$$

拉格朗日-达朗贝尔方程在区间 $[0, t_i^-[$ 和$]t_i^+, h]$ 上成立，这一事实可由变分法基本定理以及 $\delta q \in \mathcal{D}$ 这一事实得出。跳跃条件则源于 $q(t_i) \in \partial C$，由此 $\delta(q(t_i)) \in T(\partial C) \implies \delta q(t_i) + \dot{q}(t_i)\delta t_i \in T(\partial C)$。

满足前述方程的变分由变分$\delta q(t_i) \in T(\partial C)$ 和 $\delta t_i = 0$ 或 $\delta t_i = 1$ 和 $\delta q(t_i) = -\dot{q}(t_i)$ 张成。由后者我们立即推得 $\left[\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q} - L\right]_{t_i^-}^{t_i^+} = 0$，这就是跳跃方程中的能量守恒条件。由 $\delta t_i = 0$，我们得到

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}|_{t=t_i^+} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}|_{t=t_i^-} = \mathbb{F}L|_{t=t_i^+} - \mathbb{F}L|_{t=t_i^-}$$

当且仅当它位于 ∂C 的湮灭子上，或属于分布 $\mathcal{D}$ 的湮灭子时，它湮灭 δq，因为 δq 属于 $T(\partial C) \cap \mathcal{D}$。

现在，为了使 $g(q(t)) \leqslant 0$，且由于 $g(q(t_i)) = 0$，我们必须有 $dg(\dot{q}(t_i^-)) \geqslant 0$ 且 $dg(\dot{q}(t_i^+)) \leqslant 0$，否则 $q(t)$ 将违反不等式约束。注意到 $(\partial C)^o$ 是 N_C 和 $-N_C$ 的并集，下面证明 $\mathbb{F}L|_{t=t_i^+} - \mathbb{F}L|_{t=t_i^-}$ 不属于 N_C。假设它位于法锥上，那么

$$\mathbb{F}L|_{t=t_i^+} - \mathbb{F}L|_{t=t_i^-} = \lambda dg(q_i), \; \lambda \geqslant 0.$$

这等价于 $\dot{q}(t_i^+) - \dot{q}(t_i^-) = \lambda(\mathbb{F}L)^{-1}(dg(q_i))$。对等式两边应用 $dg(q_i)$，得到 $dg(\dot{q}(t_i^+)) = dg(\dot{q}(t_i^-)) + \lambda dg(q_i)((\mathbb{F}L)^{-1}(dg(q_i)))$，其中右边大于或等于 0，这是不可能的。因此，$\mathbb{F}L|_{t=t_i^+} - \mathbb{F}L|_{t=t_i^-} \in -N_C$. 这正是第一个跳跃方程。第三个方程由非完整约束得出。□

注 2. 前述跳跃方程与 [3] 中根据碰撞的魏尔施特拉斯-埃尔德曼条件得到的方程一致。

4 含不等式约束系统的非完整积分器

这里回顾 [7] 提出的形式体系（另见 [6]），该形式体系导出了离散拉格朗日-达朗贝尔方程。考虑离散拉格朗日量

函数 L_d：$Q \times Q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，其定义在离散速度空间 $Q \times Q$ 上。设 $\mathcal{D}$ 是 Q 上的一个分布，并考虑离散约束空间 $\mathcal{D}_d \subseteq Q \times Q$，其维数与作为 TQ 子流形的分布 $\mathcal{D}$ 的维数相同，即 $\dim\mathcal{D}_d = \dim\mathcal{D}$，且 $Q \times Q$ 的对角集包含于离散约束空间中；对所有 $q \in Q$，$(q, q) \in \mathcal{D}_d$。

于是，离散拉格朗日-达朗贝尔原理断言，离散流是离散作用量映射 S_d：$C_d^N(Q) \to \mathbb{R}$ 的临界值，其中该映射由 $S_d(q_d) = \sum L_d(q_k, q_{k+1}, h)$ 给出，但这一次我们施加限制 $_{k=0}\delta q_k \in \mathcal{D}_{q_k}$，也就是说，序列的无穷小变分必须属于约束分布。拉格朗日-达朗贝尔原理表述如下：

定义 1（离散拉格朗日-达朗贝尔原理）。由离散拉格朗日函数 L_d、分布 $\mathcal{D}$ 和离散约束空间 $\mathcal{D}_d$ 确定的离散非完整拉格朗日系统的离散流，对所有 $k \in \{0, ..., N-1\}$ 均满足约束 $(q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{D}_d$，并且是在所有固定端点且其无穷小变分满足 $\delta q_k \in \mathcal{D}_{q_k}$ 的序列变分中，离散作用量映射 S_d 的临界值。

正如连续情形一样，离散拉格朗日-达朗贝尔原理的应用会导出一组方程，这些方程是求得受所施加限制支配的临界值的充要条件。以下假设 $\mu^a \in \Omega^1(Q)$（其中 $a = 1$，...，$n–k$ 是定义 Q 上分布 $\mathcal{D} = \{v \in TQ \mid \mu^a(v)$ 的 1-形式），而 $= 0\}$ 和 μ_d^a是 $Q \times Q$ 上的一组 $n - k$ 函数，其零点集为离散约束空间 $\mathcal{D}_d$。

Q 中的点序列 $\{q_k\}_{k=1}^N$ 满足三元组 $(L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$ 的离散拉格朗日-达朗贝尔原理，当且仅当它满足方程

$$D_2L_d(q_{k-1}, q_k, h) + D_1L_d(q_k, q_{k+1}, h) = \lambda_a\mu^a(q_k), \;\; \mu_d^a(q_k, q_{k+1}) = 0. \qquad (4)$$

4.1 具有不等式约束的离散方程

考虑包含于不等式约束集C中的点序列 $\{q_k\}_{k=0}^N$。该序列将被视为连续光滑曲线 q 的离散化：$[0, Nh] \to C$ 满足 $q(kh) = q_k$。事实上，由于我们还需要时间序列，将采用记号 $t_k = kh$。现在假设该曲线在点 $\bar{q} \in \partial C$ 处与 C 的边界发生碰撞，并且该碰撞发生在时刻 $\bar{t} := t_{i-1} + \alpha h$，其中 $\alpha \in]0$、$1[$和 $i \in \{1, \ldots, N\}$为某些量，从而$t_{i-1} < \bar{t} < t_i$。我们还将使用记号 q_d：$\{t_0, \ldots, t_{i-1}, \bar{t}, t_i, \ldots, t_N\} \to Q$，以函数记号表示序列 $\{q_k\}_{k=0}^N \cup \{\bar{q}\}$。

下面我们将考虑由类似上一段所述的序列构成的离散路径空间 $\mathcal{M}_d$：

$$\mathcal{M}_d =]0, 1[\times \{q_d : \{t_0, \ldots, t_{i-1}, \bar{t}, t_i, \ldots, t_N\} \to Q \mid \bar{q} \in \partial C \}.$$

这个离散路径空间实际上是一个流形，因为它与 $]0$ 同构， $1[\times Q\times \cdots \times \partial C\times \cdots \times Q$。

为了得到具有不等式约束的非完整系统的离散运动方程，我们必须求出数值 $\alpha \in]0$、$1[$ 以及序列 q_d，使作用量 S_d 的微分： $\mathcal{M}_d \to \mathbb{R}$，由下式给出

$$S_d(\alpha, q_d) = \sum_{k=0}^{i-2} L_d(q_k, q_{k+1}, h) + \sum_{k=i}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}, h) + \\ L_d(q_{i-1}, \bar{q}, \alpha h) + L_d(\bar{q}, q_i, (1-\alpha)h)$$

使满足 $\delta q_d \in \mathcal{D}$ 的变分（$\delta\alpha$、δq_d） $\in T\mathcal{M}_d$ 消失，即 δq_i、$\delta\bar{q} \in \mathcal{D}$，其中 $\delta q_d =$（δq_1，……，δq_{i-1}，$\delta\bar{q}$，δq_i，……，δq_N），$\delta q_0 = \delta q_N = 0$，且（$q_{i-1}$，$\bar{q}$）、（$\bar{q}$，$q_i$）、（$q_k$，$q_{k+1}$）对所有 $k \neq i-1$ 均成立。

定理2. 设 $\{q_k\}$ 是非完整系统（L_d、$\mathcal{D}$、$\mathcal{D}_d$）的一条非完整离散轨迹，该系统受不等式约束 $q_k \in C$。假设该系统在时刻 $\bar{t} \in [0, Nh]$ 与边界 ∂C 发生碰撞。那么，对于 $k \neq i-1$、i，该轨迹满足离散拉格朗日-达朗贝尔方程（4）；在碰撞时刻 $\bar{t}$，以下条件成立：

$$\begin{aligned} &D_2L_d(q_{i-2}, q_{i-1}, h) + D_1L_d(q_{i-1}, \bar{q}, \alpha h) = \lambda_a\mu^a(q_{i-1}) \\ &D_2L_d(\bar{q}, q_i, (1-\alpha)h) + D_1L_d(q_i, q_{i+1}, h) = \tilde{\lambda}_a\mu^a(q_i) \\ &D_2L_d(q_{i-1}, \bar{q}, \alpha h) + D_1L_d(\bar{q}, q_i, (1-\alpha)h) \in -N_C(\bar{q}) \cup \mathcal{D}_{\bar{q}}^o \\ &D_3L_d(q_{i-1}, \bar{q}, \alpha h) - D_3L_d(\bar{q}, q_i, (1-\alpha)h) = 0 \\ &\bar{q} \in \partial C,\ (q_{i-1}, \bar{q}), (\bar{q}, q_i), (q_i, q_{i+1}) \in \mathcal{D}_d. \end{aligned} \tag{5}$$

证明。首先，我们计算作用量映射的变分，并利用 $\delta q_0 = \delta q_N =$**0**，得到

$$\begin{aligned} \delta S_d(\alpha, q_d)\cdot(\delta\alpha, \delta q_d) = &\sum_{k=1}^{i-2} \left[D_2L_d(q_{k-1}, q_k, h) + D_1L_d(q_k, q_{k+1}, h)\right]\delta q_k \\ &+ \sum_{k=i+1}^{N-1} \left[D_2L_d(q_{k-1}, q_k, h) + D_1L_d(q_k, q_{k+1}, h)\right]\delta q_k \\ &+ \left[D_2L_d(q_{i-2}, q_{i-1}, h) + D_1L_d(q_{i-1}, \bar{q}, \alpha h)\right]\delta q_{i-1} \\ &+ \left[D_2L_d(q_{i-1}, \bar{q}, \alpha h) + D_1L_d(\bar{q}, q_i, (1-\alpha)h)\right]\delta\bar{q} \\ &+ \left[D_2L_d(\bar{q}, q_i, (1-\alpha)h) + D_1L_d(q_i, q_{i+1}, h)\right]\delta q_i \\ &+ h\left[D_3L_d(q_{i-1}, \bar{q}, \alpha h) - D_3L_d(\bar{q}, q_i, (1-\alpha)h)\right]\delta\alpha. \end{aligned}$$

利用以下事实：对所有 $k \neq i-1$， $\delta q_d \in \mathcal{D}$ 且 $(q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{D}_d$，我们立即得到关于 $k \neq i-1, i$ 的拉格朗日-达朗贝尔方程 (4) 以及 (5) 中的前两个方程。由 $\delta\bar{q} \in \mathcal{D} \cap T(\partial C)$ 可得

$$D_2L_d(q_{i-1}, \bar{q}, \alpha h) + D_1L_d(\bar{q}, q_i, (1-\alpha)h) \in \mathcal{D}^o \cup (-N_C),$$

其中我们利用了这样一个事实：碰撞期间的跃变必须产生一个新点 $q_i \in C$。最后，由于 $\delta\alpha$ 是任意的，我们得到 (5) 中的最后一个方程。□

备注 3。在不等式约束集情形下，拉格朗日-达朗贝尔方程可用作积分运动方程的数值方法。给定满足离散约束 $\mathcal{D}_d$ 的两个初始点 q_0、q_1，我们可以使用离散拉格朗日-达朗贝尔方程得到序列 $\{q_0, \ldots, q_{i-1}\}$。然后使用式 (5) 中的第一个方程得到 $\bar{q}$，再使用第三个方程得到 q_i，接着使用第二个方程得到 q_{i+1}。之后，我们可以再次使用拉格朗日-达朗贝尔方程对其余点进行积分。

5 示例

我们将研究圆形桌面上竖直滚动圆盘无滑动的运动，并使用此前的构造来找到一个用于计算碰撞时刻的积分器。

竖直滚动圆盘由四个坐标描述：x、y 确定质心在桌面上的位置，θ 表示圆盘边缘上的一个固定点与竖直轴所成的角度，φ 表示圆盘相对于 x 轴的方位。下文中，m 为圆盘的质量，I 和 J 为其转动惯量，R 为圆盘半径。单位半径竖直滚动圆盘的动力学由拉格朗日函数给出

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{J}{2}\dot{\varphi}^2$$

. ˙以及无滑动约束 $\dot{x} = R\theta\cos\varphi, \dot{y} = R\theta\sin\varphi$ 生成的分布 $\mathcal{D} = \left\langle \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial\varphi} \right\} \right\rangle$.

半径为 a 的圆形桌面的不可穿透条件意味着由以下关系确定的不等式约束 C_+ 和 C_-

$$C_\pm = \{(x, y, \theta, \varphi) \mid (x \pm R\cos\varphi)^2 + (y \pm R\sin\varphi)^2 \leqslant a^2\}$$

这些关系表示，圆盘（连同其半径）不能离开桌面。所提出的积分器在首次碰撞前采用离散拉格朗日-达朗贝尔积分器。当我们首次得到一个不可容许解时，就切换到碰撞方程以确定精确的碰撞点。之后，我们返回离散拉格朗日-达朗贝尔方案，直至下一次碰撞。所用的离散拉格朗日量为

$$L_d = \frac{m}{2h}\left((x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2\right) + \frac{I}{2h}(\theta_1 - \theta_0)^2 + \frac{J}{2h}(\varphi_1 - \varphi_0)^2$$

离散约束为

$$x_1 - x_0 = R\cos(\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2})(\theta_1 - \theta_0), \quad y_1 - y_0 = R\sin(\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2})(\theta_1 - \theta_0).$$

例如，在碰撞点附近，使用（5）中的第一个方程以及约束 $\bar{q} \in \partial C_+$ 和（$q_{i-1}, \bar{q}$）$\in \mathcal{D}_d$，得到 $\bar{q}$、α 和

乘子 λ_a。接下来，利用这些变量，使用（5）中的第三和第四个方程以及约束 $(\bar{q}, q_i) \in \mathcal{D}_d$，得到 q_i 和各乘子。˜最后，利用前面得到的变量，根据（5）中的第二个方程以及离散约束，求得 q_{i+1} 和乘子 λ_a。

我们的积分器在首次碰撞之前表现符合预期。在碰撞时刻，它能够成功处理碰撞并生成可接受的轨迹。然而，事实证明它无法保持能量，因此在问题中引入了人为的能量漂移。

这一事实表明，应进一步研究能够保持冲击结构的算法。特别是，将 DELI 积分器扩展到非完整系统是一个很有前景的方向。

参考文献

1. Anahory Simoes, A, L´opez-Gord´on, A., Bloch, A, and Colombo, L. (2022).《足部滑移的被动行走》的《离散力学与最优控制》。arXiv 预印本 arXiv:2209.14255。 2. Bloch, A.M., 2003.《非完整力学》。载于《非完整力学》（第 207–276 页）。施普林格，纽约，NY。 3. Clark, W. and Bloch, A., 2019年12月。《弹跳的硬币与非完整冲击》。载于2019年 IEEE 第58届决策与控制会议（CDC）（第 2114–2119 页）。IEEE。 4. Cort´es, J., de Le´on, M., Mart´ın de Diego, D. and Mart´ınez, S., 2001. 受广义非完整约束的机械系统。《伦敦皇家学会会刊》。A辑：数学、物理与工程科学，457(2007)，第651–670页。 5. Brogliato, Bernard and Tanwani, Aneel, 2020.《与单调集值算子耦合的动力系统：形式体系、应用、适定性与稳定性》。《SIAM评论》，62(1)，第3–129页。 6. Cort´es, J, 2002.《非完整系统的几何、控制与数值方面》（第1793号）。施普林格科学与商业媒体。 7. Cort´es J. and Martinez S,《非完整积分器》，《非线性》14 (2001), 1365–1392。 8. de Le´on M, Mart´ın de Diego D.《非完整拉格朗日系统的几何》。《数学物理学杂志》。1996；37(7):3389–414。 9. Fetecau, R. C. and Marsden, J. E. and Ortiz, M. and West, M.《非光滑拉格朗日力学与变分碰撞积分器》。《SIAM应用动力系统杂志》。2003；3(2):381–416。 10. Kaufman, Danny M. and Pai, Dinesh K. 不等式约束非光滑哈密顿系统的几何数值积分。《SIAM科学计算杂志》。2012；34(5):A2670–A2703。 11. L´opez-Gord´on, Asier, Leonardo Colombo, and Manuel de Le´on.《非光滑赫格洛茨变分原理》。arXiv 预印本 arXiv:2208.02033 (2022)。 12. Nemark, J.I. and Fufaev, N.A., 2004.《非完整系统动力学》（第33卷）。美国数学学会。

此图“energy.png”提供以下“PNG”格式版本：

http://arxiv.org/ps/2302.02616v1

此图“simulation.png”可从以下位置获取 PNG 格式版本：

http://arxiv.org/ps/2302.02616v1