arXiv:2302.02630v1 [math.NT] 6 Feb 2023

艾森斯坦级数、 p-进模函数与过度收敛，II

IAN KIMING，NADIM RUSTOM

Abstract. 设 p 为一个素数。作为我们同名上一篇论文的继续与扩展，我们证明了形如 $V^{E_k^*(E_k^*)}$ 的模函数的显式过度收敛速率，其中 E_k^* 是定义在 $\Gamma_0(p)$ 上的经典归一化艾森斯坦级数，而 V 是 p-进 Frobenius 算子。特别地，我们将上一篇论文的结果扩展到了素数 2 和 3。对于这两个素数，我们的主定理在一定程度上改进了 Emerton、Buzzard、Kilford 和 Roe 的早期结果。我们从自身的视角对这些早期结果作了详细讨论。我们还对上一篇论文中关于素数$p \geq 5$的结果作了一些改进。

除了确立这些改进之外，我们在此的主要目的还在于说明，所有这些结果都可以通过一种统一方法得到；也就是说，这种方法的论证要点对所有素数而言都是相同的。

我们通过一些数值例子来展示这些结果。

1. Introduction

设 p 为素数。记 v_p 为 $\overline{\mathbb{Q}}_p$的 p-进赋值，并将其归一化，使得 $v_p(p) = 1$。

设 $k \geq 4$ 为能被 $p-1$整除的偶整数。经典艾森斯坦级数 E_k是一个权为 k 、级为 1 的模形式，其 q-展开为

$$E_k(q) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n,$$

以及它的 p-除去部分

$$E_k^* := \frac{E_k - p^{k-1} V(E_k)}{1 - p^{k-1}},$$

这是一个定义在 $\Gamma_0(p)$ 上、权为 k 的模形式；二者都是哈斯不变量某个幂的提升。这里，按惯例用 V 表示 Frobenius 算子，它在 q-展开上的作用为 $q \mapsto q^p$ 。

这意味着模函数 $\frac{E_k^*}{V(E_k^*)}$ 在 $X_0(p)$ 的普通轨迹上处处非零，因此是具有某个正过收敛率的过收敛模函数。这些模函数是更一般函数 $V^{E_\kappa^*(E_\kappa^*)}$ 的特化，其中 κ 是 $\mathbb{Z}_p^\times$ 上的特征，并且在 $(p-1)$ 次单位根上取平凡值。这个函数族在 Coleman 于 [5] 中首次证明存在经过给定有限 p- 斜率特征形式的 p- 进模形式族（“Coleman 族”）的过程中发挥了决定性作用。尽管如今已有更具概念性的理论研究方法（参见 [2], [13], ），继续研究

2020 *Mathematics Subject Classification.* 11F33，11F85。

函数族 ${}_V{}^{E_\kappa^*}(E_\kappa^*)$仍有其意义： 首先，了解过收敛率有助于计算 Coleman 族的实例，并获得有关收敛半径的明确资料，参见 [6], [8]；文献中这类实例极少。其次，应当记得，关于素数 2 和 3 的“halo”猜想的证明（分别参见 [3] 和 [14], ）都将明确建立函数族 ${}_V{}^{E_\kappa^*}(E_\kappa^*)$的过收敛率作为决定性环节。或许正是出于这些原因，Coleman 在 [7] 中针对 $p = 2$、3 提出了一个关于此问题的一般猜想并给出了证明；其一个版本于 [1]中针对 $p \geq 5$ 得到证明。值得注意的是，在这两种情形中，即针对 $p = 2$、3 以及针对 $p \geq 5$，函数族 ${}_V{}^{E_\kappa^*}(E_\kappa^*)$ 的过收敛率最终都由特化函数 ${}_V{}^{E_k^*}(E_k^*)$ 的过收敛率信息推导而来，其中 k 如上所述。对于 $p = 2$、 $p = 3$ 和 $p \geq 5$ ，这些信息分别来自 [9] 、[3]、 [14], 和 [11], 。

基于上述动机，本文有两个目的：首先，给出关于所有素数下模函数 ${}_V{}^{E_k^*}(E_k^*)$ 过度收敛速率的改进表述；其次，说明所有这些表述都可以通过一种适用于所有素数的统一方法得到。

我们证明以下定理。

定理 A. 设 p为素数， $k \in \mathbb{N}$ 为偶数，且 $k \geq 4$ 和 $k \equiv 0$(模 $p-1$)。定义：

$$\rho := \begin{cases} \frac{1}{p+1} & \text{if } p \geq 5 \text{ or } (p \in \{2,3\} \text{ and } k \equiv 0 \pmod{2p}) \\ \frac{1}{2p} & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$t := \begin{cases} 3 & \text{if } p = 2, k = 4 \\ 3 + v_2(k) & \text{if } p = 2, k > 4 \\ 2 + v_p(k) & \text{if } p \geq 3. \end{cases}$$

Then

$$\frac{E_k^*}{V(E_k^*)} \in M_0\left(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{t}{t+1} \cdot \rho\right).$$

这里，符号 $f \in M_0(\mathbb{Z}_p、 \geq \sigma)$，如下文第 2节将进一步说明，表示 f 是一个系数属于 $\mathbb{Z}_p$ 的模函数（即权重 0 模形式），其过度收敛速率为 r ，只要 $r < \sigma$。

该定理通过考虑 $v_p(k)$，改进了 [11] 针对 $p \geq 5$ 给出的表述。当 $p = 2$,3, $k \equiv 0$(模 $2p$)时，对于论文 [3], [14] 也有同样的结论。

然而，当 $p \in \{2,3\}$ 且 $k \not\equiv 0$ (模 $2p$) 时，该定理的形式并非最优：为了使主定理的证明尽可能简单直接，我们避免使用关于 U 算子的特殊改进整性性质，而这些性质在 $p = 2$、3 以及过度收敛速率小于 $\frac{1}{2p}$时成立。不过，我们将在第 3.2 节详细说明这一点。特别是，这将表明，论文 [3], [14] 关于函数过度收敛性的 ${}_V{}^{E_k^*}(E_k^*)$ 中的核心结果，也可以通过我们在此提出的方法得到。相关结论是下文的命题3.8 。

我们将在下文第A 节 [3], [14], [11] 3.3节更详细地解释定理与论文中结果之间的比较。我们还通过若干数值例子加以说明。

2. Preliminaries

这里总结我们所需的关于过收敛模函数的基本事实。更全面的讨论请参见 [11, 第 2]节。

若 $K/\mathbb{Q}_p$ 是一个有限扩张，其整数环为 O，那么对于 $r \in O$，我们有 1 级的 r-过收敛模函数这一概念。我们将这些函数构成的 O-模记为 $M_0(O,r)$。若 $p \geq 5$ 中的一个元素 $g \in M_0(O,r)$ 有一个“Katz 展开”

$$g = \sum_{i \geq 0} \frac{b_i}{E_{p-1}^i}$$

其中系数 b_i 是模形式，它们来自某些由权为 $i(p-1)$ 的模形式构成的 O-模$B_i(O)$。对于 $i > 0$，模 $B_i(O)$ 提供分裂 $M_{i(p-1)}(O) = E_{p-1} \cdot M_{(i-1)(p-1)} \oplus B_i(O)$，其中 $M_l(\cdot)$ 表示权为 l 的模形式。定义 $B_0(O) := O$。于是，$g \in M_0(O,r)$ 等价于对所有 i，都有 $v_p(b_i) \geq iv_p(r)$，并且 $v_p(b_i) - iv_p(r) \to \infty$ 适用于 $i \to \infty$。关于详情，请参见 [10], 命题 2.6.2、2.8.1，或 [11, 第 2] 节中的综述。

对于 $\sigma \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$，我们将 O-模 $M_0(O, \geq \sigma)$（事实上是一个 O-代数）定义为由满足以下条件的过收敛模函数 g 组成：存在某个 $r \in O$，使得 $g \in M_0(O,r)$；并且，只要 K'/K 是一个整数环为 O' 的有限扩张，且 $r' \in O'$ 满足 $v_p(r') < \sigma$，那么 $g \in M_0(O', r')$。

这个定义看起来可能非常繁复，但在处理上述 Katz 展开时实际上非常方便：再次假设 $p \geq 5$，且 g 有上述 Katz 展开。那么，$g \in M_0(O, \geq \sigma)$ 等价于以下陈述：对于所有 i，$v_p(b_i) \geq i\sigma$，参见命题 2.3] 中的 [11, 。

当 $p \in \{2,3\}$ 时，由于 E_{p-1} 不存在经典模形式这一简单事实，我们无法得到上述过收敛模函数的 Katz 展开。另一种做法是依据 Vonk 的论文[17]，其中证明了可以分别使用 E_4 和 E_6 的负幂来构造标准正交基。不过，本文将采用 Loeffler 在 [12] 中给出的标准正交基：对于 $p = 2$、3、5、7、13，函数

$$f_p(z) := \left(\frac{\eta(pz)}{\eta(z)} \right)^{\frac{24}{p-1}},$$

其中 η 通常的 Dedekind η-函数是亏格 0 模曲线 $X_0(p)$的局部参数。

给定一个元素 $g \in M_0(O,r)$，可以计算一个展开，起初是形式上的，

$$g = \sum_{i=0}^{\infty} a_i f_p^i$$

其中 $a_i \in O$。从实际角度来看，根据 g 的 q-展开递归地计算此展开很容易，因为 f_p 的 q-展开以 q开头。给定此展开后，[12, 推论 2.2] 表明，对于$v_p(r) < \frac{p}{p+1}$，当且仅当 $v_p(a_i) \geq \frac{12}{p-1} v_p(r) i$ 对所有 i 成立，且$v_p(a_i) - \frac{12}{p-1} v_p(r) i \to \infty$ 对 $i \to \infty$成立时，我们有 $g \in M_0(O,r)$。这些事实推出以下结论，我们将其单独列为一个命题，以供后续论证参考。

命题 2.1. 假设 $p \in \{2,3,5,7,13\}$，对某个 r，有 $g \in M_0(O,r)$，并且 $g = \sum_{i=0}^{\infty} a_i f_p^i$ with $a_i \in O$，形式上在 q-展开中。那么对于 $\sigma \leq \frac{p}{p+1}$

我们有 $g \in M_0(O, \geq \sigma)$，当且仅当

$$v_p(a_i) \geq \frac{12}{p-1}\sigma i$$

对所有 i。

我们还将用到下面这个观察，其证明见 [11]。

命题 2.2.（参见 [11, 推论 2.7]。）假设 $g_i \in M_0(O, \geq \sigma)$ 是一列元素，它在 q-展开意义下收敛到一个元素 $g(q) \in O[[q]]$。那么，$g(q)$ 是某个元素 $g \in M_0(O, \geq \sigma)$ 的 q-展开。

在论文 [11] 中，通常的假设是 $p \geq 5$，但该论文推论 2.7 的证明很容易推广到 $p = 2, 3$ 这些情形；例如，可以使用上文 Loeffler 的标准正交基，而不必使用 Katz 展开。

最后，U 算子显然会在证明中发挥重要作用。它与整结构的相互作用对我们尤为重要。我们有如下的一般性结论，它是 U 的众所周知性质的推论；这些性质最早可追溯到 Katz 奠基性论文 [10] 中的整性引理 3.11.4。

命题 2.3。假设 $\sigma \leq \frac{1}{p+1}$。则 U 算子将 $M_0(O, \geq \sigma)$ 映射到 $\frac{1}{p} \cdot M_0(O, \geq p\sigma)$。

2.1. 关于 $p = 2$、3 的特殊预备知识。对于素数 $p = 2$、3，我们的工作将以关于模函数 $V^{E_4}(E_4)$ 和 $V^{E_6}(E_6)$ 的过度收敛速率的知识为出发点。这很容易得到：通过比较 q-展开，以下公式很容易求得并证明；其中第一个和最后一个也见于 [4], 参见第 212 页的注释：

对于 $p = 2$，我们有

$$\frac{E_4}{V(E_4)} = \frac{1 + 2^8 f_2}{1 + 2^4 f_2}, \quad \frac{E_6}{V(E_6)} = \frac{1 - 2^9 f_2}{1 - 2^3 f_2},$$

而对于 $p = 3$:

$$\frac{E_4}{V(E_4)} = \frac{1 + 3^5 f_3}{1 + 3 f_3}, \quad \frac{E_6}{V(E_6)} = \frac{1 - 2 \cdot 3^5 f_3 - 3^9 f_3^2}{1 + 2 \cdot 3^2 f_3 - 3^3 f_3^2}.$$

我们通过命题 2.1 确定上述模函数的过度收敛速率：可以将给定模函数 h 表示为 f_p 的有理函数，进而化为形式幂级数 $h = 1 + a_1 f_p + a_2 f_p^2 + \ldots$，其中上述情形的系数属于 $\mathbb{Z}_p$。若对所有 i 都有 $h \in M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \sigma)$ $v_p(a_i) \geq \frac{12}{p-1}\sigma i$，则成立。若对于展开式 $1/h = 1 + b_1 f_p + b_2 f_p^2 + \ldots$ 中的系数，对所有 i 还满足 $v_p(b_i) \geq \frac{12}{p-1}\sigma i$，则可得出 h 甚至是 $h \in M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \sigma)$ 中的一个单位。

由此可见，上述公式很容易推出以下命题。

命题 2.4. 对于 $p = 2$，函数 $E_4/V(E_4)$ 和 $E_6/V(E_6)$ 分别是 $M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{1}{p+1})$ 和 $M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{1}{2p})$ 中的单位。

对于 $p = 3$，函数 $E_4/V(E_4)$ 和 $E_6/V(E_6)$ 分别是 $M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{1}{2p})$ 和$M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{1}{p+1})$ 中的单位。

3. Proofs

3.1. 定理 **A** 的证明。 我们首先通过定义一个辅助模形式来开始证明 F 以及与之相关的某些量。

定义 3.1。 设 p 为素数，且设 $k \in \mathbb{N}$ 为偶数，满足 $k \geq 4$ 且 $k \equiv 0$(模 $p-1$)。定义 ρ 和 t 如定理 *A*所示，即

$$\rho := \begin{cases} \frac{1}{p+1} & \text{if } p \geq 5 \text{ or } (p \in \{2,3\} \text{ and } k \equiv 0 \pmod{2p}) \\ \frac{1}{2p} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$t := \begin{cases} 3 & \text{if } p = 2, k = 4 \\ 3 + v_2(k) & \text{if } p = 2, k > 4 \\ 2 + v_p(k) & \text{if } p \geq 3, \end{cases}$$

并另外定义，

$$F := \begin{cases} E_4^{k/4} & \text{if } p = 2 \text{ and } k \equiv 0 \pmod 4 \\ E_4^{(k-6)/4} E_6 & \text{if } p = 2 \text{ and } k \equiv 2 \pmod 4 \\ E_6^{k/6} & \text{if } p = 3 \text{ and } k \equiv 0 \pmod 6 \\ E_8 E_6^{(k-8)/6} & \text{if } p = 3 \text{ and } k \equiv 2 \pmod 6 \\ E_4 E_6^{(k-4)/6} & \text{if } p = 3 \text{ and } k \equiv 4 \pmod 6 \\ E_{p-1}^{k/(p-1)} & \text{if } p \geq 5 \end{cases}$$

以下推论可由命题 2.4 立即得出。

推论 3.2。采用定义 *3.1*中的记号，我们有 $V^{F}{}_{(F)}$ 是一个过度收敛的~~模~~函数，并且实际上在 $M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \rho)$ 中可逆。

证明。 形式 F 在所有情况下都是哈斯不变量某个幂的提升，因此函数 $V^{F}{}_{(F)}$ 定义在普通轨~~迹上~~，因而具有某个正的过收敛率，是过度收敛的。事实上，它是 $M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \rho)$ 的单位这一点，对于$p = 2$,3，可直接由命题 2.4 得出，利用了 V 具有乘法性这一事实。对于 $p \geq 5$ ，该结论由“Coleman–Wan 定理” [18, 引理 21]得出。 □

推论 3.3。 设 F, ρ 和 t 如定义 *3.1*中所述。则

$$\frac{U(F)}{F} \in \frac{1}{p} \cdot M_0(\mathbb{Z}_p, \geq p\rho).$$

证明。 由于~~$V^{F}{}_{(F)}$~~$\in M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \rho)$ 由推论 3.2得出，利用 U的整性，参见命题 2.3，可得

$$\frac{U(F)}{F} = U\left(\frac{F}{V(F)}\right) \in \frac{1}{p} \cdot M_0(\mathbb{Z}_p, \geq p\rho)$$

这里用到了 $\rho \leq 1/(p+1)$，以及“Coleman 技巧”，即恒等式$U(SV(T)) = U(S)T$。 □

以下陈述是对证明 [11,引理 3.11]时所用陈述的扩展。该论证是引理 3.11],证明中论证的一个小幅扩展，因此我们从略。

命题 3.4。 采用定义*3.1* 中的记号，我们有

$$E_k^* \equiv E_k \equiv F \pmod{p^t}$$

在 q 展开中。

因此我们有

$$\frac{E_k^*}{F} \equiv \frac{U^i(F)}{F} \equiv 1 \pmod{p^t}.$$

对所有 $i \in \mathbb{N}$ 均成立。

证明。首先注意到

$$E_k^* = \frac{E_k - p^{k-1}V(E_k)}{1-p^{k-1}} \equiv E_k \pmod{p^{k-1}}.$$

由初等推理可知， $k-1 \geq 3+v_p(k)$ 成立，除非 $p=2, k=4$；在这种情况下，我们有 $F = E_4 \equiv E_4^*$ (模 2^3)。因此，只需在各种情形下证明同余式 $E_k \equiv F$ (模 p^t)。通过考察艾森斯坦级数的 q 展开的显式公式，即可直接得到这些同余式：

$$E_m(q) = 1 - \frac{2m}{B_m}\sum_{i\geq 1}\sigma_{m-1}(i)q^i,$$

应用初等同余

$$(1+ap^s)^n \equiv 1 + nap^s \pmod{p^{1+s+v_p(n)}R}$$

它对任意交换环 R 中的 s、$n \in \mathbb{N}$ 和 a 都成立，并使用冯·施陶特–克劳森定理以及费马小定理。

我们先考虑 $p \geq 5$ 和 $k \in \mathbb{N}$ 都被 $p-1$ 整除的情形。由冯·施陶特–克劳森定理，B_{p-1}、$B_k \equiv -\frac{1}{p}$（模 $\mathbb{Z}_p$），因此我们也有 $\frac{1}{B_{p-1}}$、$\frac{1}{B_k} \equiv -p$（模 $p^2\mathbb{Z}_p$）。于是，上述初等同余表明

$$E_{p-1}^{k/(p-1)} \equiv 1 - \frac{2k}{B_{p-1}}\sum_{i\geq 0}\sigma_{p-2}(i)q^i \pmod{p^{2+v_p(k)}},$$

因此，只要我们能证明对任意 $i \geq 0$，$\frac{2}{B_{p-1}}\sigma_{p-2}(i) \equiv \frac{2}{B_k}\sigma_{k-1}(i)$（模 p^2），结论便得证。而这又可由 $\frac{1}{B_{p-1}}$、$\frac{1}{B_k} \equiv -p$（模 $p^2\mathbb{Z}_p$），以及费马小定理推出：$\sigma_{p-2}(i) \equiv \sigma_{k-1}(i)$（模 p）（因为 k 可被 $p-1$ 整除。）

关于 $p=2$、3 和被 p 整除的 k 的同余，按照上文相同的方法，由 $E_4 = 1 + 240\sum_{i\geq 1}\sigma_3(i)q^i$ 和 $E_6 = 1 + 504\sum_{i\geq 1}\sigma_5(i)q^i$ 得出。

关于 $p=2$ 和 $k \equiv 2$（模 4）的同余，注意到 $E_4 \equiv 1$（模 2^4），且在这种情况下 $3+v_2(k) = 4$ 后，即可用相同的方法得出。

当 $p=3$ 和 $k \equiv 2$（模 6）时，可得 $E_8 \equiv E_k$（模 3^2），所需的同余由此得出，因为 $E_6 \equiv 1$（模 3^2）。最后，当 $p=3$ 和 $k \equiv 4$（模 6）时，将 E_8 替换为 E_4，即可用相同的方法得出所需的同余。

最后，命题的第二个陈述由此得出：由于 U 算子保持 q 展开中的同余，且 $U(E_k^*) = E_k^*$，我们有

$$U(F) \equiv U(E_k^*) = E_k^* \equiv F \pmod{p^t},$$

因此，对所有 $i \in \mathbb{N}$，通过对 i 归纳可得 $U^i(F) \equiv E_k^* \equiv F$(模 p^t)。 □

注 3.5. 数值实验表明， t在命题 3.4 中给出的值在某些情况下是最优的，但并非在所有情况下都是如此。看来，若要改进 t 的值，就需要采用不同于本文所用的方法。我们尚未对此展开研究。

如果 $p \geq 5$ 以下引理的陈述已在 [11, 引理 3.12]，的证明中得到证明，那么我们在此只需考虑证明中的情形 $p = 2,3$。

引理 3.6。 设 F 和 ρ 如定义 3.1所述。对于 $i \in \mathbb{N}$ 我们有

$$\frac{U^i(F)}{F} - \frac{U(F)}{F} \in M_0(\mathbb{Z}_p, \geq p\rho).$$

证明。 与 [11, 引理 3.12]中针对 $p \geq 5$ 的证明一样，证明的关键是将 U 算子的已知整性与$U^i(F)_F \equiv 1$ (模 p^t) 的同余（见命题 3.4）结合起来。事实证明，对于 $t \geq 2$ ，我们需要 $p = 3$（如情形 $p \geq 5$），但对于 $p = 2$ ，则必须有 $t \geq 3$。根据定义 3.1，确实如此。现在我们假设 $p \in \{2, 3\}$。

该陈述通过对 i 进行归纳法证明。归纳起始步骤 $i = 1$ 显然成立，现假设该陈述对某个 $i \in \mathbb{N}$ 成立：

$$\frac{U^i(F)}{F} \in \frac{U(F)}{F} + M_0(\mathbb{Z}_p, \geq p\rho).$$

由于 $U(F)_F \in \frac{1}{p} \cdot M_0(\mathbb{Z}_p, \geq p\rho)$ 根据推论 3.3，我们当然也有 $U^i(F)_F \in \frac{1}{p} \cdot M_0(\mathbb{Z}_p, \geq p\rho)$。展开模函数 $U^i(F)_F = 1 + \sum_{m \geq 1} a_m f_p^m$，并利用命题 2.1，我们便知道 $v_p(a_m) \geq -1 + \frac{12}{p-1} p\rho m$ 对所有 $m \geq 1$都成立。

我们断言 $U^i(F)_F = 1 \in p \cdot M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \rho)$:

令 t 如定义 3.1 所述。根据命题 3.4 ，我们有 $U^i(F)_F - 1 \equiv 0$ (模 p^t)，其具有 q-展开。因此， $v_p(a_m) \geq t$ 对所有 $m \geq 1$ 都成立；这一点很容易从 f_p 的 q-展开以 q 开始这一事实看出。

现在，要证明 $U^i(F)_F = 1 \in p \cdot M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \rho)$，我们必须证明，对所有 $m \geq 1$ ，都有 $v_p(a_m) \geq 1 + \frac{12}{p-1}\rho m$ （再次参见命题 2.1）。只需证明，对所有 $m \geq 1$，要么有 $-1 + \frac{12}{p-1} p\rho m \geq 1 + \frac{12}{p-1}\rho m$，要么有 $t \geq 1 + \frac{12}{p-1}\rho m$。第一个不等式在 $m \geq \frac{1}{6\rho}$ 时成立，而第二个在 $m \leq \frac{(t-1)(p-1)}{12\rho}$ 时成立。因此，只需满足

$$\frac{(t-1)(p-1)}{12\rho} \geq \frac{1}{6\rho},$$

也就是说，$(t-1)(p-1) \geq 2$。但这是成立的，因为当 $p = 2$ 时， $t \geq 3$ ；而当 $p = 3$ 时， $t \geq 2$。

现在，将陈述 $U^i(F) \in p \cdot M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \rho)$ 与推论 3.2可得

$$\frac{U^i(F)}{V(F)} - \frac{F}{V(F)} = \left(\frac{U^i(F)}{F} - 1\right) \cdot \frac{F}{V(F)} \in p \cdot M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \rho).$$

应用 U ，于是我们可以得出

$$\frac{U^{i+1}(F)}{F} - \frac{U(F)}{F} = U\left(\frac{U^i(F)}{V(F)}\right) - U\left(\frac{F}{V(F)}\right) \in M_0(\mathbb{Z}_p, \geq p\rho)$$

由此完成归纳步骤。 □

命题 3.7. 设 k, F, ρ, 在 t 处如定义 *3.1* 所述。则 $\frac{E_k^*}{F} \in \frac{1}{p} M_0(\mathbb{Z}_p, \geq p\rho)$。我们还有 $\frac{E_k^*}{F}$在 $M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{t}{t+1} \cdot p\rho)$ 中可逆。

证明。若 $p \geq 5$ 第一个结论已在 [11], 参见该文的定理 C 中证明，那么我们将假设 $p \in \{2, 3\}$。由于 $E_k^* - F$ 在所有情形下都可见为一个尖点型 Serre p-进模形式，其权为 k，且由于 $p \leq 7$，由 [15, 引理 3]可知， $U^i(E_k^* - F) \to 0$在 q-展开中属于 $i \to \infty$。但是， $U(E_k^*) = E_k^*$，因此我们有$U^i(F) \to E_k^*$，从而也有

$$\frac{U^i(F)}{F} \to \frac{E_k^*}{F}$$

在 q-展开中属于 $i \to \infty$。由于 q-展开中属于以下空间的元素$M_0(\mathbb{Z}_p, \geq p\rho)$ 的收敛意味着极限也属于该空间，参见命题 2.2，因此我们可由引理 3.6得出

$$\frac{E_k^*}{F} - \frac{U(F)}{F} \in M_0(\mathbb{Z}_p, \geq p\rho).$$

这 $\frac{E_k^*}{F} \in \frac{1}{p} M_0(\mathbb{Z}_p, \geq p\rho)$ 现在可由推论 3.3 的第一条陈述立即推出。

对于命题的第二条陈述，同样先假设 $p \in \{2, 3\}$，并考虑展开式 $\frac{E_k^*}{F} = 1 + \sum_{m \geq 1} a_m f_p^m$。根据命题 2.1，我们现在知道 $v_p(a_m) \geq -1 + \frac{12}{p-1} \cdot p\rho m$ 对所有 $m \geq 1$ 都成立。另一方面，命题 $\frac{E_k^*}{F} \equiv 1$ (模 t) 中的同余关系 3.4 意味着 $v_p(a_m) \geq t$ 对所有$m \geq 1$都成立。结合这两个估计可知 $v_p(a_m) \geq \frac{12}{p-1} \cdot \frac{t}{t+1} \cdot p\rho m$ 对所有 $m \geq 1$ 都成立，这意味着

$$\frac{E_k^*}{F} \in M_0\left(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{t}{t+1} \cdot p\rho\right).$$

为了证明 $\frac{E_k^*}{F}$ 实际上在 $M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{t}{t+1} \cdot p\rho)$ 中可逆，我们可以借用推论 4.1] 的证明中的一个论证：令 $0 \leq u < \frac{t}{t+1} \cdot p\rho$ 为有理数，并选取一个有限扩张 $K/\mathbb{Q}_p$，其整数环为 O_K，使得存在元素 $a, r \in O_K$ 满足

$$v_p(a) = \frac{6}{p-1} \cdot \left(\frac{t}{t+1} p\rho - u\right), \quad v_p(r) = u.$$

于是 $\frac{E_k^*}{F} = 1 + \sum_{m \geq 1} a_m f_p^m = 1 + a \cdot \sum_{m \geq 1} (a_m a^{-1}) f_p^m$，并且由于我们发现

$$v_p(a_m a^{-1}) - \frac{12}{p-1} v_p(r) m \geq (2m-1) v_p(a)$$

为正且当 m 趋于 ∞ 时趋于 ∞，我们可以得出结论： $h := \sum_{m \geq 1} (a_m a^{-1}) f_p^m$ 是 $M_0(O_K, r)$ 的一个元素。由于 $\frac{E_k^*}{F} = 1 + a \cdot h$ 且 $v_p(a) > 0$，这意味着 $\frac{E_k^*}{F}$ 在 $M_0(O_K, r)$ 中可逆。因此，若我们考虑展开式 $\frac{F}{E_k^*} = 1 + \sum_{m \geq 1} b_m f_p^m$，则必有

$$v_p(b_m) \geq \frac{12}{p-1} \cdot v_p(r) m = \frac{12}{p-1} \cdot um$$

对所有 $m \geq 1$。由于我们可以令 u 任意接近 $\frac{t}{t+1} \cdot p\rho$，因此必有$v_p(b_m) \geq \frac{12}{p-1} \cdot \frac{t}{t+1} \cdot p\rho$ 对所有 $m \geq 1$成立，这意味着 $\frac{F}{E_k^*} \in M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{t}{t+1} \cdot p\rho)$。

对于 $p \geq 5$，我们可以使用相同的论证，只需改用$\frac{E_k^*}{F}$ 的 Katz 展开，而非局部参数 f_p 的展开。□

定理的证明 A。由命题3.7 以及 Frobenius 算子 V的众所周知的性质，我们得到 $V_{(E_k^*)V(F)} = V\left(\frac{E_k^*}{F}\right)$ 在 $M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{t}{t+1} \cdot \rho)$ 中可逆。再次结合命题3.7，可知

$$\frac{E_k^*}{V(E_k^*)} = \frac{E_k^*}{F} \cdot \left(\frac{V(E_k^*)}{V(F)}\right)^{-1} \cdot \frac{F}{V(F)} \in M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{t}{t+1} \cdot \rho),$$

因为由推论 3.2 可知 $V^F{}_{(F)} \in M_0(\mathbb{Z}_p, \rho) \subseteq M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{t}{t+1} \cdot \rho)$。 □

3.2. 关于 $p = 2,3$ 的一些特殊现象。以下命题的结论因 Emerton、Buzzard–Kilford 和 Roe 的工作而广为人知；关于 $p = 2$，参见 [9]，尤其是 [3, 推论 9(iii)]，；对于 $p = 3$，这实质上就是 [14, 定理 4.2]。

命题 3.8。设 $p \in \{2, 3\}$，并设 $k \in \mathbb{N}$ 为偶数且 ≥ 4。则

$$\frac{E_k^*}{V(E_k^*)} \in 1 + p^s M_0\left(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{1}{2p}\right)$$

其中

$$s = v_p(k/2).$$

我们简要讨论一下这一陈述与定理A的比较。我们重点考察 $p = 2$ 的情形：若记 $V^{E_k^*}{}_{(E_k^*)} = 1 + \sum_{i \geq 1} a_i(k) f_2^i$，那么命题2.1 告诉我们，命题3.8 的陈述可转化为如下陈述：

$$v_2(a_i(k)) \geq v_2(k/2) + 3i$$

对所有 i，这恰好就是由 [3, 推论 9(iii)] 得出的结果。当 $k \equiv 0 \pmod 4$ 时，定理 A 给出的陈述是

$$v_2(a_i(k)) \geq 4 \cdot \frac{t}{t+1} \cdot i$$

对所有 i，其中 t 如定理中所述。若还有 $k > 4$，则有 $t \geq 5$，因此定理A 给出的估计渐近地更优（相对于 i），但对于较小的 i，效果可能稍差。然而，当 $k \equiv 2 \pmod 4$ 时，定理 A 实际上比命题 3.8更差。对于 $p = 3$ 且 $3 \nmid k$ 的情形，也同样如此。

换言之，定理 A 通常强于命题 3.8，但以下情形除外：$p = 2$、3 以及 k 不被 $2p$整除。

这引出了一个问题：从我们证明定理 3.8 所采用的统一证明方法的角度来看，应如何理解命题 A。

本节旨在回答这一问题。我们将给出的答案是，命题 3.8 仍可通过我们的方法得到，但我们必须考虑素数 $p = 2$、3 所特有的一些非常特殊的现象（上述文献中的工作也是如此）。这些非常特殊的现象与 U 算子作用于过收敛率足够小的过收敛模函数时所表现出的更强整性有关：

命题 3.9。设 $p \in \{2, 3\}$。令 O_K 为有限扩张K的 $\mathbb{Q}_p$的整数环。则 U算子将 $M_0\left(O_K, \geq \frac{1}{2p}\right)$ 映射到 $M_0\left(O_K, \geq \frac{1}{2}\right)$。

同样，这一命题是众所周知的，不过或许并非以我们这种精确的表述出现；参见 [9, 引理 3。1], [3, 推论 3(iii)], [14, 推论 2.5(3)]。我们将在下文第 3.2.1 小节中略述该命题的证明，但首先说明如何运用我们所采用的方法由命题 3.8 得到它。我们从下面的引理开始。

引理 3.10。 设 $p \in \{2,3\}$，设 k 和 s 如命题 *3.8*所述，并设 F 如定义 *3.1*所述。则

$$\frac{F}{V(F)} \in 1 + p^s \cdot M_0\left(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{1}{2p}\right).$$

证明。 在 $k \not\equiv 0$ (模 $2p$) 的情形下，结论可由命题 2.4 立即得到。对于其余两种情形，考虑 $p = 3$ 且 $k \equiv 0$ (模 6) 的情形。对于 $p = 2$ 且 $k \equiv 0$ (模 4) 的情形，证明方法类似。

于是设 $p = 3$ 且 $k \equiv 0$ (模 6)。模函数 $V^{E_6}(E_6)$ 关于局部参数 f_p 的展开形式为 $V^{E_6}(E_6) = 1 + \sum_{i\geq 1} b_i f_p^i$。 由于 $V^{E_6}(E_6) \in M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{1}{p+1})$ 由命题 2.4 得知，

$$v_p(b_i) \geq \frac{12}{p-1} \cdot \frac{1}{p+1} \cdot i = \frac{3}{2} \cdot i$$

对所有 $i \geq 1$ 均成立。将系数环扩大为包含一个赋值为 $\frac{1}{2} = \frac{1}{p-1}$ 的元素 b 的环 O_K 后，我们便可得出，可以写成 $V^{E_6}(E_6) = 1 + b\sum_{i\geq 1} b_i' f_p^i$，其中 $b_i' \in O_K$ 满足 $v_p(b_i') \geq \frac{3}{2}i - \frac{1}{2} \geq i$ 对所有 $i \geq 1$ 均成立。这意味着 $g := \sum_{i\geq 1} b_i' f_p^i \in M_0(O_K, \geq \frac{p-1}{12}) = M_0(O_K, \geq \frac{1}{2p})$。现在，对 $m \in \mathbb{N}$，通过对 $v_p(m)$ 作简单归纳法，并利用 $v_p(b) = \frac{1}{p-1}$，可得 $(1+bg)^m \in 1+p^{v_p(m)}b\cdot M_0(O_K, \geq \frac{1}{2p})$。于是我们可以得出

$$\frac{F}{V(F)} = \left(\frac{E_6}{V(E_6)_F}\right)^{k/6} \in 1 + p^{v_p(k)-1+\frac{1}{p-1}} \cdot M_0\left(O_K, \frac{1}{2p}\right).$$

但这意味着，在展开式 $V^F(F) = 1 + \sum_{i\geq 1} c_i f_p^i$ 中，对于所有 $i \geq 1$，都有 $v_p(c_i) \geq v_p(k) - 1 + \frac{1}{p-1} + i$。然而， c_i 全都属于 $\mathbb{Z}_p$，因此对于所有 $i \geq 1$，必有 $v_p(c_i) \geq v_p(k) + i$，这意味着 $V^F(F) \in 1 + p^{v_p(k)} \cdot M_0\left(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{1}{2p}\right)$，如所求。□

现在，我们可以略述命题3.8 的证明，采用本文中使用的方法：首先，给定引理 3.10 后，证明引理 3.6 中的论证可用于证明 $U^i(F)_F \in 1 + p^s M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{1}{2})$ 对 $i \in \mathbb{N}$成立：对此，可对i 使用归纳法，其中基本情形 $i = 1$ 由将 U应用于 $V^F(F)$ 并结合引理 3.10与命题3.9得到。归纳步骤与引理 3.6证明中的完全相同，从假设 $U^i(F)_F - 1 \in p^s M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{1}{2}) \subseteq p^s M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{1}{2p})$ 开始。

此后，如同命题 3.7 和定理A 的证明中那样，先推得 $\frac{E_k^*}{F} \in 1 + p^s M_0(\mathbb{Z}_p, \geq \frac{1}{2})$，继而推得命题 3.8 成立。

3.2.1. 关于命题 *3.9*的讨论。 现在我们将概述命题3.9 的证明，该证明对两个素数采用统一方法 $p = 2$，3。这样做有两个目的：首先，我们想更好地理解为什么该命题无法以其精确形式推广

到其他任何使 $X_0(p)$ 为亏格 0 的素数 p 上（即$p=5$、7、13）。其次，我们希望深入理解该命题成立的原因，以及类似的结论——也就是说， U 算子是否能在其他某些情形下保持整结构，适用于过收敛率足够小的过收敛形式。

我们并未完全实现这些目标，因为证明中仍有一些“本该如此”的论证。不过，以下给出证明概要：

取 p 为任意一个“亏格 0 素数” $p=2$、3、5、7、13，并记 f 为 $X_0(p)$ 的局部参数 f_p。对任意整数 $i\geq 0$，可写成

$$U(f^i)=\sum_{j\geq 0} c_{i,j}f^j,$$

有限和，其 $c_{i,\ j}$ 在 $\mathbb{Z}$中。可得 $c_{i,\ j}\neq 0\Rightarrow \frac{i}{p}\leq j\leq ip$。关于此问题的背景，包括如何利用模方程求出系数的递推公式 $c_{i,\ j}$，可参阅 [16, 引理 3.3 的证明。2], 或 [12,定理 2 的证明。3], 或 [8, 第 2] 章的详细论述。

有如下关于 $c_{i,\ j}$的赋值下界：

$$v_p(c_{i,j})\geq \gamma_p\cdot(pj-i)-1$$

其中

$$\gamma_p:=\frac{12}{p^2-1}.$$

这个下界可以通过蛮力计算证明：使用归纳法，并利用 $c_{i,j}$ 的递推公式，参见 [16, 命题 3.3.3]。不过，也可以给出一种更具概念性的证明：考虑 $\mathbb{Q}_p$ 的一个有限扩张 K，其整数环为 O_K，并假设 $r\in O_K$满足 $\rho:=v_p(r)<\frac{1}{p+1}$。令 $i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$。根据 [12,推论 2.2]，我们得到 $h:=r^{\frac{12}{p-1}i}f^i\in M_0(O_K,\rho)$。利用 U 的整性（参见 [10, 整性引理 3.11.4]），我们可以进一步推出 $pU(h)\in M_0(O_K,p\rho)$。但是，

$$pU(h)=pr^{\frac{12}{p-1}i}\sum_j c_{i,j}f^j=\sum_j pr^{\frac{12}{p-1}(i-pj)}c_{i,j}\left(r^p\tfrac{12}{p-1}f\right)^j,$$

因此，再次根据 [12, 推论 2.2], ，必有

$$0\leq v_p\left(pr^{\frac{12}{p-1}(i-pj)}c_{i,j}\right)=1+\frac{12}{p-1}\rho(i-pj)+v_p(c_{i,j}).$$

由于我们可以选取一列域 K 及其元素 r，使得 $v_p(r)$ 从下方收敛到 $\frac{1}{p+1}$，结论得证。

现在我们来探讨如何从这个角度看待命题3.9：是否存在一个正数 $\rho(<\frac{1}{p+1})$，使得 $U(M_0(O_K,\ \geq\rho)\subseteq M_0(O_K,\ \geq p\rho)$ 对任意满足以下条件的情形都成立： K 是 $\mathbb{Q}_p$ 的一个有限扩张，其整数环为 O_K?

再次运用 [12, 推论 2.2]，我们可以将这个问题转化为：是否存在这样一个正数 ρ，使得 $U(O_K[[rf]])\subseteq O_K[[r^pf]]$ 对所有满足 $r\in O_K$且$v_p(r)<\frac{12}{p-1}\rho$的情形都成立。

我们有 $U(O_K[[rf]])\subseteq O_K[[r^pf]]$ 当且仅当对每个固定的 $i\geq 0$，都有$U(r^if^i)=\sum_j b_jr^{pj}f^j$，其中 $b_j\in O_K$。代入上述 $c_{i,\ j}$后，我们可以改写为

$$U(r^if^i)=\sum_j c_{i,j}r^{i-pj}\cdot r^{pj}f^j$$

因此我们看到，当且仅当对所有 i,j， $v_p(c_{i,\ j}) \geq v_p(r)\cdot(pj-i)$ 时，答案是肯定的。也就是说，答案是肯定的，当且仅当

$$v_p(c_{i,j}) \geq a \cdot (pj - i)$$

对所有 i、j 以及某个正数常量 a （$= \frac{12}{p-1}\rho$）。

因此我们发现，对于 $p = 5$、7、13，问题的答案是否定的，这一点可由特殊例子看出。例如，若 $p = 5$ 计算出 $c_{4,\ 1} = 24$，其赋值为 0。

但对于 $p = 2$、3，答案是肯定的：从现在起假设 $p \in \{2, 3\}$。于是我们断言

$$(*) \qquad v_p(c_{i,j}) \geq \left(\gamma_p - \frac{1}{p-1}\right) \cdot (pj - i)$$

对所有 i、j。

现在我们必须离开概念性方法，转而采用临时论证：通过计算 $c_{i,\ j}$ 对 $i < p$ 并检验（$*$），然后利用 $c_{i,\ j}$ 的递推公式，对 i 关于 $i \geq p$进行归纳法，即可证明（$*$）。为免 $p = 2$，我们补充一些细节：于是有 $c_{1,\ 1} = 2^3 \cdot 3$ 以及 $c_{1,\ 2} = 2^{11}$，且（$*$）对 $i = 1$成立。对于 $i \geq 2$，有如下递推关系（约定：若任一指标为 < 0, 则 $c_{i,\ j} := 0$）：

$$c_{i,j} = 2^{12}c_{i-1,j-2} + 2^4 \cdot 3 \cdot c_{i-1,j-1} + c_{i-2,j-1}$$

由此通过对 $i \geq 2$ 使用归纳法，可以立即验证（$*$）。

给定（$*$），于是可以得出 $U(M_0(O_K, \geq \rho)) \subseteq M_0(O_K, \geq p\rho)$，其中

$$\rho = \frac{p-1}{12} \cdot \left(\gamma_p - \frac{1}{p-1}\right) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{12} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{4}, & p = 2 \\ \frac{1}{6}, & p = 3 \end{array} \right\} = \frac{1}{2p}$$

因此我们得到命题3.9。

3.3. 一些数值例子。下面给出几个数值例子，以说明这些定理。

首先假设 $p \in \{2, 3\}$ 且 $k \not\equiv 0$ (模 $2p$)。如上文已经解释的那样，如果我们展开 $V^{E_k^*}(E_k^*) = 1 + \sum_{i\geq 1} a_i\,(k)\, f_p^i$，那么命题 3.8 就转化为如下陈述：

$$v_p(a_i(k)) \geq \frac{12}{p-1} \cdot \frac{1}{2p} \cdot i = \left\{ \begin{array}{ll} 3i & \text{if } p = 2 \\ i & \text{if } p = 3. \end{array} \right.$$

由于对于任意给定的 k，展开都很容易计算（这是因为 f_p 的 q-展开以 q 开头），因此很容易找到一些例子，说明一般情况下无法改进这一点：对于 $p = 2$，考虑 $k = 6$ 或 $k = 10$。对于 $p = 3$，例如考虑取 k 等于 4、8 或 10。

若仍有 $p \in \{2, 3\}$，但 $k \equiv 0$ (模 $2p$)，则定理 A 反而推出

$$v_p(a_i(k)) \geq \frac{12}{p-1} \cdot \frac{t}{t+1} \cdot \frac{1}{p+1} \cdot i = \left\{ \begin{array}{ll} 4 \cdot \frac{t}{t+1} i & \text{if } p = 2 \\ \frac{3}{2} \cdot \frac{t}{t+1} i & \text{if } p = 3 \end{array} \right.$$

其中 t 如定理所述。这在（相对于 i）渐近地优于命题3.8所得的结论。

例如，取 $p = 2$， $k = 12$：计算可得 $v_2(a_2(12)) = 7$，而在$t = 5$ 此情形下，定理 A 给出的下界为 $20\frac{3}{5}$。命题 3.8 给出的下界恰好为 7（$s = 1$ 在此情形下）。然而， $v_2(a_{30}(12)) = 105$ 具有

定理 A 给出的下界等于 100，而命题3.8给出的下界等于 91。

最后，我们指出，对于素数 A ，定理 $p \geq 5$ 改进了 [11,定理 A] 在 $v_p(k) > 0$的情形。

References

[1] B. W. Advocaat, I. Kiming, G. Wiese：《Coleman 关于艾森斯坦族的猜想》，预印本 2022 https://arxiv.org/abs/2207.03822 。F. Andreatta, A. Iovita, G. Stevens：《[2] $GL_{2/F}$ 的过度收敛模层与模形式》，Israel J. Math. 201 (2014), 299–359。[3] K. Buzzard, L. J. P. Kilford：《权空间边界处的 2-adic 特征曲线》，Compositio Math. 141 (2005) 605–619。[4] F. Calegari：《Coleman–Mazur 特征曲线在整数权处是适当的》，Algebra Number Theory 2 (2008), 209–215。[5] R. F. Coleman：《p-adic Banach 空间与模形式族》，Invent. Math. 127 (1997), 417–479。[6] R. F. Coleman, G. Stevens, J. Teitelbaum：《模形式族的数值实验》，载于：D. A. Buell, J. T. Teitelbaum（编）：数论的计算视角。纪念 A. O. L. Atkin 的会议论文集，AMS/IP Studies in Advanced Mathematics 7 (1998), 143–158。[7] R. F. Coleman：《艾森斯坦族》，Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013), 2945–2950。[8] D. Destefano：《研究过收敛形式的斜率》，学位论文，哥本哈根大学，2017。[9] M. J. Emerton：《最小斜率的 2-adic 模形式》，学位论文，哈佛大学，1998。[10] N. M. Katz：《模概形与模形式的 p-adic 性质》，载于：W. Kuyk, J.-P. Serre：单变量模函数 III，Lecture Notes in Math. 350 (1973), 69–190。[11] I. Kiming, N. Rustom：《艾森斯坦级数、p-adic 模函数与过度收敛》，Res. Number Theory **7**, 65 2021 https://rdcu.be/cy3Bj 文章编号：( )。D. [12] Loeffler：《过收敛模函数的谱展开》，Int. Math. Res. Not. IMRN (2007)。[13] V. Pilloni：《过收敛形式》，Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 63 (2013), 219–239。[14] D. Roe：《权空间边界处的 3-adic 特征曲线》，Int. J. Number Theory 10 (2014), 1791–1806。[15] J.-P. Serre：《模形式与 p-adic ζ 函数》，载于 W. Kuyk, J.-P. Serre：单变量模函数 III，Lecture Notes in Math. 350，施普林格，1973 年，第 191–268 页。[16] L. M. Smithline：《 p-adic 模形式的斜率》，学位论文，伯克利，2000 年。[17] J. Vonk：《小素数的过收敛形式计算》，LMS J. Comput. Math. 18 (2015), 250–257。[18] D. Wan：《经典模形式与 p-adic 模形式的维数变化》，Invent. Math. 133 (1998), 449–463。

(IAN KIMING) Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, Universitetsparken 5, DK-2100 Copenhagen Ø, Denmark.
Email address: kiming@math.ku.dk

(NADIM RUSTOM) Tryg Forsikring A/S, Klausdalsbrovej 601, 2750 Ballerup, Denmark
Email address: restom.nadim@gmail.com