无名稿件编号（将由编辑插入）

无需对精确解作正则性假设的分数阶亚扩散方程时空有限差分近似的尖锐误差估计

聂大新 · 孙静 · 邓伟华

arXiv:2302.02632v1 [math.NA] 6 Feb 2023

收稿日期：日期 / 接受日期：日期

摘要：有限差分法作为一种常用的数值方法，已广泛用于求解分数阶扩散方程。在一般的空间误差分析中，使用中心有限差分格式求解含拉普拉斯算子的分数阶亚扩散方程时，需要假设 $u \in C^4(\bar{\Omega})$，才能保证 $\mathcal{O}(h^2)$ 收敛；然而，这一假设有些强，其中 u 是精确解，h 是网格尺寸。本文提出了一种新的分析技术，证明在一维区域中，当初值和源项均属于 $\hat{H}^{\sigma}(\Omega)$ 时，即使不对精确解作任何正则性假设，空间收敛阶在 l^2-范数和 l^{∞}-范数下均可达到 $\mathcal{O}(h^{\min(\sigma+\frac{1}{2}-\epsilon,2)})$，其中 $\sigma \geq 0$ 和 $\epsilon > 0$ 可任意小。对作用于初值和源项的格式稍作修改后，空间收敛阶在 l^2-范数下可提高至 $\mathcal{O}(h^2)$，在 l^{∞}-范数下可提高至 $\mathcal{O}(h^{\min(\sigma+\frac{3}{2}-\epsilon,2)})$。值得一提的是，利用张量积的性质，我们的空间误差分析可推广至高维

本研究得到国家自然科学基金（项目编号：12071195 和 12201270）、甘肃省基础研究创新群体（项目编号：22JR5RA391）、甘肃省科技计划（项目编号：22JR5RA535）、中央高校基本科研业务费专项资金（项目编号：lzujbky-2022-pd04）以及中国博士后科学基金（项目编号：2022M721439）的资助。聂大新，兰州大学数学与统计学院、甘肃省应用数学与复杂系统重点实验室，兰州 730000，中国。电子邮箱：ndx1993@163.com。孙静，兰州大学数学与统计学院、甘肃省应用数学与复杂系统重点实验室，兰州 730000，中国。电子邮箱：js@lzu.edu.cn。邓伟华，兰州大学数学与统计学院、甘肃省应用数学与复杂系统重点实验室，兰州 730000，中国。电子邮箱：dengwh@lzu.edu.cn

立方体区域。此外，本文给出了两种平均格式来近似 Riemann–Liouville 分数阶导数，并对所有 $\alpha \in (0,1)$ 得到了 $\mathcal{O}(\tau^2)$ 收敛。最后，通过若干数值实验验证了所建立理论的有效性。

关键词 分数阶亚扩散方程 · 拉普拉斯算子 · 中心有限差分法 · 修正格式 · 平均 $L1$ 格式 · 平均二阶后向差分格式 · 误差分析

1 引言

本文主要针对精确解不满足正则性假设的分数阶亚扩散方程有限差分格式，提出更精确的误差估计，即:

$$\begin{cases} {}_0\partial_t^{\alpha}(u-u_0)+Au=f & (x,t)\in\Omega\times(0,T], \\ u=0 & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T], \\ u(0)=u_0 & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega=(0,l)^d\in\mathbb{R}^d$，且不失一般性，我们取 $d=l=1$；$A=(-\Delta)$满足齐次狄利克雷边界条件，其特征值和特征函数为 $\{\lambda_k,\phi_k\}_{k=1}^{\infty}=\{k^2\pi^2,\sqrt{2}\sin(k\pi x)\}_{k=1}^{\infty}$，且特征函数在 $L^2(\Omega)$中正交； f 为源项； u_0 为初值；${}_0\partial_t^{\alpha}$为 Riemann–Liouville 分数阶导数， [22], 其定义为

$${}_0\partial_t^{\alpha}u=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t(t-\xi)^{-\alpha}u(\xi)d\xi.$$

分数阶亚扩散方程（1）描述了亚扩散 [2,20] 概率密度函数的演化，在物理学、生物学等领域有许多应用 [8,27]。迄今为止，已有大量关于分数阶亚扩散方程数值求解的研究 [6,7,12,14,17,21,24,25,26,28,29]。其中，中心有限差分格式是方程（1）中拉普拉斯算子的一种常用近似，在精确解满足正则性假设 $u\in C^4(\bar{\Omega})$ 的条件下，理论上可达到 $\mathcal{O}(h^2)$ 阶精度。这意味着初值和源项必须足够光滑，例如属于$\hat{}H^5(\Omega)$（相关正则性分析可参见 [23,24]）。然而，这些假设真的必要吗?

近年来，针对具有非光滑数据的分数阶偏微分方程，研究者提出了多种稳健的数值格式及相应的误差分析 [1,4,13,15,16,19]。据我们所知，关于中心有限差分格式的相关讨论似乎很少。主要原因在于，现有的有限差分格式误差估计是基于截断误差构造的，而在缺少精确解正则性假设的情况下，无法获得这些截断误差。

为弥补这一空缺，本文提出了一种无需对精确解作正则性假设的误差分析方法。具体而言，受这一思路启发

在 [9,10], 中，我们首先给出方程（1）的中心有限差分格式解的表示。随后，利用逼近理论和算子理论，当 $u_0, f(0) \in \hat{H}^{\sigma}(\Omega)$ 且 $\int_0^t \|f_t(s)\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)} ds < \infty$ 时（详见定理 1 和定理 2），可在 l^2-范数和 l^{∞}-范数下得到 $\mathcal{O}(h^{\min(\sigma+\frac{1}{2}-\epsilon,2)})$ 的空间收敛阶。此外，通过修改格式，即稍微改变初值和源项，可将空间收敛率提高至 $\mathcal{O}(h^2)$（l^2-范数下）和 $\mathcal{O}(h^{\min(\sigma+\frac{3}{2}-\epsilon,2)})$（$l^{\infty}$-范数下）。利用张量积的性质，也可类似地得到高维立方体区域的空间误差分析，详见注 4。另一方面，采用两种平均格式，即平均 $L1$ 格式和平均二阶后向差分（SBD）格式，对黎曼-刘维尔分数阶导数进行离散，并得到 $\mathcal{O}(\tau^2)$ 收敛。不同于 [29,30], 中给出的先前平均 $L1$ 格式的收敛性分析，我们的时间误差估计对所有 $\alpha \in (0, 1)$ 均成立。

本文安排如下。我们提出中心有限差分格式和修正的中心差分格式来近似拉普拉斯算子，并在第 2 节给出不依赖精确解正则性假设的相应误差分析。第 3 节构造了两个时间平均格式，并证明它们的收敛率对所有 $\alpha \in (0, 1)$ 均为 $\mathcal{O}(\tau^2)$。第 4 节通过多种数值实验验证我们的理论。最后，我们通过一些讨论总结全文。下文中，C 表示一个正常数，其取值在不同处可能不同；$\epsilon > 0$ 为任意小量，而“$\hat{}$”表示进行拉普拉斯变换。

2 空间半离散格式与误差分析

本节采用中心有限差分法对方程（1）中的拉普拉斯算子进行近似，并给出相应的误差分析。与传统误差分析相比，我们建立的空间误差分析仅依赖于初值和源项的正则性，而不依赖于精确解的正则性。随后，我们对该格式进行了一些修正，使空间收敛阶在l^2-范数下提高至 $\mathcal{O}(h^2)$，并在 l^{∞}-范数下提高至 $\mathcal{O}(h^{\min(\sigma+\frac{3}{2}-\epsilon,2)})$。

2.1 中心有限差分格式与误差分析

将分数阶 Sobolev 空间 $\hat{H}^s(\Omega)$ 定义为 $s \geq 0$，如下:

$$\hat{H}^s(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \|v\|_{\hat{H}^s(\Omega)} < \infty\},$$

其范数可定义为

$$\|v\|^2_{\hat{H}^s(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s (v, \phi_k)^2.$$

这里，$(\cdot,\cdot)$ 表示 L^2 内积，ϕ_k 是定义在 Ω 上满足齐次边界条件的拉普拉斯算子的特征函数。引入离散 l^2-范数和 l^∞-范数，定义为

$$\|\mathbf{v}\|_{l^2}^2 = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} v_k^2, \quad \|\mathbf{v}\|_{l^\infty} = \max_{1\le k\le M}|v_k|, \quad \text{for } \mathbf{v}=[v_1,v_2,\dots,v_M]^T \in \mathbb{R}^M.$$

设网格尺寸为 $h=1/N$, $N\in\mathbb{N}^*$和 $x_i = i/N$, $i=0,\dots,N$。定义算子 $\mathcal{I}_N$ 为

$$\mathcal{I}_N v = [v(x_1), v(x_2), \dots, v(x_{N-1})]^T \tag{2}$$

对于函数 v。记

$$\begin{aligned} \mathbf{u} =& [u_1,u_2,\dots,u_{N-1}]^T = \mathcal{I}_N u, \\ \mathbf{u}^0 =& [u_1^0,u_2^0,\dots,u_{N-1}^0]^T = \mathcal{I}_N u_0, \\ \mathbf{f} =& [f_1,f_2,\dots,f_{N-1}]^T = \mathcal{I}_N f. \end{aligned} \tag{3}$$

使用中心有限差分法离散负拉普拉斯算子 $-\Delta$，可得到方程（1）的空间半离散格式如下:

$${}_0\partial_t^\alpha (u_{h,i} - u_i^0) + N^2 \sum_{j=1}^{N-1} w_{i,j} u_{h,j} = f_i \tag{4}$$

with

$$w_{i,j} = \begin{cases} 2 & i=j, \\ -1 & |i-j|=1, \\ 0 & |i-j|>1, \end{cases}$$

对于 $i,j=1,2,\dots,N-1$。这里$u_{h,i}$是 x_i处 u的数值解。令 $\mathbf{u}_h=[u_{h,1},u_{h,2},\dots,u_{h,N-1}]^T$，矩阵 $\mathbf{A}=[N^2 w_{i,j}]_{i,j=1}^{N-1}$。则方程（4）变为

$${}_0\partial_t^\alpha (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}^0) + \mathbf{A}\mathbf{u}_h = \mathbf{f}. \tag{5}$$

对方程（5）进行拉普拉斯变换和拉普拉斯逆变换，解可写为

$$\mathbf{u}_h(t) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta} e^{zt} z^{\alpha-1}(z^\alpha + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{u}^0 dz + \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta} e^{zt}(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}\tilde{\mathbf{f}}dz, \tag{6}$$

其中，$\Gamma_\theta = \{z\in\mathbb{C}, |\arg(z)|=\theta, |z|>0, \theta\in(\pi/2,\pi)\}$，$\arg(z)$ 表示 z 的辐角，$\mathbf{i}$ 表示虚数单位。

另一方面，根据 [9,10], 矩阵$\mathbf{A}$ 的特征向量和特征值可得

$$\{\boldsymbol{\varphi}_{h,j}\}_{j=1}^{N-1} = \left\{ \left[\sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(j\frac{k}{N}\pi \right) \right]_{k=1}^{N-1} \right\}_{j=1}^{N-1}$$

and

$$\{\lambda_{h,j}\}_{j=1}^{N-1}=\left\{4N^2\sin^2\left(\frac{j}{2N}\pi\right)\right\}_{j=1}^{N-1}=\{j^2\pi^2c_j^N\}_{j=1}^{N-1}$$

with

$$c_j^N=\frac{\left(\sin\left(\frac{j\pi}{2N}\right)\right)^2}{\left(\frac{j\pi}{2N}\right)^2}.$$

因此，$\mathbf{u}_h(t)$ 可以用矩阵 A 的特征向量表示，即

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_h(t)=&\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta}e^{zt}z^{\alpha-1}(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}(\mathbf{u}^0)^T\boldsymbol{\varphi}_{h,i}\boldsymbol{\varphi}_{h,i}dz\\&+\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta}e^{zt}(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}(\tilde{\mathbf{f}})^T\boldsymbol{\varphi}_{h,i}\boldsymbol{\varphi}_{h,i}dz.\end{aligned}\tag{7}$$

进一步，定义 $u_{h,0}(t)=u_{h,N}(t)=0$，引入 $u_h(x,t)$ 和 $\phi_{h,j}(x)$，如下

$$\begin{aligned}&u_h(x,t)=u_{h,i}+(Nx-i)(u_{h,i+1}-u_{h,i})\qquad x\in[x_i,x_{i+1}),\ i=0,1,\dots,N-1,\\&\phi_{h,j}(x)=\phi_j(x_i)+(Nx-i)(\phi_j(x_{i+1})-\phi_j(x_i))\qquad x\in[x_i,x_{i+1}),\ i=0,1,\dots,N-1,\end{aligned}\tag{8}$$

˜并将 $E_h(z,x,y)$ 记为

$$\tilde{E}_h(z,x,y)=\sum_{i=1}^{N-1}(z^\alpha+\lambda_{h,i})^{-1}\phi_{h,i}(x)\phi_i(\eta_h(y)),\tag{9}$$

其中 $\eta_h(y)=[Ny]/N$，且 $[Ny]$ 表示 Ny 的整数部分。因此，根据 (7)，我们可以得到

$$\begin{aligned}u_h(x,t)=&\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta}e^{zt}z^{\alpha-1}\int_0^1\tilde{E}_h(z,x,y)u_0(\eta_h(y))dydz\\&+\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta}e^{zt}\int_0^1\tilde{E}_h(z,x,y)\tilde{f}(\eta_h(y))dydz\\=&\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta}e^{zt}z^{\alpha-1}\int_0^1\tilde{E}_h(z,x,y)u_0(\eta_h(y))dydz\\&+\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta}e^{zt}z^{-1}\int_0^1\tilde{E}_h(z,x,y)\tilde{f}_t(\eta_h(y))dydz\\&+\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta}e^{zt}z^{-1}\int_0^1\tilde{E}_h(z,x,y)f(\eta_h(y),0)dydz,\end{aligned}\tag{10}$$

其中，我们使用 $f(t)=f(0)+\int_0^t f_t(s)ds$，而 f_t 表示 f 关于 t 的一阶导数。

同理，方程（1）的解可表示为

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma_\theta} e^{zt} z^{\alpha-1} \int_0^1 \tilde{E}(z,x,y) u_0(y) dy dz \\ &+ \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma_\theta} e^{zt} \int_0^1 \tilde{E}(z,x,y) \tilde{f}(y) dy dz \\ =& \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma_\theta} e^{zt} z^{\alpha-1} \int_0^1 \tilde{E}(z,x,y) u_0(y) dy dz \\ &+ \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma_\theta} e^{zt} z^{-1} \int_0^1 \tilde{E}(z,x,y) \tilde{f}_t(y) dy dz \\ &+ \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma_\theta} e^{zt} z^{-1} \int_0^1 \tilde{E}(z,x,y) f(y,0) dy dz, \end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$\tilde{E}(z,x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} (z^\alpha + \lambda_i)^{-1} \phi_i(x) \phi_i(y).$$

接下来，我们给出一些有用的引理，它们在后续的误差分析中发挥着重要作用。

引理1 设 $w(x) = \int_0^1 \tilde{E}(z,x,y) v(y) dy$ 且 $w_h(x) = \int_0^1 \tilde{E}_h(z,x,y) v(\eta_h(y)) dy$ 满足 $z \in \Sigma_\theta = \{z \in C, |\arg(z)| \le \theta, |z| > 0, \theta \in (\pi/2, \pi)\}$。若 $v \in H^\sigma(\Omega)$ 且$\sigma \ge 0$, 则有

$$\|w - w_h\|_{L^\infty(\Omega)} \le C h^{\min(\sigma + \frac{1}{2} - 2\gamma - \epsilon, 2)} |z|^{-\gamma\alpha} \|v\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)}$$

其中 $\gamma \in [0, \frac{1}{4})$。

证明 写作 $\ell_h = |\ln(h)|^{\frac{1}{2}}$，并令 $\chi_0(x)$ 为 $x = 0$ 上的特征函数，即

$$\chi_0(x) = \begin{cases} 1 & x = 0, \\ 0 & x \ne 0. \end{cases}$$

根据 w 和 w_h 的定义，可得

$$\begin{aligned}
&\|w-w_h\|_{L^\infty(\Omega)}\\
\leq& C\left\|\sum_{i=N}^{\infty}(z^\alpha+\lambda_i)^{-1}\phi_i(x)(\phi_i(y),v(y))\right\|_{L^\infty(\Omega)}\\
&+C\left\|\sum_{i=1}^{N-1}((z^\alpha+\lambda_i)^{-1}-(z^\alpha+\lambda_{h,i})^{-1})\phi_i(x)(\phi_i(y),v(y))\right\|_{L^\infty(\Omega)}\\
&+C\left\|\sum_{i=1}^{N-1}(z^\alpha+\lambda_{h,i})^{-1}(\phi_i(x)-\phi_{h,i}(x))(\phi_i(y),v(y))\right\|_{L^\infty(\Omega)}\\
&+C\left\|\sum_{i=1}^{N-1}(z^\alpha+\lambda_{h,i})^{-1}\phi_{h,i}(x)((\phi_i(y),v(y))-(\phi_i(\eta_h(y)),v(\eta_h(y))))\right\|_{L^\infty(\Omega)}\\
\leq& I+II+III+IV.
\end{aligned}$$

利用 $v\in \mathring{H}^\sigma(\Omega)$、 $\lambda_k=k^2\pi^2$, $\|\phi_i(x)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C$, 以及 $|\lambda_i^{1-\gamma}(z^\alpha+\lambda_i)^{-1}|\leq C|z|^{-\gamma\alpha}$，对于 $z\in\Sigma_\theta$ 和 $\gamma\in[0,1]$ [18]，第一项 I 可估计为

$$\begin{aligned}
I\leq& C\left\|\sum_{i=N}^{\infty}\lambda_i^{\gamma-1}\lambda_i^{1-\gamma}(z^\alpha+\lambda_i)^{-1}\phi_i(x)(\phi_i(y),v(y))\right\|_{L^\infty(\Omega)}\\
\leq& C\lambda_N^{\frac14-\frac{\sigma}{2}+\gamma-1+\epsilon}\sum_{i=N}^{\infty}|\lambda_i^{1-\gamma}(z^\alpha+\lambda_i)^{-1}|\|\phi_i(x)\|_{L^\infty(\Omega)}|\lambda_i^{\frac{\sigma}{2}-\frac14-\epsilon}(\phi_i(y),v(y))|\\
\leq& C\lambda_N^{\frac14-\frac{\sigma}{2}+\gamma-1+\epsilon}\left(\sum_{i=N}^{\infty}|z|^{-2\gamma\alpha}\lambda_i^{\sigma}(\phi_i(y),v(y))^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{i=N}^{\infty}\lambda_i^{-\frac12-2\epsilon}\right)^{\frac12}\\
\leq& C\lambda_N^{\frac14-\frac{\sigma}{2}+\gamma-1}|z|^{-\gamma\alpha}\|v\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)}.
\end{aligned}$$

为了估计 II，我们引入 $K_j=1-(c_j^N)^{-1}$。于是

$$|K_j|=\frac{\left(\frac{j\pi}{2N}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{j\pi}{2N}\right)}-1=\frac{\left(\frac{j\pi}{2N}\right)^2-\sin^2\left(\frac{j\pi}{2N}\right)}{\sin^2\left(\frac{j\pi}{2N}\right)}.$$

由于

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2-\sin^2(x)}{\sin^2(x)}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2(x)}{\sin^2(x)x^2}=\frac13,$$

由此可得

$$|K_j|\leq C\left(\frac{j\pi}{2N}\right)^2.$$

因此，结合以下事实

$$\begin{aligned}&(z^\alpha+\lambda_i)^{-1}-(z^\alpha+\lambda_{h,i})^{-1}\\=&(\lambda_{h,i}-\lambda_i)(z^\alpha+\lambda_i)^{-1}(z^\alpha+\lambda_{h,i})^{-1}\\=&K_i\lambda_{h,i}(z^\alpha+\lambda_i)^{-1}(z^\alpha+\lambda_{h,i})^{-1},\end{aligned}$$

$\lambda_k=k^2\pi^2$，并且对于 $z\in\Sigma_\theta$ 和 $\gamma\in[0,1]$ [18]，$|\lambda_i^{1-\gamma}(z^\alpha+\lambda_i)^{-1}|\le C|z|^{-\gamma\alpha}$，我们得到

$$\begin{aligned}II\le&C\left\|\sum_{i=1}^{N-1}(1-(c_i^N)^{-1})\lambda_{h,i}(z^\alpha+\lambda_i)^{-1}(z^\alpha+\lambda_{h,i})^{-1}\phi_i(x)(\phi_i(y),v(y))\right\|_{L^\infty(\Omega)}\\\le&C\lambda_N^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N-1}|\lambda_i^{1-\gamma}(z^\alpha+\lambda_i)^{-1}|^2\lambda_i^\sigma(\phi_i(y),v(y))^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{i=1}^{N-1}\lambda_i^{2\gamma-\sigma}\right)^{\frac12}\\\le&C\lambda_N^{\max(\frac14-\frac\sigma2+\gamma-1,-1)}\ell_h^{\chi_0(\frac14-\frac\sigma2+\gamma)}|z|^{-\gamma\alpha}\|v\|_{\hat H^\sigma(\Omega)}.\end{aligned}$$

类似地，利用插值理论 [3], ，可得

$$\begin{aligned}III\le&C\left(\sum_{i=1}^{N-1}(\lambda_i^{1-\gamma}(z^\alpha+\lambda_i)^{-1})^2\lambda_i^\sigma(\phi_i(y),v(y))^2\right)^{\frac12}\left\|\sum_{i=1}^{N-1}\lambda_i^{2\gamma-2-\sigma}(\phi_i(x)-\phi_{h,i}(x))^2\right\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac12}\\\le&C\lambda_N^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N-1}(\lambda_i^{1-\gamma}(z^\alpha+\lambda_i)^{-1})^2\lambda_i^\sigma(\phi_i(y),v(y))^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{i=1}^{N-1}\lambda_i^{2\gamma-\sigma}\right)^{\frac12}\\\le&C\lambda_N^{\max(\frac14-\frac\sigma2+\gamma-1,-1)}\ell_h^{\chi_0(\frac14-\frac\sigma2+\gamma)}|z|^{-\gamma\alpha}\|v\|_{\hat H^\sigma(\Omega)}.\end{aligned}$$

至于 IV，将 v 分成两部分，即

$$v=v_N+v_R=\sum_{k=1}^{N-1}(v,\phi_k)\phi_k+\sum_{k=N}^{\infty}(v,\phi_k)\phi_k,$$

并利用离散 H¨older 不等式，可得

$$\begin{aligned}IV\le&C\left(\sum_{i=1}^{N-1}\lambda_{h,i}^{-1/2-\epsilon}|\lambda_{h,i}^{1-\gamma}(z^\alpha+\lambda_{h,i})^{-1}|^2\|\phi_{h,i}(x)\|_{L^\infty(\Omega)}^2\right)^{\frac12}\\&\cdot\left(\sum_{i=1}^{N-1}\lambda_{h,i}^{\epsilon-\frac32+2\gamma}((\phi_i(y),v(y))-(\phi_i(\eta_h(y)),v_N(\eta_h(y))))^2\right.\\&\left.+\sum_{i=1}^{N-1}\lambda_{h,i}^{\epsilon-\frac32+2\gamma}((\phi_i(\eta_h(y)),v_R(\eta_h(y))))^2\right)^{\frac12}.\end{aligned}$$

利用 v_N 的定义和 $\{\boldsymbol{\varphi}_{h,k}\}_{k=1}^\infty$ 的正交性，可以得到

$$\sum_{i=1}^{N-1}\lambda_{h,i}^{\epsilon-\frac32+2\gamma}((\phi_i(y),v(y))-(\phi_i(\eta_h(y)),v_N(\eta_h(y))))^2=0.$$

至于 $\sum_{i=1}^{N-1}\lambda_{h\ i}^{\epsilon-\frac{3}{2}+2\gamma},((\phi_i(\eta_h(y))\ v_R(\eta_h(y))))^2,$，经过简单计算可得

$$(\phi_i(\eta_h(y)),v_R(\eta_h(y)))\le\|\phi_i(\eta_h(y))\|_{\hat{H}^{\frac{1}{2}-2\gamma-\epsilon}(\Omega)}\|v_R(\eta_h(y))\|_{\hat{H}^{-\frac{1}{2}+2\gamma+\epsilon}(\Omega)},$$

其中我们需要满足 $\gamma\in[0,\frac{1}{4})$ 。利用 v_R 的定义和插值定理 [3] 可得

$$\begin{aligned}&\|\phi_i(\eta_h(y))\|_{\hat{H}^{\frac{1}{2}-2\gamma-\epsilon}(\Omega)}\\\le&\|\phi_i(\eta_h(y))-\phi_i(y)\|_{\hat{H}^{\frac{1}{2}-2\gamma-\epsilon}(\Omega)}+\|\phi_i(y)\|_{\hat{H}^{\frac{1}{2}-2\gamma-\epsilon}(\Omega)}\\\le&C\|\phi_i\|_{\hat{H}^{\frac{1}{2}-2\gamma-\epsilon}(\Omega)}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\|v_R(\eta_h(y))\|_{\hat{H}^{-\frac{1}{2}+2\gamma+\epsilon}(\Omega)}\\\le&C\left(\sum_{k=N}^{\infty}\lambda_k^{-\frac{1}{2}+2\gamma+\epsilon}(v_R(\eta_h(y)),\phi_k(y))^2\right)^{1/2}\\\le&C\lambda_N^{-\frac{1}{4}+\gamma+\epsilon/2-\frac{\sigma}{2}}\|v_R(\eta_h(y))\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}\\\le&C\lambda_N^{-\frac{1}{4}+\gamma+\epsilon/2-\frac{\sigma}{2}}\|v\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{N-1}\lambda_{h,i}^{\epsilon-\frac{3}{2}+2\gamma}((\phi_i(\eta_h(y)),v_R(\eta_h(y))))^2\right)^{\frac{1}{2}}\\\le&C\lambda_N^{-\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{2}+\gamma+\epsilon}\left(\sum_{i=1}^{N-1}\lambda_{h,i}^{-1+\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\|v\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}\le C\lambda_N^{-\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{2}+\gamma+\epsilon}\|v\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)},\end{aligned}$$

由此可得

$$IV\le C\lambda_N^{-\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{2}+\gamma+\epsilon}|z|^{-\gamma\alpha}\|v\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}.$$

因此，汇总上述估计即可得到所需结果。

注1 事实上，根据 $\phi_{h,i}$ 的定义，如果我们只关注 $\{x_i\}_{i=1}^{N-1}$ 上的误差，那么引理1证明中关于 III 的估计可以忽略。

引理2 设 $w(x)=\int_0^1\tilde{E}(z,x,y)v(y)dy$ 和 $w_h(x)=\int_0^1\tilde{E}_h(z,x,y)v(\eta_h(y))dy$，其中 $z\in\Sigma_\theta=\{z\in C,|\arg(z)|\le\theta,|z|>0,\theta\in(\pi/2,\pi)\}$。若 $v\in\hat{}H^{\sigma}(\Omega)$ 且$\sigma\ge0$，则有

$$\|\mathcal{I}_Nw-\mathcal{I}_Nw_h\|_{l^2}\le Ch^{\min(\sigma+\frac{1}{2}-2\gamma-\epsilon,2)}|z|^{-\gamma\alpha}\|v\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}$$

其中 $\gamma\in[0,\frac{1}{4})$ 和 $\mathcal{I}_N$ 在式 (2) 中定义。

证明 根据 w 和 w_h 的定义，可得

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{I}_N w - \mathcal{I}_N w_h\|_{l^2} \\
\leq & C \left\| \mathcal{I}_N \sum_{i=N}^{\infty} (z^\alpha + \lambda_i)^{-1} \phi_i(x)(\phi_i(y), v(y)) \right\|_{l^2} \\
& + C \left\| \mathcal{I}_N \sum_{i=1}^{N-1} ((z^\alpha + \lambda_i)^{-1} - (z^\alpha + \lambda_{h,i})^{-1}) \phi_i(x)(\phi_i(y), v(y)) \right\|_{l^2} \\
& + C \left\| \mathcal{I}_N \sum_{i=1}^{N-1} (z^\alpha + \lambda_{h,i})^{-1} (\phi_i(x) - \phi_{h,i}(x))(\phi_i(y), v(y)) \right\|_{l^2} \\
& + C \left\| \mathcal{I}_N \sum_{i=1}^{N-1} (z^\alpha + \lambda_{h,i})^{-1} \phi_{h,i}(x)((\phi_i(y), v(y)) - (\phi_i(\eta_h(y)), v(\eta_h(y)))) \right\|_{l^2} \\
\leq & I + II + III + IV.
\end{aligned}$$

通过使用 $v \in \hat{H}^\sigma(\Omega)$、 $\lambda_k = k^2\pi^2$、 $\|\phi_i(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$ 以及 $|\lambda_i^{1-\gamma}(z^\alpha + \lambda_i)^{-1}| \leq C|z|^{-\gamma\alpha}$，对于 $z \in \Sigma_\theta$ 和 $\gamma \in [0, 1]$ [18]， I 可估计为

$$\begin{aligned}
I^2 \leq & C \sum_{i=N}^{\infty} (\lambda_i^{\gamma-1} \lambda_i^{1-\gamma} (z^\alpha + \lambda_i)^{-1})^2 (\phi_i(y), v(y))^2 \\
\leq & C \lambda_N^{-\sigma+2\gamma-2} \sum_{i=N}^{\infty} (\lambda_i^{1-\gamma} (z^\alpha + \lambda_i)^{-1})^2 \lambda_i^\sigma (\phi_i(y), v(y))^2 \\
\leq & C \lambda_N^{-\sigma+2\gamma-2} |z|^{-2\gamma\alpha} \|v\|^2_{\dot{H}^\sigma(\Omega)}.
\end{aligned}$$

根据引理1的证明，有 $|K_j| = |1 - (c_j^N)^{-1}| \leq C\left(\frac{j\pi}{2N}\right)^2$，从而得到

$$\begin{aligned}
II^2 \leq & C \sum_{i=1}^{N-1} (K_i \lambda_{h,i} (z^\alpha + \lambda_i)^{-1} (z^\alpha + \lambda_{h,i})^{-1})^2 (\phi_i(y), v(y))^2 \\
\leq & C \lambda_N^{-2+\max(2\gamma-\sigma, 0)} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\lambda_i^{1-\gamma} (z^\alpha + \lambda_i)^{-1}\right)^2 \lambda_i^\sigma (\phi_i(y), v(y))^2 \\
\leq & C \lambda_N^{-2+\max(2\gamma-\sigma, 0)} |z|^{-2\gamma\alpha} \|v\|^2_{\dot{H}^\sigma(\Omega)}.
\end{aligned}$$

由注1可容易得到

$$III = 0.$$

对于 IV，将 v 分成两部分，即，

$$v = v_N + v_R = \sum_{k=1}^{N-1} (v, \phi_k)\phi_k + \sum_{k=N}^{\infty} (v, \phi_k)\phi_k,$$

并利用 v_n 的定义和 $\{\boldsymbol{\varphi}_{h,k}\}_{k=1}^{\infty}$的正交性，我们得到

$$IV^2 \leq C\sum_{i=1}^{N-1}\left((z^\alpha+\lambda_{h,i})^{-1}\right)^2(\phi_i(\eta_h(y)),v_R(\eta_h(y)))^2.$$

由引理1的证明可得

$$(\phi_i(\eta_h(y)),v_R(\eta_h(y)))\leq C\lambda_N^{-\frac{\sigma-\epsilon}{2}-\frac{1}{4}}\|\phi_i(\eta_h(y))\|_{\hat{H}^{\frac{1}{2}-\epsilon}(\Omega)}\|v\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)}.$$

Thus

$$IV\leq C\lambda_N^{-\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{2}+\gamma+\epsilon}|z|^{-\gamma\alpha}\|v\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)}.$$

因此，汇总上述估计即可得到所需结果。

现在，我们分别讨论求解齐次和非齐次问题 (1) 时的空间误差估计。

定理1 设 u 和 $\mathbf{u}_h$ 分别是方程 (1)ˆ和 (4) 的解，其定义见 (3) 和 (8)。设 $u_0\in H^\sigma(\Omega)$ 和 $f=0$，其中 $\sigma\geq 0$。则有

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{l^\infty}\leq\|u-u_h\|_{L^\infty(\Omega)}\leq Ch^{\min(\sigma+\frac{1}{2}-2\gamma-\epsilon,2)}t^{-\alpha}\|u_0\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)}$$

and

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{l^2}\leq Ch^{\min(\sigma+\frac{1}{2}-2\gamma-\epsilon,2)}t^{-\alpha}\|u_0\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)}.$$

证明 根据 (11) 和 (10)，有

$$\|u-u_h\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C\left\|\int_{\Gamma_\theta}e^{zt}z^{\alpha-1}\left(\int_0^1\tilde{E}(z,x,y)u_0(y)dy-\int_0^1\tilde{E}_h(z,x,y)u_0(\eta_h(y))dy\right)dz\right\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

由引理1和简单计算可得

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_{L^\infty(\Omega)}\leq&C\int_{\Gamma_\theta}|e^{zt}||z|^{\alpha-1}\left\|\int_0^1\tilde{E}(z,x,y)u_0(y)dy-\int_0^1\tilde{E}_h(z,x,y)u_0(\eta_h(y))dy\right\|_{L^\infty(\Omega)}|dz|\\ \leq&Ch^{\min(\sigma+\frac{1}{2}-2\gamma-\epsilon,2)}\int_{\Gamma_\theta}|e^{zt}||z|^{\alpha-1}|dz|\|u_0\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)}\\ \leq&Ch^{\min(\sigma+\frac{1}{2}-2\gamma-\epsilon,2)}t^{-\alpha}\|u_0\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)},\end{aligned}$$

由此可得所需的第一个结果。至于第二个估计，同理可得。

与定理1的证明类似，可以得到非齐次问题 (1) 的如下误差估计。

定理 2 设 u 和 $\mathbf{u}_h$ 是方程 (1) 和 (4) 的解，分别定义于 (3) 和 (8)。假设 $u_0 = 0$, $f(0) \in \hat{H}^\sigma(\Omega)$，且 $\int_0^t \|f_t(s)\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)} ds < \infty$，其中 $\sigma \geq 0$。则有

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{l^\infty} \leq & \|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \\ \leq & Ch^{\min(\sigma+\frac{1}{2}-\epsilon,2)} \left(\|f(0)\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)} + \int_0^t \|f_t(s)\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)} ds \right),\end{aligned}$$

and

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{l^2} \leq Ch^{\min(\sigma+\frac{1}{2}-\epsilon,2)} \left(\|f(0)\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)} + \int_0^t \|f_t(s)\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)} ds \right).$$

注 2 事实上，若 $u_0 = 0$ and $\int_0^t (t-s)^{-1+\epsilon\alpha} \|f(s)\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)} ds < \infty$ with $\sigma \in [0, \frac{3}{2}]$，相应的空间误差估计可写为

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{l^\infty} \leq \|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^{\sigma+\frac{1}{2}-3\epsilon} \int_0^t (t-s)^{-1+\epsilon\alpha} \|f(s)\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)} ds$$

and

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{l^2} \leq Ch^{\sigma+\frac{1}{2}-3\epsilon} \int_0^t (t-s)^{-1+\epsilon\alpha} \|f(s)\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)} ds,$$

由引理 1 和引理 2 可得。若 $u_0 = 0$ and $\int_0^t (t-s)^{-1+\gamma\alpha} \|f(s)\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)} ds < \infty$ with $\sigma > \frac{3}{2}$ and $\gamma = \min(\frac{2\sigma-3}{8}, 1 8) > 0$，则空间误差估计变为

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{l^\infty} \leq \|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^2 \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma\alpha} \|f(s)\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)} ds$$

and

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{l^2} \leq Ch^2 \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma\alpha} \|f(s)\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)} ds.$$

2.2 修正中心有限差分格式及误差分析

这里我们首先引入如下投影，即定义投影算子 $P_N : L^2(\Omega) \to \mathbb{H}_N$ 满足

$$(P_N u, v_N) = (u, v_N) \quad \forall v \in \mathbb{H}_N,$$

其中 $\mathbb{H}_N$ =张成$\{\phi_k\}_{k=1}^{N-1}$。容易看出

$$P_N u = \sum_{k=1}^{N-1} (u, \phi_k) \phi_k.$$

从引理1的证明中可以看出，空间收敛阶主要受限于对 $(\phi_i(\eta_h(y)) \ v_R(\eta_h(y)))$ 的估计，其中 $v_R = \sum_{k=N}^{\infty} (v, \phi_k) \phi_k$。提高收敛率的一个直接思路是如何

在误差分析中避免这些项。基于这一思路，可以给出一种修正中心有限差分格式，即

$$ {}_0\partial_t^\alpha(u_{h,p,i}-u_{p,i}^0)+N^2\sum_{j=1}^{N-1}w_{i,j}u_{h,p,j}=f_{p,i}. \tag{12}$$

这里，$u_{h,\ p,\ i}$ 是在 x_i处 u 的数值解，$u_{p,\ i}^0=(P_Nu_0)(x_i)$，以及$f_{p,\ i}=(P_Nf)(x_i)$。

记$\mathbf{u}_{h,\ p}=[u_{h,p,1},u_{h,p,2},\dots,u_{h,p,N-1}]^T$、$\mathbf{u}_p^0=[u_{p,1}^0,u_{p,2}^0,\dots,u_{p,N-1}^0]^T=\mathcal{I}_N(P_Nu_0)=\mathcal{I}_Nu_{0,\ N}$和$\mathbf{f}_p=[f_{p,1},f_{p,2},\dots,f_{p,N-1}]^T=\mathcal{I}_N(P_Nf)=\mathcal{I}_Nf_N$。因此，方程（12）的解为

$$\mathbf{u}_{h,p}(t)=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta}e^{zt}z^{\alpha-1}(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}\mathbf{u}_p^0dz+\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta}e^{zt}(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}\tilde{\mathbf{f}}_pdz. \tag{13}$$

类似地，令$u_{h,\ p,\ 0}=u_{h,\ p,\ N}=0$，引入

$$u_{h,p}(x,t)=u_{h,p,i}+(Nx-i)(u_{h,p,i+1}-u_{h,p,i})\qquad x\in[x_i,x_{i+1}),\ i=0,1,\dots,N-1. \tag{14}$$

那么，$u_{h,\ p}$ 可表示为

$$\begin{aligned}u_{h,p}(x,t)=&\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta}e^{zt}z^{\alpha-1}\int_0^1\tilde{E}_h(z,x,y)u_{0,N}(\eta_h(y))dydz\\&+\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta}e^{zt}\int_0^1\tilde{E}_h(z,x,y)\tilde{f}_N(\eta_h(y))dydz\\=&\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta}e^{zt}z^{\alpha-1}\int_0^1\tilde{E}_h(z,x,y)u_{0,N}(\eta_h(y))dydz\\&+\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta}e^{zt}z^{-1}\int_0^1\tilde{E}_h(z,x,y)\tilde{f}_{N,t}(\eta_h(y))dydz\\&+\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta}e^{zt}z^{-1}\int_0^1\tilde{E}_h(z,x,y)f_N(\eta_h(y),0)dydz\end{aligned} \tag{15}$$

其中，$f_{N,\ t}$ 是 f_N 关于 t的一阶导数。

根据引理 1、2 和注1的证明，可以很容易得到以下引理。

引理 3 设 $w(x)=\int_0^1\tilde{E}(z,x,y)v(y)dy$和 $w_h(x)=\int_0^1\tilde{E}_h(z,x,y)v_N(\eta_h(y))dy$，其中 $z\in\Sigma_\theta$和 $v_N=P_Nv$。若 $v\in\mathring{H}^\sigma(\Omega)$且 $\sigma\geq0$，则有

$$\|\mathcal{I}_Nw-\mathcal{I}_Nw_h\|_{l^\infty}\leq Ch^{\max(\sigma+\frac{3}{2}-2\gamma,2)}\ell_h^{\chi_0(\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{2}+\gamma)}|z|^{-\gamma\alpha}\|v\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)}$$

and

$$\|\mathcal{I}_Nw-\mathcal{I}_Nw_h\|_{l^2}\leq Ch^{2-\max(2\gamma-\sigma,0)}|z|^{-\gamma\alpha}\|v\|_{\hat{H}^\sigma(\Omega)}$$

其中$\gamma\in[0,\frac{1}{4})$，$\ell_h=|\ln(h)|^{\frac{1}{2}}$，而 $\chi_0(x)$是$x=0$上的特征函数。

类似地，可以分别得到修正格式 (12) 求解齐次问题和非齐次问题 (1) 的误差估计。

定理 3 设 u 和 $\mathbf{u}_{h,\ p}$分别为方程 ˆ (1) 和 (12) 中定义的解。设 $u_0 \in H^{\sigma}(\Omega)$ 和 $f = 0$ 满足 $\sigma \geq 0$。则有

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{h,p}\|_{l^{\infty}} \leq Ch^{\min(\sigma+\frac{3}{2},2)}\ell_h^{\chi_0(\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{2})}t^{-\alpha}\|u_0\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}$$

and

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{h,p}\|_{l^2} \leq Ch^2t^{-\alpha}\|u_0\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}.$$

定理 4 设 u 和 $\mathbf{u}_{h,\ p}$分别为方程 (1 12 $u_0 = 0\ \ f\ 0\ \in H^{\sigma}\ \Omega$ $\int_0^t \|f_t\ s\ \|_{H^{\sigma}\ \Omega}\ ds <$) ∞ $\sigma \geq 0$ 和 ( ) 中定义的解。假设，( ) ˆ ( )，且 ( )˙() 满足 。则有

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{h,p}\|_{l^{\infty}} \leq Ch^{\min(\sigma+\frac{3}{2},2)}\ell_h^{\chi_0(\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{2})}\left(\|f(0)\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)} + \int_0^t \|f_t(s)\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}ds\right)$$

and

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{h,p}\|_{l^2} \leq Ch^2\left(\|f(0)\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)} + \int_0^t \|f_t(s)\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}ds\right).$$

注 3 类似地，若 $u_0 = 0$和 $\int_0^t (t-s)^{-1+\epsilon\alpha}\|f(s)\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}ds < \infty$满足 $\sigma \in [0, \frac{1}{2}]$，则有

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{h,p}\|_{l^{\infty}} \leq Ch^{\sigma+\frac{3}{2}-2\epsilon}\int_0^t (t-s)^{-1+\epsilon\alpha}\|f(s)\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}ds$$

and

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{h,p}\|_{l^2} \leq Ch^{2-2\epsilon}\int_0^t (t-s)^{-1+\epsilon\alpha}\|f(s)\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}ds.$$

而当 $u_0 = 0$和 $\int_0^t (t-s)^{-1+\gamma\alpha}\|f(s)\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}ds < \infty$满足 $\sigma > \frac{1}{2}$且$\gamma = \min(\frac{2\sigma-1}{8}, 1\,8) > 0$时，空间误差估计变为

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{h,p}\|_{l^{\infty}} \leq Ch^2\int_0^t (t-s)^{-1+\gamma\alpha}\|f(s)\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}ds$$

and

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{h,p}\|_{l^2} \leq Ch^2\int_0^t (t-s)^{-1+\gamma\alpha}\|f(s)\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}ds.$$

注 4 对于 d 维立方体区域 ($d \geq 1$)，与上述讨论类似，使用修正格式求解方程（1）时，我们有以下误差估计：

1. 若 $u_0 \in \hat{H}^{\sigma}(\Omega)$ 且 $f = 0$ 满足 $\sigma \geq 0$，则

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{h,p}\|_{l^2} \leq Ch^2t^{-\alpha}\|u_0\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)},$$

其中 u 和 $\mathbf{u}_{h,\ p}$ 分别是精确解和数值解；

2. 如果 $u_0 \in \hat{H}^{\sigma}(\Omega)$ 且 $f=0$ 满足 $\sigma \geq \max(0, \frac{d}{2}-2)$，则

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_{h,p}\|_{l^\infty} \leq Ch^{\min(\sigma+2-\frac{d}{2},2)}\ell_h^{\chi_0(\frac{d}{4}-\frac{\sigma}{2})}t^{-\alpha}\|u_0\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)},$$

其中，$\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{u}_{h,\ p}$ 分别是精确解和数值解；

3. 若 $u_0=0$, $f(0) \in \hat{H}^{\sigma}(\Omega)$，且 $\int_0^t \|f_t(s)\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}ds<\infty$ 满足 $\sigma \geq 0$，则

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_{h,p}\|_{l^2} \leq Ch^2\left(\|f(0)\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}+\int_0^t \|f_t(s)\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}ds\right),$$

其中，$\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{u}_{h,\ p}$ 分别是精确解和数值解；

4. 若 $u_0=0$, $f(0) \in \hat{H}^{\sigma}(\Omega)$，且 $\int_0^t \|f_t(s)\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}ds<\infty$ 满足 $\sigma \geq \max(0, \frac{d}{2}-2)$，则

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_{h,p}\|_{l^\infty} \leq Ch^{\min(\sigma+2-\frac{d}{2},2)}\ell_h^{\chi_0(\frac{d}{4}-\frac{\sigma}{2})}\left(\|f(0)\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}+\int_0^t \|f_t(s)\|_{\hat{H}^{\sigma}(\Omega)}ds\right),$$

其中，$\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{u}_{h,\ p}$ 分别是精确解和数值解。

3 全离散格式与误差分析

本节遵循 [11,29,30], 中构造平均格式的思路，为方程 (4) 给出两种平均格式，即平均 $L1(\overline{L1})$ 格式和平均二阶后向差分 $(\overline{SBD})$ 格式，并进一步提出相应的误差分析。与已有讨论相比，本文给出的分析适用于所有 $\alpha \in (0,1)$。

令时间步长为 $\tau=T/L$，其中 $L \in \mathbb{N}^*$ 且 $t_i=i\tau,\ \ i=0,\ 1,2,\ldots,L$。将方程 (5) 在 t_{n-1} 到 t_n 上积分，可得

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\int_{t_{n-1}}^{t}(t-s)^{-\alpha}\partial_s(\mathbf{u}_h-\mathbf{u}^0)ds+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t-s)^{-\alpha}\partial_s(\mathbf{u}_h-\mathbf{u}^0)ds\right)dt + \frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{A}\mathbf{u}_h(s)ds=\frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{f}(s)ds.$$

交换积分次序可得

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\tau}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{s}^{t_n}(t-s)^{-\alpha}dt\partial_s(\mathbf{u}_h-\mathbf{u}^0)ds+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t-s)^{-\alpha}dt\partial_s(\mathbf{u}_h-\mathbf{u}^0)ds\right) + \frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{A}\mathbf{u}_h(s)ds=\frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{f}(s)ds.$$

简单计算可得

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau}\left(\int_0^{t_n}(t_n-s)^{1-\alpha}\partial_s(\mathbf{u}_h-\mathbf{u}^0)ds-\int_0^{t_{n-1}}(t_{n-1}-s)^{1-\alpha}\partial_s(\mathbf{u}_h-\mathbf{u}^0)ds\right)$$
$$+\frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{A}\mathbf{u}_h(s)ds=\frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{f}(s)ds. \tag{16}$$

引入 $\mathrm{u}_i^{-1},_h=\mathrm{u}^0(i=1,2)$，利用 $^{\tau}\mathbf{A}(3\mathbf{u}_{i,h}^{n}+\mathbf{u}_{i,h}^{n-2},)_4(i=1,2)$ 和 $^{\tau}(\mathbf{f}^n+\mathbf{f}^{n-1})$ $_2$分别近似 $\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathrm{Au}dt$ 和 $\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathrm{f}(s)dt$，并应用 $L1$ 和 SBD 方法对方程（16）进行离散化，则 $\overline{L1}$ 和 $\overline{SBD}$全离散格式如下:

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1}d_k^{(\alpha)}(\mathbf{u}_{1,h}^{n-k}-\mathbf{u}^0)-\sum_{k=0}^{n-2}d_k^{(\alpha)}(\mathbf{u}_{1,h}^{n-1-k}-\mathbf{u}^0)}{\tau}+\frac{\mathbf{A}(3\mathbf{u}_{1,h}^{n}+\mathbf{u}_{1,h}^{n-2})}{4}=\frac{\mathbf{f}^{n-1}+\mathbf{f}^{n}}{2} \tag{17}$$

and

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1}g_k^{(\alpha)}(\mathbf{u}_{2,h}^{n-k}-\mathbf{u}^0)-\sum_{k=0}^{n-2}g_k^{(\alpha)}(\mathbf{u}_{2,h}^{n-1-k}-\mathbf{u}^0)}{\tau}+\frac{\mathbf{A}(3\mathbf{u}_{2,h}^{n}+\mathbf{u}_{2,h}^{n-2})}{4}=\frac{\mathbf{f}^{n-1}+\mathbf{f}^{n}}{2}, \tag{18}$$

其中，$\mathrm{u}_{1,h}^{n}$ 和 $\mathrm{u}_{2,h}^{n}$ 分别是在 t_n 和 $\mathbf{f}^n=\mathrm{f}(t_n)$ 处的数值解。这里，$d_k^{(\alpha)}$ 和 $g_k^{(\alpha)}$ 定义为

$$d_k^{(\alpha)}=\begin{cases}b_0^{(\alpha)} & k=0,\\ b_k^{(\alpha)}-b_{k-1}^{(\alpha)} & k>0,\end{cases}$$
$$b_k^{(\alpha)}=\tau^{1-\alpha}\frac{(k+1)^{2-\alpha}-k^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)},$$

and

$$\sum_{k=0}^{\infty}g_k^{(\alpha)}\xi^k=(\delta_{\tau,2}(\xi))^{\alpha-1}=\left(\frac{(1-\xi)+(1-\xi)^2/2}{\tau}\right)^{\alpha-1}.$$

在给出方程（17）的解表达式之前，我们将 $Li_p(z)$ 引入如下:

$$Li_p(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^j}{j^p}.$$

根据 [5,12], ，我们知道 $Li_p(z)$ 具有以下性质。

引理 4 对于 $p\neq 1$、2、.....，函数 $Li_p(e^{-z})$ 满足奇异展开式

$$Li_p(e^{-z})\sim\Gamma(1-p)z^{p-1}+\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\varsigma(p-l)\frac{z^l}{l!}\qquad as\ z\to 0,$$

其中 $\varsigma(z)$ 表示黎曼ζ函数。

与 [12], 中的证明类似，我们有

引理 5 设 $|z| \leq \quad ^{\pi}{}_{\sin(\theta)}$, 其中 $\theta \in (\pi/2, 5\pi/6)$ 且 $-2 < p < 0$。则

$$Li_p(e^{-z}) = \Gamma(1-p)z^{p-1} + \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \varsigma(p-l)\frac{z^l}{l!}$$

绝对收敛。

为得到式（17）的解的表示，我们引入 $\mathbf{v}_{1,h}^n = \mathbf{u}_{1,h}^n - \mathbf{u}^0$, , 从而得到

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} d_k^{(\alpha)} \mathbf{v}_{1,h}^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-2} d_k^{(\alpha)} \mathbf{v}_{1,h}^{n-1-k}}{\tau} + \frac{\mathbf{A}(3\mathbf{v}_{1,h}^n + \mathbf{v}_{1,h}^{n-2})}{4} = \frac{\mathbf{f}^{n-1} + \mathbf{f}^n}{2} - \mathbf{A}\mathbf{u}^0. \tag{19}$$

将 ζ^n 乘到式（19）两边，并对其从 1 到 ∞ 求和，可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} d_k^{(\alpha)} \mathbf{v}_{1,h}^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-2} d_k^{(\alpha)} \mathbf{v}_{1,h}^{n-1-k}}{\tau}\zeta^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}(3\mathbf{v}_{1,h}^n + \mathbf{v}_{1,h}^{n-2})}{4}\zeta^n \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{f}^{n-1} + \mathbf{f}^n}{2}\zeta^n - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}\mathbf{u}^0\zeta^n.\end{aligned}$$

简单计算可得

$$\frac{1-\zeta}{\tau}\left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(\alpha)}\zeta^k\right)\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{v}_{1,h}^j\zeta^j + \frac{3+\zeta^2}{4}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{A}\mathbf{v}_{1,h}^j\zeta^j = \frac{1+\zeta}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{f}^j\zeta^j + \frac{\mathbf{f}^0\zeta}{2} - \sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{A}\mathbf{u}^0\zeta^j.$$

根据 $d_k^{(\alpha)}$ 和 $b_k^{(\alpha)}$ 的定义，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(\alpha)}\zeta^k =& \tau^{1-\alpha}\left(\sum_{j=1}^{\infty}(b_j^{(\alpha)} - b_{j-1}^{(\alpha)})\zeta^j + b_0^{(\alpha)}\zeta^0\right) \\ =& \tau^{1-\alpha}(1-\zeta)\sum_{j=0}^{\infty} b_j^{(\alpha)}\zeta^j = \frac{\tau^{1-\alpha}(1-\zeta)}{\Gamma(3-\alpha)}\left(\sum_{j=0}^{\infty}((j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha})\zeta^j\right) \\ =& \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\frac{(1-\zeta)^2}{\zeta}\left(\sum_{j=0}^{\infty} j^{2-\alpha}\zeta^j\right) = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\frac{(1-\zeta)^2}{\zeta}Li_{\alpha-2}(\zeta).\end{aligned}$$

Thus

$$\frac{(1-\zeta)^3\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)\zeta}Li_{\alpha-2}(\zeta)\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{v}_{1,h}^j\zeta^j + \frac{3+\zeta^2}{4}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{A}\mathbf{v}_{1,h}^j\zeta^j = \frac{1+\zeta}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{f}^j\zeta^j + \frac{\mathbf{f}^0\zeta}{2} - \sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{A}\mathbf{u}^0\zeta^j. \tag{20}$$

为便于分析，引入

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\zeta) =&\frac{(1-\zeta)^2((1-\zeta)+(1-\zeta)^2/2)\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)\zeta}Li_{\alpha-2}(\zeta),\\ \mu(\zeta) =&\frac{4(1-\zeta)}{(3+\zeta^2)((1-\zeta)+(1-\zeta)^2/2)}=\frac{4}{(3+\zeta^2)(3/2-\zeta/2)},\\ \eta_1(\zeta) =&\frac{4\zeta}{(3+\zeta^2)(1-\zeta)},\quad \eta_2(\zeta)=\frac{4(1+\zeta)}{2(3+\zeta^2)}=\frac{2(1+\zeta)}{(3+\zeta^2)},\end{aligned}\tag{21}$$

我们可以将方程（20）改写为

$$\mu(\zeta)\psi_\alpha(\zeta)\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{v}_{1,h}^j\zeta^j+\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{A}\mathbf{v}_{1,h}^j\zeta^j=\eta_2(\zeta)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{f}^j\zeta^j+\frac{\mathbf{f}^0\zeta}{1+\zeta}\right)-\eta_1(\zeta)\mathbf{A}\mathbf{u}^0.$$

于是有

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{v}_{1,h}^j\zeta^j=(\mu(\zeta)\psi_\alpha(\zeta)+\mathbf{A})^{-1}\eta_2(\zeta)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{f}^j\zeta^j+\frac{\mathbf{f}^0\zeta}{1+\zeta}\right)-(\mu(\zeta)\psi_\alpha(\zeta)+\mathbf{A})^{-1}\eta_1(\zeta)\mathbf{A}\mathbf{u}^0.$$

利用柯西积分定理并进行简单计算，可得方程（17）的解为

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{1,h}^n=&\frac{\tau}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta^\tau}e^{zt_n}(\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau})+\mathbf{A})^{-1}\eta_2(e^{-z\tau})\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{f}^je^{-zt_j}+\frac{\mathbf{f}^0e^{-z\tau}}{1+e^{-z\tau}}\right)dz\\ &-\frac{\tau}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta^\tau}e^{zt_n}(\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau})+\mathbf{A})^{-1}\eta_1(e^{-z\tau})\mathbf{A}\mathbf{u}^0dz,\end{aligned}\tag{22}$$

其中 $\Gamma_\theta^\tau=\{z\in\Gamma_\theta,|z|<{}_\tau\frac{\pi}{\sin(\theta)}\}$。

类似地，方程（18）的解可改写为

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{2,h}^n=&\frac{\tau}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta^\tau}e^{zt_n}(\mu(e^{-z\tau})(\delta_{\tau,2}(e^{-z\tau}))^\alpha+\mathbf{A})^{-1}\eta_2(e^{-z\tau})\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{f}^je^{-zt_j}+\frac{\mathbf{f}^0e^{-z\tau}}{1+e^{-z\tau}}\right)dz\\ &-\frac{\tau}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta^\tau}e^{zt_n}(\mu(e^{-z\tau})(\delta_{\tau,2}(e^{-z\tau}))^\alpha+\mathbf{A})^{-1}\eta_1(e^{-z\tau})\mathbf{A}\mathbf{u}^0dz,\end{aligned}\tag{23}$$

其中 $\mathbf{v}_{2,h}^n=\mathbf{u}_{2,h}^n-\mathbf{u}^0$。

接下来，为了证明$\overline{L1}$ 格式（17）的收敛速率，需要以下引理。

引理6 令$|z|\le{}^{\pi}_{\sin(\theta)\tau}$，其中 $\theta\in(\pi/2,5\pi/6)$。则有

$$|\psi_\alpha(e^{-z\tau})-z^\alpha|\le C|z|^{\alpha+2}\tau^2,\quad C^{-1}|z|^\alpha\le|\psi_\alpha(e^{-z\tau})|\le C|z|^\alpha.$$

证明 简单计算表明

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-e^{-z\tau})^2((1-e^{-z\tau})+(1-e^{-z\tau})^2/2)}{e^{-z\tau}}\\
=&e^{z\tau}(1-e^{-z\tau})^2((1-e^{-z\tau})+(1-e^{-z\tau})^2/2)\\
=&(1+z\tau+(z\tau)^2/2+(z\tau)^3/6+\mathcal{O}((z\tau)^4)\\
&\cdot(z\tau-(z\tau)^2/2+(z\tau)^3/6+\mathcal{O}((z\tau)^4))^2\\
&\cdot(z\tau-(z\tau)^3/3+\mathcal{O}((z\tau)^4))\\
=&(z\tau)^3+\mathcal{O}((z\tau)^5).
\end{aligned}$$

结合引理 5，我们得到

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(e^{-z\tau}) =&\tau^{-\alpha}((z\tau)^3+\mathcal{O}((z\tau)^5))\left((z\tau)^{\alpha-3}+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l\varsigma(\alpha-2-k)}{\Gamma(3-\alpha)}\frac{(z\tau)^l}{l!}\right)\\
=&z^\alpha+z^{\alpha+2}\mathcal{O}(\tau^2),
\end{aligned}$$

由此得到第一个所需结果。与 [26]，中的讨论类似，我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{|z\tau|\to 0}\frac{z^\alpha}{\psi_\alpha(e^{-z\tau})} &= \lim_{|z\tau|\to 0}\frac{z^\alpha}{z^\alpha+z^{\alpha+2}\mathcal{O}(\tau^2)}\\
&= \lim_{|z\tau|\to 0}\frac{1}{1+\mathcal{O}(z^2\tau^2)}=1.
\end{aligned}$$

因此 $|z|^\alpha \le C|\psi_\alpha(e^{-z\tau})|$。同时，有

$$\lim_{|z\tau|\to 0}\frac{\psi_\alpha(e^{-z\tau})}{z^\alpha}=1,$$

因此 $|\psi_\alpha(e^{-z\tau})|\le C|z|^\alpha$ 成立。证明至此结束。

根据泰勒展开，很容易验证由 (21) 定义的 μ、η_1 和 η_2满足以下估计。

引理 7 对于 $z\in\Gamma_\theta^\tau$，有

$$\begin{aligned}
&|\mu(e^{-z\tau})-1|\le C|z|^3\tau^3,\\
&\left|\tau\eta_1(e^{-z\tau})-\frac{1}{z}\right|\le C|z|\tau^2,\\
&\left|\eta_2(e^{-z\tau})\tau\left(\frac{e^{-z\tau}}{1-e^{-z\tau}}+\frac{e^{-z\tau}}{1+e^{-z\tau}}\right)-\frac{1}{z}\right|\le C|z|\tau^2,\\
&\left|\eta_2(e^{-z\tau})\frac{\tau^2e^{-z\tau}}{(1-e^{-z\tau})^2}-\frac{1}{z^2}\right|\le C\tau^2.
\end{aligned}$$

此外，我们证明了 $\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau})\in\Sigma_{\theta_0}$以及 $\mu(e^{-z\tau})(\delta_\tau,\ 2(e^{-z\tau}))^\alpha\in\Sigma_{\theta_0}$对于 $z\in\Gamma_\theta^\tau$成立，其中 θ充分接近于$\frac{\pi}{2}$。

引理 8 对于 $z \in \Gamma_\theta^\tau$，当 θ充分接近$\frac{\pi}{2}$时，存在 $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$，使得

$$\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau}) \in \Sigma_{\theta_0}$$

and

$$\mu(e^{-z\tau})(\delta_{\tau,2}(e^{-z\tau}))^\alpha \in \Sigma_{\theta_0}.$$

证明 对于辐角$(z) = \frac{\pi}{2}$的情形，令 $\mathbf{i}\rho = z\tau$with $\rho \in (0, \pi]$，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1-e^{-\mathbf{i}\rho}}{3+e^{-2\mathbf{i}\rho}}\\
=&\frac{1-\cos(\rho)+\sin(\rho)\mathbf{i}}{3+\cos(2\rho)-\sin(2\rho)\mathbf{i}}\\
=&\frac{3-3\cos(\rho)+\cos(2\rho)-\cos(2\rho)\cos(\rho)-\sin(2\rho)\sin(\rho)}{(3+\cos(2\rho))^2-(\sin(2\rho))^2}\\
&+\frac{\sin(2\rho)-\sin(2\rho)\cos(\rho)+3\sin(\rho)+\cos(2\rho)\sin(\rho)}{(3+\cos(2\rho))^2-(\sin(2\rho))^2}\mathbf{i}\\
=&\frac{2-4\cos(\rho)+2\cos^2(\rho)}{(3+\cos(2\rho))^2-(\sin(2\rho))^2}\\
&+\frac{2\sin(\rho)\cos(\rho)+2\sin(\rho)}{(3+\cos(2\rho))^2-(\sin(2\rho))^2}\mathbf{i}.
\end{aligned}$$

容易验证，对于 $\rho \in (0, \pi]$，有

$$\frac{1-e^{-\mathbf{i}\rho}}{3+e^{-2\mathbf{i}\rho}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{24}$$

由 [25], 可得

$$\arg\left(\frac{(1-e^{-\mathbf{i}\rho})^2}{e^{-z\tau}}Li_{\alpha-2}(e^{-\mathbf{i}\rho})\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

这将得到

$$\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau}) \in \Sigma_{\theta_0}$$

其中 $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$。对于辐角$(z) = -\frac{\pi}{2}$的情形，类似的论证表明

$$\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau}) \in \Sigma_{\theta_0}.$$

根据 $\mu(\zeta)$ 和 $\psi_\alpha(\zeta)$ 的定义，利用 $\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau})$ 关于 z 连续这一事实，可以得到第一个所需结果。至于第二个估计，沿用上述论证，并利用如下事实$\delta_{\tau,\ 2}(e^{-z\tau}) \in \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\epsilon}$对于 $z \in \Gamma_\theta^\tau$，当 θ 与$\frac{\pi}{2}$ [14] 充分接近时，可以得到该估计。

然后，我们给出使用 $\overline{L1}$ 格式求解齐次问题时的误差估计。

定理 5 设 u_h 和 $\mathrm{u}_{1,\ h}^n$ 分别为方程 (4) 和 (17) 的解。假设 $f=0$ 和 $\mathrm{u}^0\in l^2$。则有

$$\|\mathbf{u}_h(t_n)-\mathbf{u}_{1,h}^n\|_{l^2}\leq C\tau^2 t_n^{-2}\|\mathbf{u}^0\|_{l^2}.$$

证明 令 $\mathrm{v}_h(t)=\mathrm{u}_h(t)-\mathrm{u}^0$。简单计算可得

$$\mathbf{v}_h(t)=-\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta}e^{zt}(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}z^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u}^0dz.$$

为了给出 $\mathrm{u}_h(t_n)$ 与 $\mathrm{u}_{1,\ h}^n$ 之间的误差估计，我们只需估计$\|\mathrm{v}_h(t_n)-\mathrm{v}_{1,\ h}^n\|_{l^2}$，即

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{v}_h(t_n)-\mathbf{v}_{1,h}^n\|_{l^2}\\
\leq&C\left\|\int_{\Gamma_\theta\setminus\Gamma_\theta^\tau}e^{zt_n}(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}z^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u}^0dz\right\|_{l^2}\\
&+C\left\|\int_{\Gamma_\theta^\tau}e^{zt_n}((z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}z^{-1}-(\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau})+\mathbf{A})^{-1}\mu(e^{-z\tau})\eta(e^{-z\tau}))\mathbf{A}\mathbf{u}^0dz\right\|_{l^2}\\
\leq&I+II.
\end{aligned}$$

对于 I，有

$$\begin{aligned}
I\leq&C\tau^2\int_{\Gamma_\theta\setminus\Gamma_\theta^\tau}|e^{zt_n}|\|\mathbf{A}(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}z\|_{l^2\to l^2}|dz|\|\mathbf{u}^0\|_{l^2}\\
\leq&C\tau^2t_n^{-2}\|\mathbf{u}^0\|_{l^2}.
\end{aligned}$$

至于 II，我们需要考虑以下估计

$$\begin{aligned}
&\|((z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}z^{-1}-(\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau})+\mathbf{A})^{-1}\eta_1(e^{-z\tau}))\mathbf{A}\|_{l^2\to l^2}\\
\leq&\|((z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}z^{-1}-(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}\eta_1(e^{-z\tau}))\mathbf{A}\|_{l^2\to l^2}\\
&+\|((z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}\eta_1(e^{-z\tau})-(\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau})+\mathbf{A})^{-1}\eta_1(e^{-z\tau}))\mathbf{A}\|_{l^2\to l^2}\\
\leq&\|\vartheta_1\|_{l^2\to l^2}+\|\vartheta_2\|_{l^2\to l^2}.
\end{aligned}$$

根据引理 7、8 以及预解式估计 $\|(z+\mathrm{A})^{-1}\|_{l^2\to l^2}\leq C|z|^{-1}$ 对于 $z\in\Sigma_\theta$ [18]，存在

$$\|\vartheta_1\|_{l^2\to l^2}\leq C\tau^2|z|.$$

由引理 6、7、8 和中值定理可得

$$\|\vartheta_2\|_{l^2\to l^2}\leq C\tau^2|z|.$$

Thus

$$\begin{aligned}
II\leq&C\tau^2\int_{\Gamma_\theta\setminus\Gamma_\theta^\tau}|e^{zt_n}||z||dz|\|\mathbf{u}^0\|_{l^2}\\
\leq&C\tau^2t_n^{-2}\|\mathbf{u}^0\|_{l^2}.
\end{aligned}$$

结合上述估计即可得到预期结果。

与定理5的证明类似，可以得到求解齐次问题的 $\overline{SBD}$ 格式的误差估计。

定理 6 设 u_h 和 $\mathrm{u}_{2,\ h}^n$ 分别为方程 (4) 和 (18) 的解。假设 $f=0$ 和 $\mathrm{u}^0\in l^2$。则有

$$\|\mathbf{u}_h(t_n)-\mathbf{u}_{2,h}^n\|_{l^2}\leq C\tau^2 t_n^{-2}\|\mathbf{u}^0\|_{l^2}.$$

现在我们给出非齐次问题的 $\overline{L1}$ 格式的误差估计。

定理 7 设 u_h 和 $\mathrm{u}_{1,\ h}^n$ 分别为方程 (4) 和 (17) 的解。假设 $u_0=0$, $\|\mathrm{f}^0\|_{l^2}<\infty$, $\|\mathrm{f}_t^0\|_{l^2}<\infty$，且 $\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}\|\mathrm{f}_{tt}(s)\|_{l^2}ds<\infty$。则有

$$\|\mathbf{u}_h(t_n)-\mathbf{u}_{h,1}^n\|_{l^2}\leq C\tau^2\left(t_n^{\alpha-2}\|\mathbf{f}^0\|_{l^2}+t_n^{\alpha-1}\|\mathbf{f}_t^0\|_{l^2}+\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}\|\mathbf{f}_{tt}(s)\|_{l^2}ds\right).$$

这里，$\mathrm{f}_t^0=\partial_t\mathrm{f}\mid_{t=0}$和 f_{tt}表示 f 关于 t 的二阶导数。

证明 利用 $f(t)=f(0)+tf_t(0)+R(t)$ 以及 $R(t)=\int_0^t(t-s)f_{tt}(s)ds$，我们可以将 (22) 改写为

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{1,h}^n=&\frac{\tau}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta^\tau}e^{zt_n}(\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau})+\mathbf{A})^{-1}\eta_2(e^{-z\tau})\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{f}^0e^{-zt_j}+\frac{e^{-z\tau}}{1+e^{-z\tau}}\mathbf{f}^0\right)dz\\&+\frac{\tau}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta^\tau}e^{zt_n}(\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau})+\mathbf{A})^{-1}\eta_2(e^{-z\tau})\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{f}_t^0t_je^{-zt_j}dz\\&+\frac{\tau}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta^\tau}e^{zt_n}(\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau})+\mathbf{A})^{-1}\eta_2(e^{-z\tau})\sum_{j=1}^{\infty}R(t_j)e^{-zt_j}dz.\end{aligned}$$

同样，有

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_h(t)=&\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta}e^{zt}(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}z^{-1}\mathbf{f}^0dz\\&+\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta}e^{zt}(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}z^{-2}\mathbf{f}_t^0dz\\&+\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta}e^{zt}(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}z^{-2}\tilde{\mathbf{f}}_{tt}dz.\end{aligned}$$

Thus

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{v}_h(t_n)-\mathbf{v}_{1,h}^n\|_{l^2}\\
\le& C\Bigg\| \int_{\Gamma_\theta} e^{zt_n}(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}z^{-1}\mathbf{f}^0dz\\
&-\tau\int_{\Gamma_\theta^\tau} e^{zt_n}(\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau})+\mathbf{A})^{-1}\eta_2(e^{-z\tau})\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{f}^0e^{-zt_j}+\frac{e^{-z\tau}}{1+e^{-z\tau}}\mathbf{f}^0\right)dz\Bigg\|_{l^2}\\
&+C\Bigg\|\int_{\Gamma_\theta} e^{zt_n}(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}z^{-2}\mathbf{f}_t^0dz\\
&-\tau\int_{\Gamma_\theta^\tau} e^{zt_n}(\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau})+\mathbf{A})^{-1}\eta_2(e^{-z\tau})\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{f}_t^0t_je^{-zt_j}dz\Bigg\|_{l^2}\\
&+C\Bigg\|\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta} e^{zt_n}(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}z^{-2}\tilde{\mathbf{f}}_{tt}dz\\
&-\frac{\tau}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta^\tau} e^{zt_n}(\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau})+\mathbf{A})^{-1}\eta_2(e^{-z\tau})\sum_{j=1}^{\infty}R(t_j)e^{-zt_j}dz\Bigg\|_{l^2}\\
\le& I+II+III.
\end{aligned}
$$

对于第一项 I，与定理 5 中的辐角类似，利用引理 7，可得

$$
\begin{aligned}
I\le& C\Bigg\| \int_{\Gamma_\theta} e^{zt_n}(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}z^{-1}\mathbf{f}^0dz\\
&-\tau\int_{\Gamma_\theta^\tau} e^{zt_n}(\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau})+\mathbf{A})^{-1}\eta_2(e^{-z\tau})\left(\frac{e^{-z\tau}}{1-e^{-z\tau}}+\frac{e^{-z\tau}}{1+e^{-z\tau}}\right)\mathbf{f}^0dz\Bigg\|_{l^2}\\
\le& C\tau^2t_n^{\alpha-2}\|\mathbf{f}^0\|_{l^2}.
\end{aligned}
$$

至于 II，利用这一事实 $\sum_{j=1}^{\infty}t_j\zeta^j=\tau\zeta(\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{1-\zeta})=\frac{\tau\zeta}{(1-\zeta)^2}$[14]，我们可以得到

$$
\begin{aligned}
II\le& C\Bigg\|\int_{\Gamma_\theta} e^{zt_n}(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}z^{-2}\mathbf{f}_t^0dz\\
&-\int_{\Gamma_\theta^\tau} e^{zt_n}(\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau})+\mathbf{A})^{-1}\eta_2(e^{-z\tau})\left(\frac{\tau^2e^{-z\tau}}{1-e^{-z\tau}}\right)\mathbf{f}_t^0dz\Bigg\|_{l^2}.
\end{aligned}
$$

与定理 5 的证明类似，利用引理 7 可得

$$II\le C\tau^2t_n^{\alpha-1}\|\mathbf{f}_t^0\|_{l^2}.$$

至于第三项 III，引入 $\mathcal{E}_\tau=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{E}_\tau^k\delta_{t_k}$，其中 δ_{t_k} 是位于 t_k 处的狄拉克δ函数，并且

$$\mathcal{E}_\tau^n=\frac{\tau}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta^\tau} e^{zt_n}(\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau})+\mathbf{A})^{-1}\eta_2(e^{-z\tau})dz.$$

Thus

$$\frac{\tau}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta^\tau} e^{zt_n}(\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau})+\mathbf{A})^{-1}\eta_2(e^{-z\tau})\sum_{j=1}^{\infty}R(t_j)e^{-zt_j}dz$$
$$=(\mathcal{E}_\tau * R)(t_n)=((\mathcal{E}_\tau * g)*\mathbf{f}_{tt})(t_n),$$

其中 $g(t)=t$，而“$*$”表示卷积。同样地，引入

$$\mathcal{E}(t)=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta} e^{zt}(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}dz.$$

利用卷积性质，可得

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta} e^{zt_n}(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}z^{-2}\tilde{\mathbf{f}}_{tt}dz=((\mathcal{E}*g)*\mathbf{f}_{tt})(t_n).$$

因此可以推得

$$III\le C\|(\mathcal{E}*g)(t)-(\mathcal{E}_\tau*g)(t)\|_{l^2\to l^2}*\|\mathbf{f}_{tt}\|_{l^2}.$$

考虑 $((\mathcal{E}*g)(t)-(\mathcal{E}_\tau*g)(t)$，其中 $t=t_n$ 为首项。与 I 的证明类似，可得

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{E}*g)(t_n)-(\mathcal{E}_\tau*g)(t_n)\|_{l^2\to l^2}\\
\le& C\left\|\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_\theta} e^{zt_n}(z^\alpha+\mathbf{A})^{-1}z^{-2}dz\right.\\
&\left.-\int_{\Gamma_\theta^\tau} e^{zt_n}(\mu(e^{-z\tau})\psi_\alpha(e^{-z\tau})+\mathbf{A})^{-1}\eta_2(e^{-z\tau})\tau\sum_{k=1}^{\infty}t_k e^{-zt_k}dz\right\|_{l^2\to l^2}\\
\le& C\tau^2 t_n^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

对于 $t\in(t_{n-1},t_n)$，利用泰勒展开，可得

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{E}*g)(t)-(\mathcal{E}_\tau*g)(t)\|_{l^2\to l^2}\\
\le& C\|((\mathcal{E}*g)(t_n)-(\mathcal{E}_\tau*g)(t_n)\|_{l^2\to l^2}\\
&+C\,\|(t-t_n)((\mathcal{E}*1)(t_n)-(\mathcal{E}_\tau*1)(t_n))\|_{l^2\to l^2}\\
&+C\left\|\int_{t_n}^{t}(t-s)(\mathcal{E}(s)-\mathcal{E}_\tau(s))ds\right\|_{l^2\to l^2}\\
\le& C\tau^2 t_n^{\alpha-1}+C\tau\,\|(\mathcal{E}*1)(t_n)-(\mathcal{E}_\tau*1)(t_n)\|_{l^2\to l^2}\\
&+C\left\|\int_{t_n}^{t}(t-s)\mathcal{E}(s)ds\right\|_{l^2\to l^2}+\left\|\int_{t_n}^{t}(t-s)\mathcal{E}_\tau(s)ds\right\|_{l^2\to l^2}.
\end{aligned}$$

与 I 的讨论类似，它满足

$$\|(\mathcal{E}*1)(t_n)-(\mathcal{E}_\tau*1)(t_n)\|_{l^2\to l^2}\le C\tau t^{\alpha-1}.$$

根据 $\mathcal{E}(s)$ 和 $\mathcal{E}_\tau(s)$ 的定义，可得

$$\left\|\int_{t_n}^{t}(t-s)\mathcal{E}(s)ds\right\|_{l^2\to l^2}\le C\tau^2 t_n^{\alpha-1},\quad \left\|\int_{t_n}^{t}(t-s)\mathcal{E}_\tau(s)ds\right\|_{l^2\to l^2}\le C\tau^2 t_n^{\alpha-1},$$

由此得到

$$\|(\mathcal{E}*g)(t)-(\mathcal{E}_\tau*g)(t)\|_{l^2\to l^2}\le C\tau^2 t_n^{\alpha-1}$$

对于 $t>0$。因此

$$III\le C\tau^2\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}\|\mathbf{f}_{tt}\|_{l^2}ds.$$

综合上述估计，可得所需结果。

与定理 7 的论证类似，可以推导出非齐次问题中 $\overline{SBD}$ 格式的以下误差估计。

定理 8 设 u_h 和 $\mathrm{u}_{2,\ h}^n$ 分别为方程 (4) 和 (18) 的解。假设 $u_0=0$, $\|\mathrm{f}^0\|_{l^2}<\infty$, $\|\mathrm{f}_t^0\|_{l^2}<\infty$，且 $\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}\|\mathrm{f}_{tt}(s)\|_{l^2}ds<\infty$。则有

$$\|\mathbf{u}_h(t_n)-\mathbf{u}_{2,h}^n\|_{l^2}\le C\tau^2\left(t_n^{\alpha-2}\|\mathbf{f}^0\|_{l^2}+t_n^{\alpha-1}\|\mathbf{f}_t^0\|_{l^2}+\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}\|\mathbf{f}_{tt}(s)\|_{l^2}ds\right).$$

注 5 本节主要为中心有限差分格式（4）构造时间离散，并给出相应的误差估计。对于修正的中心差分格式（12），也可以类似地轻松得到相同的结果。

注 6 本节仅测量 l^2-范数下的时间误差。对于 l^∞-范数，也可以类似地得到相应的误差估计。

4 数值实验

本节给出一些数值例子，以验证时间和空间收敛率。在所有数值实验中，我们取 $T=1$。由于方程（1）的精确解未知，我们可以通过以下方式测量空间和时间收敛率

$$Rate=\frac{\ln(e_h/e_{h/2})}{\ln(2)},\quad Rate=\frac{\ln(e_\tau/e_{\tau/2})}{\ln(2)}.$$

Here

$$e_h=\|\mathbf{u}_h^n-\mathbf{u}_{h/2}^n\|_{\mathbb{V}},\quad e_\tau=\|\mathbf{u}_\tau-\mathbf{u}_{\tau/2}\|_{\mathbb{V}},$$

其中，$\mathbb{V}$ 是 l^2 或 l^∞，u_h^n 是在网格尺寸为 h时刻 T 的解，u_τ 是在时间步长为 τ 时刻 T 的解。

例1 在本例中，我们展示数值求解齐次问题 (1) 的时间收敛性。这里，我们取

$$u_0 = \chi_{x>0.5}(x)$$

其中，$\chi_{x>0.5}$ 是 $x > 0.5$上的特征函数。为减小空间离散对收敛率的影响，取 $h = \frac{1}{512}$。表1和表2分别给出了 $\overline{L1}$ 和 $\overline{SBD}$ 格式的误差及收敛率，与定理5和定理6中的预测结果吻合良好。

表1 $\overline{L1}$的时间误差和收敛率。

α	L	32	64	128	256	512
0.2	l^2	3.834E-06	9.473E-07	2.353E-07	5.862E-08	1.462E-08
		Rate	2.0169	2.0095	2.0050	2.0033
	l^∞	5.833E-06	1.441E-06	3.579E-07	8.917E-08	2.224E-08
		Rate	2.0169	2.0095	2.0050	2.0034
0.8	l^2	1.275E-05	3.131E-06	7.732E-07	1.918E-07	4.772E-08
		Rate	2.0258	2.0176	2.0110	2.0070
	l^∞	1.847E-05	4.537E-06	1.121E-06	2.781E-07	6.919E-08
		Rate	2.0255	2.0174	2.0108	2.0069

T表 2 时间误差和收敛率 f $\overline{SBD}$。

α	L	32	64	128	256	512
0.4	l^2	6.386E-06	1.590E-06	3.961E-07	9.885E-08	2.469E-08
		Rate	2.0062	2.0046	2.0027	2.0014
	l^∞	9.626E-06	2.396E-06	5.972E-07	1.490E-07	3.722E-08
		Rate	2.0061	2.0046	2.0026	2.0014
0.6	l^2	1.017E-05	2.525E-06	6.284E-07	1.567E-07	3.912E-08
		Rate	2.0100	2.0067	2.0038	2.0020
	l^∞	1.512E-05	3.753E-06	9.339E-07	2.329E-07	5.813E-08
		Rate	2.0099	2.0067	2.0038	2.0020

例2 在此例中，我们考察非齐次问题（1）的时间收敛率。这里，源项 $f(x,t)$ 选为

$$f(x,t) = (t+1)^{1.5}x.$$

我们选择 $h = \frac{1}{512}$，以消除空间离散对收敛率的影响。$\overline{L1}$ 和 $\overline{SBD}$ 格式的误差和收敛率分别见表3和表4。可以看出，所有收敛率均与定理7和定理8中的预测一致。

例3 这里取 $\tau = \frac{1}{512}$。初值和源项分别选为

$$u_0 = (0.25^2 - (x-0.5)^2)^\sigma, \quad f(x,t) = 0 \tag{25}$$

表3 $\overline{L1}$的时间误差和收敛率。

α	L	32	64	128	256	512
	l^2	3.978E-06	9.934E-07	2.482E-07	6.205E-08	1.551E-08
0.4		Rate	2.0015	2.0006	2.0003	2.0001
	l^∞	5.542E-06	1.384E-06	3.459E-07	8.645E-08	2.161E-08
		Rate	2.0015	2.0006	2.0003	2.0001
	l^2	3.990E-06	9.970E-07	2.492E-07	6.231E-08	1.558E-08
0.6		Rate	2.0006	2.0000	1.9999	2.0000
	l^∞	5.560E-06	1.389E-06	3.473E-07	8.683E-08	2.171E-08
		Rate	2.0006	2.0000	1.9999	2.0000

表 4 $\overline{SBD}$ 的时间误差和收敛率。

α	L	32	64	128	256	512
	l^2	4.093E-06	1.021E-06	2.549E-07	6.370E-08	1.592E-08
0.2		Rate	2.0034	2.0016	2.0008	2.0004
	l^∞	5.703E-06	1.422E-06	3.552E-07	8.874E-08	2.218E-08
		Rate	2.0034	2.0016	2.0008	2.0004
	l^2	3.979E-06	9.937E-07	2.484E-07	6.211E-08	1.553E-08
0.8		Rate	2.0016	2.0001	1.9999	2.0000
	l^∞	5.548E-06	1.385E-06	3.463E-07	8.658E-08	2.165E-08
		Rate	2.0016	2.0001	1.9999	2.0000

and

$$u_0 = (x-0.5)^{-\gamma}\chi_{x>0.5}, \quad f(x,t) = 0 \tag{26}$$

以验证求解齐次问题（1）时的空间收敛速率。注意，对于初值（25），

$$u_0 \in \begin{cases} \hat{H}^{\sigma+\frac{1}{2}-\epsilon}(\Omega), \sigma \in (0,1); \\ \hat{H}^{\frac{3}{2}}(\Omega), \qquad \sigma > 1, \end{cases}$$

对于初始数据（26），u_0 属于$\hat{}H^{\gamma-0.5-\epsilon}(\Omega)$，其中 $\gamma \in$ (0,0.5)。

这里我们首先使用 $\overline{L1}$ 方法对 Riemann–Liouville 分数阶导数进行离散化，并在空间方向上采用中心有限差分及其修正格式，求解具有数据（25）的齐次问题（1）。结果见表5和表7，与我们的预测结果一致。接着，我们使用 $\overline{SBD}$ 方法对 Riemann–Liouville 分数阶导数进行离散化，并在空间方向上采用中心有限差分法及其修正格式，求解具有数据（26）的方程（1）。表6和表8中的所有收敛率均与理论预测一致。

例4 为验证求解非齐次问题 (1) 时的空间收敛率，我们取 $\tau = \frac{1}{512}$，并选择初值和源项如下

$$u_0 = 0, \quad f(x,t) = (t+1)^{0.5}(0.25^2 - (x-0.5)^2)^\sigma \tag{27}$$

and

$$u_0 = 0, \quad f(x,t) = (t+1)^{0.5}(x-0.5)^{-\gamma}\chi_{x>0.5}. \tag{28}$$

表5 使用数据（25）的 $\overline{L1}$ 的空间误差和收敛率。

(α,σ)	N	32	64	128	256	512
(0.2,0.3)	l^2	2.616E-04	1.048E-04	4.227E-05	1.711E-05	6.936E-06
		Rate	1.3197	1.3098	1.3050	1.3025
	l^∞	3.376E-04	1.327E-04	5.298E-05	2.133E-05	8.627E-06
		Rate	1.3473	1.3243	1.3124	1.3062
(0.4,0.6)	l^2	4.092E-05	1.334E-05	4.376E-06	1.439E-06	4.738E-07
		Rate	1.6165	1.6086	1.6046	1.6026
	l^∞	5.696E-05	1.807E-05	5.791E-06	1.869E-06	6.064E-07
		Rate	1.6561	1.6420	1.6316	1.6239
(0.6,0.9)	l^2	5.386E-06	1.430E-06	3.812E-07	1.018E-07	2.720E-08
		Rate	1.9129	1.9076	1.9051	1.9038
	l^∞	8.711E-06	2.291E-06	6.032E-07	1.590E-07	4.197E-08
		Rate	1.9271	1.9250	1.9234	1.9220
(0.8,1.2)	l^2	5.09E-07	1.14E-07	2.59E-08	5.94E-09	1.38E-09
		Rate	2.1575	2.1405	2.1245	2.1084
	l^∞	1.05E-06	2.43E-07	5.68E-08	1.33E-08	3.14E-09
		Rate	2.1044	2.0987	2.0924	2.0858

表6 $\overline{SBD}$ 在数据 (26) 下的空间误差和收敛率。

(α,γ)	N	32	64	128	256	512
(0.2,0.499)	l^2	8.758E-03	6.148E-03	4.332E-03	3.057E-03	2.160E-03
		Rate	0.5105	0.5051	0.5027	0.5014
	l^∞	1.540E-02	1.080E-02	7.608E-03	5.367E-03	3.791E-03
		Rate	0.5112	0.5059	0.5032	0.5017
(0.4,0.45)	l^2	5.730E-03	3.887E-03	2.647E-03	1.806E-03	1.233E-03
		Rate	0.5600	0.5543	0.5518	0.5505
	l^∞	1.000E-02	6.782E-03	4.616E-03	3.148E-03	2.149E-03
		Rate	0.5607	0.5551	0.5523	0.5508
(0.6,0.4)	l^2	3.292E-03	2.156E-03	1.418E-03	9.345E-04	6.163E-04
		Rate	0.6103	0.6044	0.6019	0.6006
	l^∞	5.682E-03	3.720E-03	2.445E-03	1.611E-03	1.062E-03
		Rate	0.6110	0.6052	0.6024	0.6009
(0.8,0.3)	l^2	1.12E-03	6.86E-04	4.21E-04	2.59E-04	1.59E-04
		Rate	0.7112	0.7049	0.7021	0.7007
	l^∞	1.91E-03	1.16E-03	7.14E-04	4.39E-04	2.70E-04
		Rate	0.7121	0.7057	0.7026	0.7010

这里，我们采用 $\overline{L1}$ 方法对 Riemann–Liouville 分数阶导数进行离散，并分别采用中心有限差分格式和修正的中心有限差分格式近似拉普拉斯算子，以求解具有数据 (28) 的非齐次问题 (1)。结果见表9和表11，与我们的预测结果一致。随后，我们采用$\overline{SBD}$ 方法对 Riemann–Liouville 分数阶导数进行离散，并沿用之前在空间方向上的相同离散格式，求解具有数据 (27) 的问题 (1)。表10和表12所示的收敛率与理论结果一致。

表7 使用数据 (25) 的 $\overline{L1}$-修正中心有限差分格式的空间误差和收敛率。

(α,σ)	N	32	64	128	256	512
	l^2	1.356E-05	3.340E-06	8.298E-07	2.069E-07	5.166E-08
(0.2,0.3)		Rate	2.0217	2.0091	2.0039	2.0017
	l^∞	2.282E-05	5.694E-06	1.422E-06	3.554E-07	8.884E-08
		Rate	2.0026	2.0013	2.0006	2.0002
	l^2	4.305E-06	1.068E-06	2.662E-07	6.646E-08	1.661E-08
(0.4,0.6)		Rate	2.0111	2.0044	2.0019	2.0008
	l^∞	7.780E-06	1.945E-06	4.864E-07	1.216E-07	3.040E-08
		Rate	1.9996	2.0000	2.0000	2.0000
	l^2	1.240E-06	3.082E-07	7.687E-08	1.920E-08	4.796E-09
(0.6,0.9)		Rate	2.0083	2.0035	2.0016	2.0008
	l^∞	2.371E-06	5.925E-07	1.481E-07	3.703E-08	9.257E-09
		Rate	2.0006	2.0001	2.0000	2.0000
	l^2	2.70E-07	6.70E-08	1.67E-08	4.18E-09	1.04E-09
(0.8,1.2)		Rate	2.0079	2.0034	2.0016	2.0007
	l^∞	5.75E-07	1.43E-07	3.58E-08	8.95E-09	2.24E-09
		Rate	2.0041	2.0010	2.0002	2.0001

表 8 使用数据 (26) 的 $\overline{SBD}$-修正中心有限差分格式的空间误差和收敛率。

(α,γ)	N	32	64	128	256	512
	l^2	1.450E-04	3.781E-05	9.833E-06	2.551E-06	6.601E-07
(0.2,0.499)		Rate	1.9390	1.9428	1.9467	1.9503
	l^∞	6.335E-04	2.238E-04	7.907E-05	2.795E-05	9.878E-06
		Rate	1.5013	1.5008	1.5006	1.5003
	l^2	9.628E-05	2.457E-05	6.265E-06	1.595E-06	4.053E-07
(0.4,0.45)		Rate	1.9701	1.9717	1.9740	1.9763
	l^∞	3.962E-04	1.352E-04	4.617E-05	1.577E-05	5.387E-06
		Rate	1.5510	1.5503	1.5499	1.5495
	l^2	5.608E-05	1.406E-05	3.529E-06	8.858E-07	2.223E-07
(0.6,0.4)		Rate	1.9958	1.9944	1.9943	1.9947
	l^∞	2.119E-04	6.985E-05	2.303E-05	7.597E-06	2.507E-06
		Rate	1.6014	1.6006	1.6001	1.5998
	l^2	2.11E-05	5.19E-06	1.28E-06	3.17E-07	7.88E-08
(0.8,0.3)		Rate	2.0266	2.0183	2.0130	2.0095
	l^∞	6.65E-05	2.00E-05	6.12E-06	1.89E-06	5.81E-07
		Rate	1.7336	1.7073	1.6990	1.6989

5 结论

本文旨在针对分数阶亚扩散方程，建立不依赖精确解任何正则性假设的时空有限差分格式的尖锐误差估计。首先，我们采用中心有限差分近似拉普拉斯算子，然后通过修正初值和源项，提高空间收敛率。接着，我们采用 $\overline{L1}$和 $\overline{SBD}$ 格式离散 Riemann–Liouville 分数阶导数。值得指出的是，空间误差分析不依赖于精确解的正则性，且时间误差估计对所有

表9 使用数据(28)时 $\overline{L1}$ 的空间误差和收敛率。

(α,γ)	N	32	64	128	256	512
(0.8,0.499)	l^2	1.484E-02	1.042E-02	7.340E-03	5.180E-03	3.660E-03
	Rate		0.5104	0.5050	0.5026	0.5014
	l^∞	2.595E-02	1.821E-02	1.282E-02	9.048E-03	6.390E-03
	Rate		0.5111	0.5058	0.5032	0.5017
(0.6,0.45)	l^2	1.172E-02	7.948E-03	5.412E-03	3.692E-03	2.521E-03
	Rate		0.5602	0.5543	0.5518	0.5505
	l^∞	2.056E-02	1.394E-02	9.485E-03	6.468E-03	4.415E-03
	Rate		0.5608	0.5552	0.5523	0.5508
(0.4,0.4)	l^2	9.242E-03	6.051E-03	3.979E-03	2.622E-03	1.729E-03
	Rate		0.6110	0.6047	0.6020	0.6006
	l^∞	1.625E-02	1.064E-02	6.990E-03	4.604E-03	3.035E-03
	Rate		0.6116	0.6056	0.6025	0.6009
(0.2,0.3)	l^2	5.84E-03	3.56E-03	2.18E-03	1.34E-03	8.26E-04
	Rate		0.7131	0.7057	0.7025	0.7009
	l^∞	1.03E-02	6.27E-03	3.84E-03	2.36E-03	1.45E-03
	Rate		0.7135	0.7064	0.7030	0.7012

表10 $\overline{SBD}$ with 的空间误差和收敛率 数据 (27)。

(α,σ)	N	32	64	128	256	512
(0.8,0.3)	l^2	4.431E-04	1.776E-04	7.164E-05	2.900E-05	1.176E-05
	Rate		1.3192	1.3095	1.3048	1.3024
	l^∞	5.736E-04	2.248E-04	8.958E-05	3.603E-05	1.456E-05
	Rate		1.3512	1.3275	1.3140	1.3071
(0.6,0.6)	l^2	8.395E-05	2.736E-05	8.969E-06	2.948E-06	9.705E-07
	Rate		1.6174	1.6093	1.6051	1.6030
	l^∞	1.166E-04	3.696E-05	1.183E-05	3.817E-06	1.238E-06
	Rate		1.6575	1.6431	1.6325	1.6246
(0.4,0.9)	l^2	1.545E-05	4.098E-06	1.091E-06	2.909E-07	7.766E-08
	Rate		1.9147	1.9094	1.9068	1.9054
	l^∞	2.488E-05	6.532E-06	1.717E-06	4.521E-07	1.191E-07
	Rate		1.9294	1.9273	1.9256	1.9241
(0.2,1.2)	l^2	2.92E-06	6.61E-07	1.51E-07	3.48E-08	8.11E-09
	Rate		2.1456	2.1300	2.1161	2.1025
	l^∞	5.98E-06	1.40E-06	3.31E-07	7.82E-08	1.86E-08
	Rate		2.0911	2.0857	2.0795	2.0733

$\alpha \in (0, 1)$ 均成立。最后，数值实验验证了理论分析的正确性。

参考文献

1. Acosta, G., Bersetche, F.M., Borthagaray, J.P.：分数阶演化问题的有限元近似。《分数阶微积分与应用分析》22(3)，767–794（2019） 2. Barkai, E.：分数阶福克–普朗克方程、解及其应用。《物理评论 E》63(4)，046118（2001） 3. Brenner, S.C., Scott, L.R.：《有限元方法的数学理论》，第3版。应用数学丛书。施普林格，纽约（2008） 4. Deng, W., Li, B., Qian, Z., Wang, H.：带测度数据的温和分数阶费曼–卡茨方程的时间离散。《SIAM 数值分析杂志》56(6)，3249–3275（2018）

表11 使用数据(28)的 $\overline{L1}$修正中心有限差分格式的空间误差和收敛率。

(α,γ)	N	32	64	128	256	512
	l^2	2.406E-04	6.271E-05	1.630E-05	4.227E-06	1.093E-06
(0.8,0.499)		Rate	1.9400	1.9436	1.9474	1.9509
	l^∞	1.044E-03	3.685E-04	1.302E-04	4.600E-05	1.626E-05
		Rate	1.5019	1.5012	1.5008	1.5005
	l^2	2.007E-04	5.124E-05	1.307E-05	3.327E-06	8.458E-07
(0.6,0.45)		Rate	1.9695	1.9712	1.9736	1.9759
	l^∞	8.331E-04	2.844E-04	9.711E-05	3.317E-05	1.133E-05
		Rate	1.5507	1.5501	1.5498	1.5495
	l^2	1.686E-04	4.228E-05	1.062E-05	2.665E-06	6.690E-07
(0.4,0.4)		Rate	1.9950	1.9939	1.9938	1.9943
	l^∞	6.624E-04	2.184E-04	7.206E-05	2.378E-05	7.846E-06
		Rate	1.6005	1.6000	1.5997	1.5994
	l^2	1.24E-04	3.03E-05	7.45E-06	1.84E-06	4.57E-07
(0.2,0.3)		Rate	2.0307	2.0219	2.0158	2.0117
	l^∞	4.20E-04	1.29E-04	3.98E-05	1.22E-05	3.77E-06
		Rate	1.7005	1.7000	1.6997	1.6995

表12 使用数据 (27) 的 $\overline{SBD}$-修正中心有限差分格式的空间误差和收敛率。

(α,σ)	N	32	64	128	256	512
	l^2	2.282E-05	5.622E-06	1.397E-06	3.483E-07	8.698E-08
(0.8,0.3)		Rate	2.0212	2.0089	2.0038	2.0016
	l^∞	3.774E-05	9.418E-06	2.352E-06	5.878E-07	1.469E-07
		Rate	2.0026	2.0013	2.0006	2.0002
	l^2	8.863E-06	2.199E-06	5.480E-07	1.368E-07	3.418E-08
(0.6,0.6)		Rate	2.0112	2.0044	2.0019	2.0008
	l^∞	1.633E-05	4.084E-06	1.021E-06	2.553E-07	6.382E-08
		Rate	1.9996	2.0000	2.0000	2.0000
	l^2	3.571E-06	8.876E-07	2.214E-07	5.528E-08	1.381E-08
(0.4,0.9)		Rate	2.0084	2.0035	2.0016	2.0008
	l^∞	7.085E-06	1.773E-06	4.435E-07	1.109E-07	2.772E-08
		Rate	1.9982	1.9995	1.9999	2.0000
	l^2	1.47E-06	3.65E-07	9.10E-08	2.27E-08	5.68E-09
(0.2,1.2)		Rate	2.0081	2.0035	2.0016	2.0007
	l^∞	3.08E-06	7.71E-07	1.93E-07	4.82E-08	1.20E-08
		Rate	1.9973	1.9993	1.9998	2.0000

5. Flajolet, P.：伯努利和的奇点分析与渐近性质。理论计算机科学 215(1-2), 371–381 (1999) 6. Fu, H., Zhu, C., Liang, X., Zhang, B.：用于多维变阶时分数阶扩散方程的高效空间二阶/四阶有限差分 ADI 方法。计算数学进展 47(4), 58 (2021) 7. Gao, G.H., Sun, H.W., Sun, Z.Z.：基于某种超收敛性的时分数阶亚扩散方程有限差分格式的稳定性与收敛性。计算物理杂志 280, 510–528 (2015) 8. Gl¨ockle, W., Nonnenmacher, T.：自相似蛋白质动力学的分数阶微积分方法。生物物理学杂志 68(1), 46–53 (1995) 9. Gy¨ongy, I.：由时空白噪声驱动的随机拟线性抛物型偏微分方程的格点近似 I。位势分析 9(1), 1–25 (1998) 10. Gy¨ongy, I.：由时空白噪声驱动的随机拟线性抛物型偏微分方程的格点近似 II。位势分析 11(1), 1–37 (1999)

11. Ji, B., Liao, H.l., Gong, Y., Zhang, L.：时间分数阶分子束外延生长模型的自适应二阶 Crank–Nicolson 时间步进格式。SIAM 科学计算杂志 42(3)，B738–B760（2020） 12. Jin, B., Lazarov, R., Zhou, Z.：非光滑数据次扩散方程的 $L1$ 格式分析。IMA 数值分析杂志 36(1)，197–221（2015） 13. Jin, B., Lazarov, R., Zhou, Z.：具有非光滑数据的分数阶扩散方程和扩散波方程的两种全离散格式。SIAM 科学计算杂志 38(1)，A146–A170（2016） 14. Jin, B., Li, B., Zhou, Z.：分数阶演化方程高阶 BDF卷积求积的修正。SIAM 科学计算杂志 39(6)，A3129–A3152（2017） 15. Jin, B., Li, B., Zhou, Z.：时变系数次扩散：分析与数值解。Math. Comp. 88(319)，2157–2186（2019） 16. Li, B., Ma, S.：具有非光滑初始数据的非线性次扩散方程的指数卷积求积。SIAM J. Numer. Anal. 60(2)，503–528（2022） 17. Lin, Y., Xu, C.：时间分数阶扩散方程的有限差分/谱近似。计算物理杂志 225(2)，1533–1552（2007） 18. Lubich, C., Sloan, I., Thom´ee, V.：具有正型记忆项的演化方程近似的非光滑数据误差估计。Math. Comp. 65(213)，1–17（1996） 19. Luo, H., Li, B., Xie, X.：具有非光滑数据的分数阶波动问题Petrov-Galerkin方法的收敛性分析。J. Sci. Comput. 80(2)，957–992（2019） 20. Metzler, R., Barkai, E., Klafter, J.：接近平衡热平衡的反常扩散与弛豫：分数阶福克–普朗克方程方法。Phys. Rev. Lett. 82(18)，3563–3567（1999） 21. Mustapha, K.：分数阶反应扩散方程的一种 $L1$ 近似：时间分级网格上的二阶误差分析。SIAM J. Numer. Anal. 58(2)，1319–1338（2020） 22. Podlubny, I.：分数阶微分方程。科学与工程数学。学术出版社，圣迭戈（ 1999 ） 23. Sakamoto, K., Yamamoto, M.：分数阶扩散波方程的初值/边值问题及其在某些反问题中的应用。J. Math. Anal. Appl. 382(1)，426–447（2011） 24. Stynes, M., O'Riordan, E., Gracia, J.L.：时间分数阶扩散方程在分级网格上有限差分法的误差分析。SIAM J. Numer. Anal. 55(2)，1057–1079（2017） 25. Wang, Y., Yan, Y., Yang, Y.：具有非光滑数据的次扩散问题的两种高阶时间离散格式。Fract. Calc. Appl. Anal. 23(5)，1349–1380（2020） 26. Yan, Y., Khan, M., Ford, N.：具有非光滑数据的时间分数阶偏微分方程修正 $L1$ 格式的分析。SIAM J. Numer. Anal. 56，210–227（2018） 27. Zaslavsky, G.M., Edelman, M., Niyazov, B.A.：哈密顿混沌动力学的自相似性、重整化与相空间非均匀性。《混沌》7(1)，159–181（1997） 28. Zeng, F.：时间分数阶扩散波方程的二阶稳定有限差分格式。J. Sci. Comput. 65(1)，411–430（2015） 29. Zheng, Z.Y., Wang, Y.M.：具有弱奇异解的时间分数阶移动/固定扩散方程的平均 $L1$型紧致差分法。Appl. Math. Lett. 131，108076（2022） 30. Zhou, Y., Stynes, M.：时间分数阶离散中的最优收敛率：$L1$、 $\overline{L1}$ 和 Alikhanov格式。《东亚应用数学杂志》12(3)，503–520（2022）