arXiv:2302.02634v1 [math.AG] 6 Feb 2023

关于微分齐次多项式的 Schmidt–Kolchin 猜想：在射影空间上（扭曲）射流微分的应用。

ANTOINE ETESSE

摘要。本文的主要目标是证明 Schmidt–Kolchin 猜想。该猜想表述如下：在 $(N+1)$ 个变量中，次数为 d 的微分齐次多项式所构成的向量空间，其维数为 $(N+1)^d$。接下来，我们建立 $(N+1)$ 个变量中的微分齐次多项式与射影空间上的扭曲喷射微分之间的一一对应关系。作为研究微分齐次多项式的副产品，我们得以明确理解射影空间上的扭曲喷射微分。

目录

引言。1 论文结构。4 1. 预备知识。5 1.1. 对称群和一般线性群的表示论。5 1.2. 常系数零维偏微分方程组。9 2. 微分齐次多项式的结构。10 2.1. 微分齐次多项式族。10 2.2. $V_d^{(k)}$ 的最高权向量的自然基。14 2.3. 一个中间代数问题。15 2.4. 将前述问题与当前问题联系起来。19 2.5. Schmidt–Kolchin 猜想的证明。21 3. 射影空间上的微分齐次多项式与扭曲射流微分。23 3.1. 复流形上的 Green–Griffiths 向量丛。23 3.2. 射影空间上的微分齐次多项式与扭曲射流微分。24 3.3. 射影空间的扭曲 Green–Griffiths 丛的零次上同调群。25 附录 A。27 附录 B。29 参考文献 31

引言。

本文旨在证明关于微分齐次多项式的施密特–科尔钦猜想，并将其应用于射影

2020 数学主题分类。 12H05, 13N15, 14A25, 15A69, 20C15, 32N10, 35E20.关键词和短语。 微分多项式，Schmidt–Kolchin 猜想，射影空间的 Green–Griffiths 丛，射影空间的射流微分。

空间上的 Green–Griffiths 丛。为陈述这一猜想，我们先引入一些记号（这些记号将在全文中使用）。固定一个自然数 $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，并考虑微分多项式构成的复向量空间

$$V \coloneqq \mathbb{C}\big[(X^{(k)})_{k\in N}\big]$$

在形式变量 $X^{(k)} \coloneqq (X_0^{(k)}, \dots, X_N^{(k)})$ 中。这个向量空间中的元素通常称为关于变量 $X = (X_0, \dots, X_N)$ 的微分多项式。上标括号让人联想到形式导子，原因如下。考虑一个形式变量 T，对于任意微分多项式 $P \in V$ 和任意多项式 $Q \in \mathbb{C}[T]$，通过如下设定构造一个新的多项式 $Q \cdot P \in V[T]$

$$Q \cdot P \coloneqq P\big((QX)^{(0)}, (QX)^{(1)}, \dots\big).$$

这里，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，符号 $(QX)^{(k)}$ 的定义如下：

$$(QX)^{(k)} \coloneqq \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} Q^{(k-i)} X^{(i)}.$$

也就是说，形式上应用通常的莱布尼茨法则。在 V 上有两种自然的齐次性概念。第一种是通常的齐次性：当且仅当对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$，下列等式成立时，微分多项式 $P \in V$ 是次数为 d 的齐次多项式：

$$\lambda \cdot P = \lambda^d P.$$

第二种齐次性概念称为微分齐次性，定义如下。当且仅当对任意多项式 $Q \in \mathbb{C}[T]$，下列等式成立时，微分多项式 $P \in V$ 称为次数为 d 的微分齐次多项式：

$$Q \cdot P = Q^d P.$$

因此，次数为 d 的微分齐次多项式必然是次数为 d 的齐次多项式。记

$$V^{\mathrm{diff}} \subset V$$

为微分齐次多项式构成的子向量空间。

向量空间 V 自然带有由最大导数阶数定义的滤过

$$(0) \subset V^{(0)} \subset V^{(1)} \subset \cdots \subset V^{(k)} \subset \cdots,$$

其中，对任意 $k \in \mathbb{N}$，定义 $V^{(k)} \coloneqq \mathbb{C}\big[(X^{(i)})_{0\leq i\leq k}\big]$。此外，滤过中的每一层都具有自然且相容的分次，由齐次次数给出

$$V^{(k)} = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} V_d^{(k)},$$

其中 $V_d^{(k)}$ 是 $V_{(k)}$ 中次数为 d 的齐次微分多项式集合。滤过和分次都下降到子向量空间 V^{diff} 上，我们记

$$(V_d^{\mathrm{diff}})^{(k)}$$

为 $V_d^{(k)}$ 中微分齐次多项式构成的子向量空间。

现在我们可以陈述所谓的 Schmidt–Kolchin 猜想：

猜想 1 (Schmidt–Kolchin)。变量 $X = (X_0, \dots, X_N)$中次数为 d 的微分齐次多项式所构成的向量空间 V_d^{diff} 的维数等于 $(N+1)^d$。

这个问题的起源可以追溯到 Schmidt 的论文 [Sch79], ，他在文中证明维数至少等于 $(N+1)^d$，并提出：“或许这里等式成立；目前似乎还不知道上界。”几年后，Kolchin 在 [Kol92] 中证明，对于 $N=1$ 和 $d=1$，2，3，该猜想成立。随后，在 [RS96], 中，Reinhart 和 Sit 证明了下列等式对 $N=1$ 成立：

$$V_d^{\mathrm{diff}} = (V_d^{\mathrm{diff}})^{(d-1)}.$$

特别地，这意味着变量 $X=(X_0,X_1)$ 中次数为 $d\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ 的微分齐次多项式所构成的向量空间是有限维的。三年后，Reinhart 改进了先前的结果，并对 [Rei99] 中的 $N=1$ 证明了 Schmidt–Kolchin 猜想。此后，这一猜想再无进展。甚至尚不清楚当 $N>1$ 时，向量空间 V_d^{diff} 是否为有限维。

本文证明了 Schmidt–Kolchin 猜想，并证明如下结论（另见定理 2.5.3）：

定理 0.0.1. $V_{\text{微分}d}$ 的维数等于 $(N+1)^d$。此外，本文给出了该向量空间的一个显式基，并由此推出等式

$$V_d^{\mathrm{diff}} = (V_d^{\mathrm{diff}})^{(d-1)}.$$

简而言之，证明思路如下（更多细节请参见论文结构）。容易看出（参见第 2 节开头），一般线性群在 V_d 上有一个自然作用，该作用下降到 V_d^{diff}。固定 $k\in\mathbb{N}$ 这一自然数后，$(V_{\text{微分}d})^{(k)}$ 成为 $V_d^{(k)}$ 的一个子表示。向量空间 $V_d^{(k)}$，最高权 $V_{(k)\,d}$ 的最高权向量有一个自然基（定义见第 1.1.3 节，另见第 2.2 节）。因此，问题归结为确定该基中哪些适当的线性组合是微分齐次多项式。证明的关键在于对这一问题作出恰当的代数表述，并采用相应的方法加以解决（参见第 2.3 节和第 2.4 节）。

除了这个问题本身具有的内在趣味外，我们的动机更多来自几何。事实证明，变量 $X=(X_0,\dots,X_N)$ 中的微分齐次多项式与射影空间 $\mathbf{P}^N$ 上的（正）扭曲喷射微分之间存在一一对应关系（关于复流形上喷射微分的定义，见第 3.1 节；另见命题 3.2.1）。作为我们对微分齐次多项式研究的推论，我们得到了本文的第二主定理（记号与定义见第 3.1 节）：

定理 0.0.2. 设 $d\in\mathbb{Z}$、$k\geq 0$ 和 $n\geq 0$ 为自然数。那么：

(1) 对任意 $k\geq d-1$ 和任意 $n\in\mathbb{N}$，有同构

$$H^0(\mathbf{P}^N, E_{k,n}\mathbf{P}^N(d)) \simeq H^0(\mathbf{P}^N, E_{d-1,n}\mathbf{P}^N(d));$$

(2) 下列等式成立：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim H^0(\mathbf{P}^N, E_{d-1,n}\mathbf{P}^N(d)) = (N+1)^d;$$

(3) 对任意 $k\in\mathbb{N}$ 和任意 $n>\lfloor(1-\frac{1}{N+1})\frac{d^2}{2}\rfloor$，都有如下消失：

$$H^0(\mathbf{P}^N, E_{k,n}\mathbf{P}^N(d)) = (0).$$

需要指出的是，前面的定理 0.0.2 并未涵盖我们关于射影空间上扭曲射流微分的全部信息。事实上，由于微分齐次多项式已有明确的描述，这些扭曲射流微分也同样如此（见命题 3.2.1）。然而，给定一个微分齐次的 P

在 V^{diff} 的典范基中（见第 2.1.1 节），很容易确定它所定义的整体截面（见命题 3.3.1）；但要统计归入同一类的微分齐次多项式的数量，似乎相当困难。这类纯粹的组合问题或许可以留待未来研究，从而为射影空间上 Green–Griffiths 丛的整体截面空间维数推导出闭式公式。

为了结束这部分导论，我们想再提及另一种动机。正如任何代数几何学家都知道的，对任意分次环 S，都关联着概形 Proj(S)；当 S 还是有限生成时，这个概形尤其值得关注。因此，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，研究下述概形是十分自然的（它会随着 k 的增长而不断变大）：

$$\mathrm{Proj}\,\big(\bigoplus_{d\geq 0}(V_d^{\mathrm{diff}})^{(k)}\big),$$

以及它的闭子概形。这是正在进行的一项研究的主题。

本文结构。本文结构如下。

第1节介绍预备知识。

在第1.1节中，我们回顾对称群和一般线性群表示论中的一些经典事实，并借此确定记号。

在第1.2节中，我们回顾一种对应关系：一方面是常系数零维偏微分方程组，另一方面是代数簇。这种对应关系使我们能够运用交叉理论中的方法，计算偏微分方程组的线性无关解的数量。

第 2 节致力于证明 Schmidt–Kolchin 猜想。

在第 2.1 节中，按照 [Rei99], ，我们针对每个整数 $d \geq 0$ 引入了一个自然的子族 $\overline{V_d^{\mathrm{diff}}} \subset V_{\text{微分}d}$ 齐次多项式，其次数为 d；我们证明了该族的维数为 $(N+1)^d$。[1] 第 2.1 节的主要结果如下：我们证明 $V_{\text{微分}d}$ 实际上是一般线性群自然作用下的一个子表示。[2] 作为一个重要推论，可以得到 V_d^{diff}中$\boldsymbol{\lambda}$-最高权向量维数的一个下界，其中 $\boldsymbol{\lambda} \vdash d$ 是 d 的一个分拆，且至多有 $(N+1)$ 个部分：

$$\dim V^{\mathrm{diff}}_{\mathrm{hw}(\boldsymbol{\lambda})} \geq f_{\boldsymbol{\lambda}}. \tag{1}$$

在第 2.2 节中，我们固定一个整数 $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，并为向量空间给出一个自然的基

$$V^{(k)}_{d,\mathrm{hw}}$$

其中包含有限维表示 $V_d^{(k)}$ 中的最高权向量。

在第 2.3 节中，我们研究一个纯粹的代数问题：计算固定有限维向量空间中同时属于一族特定端同态之核的向量空间的维数。我们认为，本文的一项主要创新在于我们处理这一问题的方式，因为我们关键性地运用了上文简要介绍的偏微分方程组与代数簇之间的对应关系。

在第 2.4 节中，我们给出一组方程，用以刻画$V_d^{(k)}$ 中微分齐次的最高权向量。本第 2.4 节的技术部分旨在

[1]如引言中所述，下界

$$\dim(V_d^{\mathrm{diff}}) \geq (N+1)^d$$

已由 Schmidt 在 [Sch79] 中证明。然而，他并未通过构造一个显式的微分齐次多项式自由族来证明这一结果。[2]相信 Schmidt–Kolchin 猜想的话，这至少是我们可以期待的。

将这组方程与先前的代数问题联系起来。此时，令人惊喜的是，对 N 和 k 的依赖几乎消失了。本第 2.4 节的结论是，我们得到了$(V_d^{\mathrm{diff}})^{(k)}$ 中独立 $\boldsymbol{\lambda}$-最高权向量数量的一个上界（其中 $\boldsymbol{\lambda} \vdash d$ 是至多有$(N+1)$个部分的分拆），而这个上界仅取决于 d。[3]

在第 2.5 节中，我们完成 Schmidt–Kolchin 猜想的证明，而下界 (1) 对此至关重要。

第 3 节旨在建立微分齐次多项式与射影空间上的扭曲喷射微分之间的对应关系，并从前述研究中推导出应用。

在第 3.1 节中，我们回顾复流形上 Green–Griffiths 丛的构造。

在第 3.2 节中，我们建立微分齐次多项式与射影空间上的扭曲喷射微分之间的对应关系。

在第 3.3 节中，我们利用关于微分齐次多项式的已有知识，研究扭曲 Green–Griffiths 丛的零阶上同调群（即整体截面向量空间）。

致谢。 我想感谢 Gleb Pogudin，因为我从他那里学到了微分齐次性的术语，以及 Schmidt–Kolchin 猜想。原来，我曾在一篇早期论文中用过微分齐次性的定义性质，却因缺乏了解而称之为几何性质。正是 Schmidt–Kolchin 猜想在几何上的意义促使我着手研究这一猜想。

我还要感谢 Institut de Mathématiques de Toulouse（IMT）为我提供了舒适且充满活力的工作环境。当然，我也非常感谢 CIMI LabEx 给我在此工作的机会。

1. 预备知识。

在第1节中，我们汇集了一些在研究微分齐次多项式时将会用到的结果。这些结果一方面来自表示论（第1.1节），另一方面来自偏微分方程组（第1.2节）。

1.1. **对称群与一般线性群的表示论**。本节参考文献包括 [Ful97], [FH91] 和 [Boe70]。

1.1.1. 分拆、杨表及一些组合恒等式。 回忆一下，自然数 $d \geq 1$的一个分拆 $\boldsymbol{\lambda}$ 就是一个有限的递减正自然数序列，其和等于 d。对于任意一个有 s 个部分的分拆 $\boldsymbol{\lambda}$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_s > 0)$$

对应一个形状为 $\boldsymbol{\lambda}$ 的杨图，它由按左对齐方式排列的单元格组成：第一行包含 λ_1 个单元格，第二行包含 λ_2 个，依此类推（示例见图 1）。

固定一个自然数 $n \in \mathbb{N}$，以及一个形状为 $\boldsymbol{\lambda}$ 的杨图 $\mathcal{T}$。根据定义，用集合 $\{1, \ldots, n\}$ 填充的杨表是指一种填法 T，将数字 $\{1, \ldots, n\}$ 填入杨图 $\mathcal{T}$ 的方格中。此外，若要求

- 沿图示中的一行从左向右查看，数字序列是非递减的；

[3] 因此，在这个阶段，我们已经证明 V_d^{diff} 是有限维的。

($\lambda_1 = 5$)
($\lambda_2 = 3$)
($\lambda_3 = 3$)
($\lambda_4 = 1$)

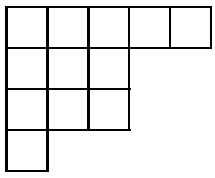

图 1. 分拆 $\lambda = (5, 3, 3, 1)$ 的杨图示。

- 沿图示中的一列从上向下查看，数字序列是递增的。

那么，这样的杨表称为形状为 $\boldsymbol{\lambda}$、填入集合 $\{1, \dots, n\}$ 的半标准杨表。如果 $n = d$，并且进一步要求每个数字 $1 \leq k \leq d$ 在杨表中恰好出现一次，那么杨表 T 称为形状为 $\boldsymbol{\lambda}$的标准杨表。

因此自然会考虑以下（组合）数：

- $f_{\boldsymbol{\lambda}} \coloneqq \left|\left\{ T \text{形状为 } \boldsymbol{\lambda} \right\}\right|$的标准杨表；
- $d_{\boldsymbol{\lambda}}(n) \coloneqq \left|\left\{ T\text{形状为 } \boldsymbol{\lambda}\text{、用 } \{1, \dots, n\} \right\}\right|$填充的半标准杨表，

此外，对于固定的 n 元组 $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$，其中 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{\lambda}| = d$，定义所谓的 Kostka 数：

$K_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{a}} \coloneqq \left|\left\{ T \text{形状为 } \boldsymbol{\lambda}\text{、分别用 } a_1 \text{ 1和..... } a_n \text{ } n \text{ 填充的半标准杨表} \right\}\right|$.注意，根据 Kostka 数的定义，以下等式成立：

$$d_{\boldsymbol{\lambda}}(n) = \sum_{|\boldsymbol{a}|=d} K_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{a}}. \tag{2}$$

Robinson–Schensted–Knuth 对应（参见例如 [Ful97|I.4]）可以得到以下恒等式：

命题 1.1.1。对于任意 $d \geq 1$ 和任意 $n \geq 1$，以下等式成立：

- $d! = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \vdash d} f_{\boldsymbol{\lambda}}^2$;
- $n^d = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \vdash d} f_{\boldsymbol{\lambda}} d_{\boldsymbol{\lambda}}(n)$.

这里，符号 $\boldsymbol{\lambda} \vdash d$ 表示 $\boldsymbol{\lambda}$ 是自然数 d 的一个分拆。

1.1.2. 对称群的表示。设 $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，并记 Σ_d 为集合 $\{1, 2, \dots, d\}$ 的对称群。众所周知（参见例如 [FH91|Lectures 1 & 2]），Σ_d 的不可约表示的数量与 Σ_d 中的共轭类数量相等。注意，共轭类与 d 的分拆一一对应。

记 $\mathbb{C}[\Sigma_d]$ 为 Σ_d 的正则表示，即

$$\mathbb{C}[\Sigma_d] \coloneqq \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_d} \mathbb{C} \cdot \sigma.$$

注意，$\mathbb{C}[\Sigma_d]$ 按定义就是对称群 Σ_d的一个表示。还要注意，对称群 Σ_d的任意表示 $(M, \rho\colon \Sigma_d \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(M))$ 都具有一种自然的（左）$\mathbb{C}[\Sigma_d]$-模结构，定义如下。对于 $m \in M$ 和 $(\lambda_\sigma \in \mathbb{C})_{\sigma \in \Sigma_d}$，令：

$$\left(\sum_{\sigma \in \Sigma_d} \lambda_\sigma \sigma\right) \cdot m \coloneqq \sum_{\sigma \in \Sigma_d} \lambda_\sigma \rho(\sigma)(m).$$

Σ_d 的每个不可约表示都出现在 $\mathbb{C}[\Sigma_d]$中（事实上，对于任意有限群的正则表示，这都是一个普遍事实：例如参见 [FH91|Lecture 2]）。有一个 P

此外，还有投影到不可约因子的典范投影，其定义如下。设 $\boldsymbol{\lambda} \vdash d$ 是 d的一个分拆，且 T 是一个形状为 $\boldsymbol{\lambda}$的标准杨表。与标准杨表 T 相关联的是 Σ_d的以下两个子群：

- 保持 T的行的置换子群 $R(T)$；
- 保持 T的列的置换子群 $C(T)$。

所谓与杨图 T 相关联的杨对称化子，是定义在 $\mathbb{C}[\Sigma_d]$中的向量，定义如下：

$$c_T \coloneqq \underbrace{\Big(\sum_{q\in C(T)} \epsilon(q)q\Big)}_{\coloneqq b_T} \times \underbrace{\Big(\sum_{p\in R(T)} p\Big)}_{\coloneqq a_T},$$

其中 $\epsilon(\cdot)$是符号。下面有如下定理（例如参见 [Boe70]|[IV. 3]）：

定理 1.1.2。 以下结论成立。

- 乘法映射

$$p_T \colon \begin{pmatrix} \mathbb{C}[\Sigma_d] & \longrightarrow & \mathbb{C}[\Sigma_d] \\ v & \longmapsto & v \times c_T \end{pmatrix}$$

  是到 Σ_d的不可约表示上的近似投影[4] 。
- 对于具有相同形状 $\boldsymbol{\lambda} \vdash d$的两个不同标准杨表 T 和 T'，不可约表示 像(p_T) 和像$(p_{T'})$ 是同构的。抽象的不可约表示通常记作 $S^{\boldsymbol{\lambda}}$。
- 对于具有不同形状的两个标准杨表 T 和 T'，不可约表示 像(p_T) 和像$(p_{T'})$ 不同构。
- 表示 $\mathbb{C}[\Sigma_d]$ 分解为如下不可约表示的直和 -

  ：

$$\mathbb{C}[\Sigma_d] = \bigoplus_T \mathrm{Im}(p_T),$$

  其中 T 遍历具有 d个方格的标准杨表。

1.1.3. 一般线性群的表示。令 $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，并考虑一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，以及子群 $D \subset B \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，其中

- D 是对角矩阵子群；
- B 是上三角矩阵构成的博雷尔子群。

固定 E 一个 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的有限维多项式[5] 表示。权为 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n$ 的权向量 $e \in E$是满足下列等式的向量：对任意 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$，

$$\mathrm{Diag}(x_1, \ldots, x_n) \cdot e = (x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n})e.$$

$\boldsymbol{\lambda}$-最高权向量是权为 $\boldsymbol{\lambda}$ 的权向量，并且在 B作用下保持不变（相差一个比例因子）。也就是说，下列等式成立：

$$B \cdot e = \mathbb{C}^* e.$$

表示的一般理论（例如参见 [Ful97]|[II.8] 和 [FH91]|[第 14 和 15]讲）指出，有限维多项式表示由其最高权向量唯一确定。更准确地说，

- 每个表示都可分解为不可约表示的直和；
- 一个表示不可约，当且仅当它在乘法因子意义下有唯一的最高权向量；

[4]根据定义，这意味着对于某个非零标量 λ，$p_T \circ p_T = \lambda p_T$ [5]这意味着映射 $\rho : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(E)$ 是多项式映射，即在为 E 选定一组基后，E 的 $\dim(E)^2$ 个坐标函数 ρ 都是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的 n^2 变量的多项式。

- 两个不可约表示同构，当且仅当它们的最高权向量具有相同的权。

此外，对于一般线性群，可能的最高权向量$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n$ 与至多有 n 个部分的分拆一一对应。换言之，对任意满足下式的 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$$

都对应着 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的一个唯一不可约表示，反之亦然。这个唯一的表示记作 $S^{\boldsymbol{\lambda}}\mathbb{C}^n$，称为 $\mathbb{C}^n$ 的 $\boldsymbol{\lambda}$ 次舒尔幂。为后续使用，我们记录如下经典命题（参见例如 [Ful97|II.8.3]）：

命题 1.1.3. 表示 $S^{\boldsymbol{\lambda}}\mathbb{C}^n$ 的维数等于 $d_{\boldsymbol{\lambda}}(n)$。

每个有限维多项式表示 E 都对应一个特征，记作 χ_E，其定义为关于变量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ 的对称多项式

$$\chi_E(\boldsymbol{x}) \coloneqq \mathrm{Trace}(\mathrm{Diag}(\boldsymbol{x})).$$

当 $E = S^{\boldsymbol{\lambda}}\mathbb{C}^n$ 时，特征 χ_E 称为 $\boldsymbol{\lambda}$ 次舒尔多项式（关于变量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$），记作 $s_{\boldsymbol{\lambda}}$。关于对称多项式的一般理论（参见例如 [Ful97|I.2.2]）表明，舒尔多项式构成对称多项式的一个基。因此可推知，一般线性群的表示 E 由其特征 χ_E 唯一确定。

对称群的表示与一般线性群之间存在如下自然的相互作用。设 $E = (\mathbb{C}^n)^{\otimes d}$。一方面，它是一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$的自然表示；另一方面，通过对张量积中各因子的置换，它自然具有右 $\mathbb{C}[\Sigma_d]$-模结构。具体而言，对于 $\sigma \in \Sigma_d$ 和 $v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{C}^n$，定义如下：

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) \cdot \sigma \coloneqq v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)}.$$

一个简单但重要的观察是，这些作用彼此相容，也就是说，它们相互交换：

$$A \cdot ((v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) \cdot \sigma) = (A \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_d)) \cdot \sigma.$$

这里，A 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$中的一个矩阵，$\sigma$ 是 Σ_d中的一个元素，而 $v_1, \ldots, v_d$ 是 $\mathbb{C}^n$中的向量。对于 Σ_d的任意表示 M，将其视为左 $\mathbb{C}[\Sigma_d]$-模，记

$$E(M) \coloneqq E \otimes_{\mathbb{C}[\Sigma_d]} M$$

这是 E 与 M在 $\mathbb{C}[\Sigma_d]$ 上的张量积。特别地，显然有等式

$$E(\mathbb{C}[\Sigma_d]) = E.$$

根据前面第 1.1.2 节的讨论，自然会考虑如下线性映射：其中 T 是一个有 d 个方格的标准杨表

$$E(p_T)\colon \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & v \otimes_{\mathbb{C}[\Sigma_d]} c_T \end{pmatrix}.$$

特别利用定理 1.1.2，可以证明以下结果（例如参见 [Boe70|V.4] and[Ful97|II.8]）：

定理 1.1.4。 以下结论成立。

- 线性映射

$$E(p_T)\colon \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & v \otimes_{\mathbb{C}[\Sigma_d]} c_T \end{pmatrix}$$

是到$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$的一个不可约表示上的近似投影。

- 对于形状相同的两个不同标准杨表 T 和 T'，不可约表示$\mathrm{Im}(E(p_T))$和$\mathrm{Im}(E(p_{T'}))$同构于第 $\boldsymbol{\lambda}$个舒尔幂 $S^{\boldsymbol{\lambda}}\mathbb{C}^n \simeq E(S^{\boldsymbol{\lambda}})$。
- 对于形状不同的两个标准杨表 T 和 T'，不可约表示$\mathrm{Im}(E(p_T))$和$\mathrm{Im}(E(p_{T'}))$不同构。
- 表示 $E = (\mathbb{C}^n)^{\otimes d}$ 分解为以下不可约表示的直和：

$$E = \bigoplus_T \mathrm{Im}(E(p_T)),$$

其中 T 遍历所有含有 d个方格的标准杨表。

1.2. 常系数零维偏微分方程组。取定 $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 一个自然数，并用 $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$表示定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的整函数集合（即定义在所有 n 个变量上的全纯映射集合）。考虑

$$A \coloneqq \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_n]$$

形式变量 $\partial_1,\ldots,\partial_n$ 中的多项式环。全纯映射 $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ 的集合具有自然的 A-模结构，其在单项式上的定义如下

$$(\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}) \cdot P \coloneqq \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} P}{(\partial z_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial z_n)^{\alpha_n}},$$

并由线性性延拓。对任意理想 $I \subset A$，都关联着一个偏微分方程组 $\mathcal{S}(I)$：

$$\mathcal{S}(I) \coloneqq \{P \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \mid E \cdot P \equiv 0 \ \forall E \in I\}.$$

注意，由于 A 是诺特的（根据希尔伯特基定理），$\mathcal{S}(I)$ 可由有限个常系数偏微分方程定义。

假设理想 I 是零维的，即仿射簇 $\mathrm{Spec}(\frac{A}{I})$ 是有限的。在这种情况下，可以将解空间 $\mathcal{S}(I)$ 的维数（作为 $\mathbb{C}$-向量空间）与商空间 $\frac{A}{I}$ 的代数结构联系起来。事实上，开启常系数偏微分方程组理论的主要成果之一是以下定理，该定理由 [Pal70][VII] 和 [Ehr70] 证明：

定理 1.2.1. A-模 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ 是内射的，即函子

$$\mathrm{Hom}_A(\cdot, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$$

是精确的。

Oberst 在 [Obe90]，中进一步研究了 A-模 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ 的性质，并证明 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ 是一个大型内射余生成元：定义和详细内容请参见上述文献。作为副产品，这使 Oberst 得以在 [Obe96]，中证明以下对我们至关重要的结果：

定理 1.2.2。设 $I \subset A$ 是零维理想。则有以下等式：

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(I) = \mathrm{length}(\frac{A}{I}).$$

关于阿廷模的长度这一概念，例如可参见 [Eis95][2.4] 。

2. 微分齐次多项式的结构。

一般线性群 $\mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{C})$ 对由 $(N+1)$ 个变量构成的微分多项式向量空间 V 有一个自然的左作用（通过变量替换）如下。设 $A \in \mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{C})$，$P \in V$，并定义：

$$A \cdot P \coloneqq P\big((AX)^{(0)}, (AX)^{(1)}, \dots\big).$$

这一作用保持引言中定义的 V 上的自然滤过和分次。此外，一个简单但关键的观察是，微分齐次多项式的集合 V^{diff} 构成了 V的一个子表示。事实上，这两点都非常重要，因此我们将其记录为一个引理：

引理 2.0.1。 以下两点成立：

- 一般线性群在 V 上的自然作用保持滤过和分次；
- 向量空间 $V^{\text{微分}}$ 构成了 V的一个子表示。

本第 2 节的目标是研究微分齐次多项式的结构，并最终证明 Schmidt–Kolchin 猜想。

2.1. 微分齐次多项式族。

2.1.1. 微分齐次多项式的构造。 固定一个自然数 $d \geq 1$ 。对于任意 d元组 $\boldsymbol{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \{0, \dots, N\}^d$，以及任意一个变量的多项式族 $\boldsymbol{R} \coloneqq (R_1, \dots, R_d) \in \mathbb{C}[t]^{\oplus d}$，可以如下定义一个次数为 d 的微分齐次多项式（记作朗斯基$(R_1 X_{n_1}, \dots, R_d X_{n_d})$）。考虑 $\mathcal{M}_{1,d}(V[t])$ 中的下列元素

$$L_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{R}) \coloneqq (R_1(t)X_{n_1}, \dots, R_d(t)X_{n_d}).$$

对于自然数 $r \geq 0$，用 $L_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{R})^{(r)}$ 表示如下得到的行：对于$1 \leq k \leq d$，将 $L_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{R})$ 的第 k 个元素（即 $R_k(t)X_{n_k}$）替换为

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} R_k(t)^{(r-j)} X_{n_k}^{(j)}.$$

于是构成 $d \times d$ 阶方阵

$$W_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{R}) \coloneqq \begin{pmatrix} L_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{R}) \\ L_{\boldsymbol{n}}^{(1)}(\boldsymbol{R}) \\ \cdot \\ \cdot \\ L_{\boldsymbol{n}}^{(d-1)}(\boldsymbol{R}) \end{pmatrix},$$

并考虑其行列式。下面给出一个命题：

命题 2.1.1。 行列式 $\det(W_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{R}))|_{t=0}$ 是一个次数为 d 的微分齐次多项式，记作 朗斯基$(R_1 X_{n_1}, \dots, R_d X_{n_d})$。

证明。 设 $Q \in \mathbb{C}[T]$。根据引言中定义的 Q 对 V 的作用，并根据 $L_{\boldsymbol{n}}^{(r)}(\boldsymbol{R})$ 的定义，注意到以下等式成立

$$Q \cdot L_{\boldsymbol{n}}^{(r)}(\boldsymbol{R}) = (Q L_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{R}))^{(r)}.$$

因此，可以推得多项式

$$Q \cdot \det(W_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{R})) \in V[t, T]$$

等于一个 $d \times d$ 阶方阵的行列式，该方阵的第 r 行等于 $(QL_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{R}))^{(r)}$。利用对行进行初等变换以及行列式的反线性，可以推得

$$Q \cdot \det(W_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{R})) = Q^d \det(W_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{R})).$$

这表明，t 中 $\det(W_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{R}))$ 的每个系数确实都是次数为 d 的微分齐次多项式，$t=0$处的取值也同样如此。□

正如 Reinhart 在 [Rei99], 中所指出的，可以如下提取一个由 $(N+1)^d$ 个微分齐次多项式构成的自由族[6]:

命题 2.1.2. 考虑以下数据 $\mathcal{P}$:

- 一个$(N+1)$元组 $\boldsymbol{m} = (m_0, \ldots, m_N) \in \mathbb{N}^{N+1}$，满足 $|\boldsymbol{m}| = d$。令

$$i_1 < \cdots < i_r$$

  令 i 为满足 $m_i \neq 0$ 的指标所组成的有序集。
- 对任意 $1 \leq \ell \leq r$，取一个满足以下条件的递增整数序列:

$$0 \leq \alpha_{i_\ell,1} < \cdots < \alpha_{i_\ell,m_{i_\ell}} < m_{i_1} + \cdots + m_{i_\ell}.$$

对于任意这样的数据 $\mathcal{P}$，记 $W_{\mathcal{P}}$ 为以下次数为 d的微分齐次多项式

$$W_{\mathcal{P}} \coloneqq \operatorname{Wronsk}(t^{\alpha_{i_1,1}} X_{i_1}, \ldots, t^{\alpha_{i_1,m_{i_1}}} X_{i_1}, \ldots, t^{\alpha_{i_r,1}} X_{i_r}, \ldots, t^{\alpha_{i_r,m_{i_r}}} X_{i_r}).$$

那么，族 $(W_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}}$ 构成一个由$(N+1)^d$ 个次数为 d （且阶数小于等于$(d-1)$）的微分齐次多项式组成的自由族。

证明。 首先，容易计算出这样的数据 $\mathcal{P}$确实有 $(N+1)^d$ 个。事实上，对于陈述中的固定的 $(N+1)$元组 $\boldsymbol{m}$，共有:

$$\binom{d}{m_{i_r}} \binom{d-m_{i_r}}{m_{i_{r-1}}} \cdots \binom{d-(m_{i_r}+\cdots+m_{i_2})}{m_{i_1}} = \binom{d}{m_{i_1}, \ldots, m_{i_r}}$$

种构造满足陈述中第二项的整数序列的方法（这里采用了多项式系数的常用记法）。数据 $\mathcal{P}$的计数由牛顿多项式定理得出。

要证明所构造的次数为 d的微分齐次多项式线性无关，可按如下方法进行。对变量（$X_i^{(k)}$）规定如下全序:

$$X_0^{(d-1)} > \cdots > X_0^{(0)} > X_1^{(d-1)} > \cdots > X_N^{(0)}.$$

这会在单项式上诱导出一个全序：先比较 $X_0^{(\cdot)}$ 中阶数较高的项，再比较该因子中的次数，依此类推。现在，关键观察是，多项式 $W_{\mathcal{P}}$中的最低阶单项式两两不同，并且分别等于定义矩阵对角线上元素的乘积。这就证明了线性无关性，并完成了命题的证明。□

例 2.1.3. 取 $N=2$、$d=6$，并考虑朗斯基$(X_0, tX_0, tX_1, t^3X_1, X_2, t^4X_2)$。这个微分齐次多项式由下列

[6]在他的论文中，具体构造与本文所呈现的不同，但本质上是相同的。借此机会，我要感谢 Gleb Pogudin，是他向我介绍了这里呈现的构造。

矩阵：

$$\begin{pmatrix} X_0^{(0)} & 0 & 0 & 0 & X_2^{(0)} & 0 \\ X_0^{(1)} & X_0^{(0)} & X_1^{(0)} & 0 & X_2^{(1)} & 0 \\ X_0^{(2)} & 2X_0^{(1)} & 2X_1^{(1)} & 0 & X_2^{(2)} & 0 \\ X_0^{(3)} & 3X_0^{(2)} & 3X_1^{(2)} & 6X_1^{(0)} & X_2^{(3)} & 0 \\ X_0^{(4)} & 4X_0^{(3)} & 4X_1^{(3)} & 24X_1^{(1)} & X_2^{(4)} & 24X_2^{(0)} \\ X_0^{(5)} & 5X_0^{(4)} & 5X_1^{(4)} & 60X_1^{(2)} & X_2^{(5)} & 120X_2^{(1)} \end{pmatrix}.$$

记

$$\overline{V_d^{\mathrm{diff}}} := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}((W_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}})$$

为由命题 2.1.2 中给出的族张成的 $(N+1)^d$ 维 $\mathbb{C}$ 向量空间。微分多项式 $(W_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}}$ 将称为 $\overline{V_d^{\mathrm{diff}}}$ 的典范基。

根据 Schmidt–Kolchin 猜想，向量空间 $\overline{V_d^{\mathrm{diff}}}$ 应当是所有次数为 d 的微分齐次多项式构成的向量空间。特别地，根据引理 2.0.1，它应当是一般线性群 $\mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{C})$ 的一个表示。证明这一点确实成立，正是下一节的目标。

注 2.1.4. 还可以构造其他自然的微分齐次多项式族。例如，对 $\theta \in \mathbb{C}^*$，可以考虑以下族：

$$\left\{ \mathrm{Wronsk}\left(X_{n_1}, (\theta+t)X_{n_2}, \ldots, (\theta+t)^{d-1}X_{n_d}\right) \mid \boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \{0, \ldots, N\}^d \right\}.$$

尽管很容易看出，由前述族张成的向量空间是 V_d^{diff} 的一个子表示，但要确定它的维数却并非显而易见。我们猜想，对于 θ 的一般取值，该空间的维数为 $(N+1)^d$，但我们未能证明这一点。

2.1.2. 一般线性群作用下的不变性。$\overline{V_d^{\mathrm{diff}}}$在 $\mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{C})$ 作用下所需的不变性，将由我们在附录 A 中展开的更一般的考察得出。我们选择将这一部分放在附录中，因为其本身与微分齐次多项式关系不大。它实际上是关于具有某种形状的行列式族的一个更一般的命题。

现在，先陈述附录 A 中主要命题的一个推论，它将有助于我们的研究。固定 $Y_1, \ldots, Y_d$ 个形式变量，以及它们的形式导数 $Y_{(k)\,1}, \ldots, Y_{(k)\,d}$，其中 k 是一个自然数。我们考虑以下次数为 d 的微分齐次多项式族：

$$\mathcal{F}_d := \left(\mathrm{Wronsk}(t^{\alpha_1}Y_1, \ldots, t^{\alpha_d}Y_d)\right)_{0 \le \alpha_i \le d-1},$$

以及以下子族：

$$\tilde{\mathcal{F}}_d := \left(\mathrm{Wronsk}(t^{\alpha_1}Y_1, \ldots, t^{\alpha_d}Y_d)\right)_{0 \le \alpha_i \le i-1}.$$

注 2.1.5。注意，上一节 2.1.1 中定义的 $\overline{V_d^{\mathrm{diff}}}$ 的典范基˜，可通过对族 $\mathcal{F}_d$ 进行适当的代换 $Y_i = X_{n_i}$, $n_i \in \{0, \ldots, N\}$ 得到。

注 2.1.6. 如果前一定义中的某个 α_i 大于或等于 d，那么很容易看出，所得微分多项式恒等于零。

作为命题 A.0.5 和注 A.0.2 的推论，可立即得出以下结论：

~**命题 2.1.7**。 由 $\mathcal{F}_d$ 张成的 $\mathbb{C}$-向量空间与由 $\mathcal{F}_d$张成的向量空间相同。

证明。 见附录 A。 □

由此命题可进一步推出:

定理 2.1.8。 $\mathbb{C}$-向量空间 $\overline{V_d^{\mathrm{diff}}}$是 $V_{\text{微分}d}$ 的一个子表示（在一般线性群 $\mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{C})$的自然作用下）。

证明。 考虑命题 2.1.2 中所述的数据 $\mathcal{P}$，以及与之相关联的微分多项式 $W_{\mathcal{P}}$：

$$W_{\mathcal{P}} = \mathrm{Wronsk}(t^{\alpha_{i_1,1}}X_{i_1}, \ldots, t^{\alpha_{i_1,m_{i_1}}}X_{i_1}, \ldots, t^{\alpha_{i_r,1}}X_{i_r}, \ldots, t^{\alpha_{i_r,m_{i_r}}}X_{i_r}).$$

记

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{i_1,1}, \ldots, \alpha_{i_r,m_r}) \in \mathbb{N}^d,$$

注意到，根据构造，对于任意 $1 \leq i \leq d$，都有不等式 $\alpha_i \leq i-1$。因此，微分齐次多项式 $W_{\mathcal{P}}$ 不过是

$$\mathrm{Wronsk}(t^{\alpha_1}Y_1, \ldots, t^{\alpha_d}Y_d)$$

在求值之后

$$Y_1 = \ldots = Y_{m_{i_1}} = X_{i_1}, Y_{m_{i_1}+1} = \cdots = Y_{m_{i_1}+m_{i_2}} = X_{i_2}, \ldots .$$

反过来，给定

$$\mathrm{Wronsk}(t^{\alpha_1}Y_1, \ldots, t^{\alpha_d}Y_d)$$

对于任意 $1 \leq i \leq d-1$，令 $\alpha_i \leq i-1$，则可得到 $\overline{V_d^{\mathrm{diff}}}$在求值之后的典范基中的一个微分多项式，差一个符号，形式如下

$$Y_1 = \ldots = Y_{m_{i_1}} = X_{i_1}, Y_{m_{i_1}+1} = \cdots = Y_{m_{i_1}+m_{i_2}} = X_{i_2}, \ldots,$$

前提是满足以下条件:

- α_1,... , α_{m_1} 两两不同;
- $\alpha_{m_1+1}, \ldots, \alpha_{m_1+m_2}$ 两两不同;
- 等等。

若不满足这些条件，则由行列式的反线性，求值结果显然为零。

现在，若令可逆矩阵 $A \in \mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{C})$ 作用于 $W_{\mathcal{P}}$，则展开后可得， $A \cdot W_{\mathcal{P}}$ 可写成如下形式的项的线性组合

$$W := \mathrm{Wronsk}(t^{\beta_1}Y_1, \ldots, t^{\beta_d}Y_d)_{|Y_0=X_{n_0},\ldots,Y_d=X_{n_d}}$$

其中某些 $0 \leq \beta_i \leq d-1$ 和 $0 \leq n_0 \leq \cdots \leq n_{d-1} \leq N$ 满足上述条件。根据命题 2.1.7，可以假设这样的项实际上满足以下不等式

$$\beta_i \leq i-1$$

对任意 $1 \leq i \leq d-1$ 都成立。由上可知，微分多项式 W 要么为零，要么属于 $\overline{V_d^{\mathrm{diff}}}$。这证明了 $V_{\text{微分}d}$ 在 $\mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{C})$ 的作用下保持左稳定。因此，它是 V_d^{diff} 的一个子表示，证明完毕。□

对我们的目的而言，以下推论尤为重要:

命题 2.1.9。 对于至多有 $\boldsymbol{\lambda} \vdash d$ $(N+1)$ 个部分的任意分拆，以下不等式成立:

$$\dim \left(V_{\mathrm{hw}(\boldsymbol{\lambda})}^{\mathrm{diff}}\right)^{(d-1)} \geq f_{\boldsymbol{\lambda}},$$

其中需回顾， $V_{\mathrm{hw}(\boldsymbol{\lambda})}^{\mathrm{diff}}$ 是 $V_{\text{微分}d}$ 中 $\boldsymbol{\lambda}$的最高权向量所构成的向量空间。

证明。 既然已知 $\overline{V_d^{\mathrm{diff}}}$是一个（有限维）表示，就可以计算它的特征。由于$\overline{V_d^{\mathrm{diff}}}$的典范基由权向量构成，因此可以立即算出：

$$\begin{aligned}\chi_{\overline{V_d^{\mathrm{diff}}}}(x_0,\dots,x_N) &= \sum_{\substack{\boldsymbol{m}\in\mathbb{N}^{N+1}\\ |\boldsymbol{m}|=d}} \binom{d}{m_0,\dots,m_N} x_0^{m_0}\cdots x_N^{m_N}\\ &= (x_0+\cdots+x_N)^d.\end{aligned}$$

例如利用定理 1.1.4，可以看出对称多项式 $(x_0+\cdots+x_N)^d$写作：

$$(x_0+\cdots+x_N)^d = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\vdash d} f_{\boldsymbol{\lambda}} s_{\boldsymbol{\lambda}}.$$

注意，若 $\boldsymbol{\lambda}$ 的部分数多于 $(N+1)$，则 $s_{\boldsymbol{\lambda}}=0$。由于一个表示由其特征唯一确定，因此可推得 $\overline{V_d^{\mathrm{diff}}}$有 $f_{\boldsymbol{\lambda}}$ 个线性无关的 $\boldsymbol{\lambda}$- 最高权向量。命题现在可由直接观察到 $V_d^{\text{微分}} \subset (\overline{V_d^{\mathrm{diff}}})^{(d-1)}$ 得出。□

2.2. **的最高权向量的自然基**。 注意，存在一个表示的自然同构

$$V_d^{(k)} \simeq \bigoplus_{\substack{\boldsymbol{a}\in\mathbb{N}^{k+1}\\ |\boldsymbol{a}|=d}} S^{a_0}\mathbb{C}^{N+1}\otimes\cdots\otimes S^{a_k}\mathbb{C}^{N+1}.$$

利用所谓的 Pieri 公式进行初等复合（例如参见 [Ful97][I.2.2 和 II.8.3]）可知， $V_d^{(k)}$ 分解为以下不可约表示：

$$V_d^{(k)} \simeq \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda}\vdash d}\ \bigoplus_{\substack{\boldsymbol{a}\in\mathbb{N}^{k+1}\\ |\boldsymbol{a}|=d}} S^{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbb{C}^{N+1})^{\oplus K_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{a}}}. \tag{3}$$

分解式 (3) 的一个简单推论如下：

引理 2.2.1. $V_d^{(k)}$ 的不可约表示的数量等于

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\vdash d} \dim S^{\boldsymbol{\lambda}}\mathbb{C}^{k+1}.$$

证明. 这由等式 (3) 以及以下恒等式得出：

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{a}\in\mathbb{N}^{k+1}\\ |\boldsymbol{a}|=d}} K_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{a}} = \dim S^{\boldsymbol{\lambda}}\mathbb{C}^{k+1}$$

（参见等式 (2) 和命题 1.1.3）。 □

为了在 $V_d^{(k)}$ 中定义一组最高权向量基，我们先引入一些记号。对于任意一列自然数 $\boldsymbol{i}=(i_0,\dots,i_r)$，其中 $0\le r\le N$，定义

$$D_{\boldsymbol{i}} := \det\begin{pmatrix} X_0^{(i_0)} & \cdot & \cdot & X_r^{(i_0)}\\ \cdot & & & \cdot\\ \cdot & & & \cdot\\ X_0^{(i_r)} & \cdot & \cdot & X_r^{(i_r)}\end{pmatrix}.$$

对于任意形状为 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0 \geq \cdots \geq \lambda_s)$、至多有（$N+1$）行且填入数字 $\{0, \ldots, k\}$ 的杨表 T，定义

$$D_T \coloneqq D_{T(\cdot,1)} \times \cdots \times D_{T(\cdot,\lambda_0)}.$$

这里，对于 $1 \leq i \leq \lambda_0$，符号 $T(\cdot, i)$ 表示从杨表 T 的第 i 列自上而下读出的整数序列。

现在，对于 $\boldsymbol{\lambda} \vdash d$ —— d 的一个分拆，考虑 $V_d^{(k)}$ 的以下子向量空间：

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} \coloneqq \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \left\{ D_T \mid \text{T Young tableau of shape } \boldsymbol{\lambda}, \text{ filled with } \{0, \ldots, k\} \right\}$$

有如下重要引理：

命题 2.2.2。以下结论成立：

(1) 设 $\boldsymbol{\lambda} \vdash d$ 是整数 d 的一个分拆，且至多有 $(N+1)$ 个部分。族

$$(D_T)_T$$

其中 T 遍历以 $\boldsymbol{\lambda}$ 为形状、填入 $\{0, \ldots, k\}$ 的半标准 杨表

(i) 是 $V_d^{(k)}$ 中由 $\boldsymbol{\lambda}$ 标记的最高权向量组成的自由族；

(ii) 张成向量空间 $\mathcal{D}_{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}$，该空间与 $S^{\boldsymbol{\lambda}}\mathbb{C}^{k+1}$ 有典范同构。

(2) 直和

$$\bigoplus_{\boldsymbol{\lambda} \vdash d} \mathcal{D}_{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}$$

spans all the highest weight vectors of $V_d^{(k)}$ *(note that if* $\boldsymbol{\lambda}$ *has more than* $(N+1)$ *parts, then* $\mathcal{D}_{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}$ *is zero).*

证明。设 $\boldsymbol{\lambda}$ 是一个至多有 $(N+1)$ 个部分的分拆，T 是一个形状为 $\boldsymbol{\lambda}$、填入数字 $\{0, \ldots, k\}$ 的杨表。直接利用行列式的反线性可知，D_T 确实是 $V_d^{(k)}$ 中的一个 $\boldsymbol{\lambda}$ 最高权向量。族

$$\left(D_T\right)_{T \text{ semi-standard Young tableaux of shape } \boldsymbol{\lambda} \text{ filled with } \{0, \ldots, k\}}$$

是一个张成向量空间 $\mathcal{D}_{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}$ 的自由族，这尤其是 [Ful97][II. 8.1 定理 1] 的推论的内容。这个结果还表明，$\mathcal{D}_{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}$ 与 $S^{\boldsymbol{\lambda}}\mathbb{C}^{k+1}$ 有典范同构。

陈述的最后一部分可由前面的引理 2.2.1 立即推出：确实，我们已经构造出与 $V_d^{(k)}$ 中不可约表示数量相同的线性无关最高权向量。□

既然我们已经在 $V_d^{(k)}$ 中得到了一组最高权向量的基，接下来的目标就是：评估这组基中有多少个元素的线性组合彼此独立，并且能构成微分齐次多项式。接下来的第2.3节和第2.4节将着手解决这个问题。

2.3. **一个中间代数问题**。让我们从一个简单的观察开始本节。次数为 d 的微分齐次多项式 P 必须满足以下性质：对于任意复数 $\alpha \in \mathbb{C}$，下列等式成立

$$P\big((\alpha+T)X, \big((\alpha+T)X\big)^{(1)}, \ldots\big)_{|T=0} = \alpha^d P\big(X, X^{(1)}, \ldots\big).$$

这个等式等价于说，如果进行如下代换

$$X^{(i)} \longleftrightarrow \alpha X^{(i)} + i X^{(i-1)} \tag{4}$$

对任意 $i \in \mathbb{N}$，多项式 P 都会变为 $\alpha^d P$。因此，自然需要研究满足这一性质的微分多项式。

本第 2.3 节旨在研究一个与（4）型变换相关的纯代数问题。随后，我们将在下一节（第 2.4 节）把这个代数问题与我们感兴趣的情形联系起来。

2.3.1. 给定$(\mathbb{C}^{k+1})^{\otimes d}$上的一族幂零端同态，求其核的维数的上界。考虑以下幂零端同态 $\mathbb{C}^{k+1}$:

$$J \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}.$$

固定一个向量 $v \in \mathbb{C}^{k+1}$，使得 $J^k v \neq 0$。它在 E 上诱导出一个自然的基 $= (\mathbb{C}^{k+1})^{\otimes d}$，如下所示:

$$\Big(\underbrace{J^{\alpha_1} v \otimes \cdots \otimes J^{\alpha_d} v}_{\coloneqq J^{\boldsymbol{\alpha}} v} \Big)_{0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_d \leq k}.$$

对于任意 $1 \leq \ell \leq d$，定义一个由 J 诱导的 E 的端同态 $J^{(\ell)}$，如下所示。用 $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d)$ 表示 $\mathbb{Z}^d$ 的标准 $\mathbb{Z}$- 基，并设:

$$J^{(\ell)}(J^{\boldsymbol{\alpha}} v) \coloneqq \sum_{1 \leq i_1 \neq \cdots \neq i_\ell \leq d} J^{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{e}_{i_1} + \cdots + \boldsymbol{e}_{i_\ell}} v.$$

等价地，若 v_1，.....，v_d 是 $\mathbb{C}^{k+1}$ 中的向量，则端同态 $J^{(\ell)}$ 在 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_d$ 上定义如下:

$$J^{(\ell)}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) \coloneqq \sum_{1 \leq i_1 \neq \cdots \neq i_\ell \leq d} (\otimes \prod_{i=1}^{d})(J^{\delta_{i, \{i_1, \ldots, i_\ell\}}} v_i).$$

这里，对于任意集合 $I \subset \mathbb{N}$，定义

$$\delta_{\cdot, I} \colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$$

为当 $i \in I$ 时取值为 1，否则取值为 0 的函数。

问题如下：我们要寻找属于 $E = (\mathbb{C}^{k+1})^{\otimes d}$ 且处于端同态 $J^{(\ell)}$ 的核中的张量，其中 $1 \leq \ell \leq d$ 为任意值。这个问题可以改写如下。考虑如下向量空间同构，它将

$$J^{\boldsymbol{\alpha}} v \longleftrightarrow \frac{X_1^{k-\alpha_1}}{(k-\alpha_1)!} \cdots \frac{X_d^{k-\alpha_d}}{(k-\alpha_d)!} \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d].$$

关键观察是，在这一对应下，端同态 $J^{(\ell)}$ 实际上就是由偏微分方程诱导的端同态:

$$\sum_{1 \leq i_1 \neq \cdots \neq i_\ell \leq d} \frac{\partial^\ell}{\partial X_{i_1} \cdots \partial X_{i_\ell}}.$$

通过这种重新表述，研究以下常系数偏微分方程组在 $\mathcal{O}(\mathbb{C}^d)$中的解便具有了意义:

$$(\mathcal{S}) \colon \quad \Big(\sum_{1 \leq i_1 \neq \cdots \neq i_\ell \leq d} \frac{\partial^\ell}{\partial X_{i_1} \cdots \partial X_{i_\ell}} \Big)_{1 \leq \ell \leq d}.$$

请注意，根据关于对称多项式的经典考量，上述方程组等价于以下偏微分方程组：

$$(\mathcal{S}'):\quad \Big(\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^{\ell}}{(\partial X_i)^{\ell}}\Big)_{1\leq \ell\leq d}.$$

沿用第1.2节的讨论，我们需要研究 $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_d]$ 中的理想

$$I \coloneqq (S_1,\dots,S_d),$$

其中，对于 $r\in\mathbb{N}_{\geq 1}$， S_r 是 d 个变量中的第 r 个牛顿多项式，即：

$$S_r \coloneqq \sum_{i=1}^{d} X_i^r.$$

于是有如下引理：

引理 2.3.1. 仿射簇 $V(I)$ 由原点组成

$$V(I)=\{0\},$$

并且有如下等式：

$$\operatorname{length}\Big(\frac{\mathbb{C}[X_1,\dots,X_d]}{I}\Big)=d!.$$

证明。仿射簇 $V(I)$ 仅由原点组成，这是一个经典结论。若 $(a_1,\dots,a_d)\in V(I)$，则在 $\mathbb{C}[Z]$ 中有等式

$$Z^d=\prod_{i=1}^{d}(Z-a_i),$$

因此必然有 $a_1=\cdots=a_d=0$。

令 $m_0=(X_1,\dots,X_d)$ 为原点处的极大理想，并考虑阿廷环 $M\coloneqq\frac{\mathbb{C}[X_1,\dots,X_d]}{I}$。不难看出

$$\operatorname{length}(M)=\operatorname{length}(M_{m_0}),$$

其中 M_{m_0} 是 m_0 处的局部化模。现在考虑以下技巧：在多项式环 $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_d]$ 中添加一个变量 T，并记为

$$\tilde{I}=(S_1,\dots,S_d)\subset\mathbb{C}[X_1,\dots,X_d,T]$$

$\mathbb{C}[X_1,\dots,X_d,T]$ 中由 $S_1,\dots,S_d\in\mathbb{C}[X_1,\dots,X_d]$ 生成的齐次理想。齐次簇 $\mathbf{Proj}(\tilde{M})$，其中 $\tilde{M}\coloneqq\frac{\mathbb{C}[X_1,\dots,X_d,T]}{\tilde{I}}$，于是由单个点

$$\infty\coloneqq[0:\dots:0:1]\in\mathbf{P}^d.$$

记 m_∞ 为闭点 ∞ 的理想层，初等交叉理论（参见例如 [Ful98][命题 8.4，以及下文讨论]）可用于证明

$$\begin{aligned}\operatorname{length}(M)=\operatorname{length}(M_{m_0})=\operatorname{length}(\tilde{M}_{m_\infty}) &= \mathcal{O}_{\mathbf{P}^d}(1)\cdot\mathcal{O}_{\mathbf{P}^d}(2)\cdot\dots\cdot\mathcal{O}_{\mathbf{P}^d}(d)\\ &= d!.\end{aligned}$$

至此，引理的证明完成。 □

现在，定理 1.2.2 很容易推出以下命题：

命题 2.3.2. 有如下估计：

$$\dim\Big(\bigcap_{1\leq\ell\leq d}\operatorname{Ker}J^{(\ell)}\Big)\leq d!.$$

证明. 一方面，我们已经看到，$\bigcap_{1\le\ell\le d}$核 $J^{(\ell)}$ 中的元素可嵌入为偏微分方程组（$\mathcal{S}$）的多项式解。另一方面，定理 1.2.2结合引理 2.3.1表明，方程组（$\mathcal{S}$）在 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^d} \supset \mathbb{C}[X_1,\dots,X_d]$中恰有 $d!$ 个线性无关解。这就证明了该命题。□

注 2.3.3。 注意到，上界仅取决于 d，而不取决于 k。

2.3.2. 端同态的等变性 $J^{(\ell)}$ 关于对称群 Σ_d的作用。 我们沿用前面第 2.3.1 节中引入的记号。回顾一下，对称群 Σ_d 在 $E = (\mathbb{C}^{k+1})^{\otimes d}$ 上有一个通过置换各因子得到的自然右作用：

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d)\cdot\sigma \coloneqq v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)}.$$

这使得 E 成为一个右 $\mathbb{C}[\Sigma_d]$-模。一个关键观察是，端同态 $(J^{(\ell)})_{1\le\ell\le d}$ 与 Σ_d的作用可交换：

引理 2.3.4。 对于任意 $\sigma\in\Sigma_d$、任意 $1\le\ell\le d$ 和任意 $v_1\otimes\cdots\otimes v_d$，以下等式成立：

$$\big(J^{(\ell)}(v_1\otimes\cdots\otimes v_d)\big)\cdot\sigma = J^{(\ell)}\big((v_1\otimes\cdots\otimes v_d)\cdot\sigma\big)$$

证明。 一方面，计算可得：

$$\begin{aligned}\big(J^{(\ell)}(v_1\otimes\cdots\otimes v_d)\big)\cdot\sigma &= \Big(\sum_{1\le i_1\neq\cdots\neq i_\ell\le d} (\otimes\prod_{i=1}^{d})(J^{\delta_{i,\{i_1,\dots,i_\ell\}}}v_i)\Big)\cdot\sigma\\ &= \sum_{1\le i_1\neq\cdots\neq i_\ell\le d} (\otimes\prod_{i=1}^{d})(J^{\delta_{\sigma(i),\{i_1,\dots,i_\ell\}}}v_{\sigma(i)}).\end{aligned}$$

另一方面，计算可得：

$$\begin{aligned}J^{(\ell)}\big((v_1\otimes\cdots\otimes v_d)\cdot\sigma\big) &= \sum_{1\le i_1\neq\cdots\neq i_\ell\le d} (\otimes\prod_{i=1}^{d})(J^{\delta_{i,\{i_1,\dots,i_\ell\}}}v_{\sigma(i)})\\ &= \sum_{1\le i_1\neq\cdots\neq i_\ell\le d} (\otimes\prod_{i=1}^{d})(J^{\delta_{i,\{\sigma^{-1}(i_1),\dots,\sigma^{-1}(i_\ell)\}}}v_{\sigma(i)})\\ &= \sum_{1\le i_1\neq\cdots\neq i_\ell\le d} (\otimes\prod_{i=1}^{d})(J^{\delta_{\sigma(i),\{i_1,\dots,i_\ell\}}}v_{\sigma(i)}).\end{aligned}$$

这就证明了引理。 □

根据上述引理 2.3.4，可以推出，对于任意 $1\le\ell\le d$ 以及任意具有 d 个方格的标准杨表 T，端同态 $J^{(\ell)}$ 与几乎投影 $E(p_T)$ 对易（记号见第 1.1.3 节）。特别地，这些端同态保持 $\mathrm{Im}(E(p_T))$ 不变。于是得到以下初等结果：

引理 2.3.5。 维数

$$\bigcap_{1\le\ell\le d} \mathrm{Ker}\, J^{(\ell)}_{|\,\mathrm{Im}(E(p_T))}$$

与形状为 $\boldsymbol{\lambda}\vdash d$ 的标准杨表无关。

证明。 设 T 和 T' 是形状为 $\boldsymbol{\lambda}\vdash d$的两个标准杨表。存在唯一的置换 $\sigma\in\Sigma_d$ 使得

$$\sigma\cdot T = T'.$$

将同构记为 $E(\sigma)$

$$E(\sigma)\colon \begin{pmatrix} E(\mathbb{C}[\Sigma_d]) & \longrightarrow & E(\mathbb{C}[\Sigma_d]) \\ v & \longmapsto & v \otimes_{\mathbb{C}[\Sigma_d]} \sigma \end{pmatrix}.$$

注意到以下等式在 $\mathbb{C}[\Sigma_d]$中成立:

$$c_{T'} = \sigma \times c_T \times \sigma^{-1}.$$

这又推出以下等式

$$E(p_{T'}) = E(\sigma^{-1}) \circ E(p_T) \circ E(\sigma).$$

特别地，若 $v \in$像 $E(p_T) \cap$核 $J^{(\ell)}$对某个 $1 \leq \ell \leq d$成立，则

$$E(\sigma^{-1})(v) \in \operatorname{Im} E(p_{T'}) \cap \operatorname{Ker} J^{(\ell)}.$$

这说明 $E(\sigma^{-1})$ 在 $\bigcap_{1\leq\ell\leq d}$核 $J^{(\ell)}_{|\text{像}(E(p_T))}$与$\bigcap_{1\leq\ell\leq d}$核 $J^{(\ell)}_{|\text{像}(E(p_{T'}))}$之间构成一个双射。这就完成了引理的证明。□

对于一个分拆 $\boldsymbol{\lambda} \vdash d$，记 $T_{\text{can}(\boldsymbol{\lambda})}$ 为形状$\boldsymbol{\lambda}$的典范标准杨表，其定义如下:

- 图示的第一行填入 $1,2,\dots,\lambda_1$;
- 图示的第二行填入 $\lambda_1+1,\dots,\lambda_1+\lambda_2$;
- ...

由命题 2.3.2 和引理 2.3.5 可推出以下结论:

命题 2.3.6. 以下不等式成立:

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\vdash d} f_{\boldsymbol{\lambda}} \times \dim\Big(\bigcap_{1\leq\ell\leq d} \operatorname{Ker} J^{(\ell)}_{|\operatorname{Im}(E(p_{T_{\text{can}(\boldsymbol{\lambda})}}))}\Big) \leq d!.$$

证明. 由定理 1.1.4，有如下直和分解

$$E = \bigoplus_T \operatorname{Im}(E(p_T)),$$

其中 T 遍历含有 d个方格的标准杨表。结论立即由命题 2.3.2 和引理 2.3.5 得出。□

2.4. **将前一个问题与当前问题联系起来**。 现在我们将上一节第 2.3 节中的研究与 Schmidt–Kolchin 猜想联系起来。固定 $\boldsymbol{\lambda} \vdash d$ 一个至多有 $(N+1)$ 个部分的 d 分拆。按照第 2.2 节以及第 2.3 节开头的讨论，我们希望理解 $\mathcal{D}^{(k)}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 中的多项式 P （符号见引理 2.2.2），它们满足以下恒等式

$$P(\alpha X, \alpha X^{(1)} + X^{(0)}, \alpha X^{(2)} + 2X^{(1)}, \dots) = \alpha^d P(X, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots) \tag{5}$$

对于任意 $\alpha \in \mathbb{C}$。这可以改述如下。记

$$F \coloneqq \mathbb{C}\cdot X \oplus \mathbb{C}\cdot X^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\cdot X^{(k)} \simeq \mathbb{C}^{k+1}.$$

注意，线性群 $\mathrm{GL}(F) \simeq \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})$ 通过变量替换自然地作用于 $\mathcal{D}^{(k)}_{\boldsymbol{\lambda}}$ [7], 即对于 $P \in \mathcal{D}^{(k)}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 和 $A \in \mathrm{GL}(F)$:

$$A \cdot P \coloneqq P(AX, AX^{(1)}, \dots, AX^{(k)}).$$

等式 (5) 等价于以下等式（矩阵 J 的定义见第 2.3 节）:

$$(\alpha \operatorname{Id} + J)\cdot P = \alpha^d P. \tag{6}$$

[7]请注意，这种作用与 V 上通常的线性作用毫无关系。

请注意，对于任意的 $P \in \mathcal{D}_{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}$，多项式

$$(\alpha \operatorname{Id} + J) \cdot P$$

是一个关于 α、次数为 d 的多项式，其首项为 $P(X, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots)$。因此，为了得到 (5)，我们必须要求 $\alpha^i, i < d$ 前所有项的系数都消失。

对于任意含有 d 个方格的杨表 T，记

$$e_T \coloneqq (\otimes \prod_{(i,j)\in T}) X^{(T(i,j))} \in E \coloneqq F^{\otimes d},$$

其中张量积取遍杨表 T 中的元素，并按照通常方式读取，即从左到右、从上到下。令 $T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})}$ 为形状 $\boldsymbol{\lambda}$ 的典范标准杨表。为方便记号，记 $c_{\boldsymbol{\lambda}} \coloneqq c_{T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})}}$。我们有如下关键命题：

命题 2.4.1. 线性映射

$$e\colon \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} & \longrightarrow & \operatorname{Im}(E(p_{T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})}})) \subset E = F^{\otimes d} \\ D_T & \longmapsto & e_T \otimes_{\mathbb{C}[\Sigma_d]} c_{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix}$$

是良定义的，并且是一个同构[8]。

证明。 这基本上可由 [Ful97]|[II.8.1 引理 3 和定理 1] 以及 [Ful97]|[II.7.4 命题 4]得出。详细内容见附录 B。□

注记 2.4.2. 这个命题至关重要，因为它使我们几乎可以完全消除对 N 的依赖：右侧空间对 N 的唯一依赖，来自对分拆 $\boldsymbol{\lambda}$ 的限制（其部分数不得超过 $(N+1)$）。

考虑下面这个自然的满射线性映射

$$\pi\colon \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} \\ e_T & \longmapsto & D_T \end{pmatrix},$$

并注意到有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{E(p_{T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})}})} & \operatorname{Im}(E(p_{T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})}})) \\ & {\scriptstyle\pi} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle e} & \\ & \mathcal{D}_{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} & \end{array} . \tag{7}$$

一个简单但重要的观察是，GL(F) 在 $\mathcal{D}_{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}$ 上的作用与投影 π 可交换：

引理 2.4.3. 对于任意 $v \in E$ 和任意 $A \in \mathrm{GL}(F)$，以下等式成立：

$$\pi(A \cdot v) = A \cdot \pi(v).$$

证明. 这由 [Ful97]|[II.8.1 习题 3 和 4] 得出。 □

作为直接推论，GL(F) 的作用与该同构可交换 e：

引理 2.4.4. 对于任意的 $P \in \mathcal{D}_{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}$ 以及任意的 $A \in \mathrm{GL}(F)$，以下等式成立：

$$e(A \cdot P) = A \cdot e(P).$$

[8]分拆至多有 $(N+1)$ 个部分这一假设至关重要：否则此映射将是零映射。

证明. 由线性性，只需证明 $P = D_T$ 的情形，其中 T 是一个形状为 $\boldsymbol{\lambda}$、填入 $\{0,\dots,k\}$ 的杨表。由引理 2.4.3，计算得

$$e(A \cdot D_T) = e(A \cdot \pi(e_T)) = e(\pi(A \cdot e_T)).$$

由图示 (7) 的交换性可得：

$$e(\pi(A \cdot e_T)) = p_{T_{\mathrm{can}}(\boldsymbol{\lambda})}(A \cdot e_T) = A \cdot p_{T_{\mathrm{can}}(\boldsymbol{\lambda})}(e_T) = A \cdot e(D_T).$$

这就证明了该结果。 □

现在，将我们的问题与第 2.3 节中的工作联系起来的关键观察如下：

引理 2.4.5. 对于任意 $v \in E$ 和任意 $\alpha \in \mathbb{C}$，下列等式成立：

$$(\alpha\,\mathrm{Id} + J) \cdot v = J^{(d)}(v) + \alpha J^{(d-1)}(v) + \cdots + \alpha^{d-1} J^{(1)}(v) + \alpha^d v.$$

证明。 只需对 $v = e_T$ 检验该等式，其中 T 是一个形状为 $\boldsymbol{\lambda}$、填入 $\{0,\dots,k\}$ 的杨表。接下来，只需经过直接计算即可得出所需的等式。 □

记

$$\widetilde{V^{(k)}_{\mathrm{hw}(\boldsymbol{\lambda})}} \coloneqq \left\{P \in \mathcal{D}^{(k)}_{\boldsymbol{\lambda}} \mid (\alpha\,\mathrm{Id} + J) \cdot P = \alpha^d P \ \forall \alpha \in \mathbb{C}\right\}.$$

作为前面几个引理的一个简单推论，我们得到下面这个重要命题：

命题 2.4.6. 存在如下向量空间同构：

$$\widetilde{V^{(k)}_{\mathrm{hw}(\boldsymbol{\lambda})}} \simeq \bigcap_{1 \le \ell \le d} \mathrm{Ker}\, J^{(\ell)}_{|\,\mathrm{Im}(E(p_{T_{\mathrm{can}}(\boldsymbol{\lambda})}))}.$$

证明。 由于 e 是一个等变同构（由命题 2.4.1 和引理 2.4.4 得出），因此存在一个同构

$$\widetilde{V^{(k)}_{\mathrm{hw}(\boldsymbol{\lambda})}} \simeq \{v \in \mathrm{Im}(E(p_{T_{\mathrm{can}}(\boldsymbol{\lambda})})) \mid (\alpha\,\mathrm{Id} + J) \cdot v = \alpha^d v\}.$$

由于端同态 $J^{(\ell)}$ 与 $E(p_{T_{\mathrm{can}}(\boldsymbol{\lambda})})$ 可交换（由引理 2.3.4 得出），引理 2.4.5 蕴含右侧的集合恰好是

$$\bigcap_{1 \le \ell \le d} \mathrm{Ker}\, J^{(\ell)}_{|\,\mathrm{Im}(E(p_{T_{\mathrm{can}}(\boldsymbol{\lambda})}))}.$$

命题得证。 □

我们想再次强调，在上述陈述中，对 N 的依赖仅体现在分拆 $\boldsymbol{\lambda} \vdash d$ 上（即它的部分数不得超过 $(N+1)$）。现在我们已具备完成 Schmidt–Kolchin 猜想证明所需的所有工具

2.5. **Schmidt–Kolchin 猜想的证明**。取定 $d \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ 一个自然数，并取定 $k \ge d-1$。

注记 2.5.1. 之所以选择取 $k \ge d-1$，只是因为$\overline{V^{\mathrm{diff}}_d}$的典范基包含在 $(V_{\text{微分}d})^{(d-1)}$ 中。

暂且假设自然数 N 大于或等于 $d-1$。由第 2.3 节开头可知，对于至多有 $(N+1)$ 个部分的任意分拆 $\boldsymbol{\lambda} \vdash d$，以下包含关系成立：

$$V^{(k)}_{\mathrm{hw}(\boldsymbol{\lambda})} \subset \widetilde{V^{(k)}_{\mathrm{hw}(\boldsymbol{\lambda})}} = \big\{P \in \mathcal{D}^{(k)}_{\boldsymbol{\lambda}} \mid (\alpha\,\mathrm{Id} + J)\cdot P = \alpha^d P \ \forall \alpha \in \mathbb{C}\big\}. \tag{8}$$

注意，由于 $N \geq d-1$，任意分拆 $\boldsymbol{\lambda} \vdash d$ 至多有 $N+1$ 个部分。由命题 2.1.9 可推出不等式

$$\dim \widetilde{V^{(k)}_{\mathrm{hw}(\boldsymbol{\lambda})}} \geq f_{\boldsymbol{\lambda}}$$

for 任意分拆 $\boldsymbol{\lambda} \vdash d$。根据命题 2.4.6，这等价于以下不等式：

$$\dim\Big(\bigcap_{1\leq \ell \leq d} \mathrm{Ker}\, J^{(\ell)}_{|\,\mathrm{Im}(E(p_{T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})}}))}\Big) \geq f_{\boldsymbol{\lambda}}. \tag{9}$$

现在，利用命题 2.3.6 以及上述不等式 (9)，可得到以下一系列不等式：

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\vdash d} f_{\boldsymbol{\lambda}}^2 \leq \sum_{\boldsymbol{\lambda}\vdash d} f_{\boldsymbol{\lambda}} \times \dim\Big(\bigcap_{1\leq \ell \leq d} \mathrm{Ker}\, J^{(\ell)}_{|\,\mathrm{Im}(E(p_{T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})}}))}\Big) \leq d!.$$

根据命题 1.1.1，有等式

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\vdash d} f_{\boldsymbol{\lambda}}^2 = d!.$$

因此可以推出，对于任意 $\boldsymbol{\lambda} \vdash d$，以下等式成立：

$$\dim\Big(\bigcap_{1\leq \ell \leq d} \mathrm{Ker}\, J^{(\ell)}_{|\,\mathrm{Im}(E(p_{T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})}}))}\Big) = f_{\boldsymbol{\lambda}}. \tag{10}$$

注记 2.5.2。注意，这里采取了与第 2.4 节相反的方向。具体而言，我们利用了微分齐次多项式的信息（在第 2.1 节中得到），来推导第 2.3 节代数问题的性质。这正是命题 2.1.9 如此关键的原因。

现在回到 $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 任意的情形。对于至多有 $(N+1)$ 个部分的任意分拆 $\boldsymbol{\lambda}$，命题 2.1.9 结合包含关系 (8) 和等式 (10)，迫使等式成立

$$\dim\big(V^{(k)}_{\mathrm{hw}(\boldsymbol{\lambda})}\big) = f_{\boldsymbol{\lambda}}.$$

根据第 1.1.3 节回顾的表示论中的标准论证，可以推出等式

$$\dim\big((V_d^{\mathrm{diff}})^{(k)}\big) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\vdash d} f_{\boldsymbol{\lambda}} \times \dim\big(S^{\boldsymbol{\lambda}}\mathbb{C}^{N+1}\big).$$

注意，若 $\boldsymbol{\lambda}$ 有多于 $(N+1)$ 个部分，则 $S^{\boldsymbol{\lambda}}\mathbb{C}^{N+1} = (0)$。由命题 1.1.3 和 1.1.1，这进而意味着等式：

$$\dim\big((V_d^{\mathrm{diff}})^{(k)}\big) = (N+1)^d.$$

由于这对任意 $k \geq (d-1)$ 都成立，这表明 $V_{\mathrm{diff}d} = (V_{\mathrm{diff}d})^{(d-1)}$，并且

$$\dim(V_d^{\mathrm{diff}}) = (N+1)^d.$$

至此，Schmidt–Kolchin 猜想的证明完成：

定理 2.5.3. 下列等式成立：

$$V_d^{\mathrm{diff}} = \overline{V_d^{\mathrm{diff}}} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(W_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}}.$$

特别地，$V_{\text{微分}d} = (V_{\text{微分}d})^{(d-1)}$ 以及 维数 $V_{\text{微分}d} = (N+1)^d$。

3. 射影空间上的微分齐次多项式与扭曲喷射微分。

3.1. 复流形上的 Green–Griffiths 向量丛。本节 3.1 的参考文献是 [Dem97]。本节旨在快速回顾所谓 Green–Griffiths 向量丛的定义，其整体截面称为射流微分。

设 X 是一个维数为 N 的复流形。对于 $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，定义复流形 X 上全纯映射 $\gamma\colon (\mathbb{C}, 0) \to X$ 的 1-芽的 k 阶喷射丛 $J_k X$ 如下。取 X 的一个图册 $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$，对于 $i \in I$，考虑 U_i 上的（平凡）向量丛，其在 $x \in U_i$ 上的纤维是维数为 $N \times k$ 的 $\mathbb{C}$-向量空间

$$\left\{ \left(\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}\, z^i}(\varphi_i \circ \gamma)(0) \right)_{1\leq i\leq k} \;\middle|\; \gamma : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x) \text{ holomorphic 1-germ} \right\}.$$

通过过渡映射 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$（自然诱导的映射），将这些平凡向量丛 $U_i \times \mathbb{C}^{N\times k}$ 粘合起来，从而得到（在同构意义下）向量丛 $J_k X$。一旦 $k > 1$，坐标图变换的一般公式就涉及过渡映射的高阶导数；特别是，它不保持纤维的向量空间结构：当 $k > 1$ 时，$J_k X$ 不是向量丛。为方便记号，将由全纯 1-芽 $\gamma\colon (\mathbb{C},0) \to (X, x)$ 定义的 $(J_k X)_x$ 中的元素记为 $\mathrm{d}_k \gamma$。

例 3.1.1. 在 $k = 1$, $J_1 X$ 不过是（全纯）切丛 TX的情形下。

环面 $\mathbb{C}^*$ 按如下方式作用于 $J_k X$ 的纤维：

$$\lambda \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}\, z^i}(\varphi_i \circ \gamma)(0) \right)_{1\leq i\leq k} = \left(\lambda^i \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}\, z^i}(\varphi_i \circ \gamma)(0) \right)_{1\leq i\leq k},$$

其中 $\lambda \in \mathbb{C}^*$。不难看出，此作用与坐标图变换可交换，因此在丛 $J_k X$上定义良好。更一般地，$(\mathbb{C}, 0)$ 的双全纯映射群通过如下方式作用于 $J_k X$：

$$\psi \cdot \mathrm{d}_k \gamma \coloneqq \mathrm{d}_k(\gamma \circ \psi),$$

其中 ψ 是 $(\mathbb{C}, 0)$ 的双全纯映射，而 $\gamma : (\mathbb{C}, 0) \to X$ 是一个全纯 1-芽。

如下定义向量丛 $E_{k,\, n}X$，其为阶数 $k \geq 1$、次数 $n \geq 1$ 的（1-芽）射流微分丛。构造一个丛，使其在 $x \in X$ 上的纤维为纤维 $(J_k X)_x$上的次数为 n 的复值多项式 Q 所构成的向量空间；也就是说，对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}$ 以及任意 1-芽 $\gamma\colon (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$，多项式 Q 满足等式

$$Q(\lambda \cdot \mathrm{d}_k \gamma) = \lambda^n Q(\mathrm{d}_k \gamma).$$

计算映射复合的高阶导数的公式表明，在更换坐标图时，纤维的向量空间结构保持不变。因此，丛$E_{k,\, n}X$ 是一个向量丛，通常称为 Green–Griffiths 向量丛（阶数为 k、次数为 n）。一个整体截面

$$P \in H^0(X, E_{k,n}X)$$

通常称为喷射微分（阶数为 k，次数为 n）。若复流形是射影的，且由丰线丛 $\mathcal{O}_X(1)$ 极化，自然会考虑形如 $E_{k,\, n}X(d) \coloneqq E_{k,\, n}X \otimes L^d$ 的扭曲向量丛，其中 $d \in \mathbb{Z}$。这种扭曲 Green–Griffiths 丛的整体截面相应地称为扭曲喷射微分。

出于将在下一节（第 3.2 节）阐明的原因，对于 $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，我们将改为考虑以下向量丛的直和：

$$E_{k,\infty}X \coloneqq \bigoplus_{n=0}^{\infty} E_{k,n}X.$$

此处按照约定，令

$$E_{k,0}X \coloneqq \mathcal{O}_X$$

对任意 $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$。为保持一致，$L^d$ 的整体截面（其中 $d \in \mathbb{N}$）将被视为 0 阶扭曲喷射微分。

3.2. **射影空间上的微分齐次多项式与扭曲射流微分**。射影空间的 Green–Griffiths 丛的微分齐次多项式与扭曲整体截面之间的联系由下述命题给出：

命题 3.2.1. 对于任意 $k \geq 1$ 和任意 $d \in \mathbb{N}$，存在一个自然的向量空间同构

$$H^0(\mathbf{P}^N, E_{k,\infty}\mathbf{P}^N\ (d)) \simeq (V_d^{\mathrm{diff}})^{(k)}.$$

证明。令 $W \in (V_d^{\mathrm{diff}})^{(k)}$。在每个标准仿射开集 U_i 上：$= \{X_i \neq 0\}$，定义 e

$$W_i \coloneqq W(\overset{\wedge_i}{X^{(0)}}, \ldots, \overset{\wedge_i}{X^{(k)}}).$$

此处对于 $0 \leq \ell \leq k$，令

$$\overset{\wedge_i}{X^{(\ell)}} \coloneqq \Big(\big(\frac{X_0}{X_i}\big)^{(\ell)}, \ldots, \big(\frac{X_N}{X_i}\big)^{(\ell)} \Big),$$

其中，括号中的上标表示通常的求导公式，例如：

$$\big(\frac{X_0}{X_i}\big)^{(1)} = \frac{X_0^{(1)}X_i - X_0X_i^{(1)}}{X_i^2}.$$

在 $E_{k,\infty}\mathbf{P}^N_{|U_i}$ 的相应平凡化上，微分多项式 W_i（关于变量 $(\frac{X_\ell}{X_i})_{0\leq \ell \leq N}$）自然地诱导出 $E_{k,\infty}\mathbf{P}^N_{|U_i}$ 的一个截面。现在，W 是次数为 d 的微分齐次多项式这一事实意味着下列等式成立：

$$X_i^d W_i = X_j^d W_j.$$

特别地，这表明局部截面 W_i 可以粘合成 $\mathcal{W}$ 的一个整体截面，属于 $E_{k,\infty}\mathbf{P}^N(d)$。

反过来，设 $\mathcal{W} \in H^0(\mathbf{P}^N, E_{k,\infty}\mathbf{P}^N(d))$ 是 $E_{k,\infty}\mathbf{P}^N(d)$ 的一个整体截面。在每个平凡化开集 U_i 上，受限截面 $W_i \coloneqq \mathcal{W}_{|U_i}$ 定义了关于变量 $\overset{\wedge_i}{X} = (\frac{X_\ell}{X_i})_{0\leq \ell \leq N}$ 的一个微分多项式。考虑

$$W \coloneqq X_i^d W_i,$$

并注意，所得有理函数（关于变量 $X^{(0)}$ 为有理函数，关于变量 $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ 为多项式）与 $0 \leq i \leq N$ 无关。特别地，这表明 W 实际上是一个微分多项式。于是令 $Q \in \mathbb{C}[T]$，并计算得

$$\begin{aligned} W((QX)^{(0)}, \ldots, (QX)^{(k)}) &= Q(T)^d X_i^d W_i\big(\overset{\wedge_i}{X^{(0)}}, \ldots, \overset{\wedge_i}{X^{(k)}}\big) \\ &= Q(T)^d W. \end{aligned}$$

因此，W 是次数为 d的微分齐次多项式。

这两个映射显然互为逆映射，因此命题得证。 □

作为前一个命题的直接推论，可以得到以下重要结果：

定理 3.2.2。 射影空间 $\mathbf{P}^N$ 上的扭曲喷射微分与变量 $X=(X_0,\dots,X_N)$中的微分齐次多项式一一对应。

证明。 鉴于前面的命题 3.2.1，只需证明：对于任意 $d<0$、任意 k 和 $n\in\mathbb{N}$，下列对象不存在整体截面

$$E_{k,n}\mathbf{P}^N(d).$$

这是标准结论：在 $E_{k,n}\mathbf{P}^N(d)$ 上考虑自然滤过（例如参见 [Dem97|§6]），再利用关于其分次分量的上同调群的经典消失结果（这些分次分量已有充分研究），即可推出结论。□

迄今为止，我们尚未利用已知的微分齐次多项式结构。利用前述对应关系以及第 2 节的结果，我们可以对射影空间上的扭曲 Green–Griffiths 丛的整体截面空间推导出有趣的结果：这正是下一节第 3.3 节的主题。

3.3. **关于射影空间上扭曲 Green–Griffiths 丛的零次上同调群**。鉴于定理 2.5.3、命题 2.1.2 和命题 3.2.1，我们只需准确确定 $\overline{V_d^{\mathrm{diff}}}=V\mathrm{diff}_d$ 的典范基中各元素所定义的整体截面。

微分多项式有一个我们尚未定义的权的概念。在 $\mathbf{P}^N$ 的 Green–Griffiths 丛背景下，它对应于次数的概念。定义如下：单项式 $m\coloneqq\prod_{i=0}^N\prod_{k\in\mathbb{N}}(X_i^{(k)})^{n_{i,\,k}}$ 的权定义为

$$w(m)\coloneqq\sum_{i=0}^{N}\sum_{k\geq1}kn_{i,k}.$$

该定义以通常的方式扩展到微分多项式的整个向量空间 V。若 V 中各单项式具有相同的权 w，则称其为w-等压的。

现在考虑命题 2.1.2 中所述的数据 $\mathcal{P}$，即：

- 一个 $(N+1)$ 元组 $\boldsymbol{m}=(m_0,\dots,m_N)\in\mathbb{N}^{N+1}$ 使得 $|\boldsymbol{m}|=d$。令

$$i_1<\cdots<i_r$$

  为满足 $m_i\neq0$ 的指标 i 的有序集。
- 对于任意 $1\leq\ell\leq r$，取一个满足以下条件的递增整数序列 m_{i_ℓ}：

$$0\leq\alpha_{i_\ell,1}<\cdots<\alpha_{i_\ell,m_{i_\ell}}<m_{i_1}+\cdots+m_{i_\ell}.$$

记作

$$\boldsymbol{\alpha}\coloneqq(\alpha_{i_1,1},\dots,\alpha_{i_r,m_r})\in\mathbb{N}^d,$$

并再次注意到，对于任意 $1\leq i\leq d$，都有 $\alpha_i\leq i-1$。我们有如下初等命题（关于 $N=1$ 的情形，另见 [Rei99|推论 2.5]）：

命题 3.3.1。 微分齐次多项式 $W_{\mathcal{P}}$ 的阶恰为

$$k=\max\{d-1-\alpha_i\mid1\leq i\leq d\},$$

并且是权为……的等压多项式

$$w(W_{\mathcal{P}})=\frac{d(d-1)}{2}-|\boldsymbol{\alpha}|.$$

此外， $W_{\mathcal{P}}$ 的权有上界

$$\lfloor (1-\frac{1}{N+1})\frac{d^2}{2} \rfloor$$

证明。考虑 $\sigma \in \Sigma_d$ 一个置换。在定义$W_{\mathcal{P}}$的行列式展开中，与置换 σ 相对应的单项式如下：

$$m_\sigma = \prod_{a=1}^{r}\prod_{b=1}^{m_a} X_{i_a}^{(\sigma(m_1+\cdots+m_{a-1}+b)-\alpha_{i_a,b}-1)}.$$

这里，按照约定，如果括号中的某个上指标为负，则该单项式为零。由此立即可得引理的前两条结论。

对于最后一条结论，需根据 $d \geq N+1$是否成立分两种情况讨论。一方面，若 $d \leq N+1$，则 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 在以下选取下为最小：

- $\boldsymbol{m} = (\underbrace{1,\ldots,1}_{\times d},0,\ldots,0)$;
- $\alpha_{0,1} = \alpha_{1,1} = \cdots = \alpha_{d-1,1} = 0$.

另一方面，若 $d > N+1$，则 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 在以下选取下为最小：

- $\boldsymbol{m} = (r,\ldots,r,\underbrace{r+1,\ldots,r+1}_{\times c})$, with $r = \lfloor \frac{d}{N+1} \rfloor$ and $c = d - r(N+1)$;
- $\alpha_{\ell,1} = 0,\ldots,\alpha_{\ell,r} = r-1$ for $0 \leq \ell \leq N+1-c$;
- $\alpha_{\ell,1} = 0,\ldots,\alpha_{\ell,r+1} = r$ for $N+2-c \leq \ell \leq N+1$.

In 在这两种情况下，均可验证给出的上界成立，从而完成证明。 □

作为引理 3.3.1 的一个推论，结合命题 3.2.1 和定理 2.5.3，我们得出本文的第二个主要结果：

定理 3.3.2. 设 $d \in \mathbb{Z}$、 $k \geq 0$ 和 $n \geq 0$ 是自然数。那么：

(1) 对任意 $k \geq d-1$ 和任意 $n \in \mathbb{N}$，有同构

$$H^0(\mathbf{P}^N, E_{k,n}\mathbf{P}^N(d)) \simeq H^0(\mathbf{P}^N, E_{d-1,n}\mathbf{P}^N(d));$$

(2) 以下等式成立：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim H^0(\mathbf{P}^N, E_{d-1,n}\mathbf{P}^N(d)) = (N+1)^d;$$

(3) 对任意 $k \in \mathbb{N}$ 和任意 $n > \lfloor (1-\frac{1}{N+1})\frac{d^2}{2} \rfloor$，有如下消失：

$$H^0(\mathbf{P}^N, E_{k,n}\mathbf{P}^N(d)) = (0).$$

注记 3.3.3. 当然，我们可以从这个定理中得知更多，因为对于所有 k、 n、 d，我们都明确给出了 $E_{k,n}\mathbf{P}^N(d)$ 的所有整体截面。不过，从组合的角度来说，依据阶和权对 V_d^{diff} 的典范基进行完整分类并不简单。

证明。前两项由命题 3.2.1 和定理 2.5.3 立即得出。至于最后一项，则由上述引理 3.3.1 得出。□

附录 A。

令 $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 为一个自然数，并令 $N \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^d)$ 为幂零指数为 d 的幂零自同态。对于 $0 \leq \alpha_1,\dots,\alpha_d \leq d-1$ 这一自然数族，定义如下多项式：

$$P_{\alpha_1,\dots,\alpha_d}\colon \left(\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^d)^{\oplus d} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (v_1,\dots,v_d) & \longmapsto & \det(N^{\alpha_1}v_1,\dots,N^{\alpha_d}v_d) \end{array}\right).^{9}$$

考虑以下多项式族

$$\mathcal{F} \coloneqq \left(P_{\alpha_1,\dots,\alpha_d}\right)_{0\leq\alpha_1,\dots,\alpha_d\leq d-1}$$

以及子族

$$\tilde{\mathcal{F}} \coloneqq \left(P_{\alpha_1,\dots,\alpha_d}\right)_{0\leq\alpha_i\leq i-1}.$$

注 A.0.1。 如果将某个 α_i 取为大于或等于 d，那么行列式显然为零（因为 $N^d = 0$）。

注 A.0.2。 第 2.1.2 节中定义的（微分）多项式由前述多项式族按如下方式得到：

- 将变量 $v_i = (v_{i,\ 1},\dots,v_{i,\ d})$ 形式上替换为 $(Y_{(0)\,i},\dots,Y_{(d-1)\,i})$；
- 考虑在 $\mathbb{C}^d$ 的典范基（$e_1,\dots,e_d$）上定义的幂零矩阵 N，如下所示：

$$\left\{\begin{array}{l} Ne_i = i \times e_{i+1} \quad \text{for } 1 \leq i \leq d-1 \\ Ne_d = 0 \end{array}\right. .$$

请注意，若选择另一种幂零矩阵 N，则不会得到微分齐次多项式：此处的选择非常特殊，旨在实现微分齐次性。

本附录 A 的目标是证明以下结论：

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\tilde{\mathcal{F}}).$$

这将由以下一般恒等式推出：

引理 A.0.3. 对于任意 $0 \leq i \leq d$，以及任意向量 $v_1,\dots,v_{d-i+1} \in \mathbb{C}^d$，以下等式成立：

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^{d-i+1} \\ |\boldsymbol{\alpha}|=i}} N^{\alpha_1}v_1 \wedge \cdots \wedge N^{\alpha_{d-i+1}}v_{d-i+1} = 0.$$

证明。 实际上，通过对 $d \geq 1$ 使用归纳法，可以证明以下更强的结论：对于任意 $0 \leq i \leq d$、任意向量 $v_1,\dots,v_{d-i+1} \in \mathbb{C}^d$，以及任意 $j \geq i$，以下等式成立：

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^{d-i+1} \\ |\boldsymbol{\alpha}|=j}} N^{\alpha_1}v_1 \wedge \cdots \wedge N^{\alpha_{d-i+1}}v_{d-i+1} = 0.$$

若 $d = 1$，结果显然，因为 $N = 0$。因此，假设 $d \geq 2$，并令$0 \leq i \leq d$。若 $i = d$，结论显然，因为 $N^d = 0$。若 $i = 0$，结论也显然，因为位于维数为d 的向量空间中的$(d+1)$个向量的楔积总是零。因此，假设 $1 \leq i < d$，并令 $j \geq i$。

注意到，利用多重线性，只需在向量v_1，…，v_{d-i+1}遍历 $\mathbb{C}^d$的一组固定基时，验证所要求的消失即可。于是，选取 e_1，…，e_d作为一组适配于N的基，即满足 $Ne_k = e_{k+1}$对 $1 \leq k \leq d$成立。这里，按照约定，当 $k \notin \{1,\dots,d\}$时，令 $e_k \coloneqq 0$。

[9]我们以典范基为参照，即向量 $N^{\alpha_i}v_i$ 以典范基表示，并对由这些列依次拼接而成的矩阵取行列式。

于是考虑 e_{k_1}，…，$e_{k_{d-i+1}}$，其中 $\{k_1,\dots,k_{d-i+1}\}\subset\{1,\dots,d\}$。对于 $\{1,\dots,d-i+1\}$的任意置换 σ，相差一个符号，有如下等式：

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^{d-i+1}\\|\boldsymbol{\alpha}|=j}} N^{\alpha_1}e_{k_{\sigma(1)}}\wedge\cdots\wedge N^{\alpha_{d-i+1}}e_{k_{\sigma(d-i+1)}} = \pm\sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^{d-i+1}\\|\boldsymbol{\alpha}|=j}} N^{\alpha_1}e_{k_1}\wedge\cdots\wedge N^{\alpha_{d-i+1}}e_{k_{d-i+1}}.$$

因此，总可以假设 $k_1\le\cdots\le k_{d-i+1}$。

记 $V_2\coloneqq$为张成空间$(e_2,\dots,e_d)$，并注意到 N在 V_2上诱导出一个幂零自同态，其幂零指数等于 $d-1$。根据 k_1和 k_2的取值进行讨论。首先假设 $k_1\ge 2$。在这种情况下，对 $i'=i-1$和 $j'=j\ge i'$应用归纳假设于$(V_2,N_{|V_2})$，即可得到所需的消失。接着，假设 $k_1=1$和 $k_2\ge 2$。写作：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^{d-i+1}\\|\boldsymbol{\alpha}|=j}} N^{\alpha_1}e_{k_1}\wedge\cdots\wedge N^{\alpha_{d-i+1}}e_{k_{d-i+1}}\\
=&\sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^{d-i+1}\\|\boldsymbol{\alpha}|=j}} e_{k_1+\alpha_1}\wedge\cdots\wedge e_{k_{d-i+1}+\alpha_{d-i+1}}\\
=& e_1\wedge\underbrace{\sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^{d-i}\\|\boldsymbol{\alpha}|=j}} e_{k_2+\alpha_2}\wedge\cdots\wedge e_{k_{d-i+1}+\alpha_{d-i+1}}}_{\coloneqq\Sigma_1} + \underbrace{\sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^{d-i+1}\\|\boldsymbol{\alpha}|=j-1}} e_{2+\alpha_1}\wedge e_{k_2+\alpha_2}\wedge\cdots\wedge e_{k_{d-i+1}+\alpha_{d-i+1}}}_{\coloneqq\Sigma_2}.
\end{aligned}$$

一方面，对 $i'=i-1$ 和$j'=j-1\ge i'$ 应用归纳假设于$(V_2,N_{|V_2})$，可得 $\Sigma_2=0$。另一方面，对 $i'=i-1$和 $j'=j\ge i'$应用归纳假设于$(V_2,N_{|V_2})$，可得 $\Sigma_1=0$。因此，所需的消失成立。最后，假设 $k_1=k_2=1$。分解如下：

$$\begin{aligned}
I &\coloneqq \{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^{d-i+1}\mid|\boldsymbol{\alpha}|=j\}\\
&= \underbrace{\{\boldsymbol{\alpha}\in I\mid\alpha_1>\alpha_2\}}_{\coloneqq I^+}\sqcup\underbrace{\{\boldsymbol{\alpha}\in I\mid\alpha_1=\alpha_2\}}_{\coloneqq I^0}\sqcup\underbrace{\{\boldsymbol{\alpha}\in I\mid\alpha_1<\alpha_2\}}_{\coloneqq I^-}.
\end{aligned}$$

于是计算得：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^{d-i+1}\\|\boldsymbol{\alpha}|=j}} e_{k_1+\alpha_1}\wedge\cdots\wedge e_{k_{d-i+1}+\alpha_{d-i+1}}\\
=&\underbrace{\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in I^+} e_{k_1+\alpha_1}\wedge\cdots\wedge e_{k_{d-i+1}+\alpha_{d-i+1}}}_{\Sigma_1} + \underbrace{\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in I^-} e_{k_1+\alpha_1}\wedge\cdots\wedge e_{k_{d-i+1}+\alpha_{d-i+1}}}_{\Sigma_2}.
\end{aligned}$$

现在注意到，$\mathbb{N}^{d-i+1}$ 中前两个坐标的置换在 I_+ 与 I_-之间诱导出一个双射。由此可知，Σ_1 和 Σ_2中的项两两抵消。这就完成了归纳法，也完成了引理的证明。

□

作为推论，以下恒等式成立：

推论 A.0.4. 设 $1\le i\le d$，并设 $\beta_1,\dots,\beta_{i-1}$ 为满足$0\le\beta_k\le k-1$ 的自然数，其中任意 $1\le k\le i-1$ 均成立。则有如下等式：

$$\sum_{\substack{(\alpha_i,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{N}^{d-i+1}\\\alpha_i+\cdots+\alpha_d=i}} P_{\beta_1,\dots,\beta_{i-1},\alpha_i,\dots,\alpha_d}=0.$$

证明. 首先注意，只需证明 $\beta_1 = \cdots = \beta_{i-1} = 0$ 的等式即可。事实上，只需注意到，对于任意 $\alpha_i, \ldots, \alpha_d$，以下等式成立（由定义可知）：

$$P_{\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},\alpha_i,\ldots,\alpha_d}(v_1,\ldots,v_d) = P_{0,\ldots,0,\alpha_i,\ldots,\alpha_d}(N^{\beta_1}v_1,\ldots,N^{\beta_{i-1}}v_{i-1},v_i,\ldots,v_d).$$

然后注意到，所求等式等价于要求对任意 $v_1,\ldots,v_d \in \mathbb{C}^d$，以下等式成立：

$$\sum_{\substack{(\alpha_i,\ldots,\alpha_d)\in\mathbb{N}^{d-i+1}\\ \alpha_i+\cdots+\alpha_d=i}} \det(v_1,\ldots,v_{i-1},N^{\alpha_i}v_i,\ldots,N^{\alpha_d}v_d) = 0.$$

结论现在可由前面的引理 A.0.3 立即得出 □

现在我们可以证明附录 A 的主要结果：

命题 A.0.5。 由族 $\mathcal{F}$ 张成的向量空间与由族 $\mathcal{F}$ 张成的向量空间相同~。

证明。 令 $W = P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_d} \in \mathcal{F}$，其中 $0 \le \alpha_i \le d-1$。我们需要证明 W 可以~写成族 $\mathcal{F}$ 中元素的线性组合。按如下步骤进行。若$\alpha_1 = 0$，则进入下一步。否则，反复应用推论 A.0.4 关于 $i = 1$ 的公式，可以将 W 写成 $\mathcal{F}$ 中形如以下形式的元素的线性组合

$$W' \coloneqq P_{0,\beta_2,\ldots,\beta_d},$$

其中 $0 \le \beta_i \le d-1$。若 $0 \le \beta_2 \le 1$，则进入下一步。否则，反复应用推论 A.0.4 关于 $i = 2$ 的公式，可以将 W' 写成 $\mathcal{F}$ 中形如以下形式的元素的线性组合

$$W'' \coloneqq P_{0,\gamma_2,\gamma_3,\ldots,\gamma_d},$$

借助 $0 \le \gamma_2 \le 1$。继续如此进行，确实可以证明 W 可写成~$\mathcal{F}$中元素的线性组合，从而证明该命题。

□

Appendix B.

本附录 B 旨在详细给出命题 2.4.1 的证明：

命题 B.0.1. 线性映射

$$e\colon \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} & \longrightarrow & \mathrm{Im}(E(p_{T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})}})) \subset E \\ D_T & \longmapsto & e_T \otimes_{\mathbb{C}[\Sigma_d]} c_{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix}$$

是良定义的，且是一个同构。

证明。根据 [Ful97][II.8.1 引理 3 和定理 1], ，有以下两个结论。首先，多项式 D_T，其中 T遍历形状为 $\boldsymbol{\lambda}$、由 $\{0,\ldots,k\}$填充的杨表，满足所谓的交换关系，即：

(i) $D_T + D_{T'} = 0$若 T'是由 T通过交换同一列中的两个元素得到的；(ii) $D_T - \sum D_S = 0$，其中求和遍及所有通过以下类型的交换操作从 T得到的杨表 S：

- 在 T 中固定连续的两列，即第（$i-1$）列和第 i 列；
- 固定一个小于第 i 列大小的数 ℓ，并在第（$i-1$）列中选择 ℓ 个方格；
- 将第 $i-1$ 列中方格的 ℓ 个元素与第 i 列的前 ℓ 个元素互换，同时保持每列中的垂直顺序。

其次，如引理 2.2.2 所示，对于由 $\{0,\dots,k\}$ 填充的半标准杨表 T，多项式 D_T' 构成 $\mathcal{D}_{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}$ 的一组基 $\mathcal{B}$。也就是说，它们构成一个自由族；对于任意非半标准杨表 T，都可以利用上述类型的关系 (i) 和 (ii)，将 D_T 唯一地表示为 $\mathcal{B}$ 中元素的线性组合。

现在考虑 (i) 或 (ii) 中所述的两种交换操作之一。注意，一旦固定了形状为 $\boldsymbol{\lambda}$ 的杨框架中各方格的标记，这种操作就可以由一个适当的置换 $\sigma \in \Sigma_d$ 完全描述：这里采用标准标记，即杨表 $T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})}$。固定一个填有 $\{0,\dots,k\}$、形状为 $\boldsymbol{\lambda}$ 的杨表 T，并注意到以下等式成立：

$$e(D_{\sigma\cdot T}) = e_T \otimes_{\mathbb{C}[\Sigma_d]} \sigma \times c_{\boldsymbol{\lambda}}.$$

因此，要证明该映射定义良好，只需证明杨对称化子 $c_{\boldsymbol{\lambda}}$ 满足以下两个性质：

a) 对应于类型 (i) 交换的任意置换 σ，$c_{\boldsymbol{\lambda}} + \sigma \times c_{\boldsymbol{\lambda}} = 0$；b) $c_{\boldsymbol{\lambda}} - \sum \sigma \times c_{\boldsymbol{\lambda}} = 0$，其中求和遍历对应于 (ii) 中所述交换的置换 σ。

这些性质确实成立，理由如下。杨图定义为杨表的一个等价类；若两个杨表对应的行包含相同的元素，则称它们等价。记 $M^{\boldsymbol{\lambda}}$ 为由填有 $\{1,\dots,d\}$、形状为 $\boldsymbol{\lambda}$ 的杨图张成的复向量空间。它包含 Σ_d 的一个不可约表示，称为斯佩希特模，其定义如下：[10]

$$S^{\boldsymbol{\lambda}} := \mathbb{C}[\Sigma_d]\cdot v_{\boldsymbol{\lambda}},$$

其中 $v_{\boldsymbol{\lambda}} := v_{T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})}} := \sum_{q\in C} (T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})})\epsilon(q)\{q.T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})}\}$。注意，存在一个自然的左 $\mathbb{C}[\Sigma_d]$-模同构

$$\psi\colon \begin{pmatrix} \mathbb{C}[\Sigma_d]\cdot a_{T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})}} & \longrightarrow & M^{\boldsymbol{\lambda}} \\ \sigma \times a_{T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})}} & \longmapsto & \{\sigma\cdot T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})}\} \end{pmatrix}.$$

还要注意，对任意 $\sigma \in \Sigma_d$，以下等式成立

$$\psi(\sigma \times c_{\boldsymbol{\lambda}}) = |R(T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})})| \times \sigma\cdot v_{\boldsymbol{\lambda}} = |R(T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})})| \times v_{\sigma\cdot T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})}}.$$

这里，第一处等式用到了恒等式 $a_{T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})}}^2 = |R(T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})})| \times a_{T_{\mathrm{can}(\boldsymbol{\lambda})}}$，而第二处等式几乎是由定义直接得出的。特别地，这表明映射 ψ 将不可约表示 $\mathbb{C}[\Sigma_d]\cdot c_{\boldsymbol{\lambda}} \subset \mathbb{C}[\Sigma_d]$ 映到不可约表示 $S^{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbb{C}[\Sigma_d]\cdot v_{\boldsymbol{\lambda}} \subset M^{\boldsymbol{\lambda}}$。

现在，所求的等式 a) 和 b) 可由 $M^{\boldsymbol{\lambda}}$ 中相应的等式推出。这些等式正是 [Ful97][II.7.4 命题 4] 的推论的内容。由此可知映射 e 定义良好。为证明 e 是同构，首先注意到，根据其定义，它是满射。然后注意，目标空间和源空间的维数相同，因为 $E(S^{\boldsymbol{\lambda}}) \simeq S^{\boldsymbol{\lambda}}\mathbb{C}^{k+1}$（见定理 1.1.4 和命题 2.2.2）。证明完毕。□

[10] 显然，它在同构意义下与 Σ_d 中对应于分拆 $\boldsymbol{\lambda}$ 的不可约表示一致。

参考文献

[Boe70] Hermann Boerner。《群表示：特别考虑现代物理学的需求》。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹—伦敦；美国爱思唯尔出版公司，纽约，英文版，1970 年。由 P. G. Murphy 翻译自德文，并由 J. Mayer-Kalkschmidt 和 P. Carr 协助。[Dem97] Jean-Pierre Demailly。《Kobayashi 双曲射影簇和射流微分的代数判据》。载于《代数几何——圣克鲁斯 1995》，第 62 卷《纯粹与应用数学研讨会论文集》，第 285–360 页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997 年。[Ehr70] Leon Ehrenpreis。《多个复变量中的傅里叶分析》。《纯粹与应用数学》，第 XVII 卷。Wiley-Interscience [John Wiley & Sons, Inc. 旗下部门。], 纽约—伦敦—悉尼，1970 年。[Eis95] David Eisenbud。《交换代数》，数学研究生教材第 150 卷。施普林格出版社，纽约，1995 年。着眼于代数几何。[FH91] William Fulton 和 Joe Harris。《表示论》，数学研究生教材第 129 卷。施普林格出版社，纽约，1991 年。入门课程，数学读本。[Ful97] William Fulton。《杨表》，伦敦数学会学生教材第 35 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1997 年。附有表示论与几何方面的应用。[Ful98] William Fulton。《交叉理论》，《数学成果及其边界》第 2 卷。数学成果及其边界，第三辑。现代数学综述系列 /。施普林格出版社，柏林，第二版，1998 年。[Kol92] E. R. Kolchin。《关于微分多项式的一个问题》。载于纪念 A. I. Mal’cev 的国际代数会议论文集，1989 年 8 月 21—26 日在新西伯利亚科学城举行。第二部分，第 449–462 页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1992 年。[Obe90] Ulrich Oberst。《多维常系数线性系统》。《应用数学学报》，20 175, 1990 1 2 1(-): – .[Obe96] Ulrich Oberst。《偏微分方程或差分方程的有限维系统》。《应用数学进展》，17(3):337–356，1996 年。[Pal70] V. P. Palamodov。《常系数线性微分算子》。数学科学基础，卷 168。施普林格出版社，纽约—柏林，1970 年。由 A. A. Brown 从俄文翻译。[Rei99] Georg M. Reinhart。《Schmidt–Kolchin 猜想》。《符号计算杂志》，28(4–5):611–631，1999 年 10 月。[RS96] Georg M. Reinhart 和 William Sit。《微分齐次微分多项式》。载于 1996 年国际符号与代数计算研讨会论文集，ISSAC ’96，1996 年 7 月 24–26 日于苏黎世举行，第 212–218 页。纽约：ACM 出版社，1996 年。[Sch79] Wolfgang M. Schmidt。《级数域中的丢番图逼近贡献》。《数学月刊》，87(2):145–165，1979 年 6 月。电子邮箱：antoine.etesse@math.univ-toulouse.fr 图卢兹数学研究所（IMT），保罗·萨巴捷大学