周期函数积分的新下界 ns

David Krieg*，Jan Vyb´ıral†

2023年5月23日

arXiv:2302.02639v2 [math.NA] 7 Feb 2024

摘要

我们研究（多变量）周期函数希尔伯特空间上的积分问题。证明求积公式误差下界的标准技术是使用隆起函数和鸽巢原理。最近，研究者利用一种不同的技术得到了若干新的下界，该技术利用了希尔伯特空间结构以及舒尔乘积定理的一个变体。本文旨在：（a）综述这种新的证明技术；（b）说明它确实优于隆起函数技巧；（c）改进并拓展先前论文中的结果。

关键词：数值积分、舒尔乘积定理、凸起函数技术、复杂度、低光滑度、再生核希尔伯特空间。

目录

1 引言 **2**
1.1 概述.2 1.2 预备知识.3 1.3 结果.5

2 下界证明技巧 用于下界 **5**
2.1 隆起函数技巧的局限.5 2.2 舒尔技巧.9

3 一些 般周期函数的下界 1 **1**
3.1 平方和.11 3.2 范数递减序列.12 3.3 旁论：函数值对 L_2 逼近的作用.13

4 小光滑性 的下界 1 **4**
4.1 各向同性光滑性.15 4.2 混合光滑性.16

5 大光滑度情形的下界 **18**

*林茨约翰内斯·开普勒大学分析研究所，Altenbergerstrasse 69，4040 林茨，奥地利，电子邮箱：david.krieg@jku.at；ORCID：0000-0001-8180-8906；该作者的研究由奥地利科学基金（FWF）项目 M 3212-N 支撑。

†布拉格捷克理工大学核科学与物理工程学院数学系，Trojanova 13，12000 布拉格，捷克共和国，电子邮箱：jan.vybiral@fjfi.cvut.cz；ORCID：0000-0002-5498-2412；该作者的研究获捷克科学基金会项目 P202/23/04720S 以及欧洲区域发展基金项目“先进应用科学中心”（编号：CZ.02.1.01/0.0/0.0/16 019/0000778）支撑。

1 引言

1.1 概述

我们研究多元周期函数的再生核希尔伯特空间上的积分问题。也就是说，我们考虑由复值连续函数构成的希尔伯特空间 H，其定义域为 $[0,1]^d$，并且具有由三角单项式构成的完备正交系。这类函数空间包括经典的各向同性、混合或各向异性光滑性索伯列夫希尔伯特空间（例如，参见 [7, 32]），也包括可处理性研究中常见的加权 Korobov 空间（例如，参见 [8] 及其中的参考文献）。

我们关注误差 $e_n(H)$，它是积分泛函与至多使用 n 个函数值的求积公式之间可能达到的最小差异（按算子范数计）。这对应于基于信息的复杂性的最坏情形设定，参见例如 [29, 30, 34]。通常使用隆起函数技巧证明 $e_n(H)$ 的下界：如果我们在 H 中构造 $2n$ 个支撑互不相交的隆起函数，那么其中 n 个函数的支撑不包含任何求积节点。因此，对于由相应隆起函数之和除以其范数得到的欺骗函数，求积公式的输出为零，而该求积公式的误差不小于欺骗函数的积分。这一简单技巧至少可追溯至 [2]，并为上述函数空间族中的许多经典空间导出了最优下界。然而，有趣的是，在极端情形下——希尔伯特空间中的函数要么非常光滑（解析），要么仅勉强连续——这种方法不足以证明最优下界。最近，人们在这些情形下采用了另一种技巧，利用希尔伯特空间结构以及舒尔乘积定理的一个变体，得到了最优下界，参见 [12, 13, 38]。本文旨在 (a) 综述这一新的证明技术，(b) 展示它确实优于隆起函数技巧，并且 (c) 改进和拓展先前论文中的结果。本文结构如下：

- 具体的设定将在第 1.2 节介绍。第 1.3 节将概述相关结果。
- 在第 2 节中，我们首先说明，凸起函数技术在某些光滑度范围内会失效。随后，我们介绍一种新技术，并将其称为舒尔技巧。我们针对比上述更一般的一族再生核希尔伯特空间进行讨论，见定理 2。
- 在第 3 节中，我们给出周期函数空间的误差 $e_n(H)$ 的一些一般下界。作为推论，我们还获得了一项新结果：对于具有有限迹的再生核希尔伯特空间上的 L_2-近似，采样算法与一般算法的误差之间可能存在的最大差距，见第 3.3 节。我们改进了 [13], 中的一个下界，进一步缩小了与 [5, 19, 25] 中已知最佳上界之间的差距。
- 在第 4 节中，我们推导出函数空间的新的下界，这些空间兼具分数阶各向同性光滑度 $s = d/2$ 和额外的对数项。由于这保证了函数值有定义且空间中的函数连续，而各向同性光滑性 $s = d/2$ 若不加入对数扰动则不足以保证这一点，我们将这种设定称为小光滑性空间。我们还考虑混合光滑度函数空间，其临界界限为 $s = 1/2$，且与维数 d无关。兼具分数阶光滑度和对数光滑度的空间，例如已在 [6, 11, 17, 24] 中得到研究。
- 在第5节中，我们针对光滑性较高的情形，即解析周期函数，获得了下界。我们给出了一个关于维数灾难的结果，这与 [10], 最近得到的结果形成鲜明对比；此外，我们还给出了一个渐近下界，该下界补充了 [16, 23]关于 $\mathbb{R}^d$ 上解析函数类的近期误差界。

1.2 预备知识

设 H 是非空集合 D上的再生核希尔伯特空间（RKHS）。也就是说， H 应当是函数 f的一个希尔伯特空间： $D \to \mathbb{C}$ 使得点求值

$$\delta_x \colon H \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto f(x)$$

对每个 $x \in D$ 都是连续的。这意味着，对于每个 $x \in D$，都存在一个函数 $K(x,\cdot) \in H$，使得 $\delta_x = \langle \cdot, K(x,\cdot)\rangle_H$。函数

$$K \colon D \times D \to \mathbb{C}$$

称为 H 的再生核。关于再生核希尔伯特空间的基础知识，请参阅 [1] 和 [4]。我们关注的是在 H 上计算连续泛函，也就是形如以下形式的算子

$$S_h \colon H \to \mathbb{C}, \quad S_h(f) = \langle f, h\rangle_H \tag{1}$$

其中 $h \in H$ 为某个函数。我们主要关注形如以下形式的积分泛函

$$\mathrm{INT}_\mu \colon H \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int_D f \,\mathrm{d}\mu$$

其中 μ 是定义在 D上的概率测度。显然，如果泛函 INT_μ 是连续的，那么它可以写成形式 (1)。此时，相应的表示元 h 满足

$$h(x) = \langle h, K(x,\cdot)\rangle_H = \int_D K(y,x)\,\mathrm{d}\mu(y) \qquad \text{for all } x \in D.$$

我们希望使用求积公式计算 $S_h(f)$

$$Q_n \colon H \to \mathbb{C}, \quad Q_n(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) \tag{2}$$

节点为 $x_k \in D$，权重为 $a_k \in \mathbb{C}$。该求积公式的最坏情形误差定义为

$$e(Q_n, H, S_h) = \sup_{f \in H \colon \|f\|_H \le 1} |Q_n(f) - S_h(f)| = \|Q_n - S_h\|_{\mathcal{L}(H,\mathbb{C})}.$$

我们关注最优求积公式的误差，并将其记为

$$e_n(H, S_h) = \inf_{Q_n} e(Q_n, H, S_h).$$

本文主要考虑如下定义的多元周期函数的希尔伯特空间。这里， $e_k = \exp(2\pi i \langle k, \cdot\rangle)$表示频率为 $k \in \mathbb{Z}^d$ 的三角单项式。可积函数 $f \colon [0,1]^d \to \mathbb{C}$ 的傅里叶系数定义为

$$\hat{f}(k) := \langle f, e_k\rangle_2 = \int_{[0,1]^d} f(x)\, e^{-2\pi i \langle k, x\rangle}\, dx, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

定义 1. 设 $\lambda \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$ 为一个非负序列。那么 H_λ 表示所有满足以下条件的连续函数 $f \in C([0,1]^d)$ 的集合：对于所有满足 $\lambda_k = 0$ 的 $k \in \mathbb{Z}^d$，均有 $\hat{f}(k) = 0$，且

$$\|f\|_{H_\lambda}^2 := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \colon \lambda_k \neq 0} \frac{|\hat{f}(k)|^2}{\lambda_k} < \infty. \tag{3}$$

条件 (3) 表明，$f \in H_\lambda$ 的傅里叶级数对所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 都逐点收敛（甚至一致收敛），

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}(k)\, e_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

并且 f 作为定义在 $\mathbb{R}^d$上的 1-周期函数是连续的。此外，

$$|f(x)| \le \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\hat{f}(k)| \le \|\lambda\|_1^{1/2} \cdot \|f\|_{H_\lambda}$$

因此，空间 H_λ 是一个再生核希尔伯特空间。三角单项式 $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$是 H_λ 中的完备正交系，而 H_λ 的再生核为

$$K_\lambda(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \lambda_k e_k(x-y). \tag{4}$$

注意，空间 H_λ 也可以类似地针对有界序列 $\lambda \notin \ell_1(\mathbb{Z}^d)$定义为满足条件 (3) 的所有 $f \in L_2([0,1]^d)$构成的空间。然而，在这种情况下，函数求值没有良好定义，并且H_λ 它不是再生核希尔伯特空间。序列 λ最常见的选取方式（例如参见 [32] 或 [22]）包括

1. $\lambda_k = (1+|k|^2)^{-s}$，其中 $s \ge 0$ 和 $k \in \mathbb{Z}^d$。在这种情况下，H_λ 是具有各向同性光滑性的周期函数索博列夫空间。如果 s 是正整数，那么 H_λ 上的一个等价范数为

$$\|f\|_{H_\lambda}^2 \asymp \sum_{\|\alpha\|_1 \le s} \|D^\alpha f\|_2^2.$$

2. $\lambda_k = \prod_{j=1}^d (1+|k_j|^2)^{-s}$ 对于 $k \in \mathbb{Z}^d$ 和 $s > 0$。由此，我们得到具有主导混合光滑性的周期函数空间。如果 $s \in \mathbb{N}$ 是正整数，那么这些空间也允许一个用导数表示的等价范数，即

$$\|f\|_{H_\lambda}^2 \asymp \sum_{\|\alpha\|_\infty \le s} \|D^\alpha f\|_2^2.$$

在空间 H_λ上，我们考虑关于定义在 $[0,1]^d$上的勒贝格测度 λ^d的积分问题，也就是说，我们取 $\mu = \lambda^d$。在这种情况下，泛函 INT_μ 的表示元是常函数 $h \equiv \lambda_0$。对于单位立方体上的这一标准积分问题，我们在误差的记号中省略S_h，写作 $e_n(H_\lambda)$，而不写作 $e_n(H_\lambda, S_h)$；写作 $e(Q_n, H)$，而不写作 $e(Q_n, H, S_h)$；并且简单地写作 INT，而不写作 INT_μ。这种情况下的初始误差为

$$e_0(H_\lambda) = \|\lambda_0\|_{H_\lambda} = \mathrm{INT}(\lambda_0)^{1/2} = \lambda_0^{1/2}.$$

类比于数 $e_n(H_\lambda)$，我们也定义采样数

$$g_n(H_\lambda) = \inf_{\substack{x_1,\dots,x_n\in[0,1]^d \\ g_1,\dots,g_n\in L_2}} \sup_{\|f\|_{H_\lambda}\le 1} \left\| f - \sum_{i=1}^n f(x_i) g_i \right\|_2$$

以及逼近数

$$a_n(H_\lambda) = \inf_{\substack{L_1,\dots,L_n\in H_\lambda' \\ g_1,\dots,g_n\in L_2}} \sup_{\|f\|_{H_\lambda}\le 1} \left\| f - \sum_{i=1}^n L_i(f) g_i \right\|_2,$$

它们分别反映了使用至多 n 个函数值或 n 个任意线性测量来进行 L_2-逼近时，最佳（线性）算法所能达到的误差。

补充说明一些记号。对于序列 (a_n) 和 (b_n)，如果存在常数 $c > 0$，使得对于除有限多个 n 之外的所有情况都有 $a_n \le c\, b_n$，我们就记作 $a_n \lesssim b_n$。如果 $b_n \lesssim a_n$，我们记作 $a_n \gtrsim b_n$；如果这两种关系都成立，则记作 $a_n \asymp b_n$。如果 H 是一个希尔伯特空间，H' 表示 H 上所有连续线性泛函构成的空间。

1.3 结果

如前所述，本文的主要目的是综述一种用于推导误差 $e_n(H_\lambda)$ 下界的新证明技术。在此，我们汇集了本文利用这一新技术获得的一些新结果。

第一类结果涉及低光滑度情形下误差 $e_n(H_\lambda)$ 和 $g_n(H_\lambda)$ 的渐近行为，也就是说，λ 的衰减速度仅仅快到足以保证 H_λ 是一个再生核希尔伯特空间。对于具有分数阶各向同性光滑度 $d/2$ 和对数光滑度 $\beta > 1/2$ 的函数空间 H_λ，即当 λ 由 (19) 给出时，我们得到

$$e_n(H_\lambda) \asymp g_n(H_\lambda) \asymp n^{-1/2} \log^{-\beta+1/2} n \asymp a_n(H_\lambda) \cdot \log^{1/2} n, \tag{5}$$

见推论 4。特别值得关注的是采样数与逼近数之间的对数间隙；这一结果已在 [13] 中针对单变量情形得到证明，现在扩展到了多元情形。积分误差的下界可由关于更一般序列 λ 的一个结果推出，见定理 4；它无法通过标准的隆起函数技巧证明，见第 2.1 节。我们还证明，具有分数阶混合光滑度 $1/2$ 和对数光滑度 $\beta > 1/2$ 的（多元）空间也满足相同的关系 (5)，其中 λ 由 (22) 给出，见第 4.2 节。

其次，我们针对数值 $e_n^*(\sigma)$和 $g_n^*(\sigma)$得到了新的结果。对于给定的任意奇异值序列 $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$，这两个数分别反映了再生核希尔伯特空间上第 n 小积分误差和采样数可能出现的最坏情况，精确定义见第 3.3 节。我们证明，除通用常数因子外，这两个数都等价于

$$\sigma_n^* := \min\left\{\sigma_0, \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k\geq n}\sigma_k^2}\right\},$$

见推论 3。这里的新意同样在于下界，上界已由 [5] 给出。

第三，我们还推导出了一个关于维数灾难的结果。我们证明，对于形如以下的函数类，数值积分和 L_2-逼近都会遭遇维数灾难

$$\left\{ f \in C([0,1]^d) \,\middle|\, \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\hat{f}(k)|^p \cdot g(\|k\|_\infty) \leq 1 \right\}$$

其中权函数 g 满足：$\mathbb{N}_0 \to (0,\infty)$ 且 $p = 2$，见定理 7。这与近期针对具有 $p = 1$ 的类似函数类所得到的可处理性结果形成鲜明对比；数值积分见 [10]，L_2逼近见 [18]。

2 下界的证明技术

本节讨论证明积分误差 $e_n(H_\lambda)$ 下界的技术。我们展示隆起函数技巧的局限性；这可能是最常见的技术，并介绍本文采用的一种新方法。我们指出，还有其他证明技术在此不作讨论，例如 [28] 的可分解核技巧以及 [31] 提出的一种方法。我们只将新方法与最标准的技术进行比较。

2.1 隆起函数技巧的局限性

证明积分问题下界最著名的方法是使用鼓包函数。其依据是如下观察（参见 [29, 第 4]章）：对于一个

节点为 x_1、.....、 x_n 的固定求积公式 Q_n，要得到下界，等价于构造一个函数 f，使其在采样点处为零，即 $f(x_1) = \ldots = f(x_n) = 0$，同时具有较大的积分 $\mathrm{INT}(f)$ 和较小的范数 $\|f\|_H$。由此得到 $Q_n(f) = 0$，以及下界

$$e(Q_n, H) \geq \frac{|\mathrm{INT}(f) - Q_n(f)|}{\|f\|_H} = \frac{|\mathrm{INT}(f)|}{\|f\|_H}.$$

这样的函数称为欺骗函数。针对给定的 Q_n，构造这类欺骗函数的一种方法是从一个鼓包函数开始，即取一个光滑周期函数 $\varphi \in C([0,1])$，使得 $\operatorname{supp}\varphi \subset [0, 1/(2n)]$，并考虑它的平移 $\varphi(x - j/(2n))$，其中 $j = 0, \ldots, 2n-1$（多元情形也类似）。根据抽屉原理，这些伸缩函数中至少有 n 个在所有采样点 $x_1, \ldots, x_n$ 处都为零。将它们相加，便得到欺骗函数 f。

这种（相当直观的）技巧至少可以追溯到 [2]。它可能是证明数值积分及其他逼近问题下界时最常用的方法，尤其适用于只能使用函数值的情形，参见 [26, 27, 34]。它被广泛使用的主要原因显然是，它往往能得到最优结果。不过请注意，例如在 [37] 中，为了在某些极限情形下获得最优下界，有必要将隆起函数技巧与 Khintchine不等式结合起来。

本节旨在说明，在以下情形中，鼓包函数技术只能为 H_λ 上的积分问题提供次优结果：

- 序列 λ 的衰减非常缓慢。这意味着 H_λ 包含光滑度很低、几乎只是连续的函数。
- 序列 λ 的衰减非常迅速。这意味着 H_λ 中的函数非常光滑，甚至是解析的。

在第二种情形下，凸起函数技术不起作用这一点相当明显。如果 λ 衰减得足够快（例如，对于某个 $c_1,\ c_2 > 0$，且所有 $k \in \mathbb{Z}$，若 $|\lambda_k| \leq c_1 \exp(-c_2|k|)$，参见 $[3, §25]$），那么 H_λ 中的所有函数都是解析的。由于不存在具有紧支撑的解析函数（零函数除外），因此，任何通过隆起函数技巧得到的欺骗函数都不属于空间 H_λ。

现在我们来说明，在低光滑度的情形下，隆起函数技巧具有次优性。为简化表述，我们只考虑 $d = 1$ 的情形，但要指出的是，在多元情形下也可以得到类似结果。我们考虑如下形式的序列：

$$\lambda_k \ = \ (1 + |k|)^{-1} \log^{-2\beta}(e + |k|), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \beta > 1/2, \tag{6}$$

其仅仅是可求和的。[13, 定理 4] 中已证明了这一点，并且由下文的推论 4 也可推出

$$e_n(H_\lambda) \ \gtrsim \ n^{-1/2} \log^{-\beta+1/2} n. \tag{7}$$

该下界是精确的，见 [13, 命题 1] 和 [5]。这里，我们将证明以下结论。

定理 1. 设 $\lambda \in \ell_1(\mathbb{Z})$ 由（6）给出。存在一个绝对常数 $C > 0$，使得对于每个偶数 $n \geq 2$ 以及每个满足 $\operatorname{supp}\varphi \subset [0, 1/(2n)]$ 的 $\varphi \in C([0,1])$，都存在 $\{z_1, \ldots, z_n\} \subset \{j/(2n)\colon\ j = 0,\ .....,\ 2n-1\}$，使得函数

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(x - z_j) \tag{8}$$

满足

$$\frac{\int_0^1 \varphi^{(n)}(x)dx}{\left\|\varphi^{(n)}\right\|_{H_\lambda}} \leq C\, n^{-1/2} (\log n)^{-\beta}. \tag{9}$$

定理 1 表明，无论我们如何选择支撑在$[0,1/(2n)]$,中的鼓包函数 $\varphi \in C([0,1])$，都可以通过适当选择采样点集合 $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset [0,1]$，使得从该求和式出发

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \varphi\left(x - \frac{j}{2n}\right)$$

在 X 上不为零的那些项并不能构成一个足以证明 (7) 的欺骗函数。换言之，经典凸起函数技巧无法得到 (5) 中 $e_n(H_\lambda)$ 的紧下界。

在证明定理 1 之前，我们需要用一阶差分刻画空间 H_λ 中 f 的范数。对每个 $0 < h < 1$，一阶差分定义如下:

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x), \quad x \in [0,1].$$

这里，我们将 f 解释为定义在整个 $\mathbb{R}$ 上的周期函数，因此对所有 $x \in [0,1]$, $\Delta_h f(x)$ 都有良好定义。此外，$\|\Delta_h f\|_2$ 表示 $L_2([0,1])$ 中 $x \mapsto \Delta_h f(x)$ 的范数。原则上，下面的命题是 [6, 定理 10.9], 的一个特例；该定理通过一阶和高阶差分刻画了 $\mathbb{R}^d$ 上广义光滑性的 Besov 空间。为方便读者，我们给出一个简短直接的证明。

命题 n 1. 设 $\lambda \in \ell_1(\mathbb{Z})$ 由 (6) 给出。那么，$f \in C([0,1])$ 属于 H_λ 当且仅当，

$$\|f\|_2^2 + \int_0^1 \frac{[1 - \log h]^{2\beta}}{h^2} \cdot \|\Delta_h f\|_2^2 \, dh \tag{10}$$

是有限的。此外，$\|f\|_{H_\lambda}^2$ 等价于 (10)，且常数与 $f \in C([0,1])$ 无关。

证明。设 $f \in C([0,1])$。那么

$$\widehat{\Delta_h f}(k) \;=\; [e^{2\pi i k h} - 1] \cdot \hat{f}(k)$$

对所有 $k \in \mathbb{Z}$，并且由 (e_k) 的正交归一性可得，$_{k\in\mathbb{Z}}$ 属于 $L_2([0,1])$,

$$\|\Delta_h f\|_2^2 \;=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 \cdot |e^{2\pi i k h} - 1|^2.$$

为简化记号，我们记

$$\omega_\beta(h) = \frac{[1 - \log h]^\beta}{h}, \quad 0 < h < 1$$

并得到

$$\|f\|_2^2 + \int_0^1 \omega_\beta(h)^2 \|\Delta_h f\|_2^2 \, dh = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 \Big(1 + \int_0^1 \omega_\beta(h)^2 |e^{2\pi i k h} - 1|^2 dh\Big).$$

对于 $j \in \mathbb{Z}$，我们令

$$\gamma_j = 1 + \int_0^1 \omega_\beta(h)^2 |e^{2\pi i j h} - 1|^2 dh$$

并且我们将证明，对于所有 $j \in \mathbb{Z}$， $\gamma_j \asymp 1/\lambda_j$ 都成立，其中普适等价常数不依赖于 j。结合 (3)，证明即告完成。

通过调整等价常数，总能得到 γ_j 关于 $j=0$ 的估计。令$j\neq 0$. 则

$$\begin{aligned}\gamma_j &\geq 1+\int_{1/(4\pi|j|)}^{1/(2\pi|j|)} \omega_\beta(h)^2|e^{2\pi ijh}-1|^2dh\\ &\geq 1+\frac{1}{4\pi|j|}\cdot\frac{[1-\log(1/(2\pi|j|))]^{2\beta}}{1/(2\pi|j|)^2}\cdot|e^{i/2}-1|^2 \gtrsim \lambda_j^{-1}.\end{aligned}$$

于是可由下式得到 γ_j 的上界:

$$\begin{aligned}\gamma_j &= 1+\int_0^{1/(2\pi|j|)} \omega_\beta(h)^2|e^{2\pi ijh}-1|^2dh+\int_{1/(2\pi|j|)}^1 \omega_\beta(h)^2|e^{2\pi ijh}-1|^2dh\\ &\lesssim 1+\int_0^{1/(2\pi|j|)} \omega_\beta(h)^2(j\cdot h)^2dh+\int_{1/(2\pi|j|)}^1 \omega_\beta(h)^2dh\\ &\lesssim 1+|j|\cdot(1+\log(2\pi|j|))^{2\beta} \asymp \lambda_j^{-1},\end{aligned}$$

由此证明得证。 □

定理 1 的证明。取满足 $\operatorname{supp}\varphi\subset[0,1/(2n)]$ 的 $\varphi\in C([0,1])$，以及一个偶整数 $n\geq 2$。令

$$z_1=0,\quad z_2=\frac{1}{2n},\quad z_3=\frac{4}{2n},\quad z_4=\frac{5}{2n},\quad \text{etc.},$$

即,

$$z_{2j+1}=\frac{4j}{2n},\quad z_{2j+2}=\frac{4j+1}{2n},\quad j=0,\dots,\frac{n}{2}-1.$$

我们仍由式 (8) 定义 $\varphi^{(n)}$，并利用 Hölder 不等式得到

$$\int_0^1\varphi^{(n)}(x)dx=n\int_0^{1/(2n)}\varphi(t)dt\leq\sqrt{\frac{n}{2}}\|\varphi\|_2. \tag{11}$$

为了估计 $\|\varphi^{(n)}\|_{H_\lambda}$ 的下界，注意到若 $x\in\left[\frac{4j+1}{2n},\frac{4j+2}{2n}\right]$ 且 $1/(2n)\leq h\leq 2/(2n)$，则 $x+h\in\left[\frac{4j+2}{2n},\frac{4j+4}{2n}\right]$ 且 $\varphi^{(n)}(x+h)=0$。因此,

$$\|\Delta_h\varphi^{(n)}\|_2^2\geq\frac{n}{2}\int_0^{1/(2n)}\varphi^2(t)dt$$

并利用命题 1,

$$\begin{aligned}\|\varphi^{(n)}\|_{H_\lambda}^2 &\gtrsim \int_{1/(2n)}^{2/(2n)}\frac{[1-\log h]^{2\beta}}{h^2}\|\Delta_h\varphi^{(n)}\|_2^2\,dh\\ &\gtrsim \frac{1}{n}\cdot(\log n)^{2\beta}\cdot n^2\cdot\frac{n}{2}\cdot\int_0^{1/(2n)}\varphi^2(t)dt=\frac{n^2}{2}(\log n)^{2\beta}\|\varphi\|_2^2.\end{aligned}$$

结合式 (11)，证明至此完成。 □

注 1. 我们还要指出，定理 1 之所以颇为违反直觉，另有一个原因。受等分布采样点对应的最优欺骗函数显式公式的启发，我们考虑（对于固定的 $n\in\mathbb{N}$）鼓包函数

$$\varphi_n(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{2nk}[1-e_{2nk}(t)],\quad t\in[0,1/(2n)]$$

以及 $\varphi_n(t) = 0$ 当 $t \notin [0, 1/(2n)]$ 时。于是确实有 $\varphi_n \in C([0,1])$，并且

$$\Phi_n(t) = \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi_n(t - j/(2n)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{2nk}[1 - e_{2nk}(t)], \quad t \in [0,1]. \tag{12}$$

注意， $\Phi_n(t)$确实在点 $t = j/(2n)$ $j = 0, \ldots, 2n$.处为零

最后，经过简单计算可得

$$\frac{\mathrm{INT}(\Phi_n)}{\|\Phi_n\|_{H_\lambda}} \asymp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{2nk}\right)^{1/2} \asymp n^{-1/2}(\log n)^{-\beta+1/2} \tag{13}$$

其中等价常数与 n 无关。因此，定理 1 表明，从 (12) 的求和中移除某些隆起函数，实际上可能会增大此类函数的范数。事实上，若 $\varphi^{(n)}$ 是利用 (12) 中的 φ_n 按照定理 1 构造的函数，那么 Φ_n 和 $\varphi^{(n)}$ 的积分是可比的，并且由 (13) 和 (9) 可知，当 n 趋于无穷时，$\|\varphi^{(n)}\|_{H_\lambda}/\|\Phi_n\|_{H_\lambda}$ 至~~少按~~ $\sqrt{\log(n)}$ 的速度增长。

2.2 舒尔技巧

那么，对于隆起函数技巧不起作用的情形，我们该如何证明积分问题的下界呢？近期关于低光滑度和解析函数的结果，是通过对经典舒尔乘积定理作某种改进得到的；该定理讨论半正定矩阵的逐项乘积。现在，我们将在第 1.2 节的一般框架下介绍这一技巧。也就是说，给定一个再生核希尔伯特空间 H，其定义域为 D、核为 K，以及一个由 $h \in H$ 表示的泛函 S_h。

该方法的第一个要点，是通过某些涉及核 K 和积分的表示元 h （来自 [13]）的矩阵的正定性，刻画数值积分的下界。

命题 2. 设 H 是定义域 D 上的一个再生核希尔伯特空间，其核为 $K\colon D \times D \to \mathbb{C}$，且设 $h \in H$。那么，对每个 $\alpha > 0$,

$$e_n(H, S_h)^2 \geq \|h\|_H^2 - \alpha^{-1} \tag{14}$$

当且仅当矩阵

$$\left(K(x_j, x_k) - \alpha\overline{h(x_j)}h(x_k)\right)_{j,k=1}^{n}$$

对所有 $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset D$.均为半正定

证明. 设 Q_n 由 (2) 给出。记 $a = (a_1, \ldots, a_n)^*$，$\mathbf{h} = (h(x_1) \ldots, h(x_n))^*$，以及 $\mathbf{K} = (K(x_j, x_k))_{j,\ k=1}^{n}$，于是得到

$$e(Q_n, H, S_h)^2 = \sup_{\|f\|_H \leq 1} \left|\left\langle f, \sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{x_k} - h \right\rangle\right|^2 = \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k K(x_k, \cdot) - h\right\|_H^2 = \|h\|_H^2 - 2\mathrm{Re}\,(a^*\mathbf{h}) + a^*\mathbf{K}a. \tag{15}$$

现在假设 $\mathbf{K} - \alpha\mathbf{h}\mathbf{h}^*$ 是半正定的。如果 $a^*\mathbf{K}a = 0$，那么 $a^*\mathbf{h}\mathbf{h}^*a = |a^*\mathbf{h}|^2 = 0$ 也成立，由 (15) 可得 $e(Q_n, H, S_h)^2 \geq \|h\|_H^2$.。如果 $a^*\mathbf{K}a$ 是正的，那么我们将 (15) 继续写为

$$e(Q_n, H, S_h)^2 = \|h\|_H^2 + \left|\frac{a^*\mathbf{h}}{\sqrt{a^*\mathbf{K}a}} - \sqrt{a^*\mathbf{K}a}\right|^2 - \frac{|a^*\mathbf{h}|^2}{a^*\mathbf{K}a} \geq \|h\|_H^2 - \frac{|a^*\mathbf{h}|^2}{a^*\mathbf{K}a}. \tag{16}$$

我们利用 $a^*\mathbf{K}a - \alpha a^*\mathbf{h}\mathbf{h}^*a = a^*\mathbf{K}a - \alpha|a^*\mathbf{h}|^2 \geq 0$，并对所有求积公式$Q_n$取下确界，得到 $e_n(H,S_h)^2 =$下确界$_{Q_n}$ $e(Q_n,H,S_h)^2 \geq \|h\|_H^2 - \alpha^{-1}$.

另一方面，假设 (14) 成立。那么，对于任意求积公式 Q_n，其节点 $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset D$ 和权重 $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{C}$ 均可任意选取，$e(Q_n,H,S_h)^2 \geq \|h\|_H^2 - \alpha^{-1}$。若 $a^*\mathbf{K}a = 0$，则由 (15) 可知，对于 a 及其所有复数倍数，均有 $2\mathrm{Re}\,(a^*\mathbf{h}) \leq \alpha^{-1}$ 成立。因此，$a^*\mathbf{h} = 0$，且 $a^*\mathbf{K}a - \alpha a^*\mathbf{h}\mathbf{h}^*a = 0.$。若 $a^*\mathbf{K}a$ 为正，则可假设（必要时将 a 乘以一个非零 $t \in \mathbb{C}$ 进行缩放）$a^*\mathbf{h} = a^*\mathbf{K}a$，此时 (16) 成为恒等式。因此，$a^*\mathbf{K}a \geq \alpha|a^*\mathbf{h}|^2$，结论得证。 □

第二个要素是关于半正定矩阵的逐元素平方的一个下界，该结果与舒尔乘积定理有关，并已在 [38] 中证明。如果 $M = (M_{i,\,j})_{i,\,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n\times n}$，则我们将 $\overline{M} = (\overline{M}_{i,\,j})_{i,\,j=1}^n$ 记为由复共轭元素构成的矩阵，将 $M \circ M$ 记为元素为 $|M_{i,\,j}|^2$ 的矩阵。此外，$\mathrm{diag}\ M$ 是 M 对角线元素组成的列向量。

命题 3. 设 $M \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ 是一个自伴半正定矩阵。则

$$M \circ \overline{M} - \frac{1}{n}(\mathrm{diag}\, M)(\mathrm{diag}\, M)^T$$

也为半正定矩阵。

命题 2 和命题 3 可以轻松结合起来，得到数值积分的下界。我们在以下假设下陈述该结果：核 $K\colon\ D \times D \to \mathbb{C}$ 可以写成对角线为常数的再生核平方和。具体而言，我们假设 K 可以写成

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^m |M_i(x,y)|^2 \quad \text{for all } x,y \in D, \tag{17}$$

其中 $M_i\colon\ D \times D \to \mathbb{C}$ 是定义域 D 上的半正定函数，且在对角线上为常数，即对所有 $x \in D$，$M_i(x,x) = c_i \geq 0$。那么，对于每个 $x \in D$，$K(x,x) = \kappa := \sum_{i=1}^m c_i^2$，并且 K 在对角线上也为常数。

定理 2. 设 H 是定义域 D 上的再生核希尔伯特空间，其核 $K\colon\ D \times D \to \mathbb{C}$ 可写成对角线为常数的再生核的平方和，且设 $1 \in H$。考虑表示元为常数 $h = 1$ 的积分问题 $S = S_h$。那么

$$e_n(H,S)^2 \ \geq\ \|h\|_H^2 - \frac{n}{\kappa},$$

其中 κ 是 K 在对角线上的值。

证明. 设 K 可如式 (17) 所示写出，并设 $M_i(x,x) = c_i$。此外，设 $x_1,\ldots,x_n \in D$。那么 $(M_i(x_j,x_k))_{j,\,k=1}^n$ 是半正定的，根据命题 3，矩阵也为

$$\left(|M_i(x_j,x_k)|^2 - \frac{c_i^2}{n}\right)_{j,k=1}^n.$$

因此，对所有 $i \leq m$ 求这些矩阵的和，即矩阵

$$\left(K(x_j,x_k) - \frac{\kappa}{n}\right)_{j,k=1}^n$$

是正定的 半正定。根据命题 2，结合 $h = 1$，即可得到该误差界。 □

特别地，为了将初始误差降低一半，至少需要 $\frac{1}{2}\|1\|_H^2 \cdot K(x,x)$ 个求积点。这一结论通常已足以证明维数灾难，参见 [12] 和第5节。令人惊讶的是，定理 2 还可用于证明有关积分误差收敛阶的新结果。下一节将介绍这条思路。

开放问题 1。 [15] 的猜想 2 表明，如果 $f:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是非负的，并且具有非负的傅里叶变换，那么矩阵

$$\left\{ f(x_j - x_k) - \frac{f(0)}{n} \right\}_{j,k=1}^{n}$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及 $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$. 的每一种选择，该矩阵都是半正定的。值得注意的是，命题 3 与经典的博赫纳定理（参见 [38, 定理 5]）相结合，可以在 $f = g^2$时对这一猜想给出肯定回答，其中 $g:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 具有非负的傅里叶变换。但就其完整的一般性而言， [15] 的猜想 2 似乎仍然是开放问题。

3 周期函数的一些一般下界

现在，我们将定理 2 转移到 H_λ 上的周期函数空间 $D = [0,1]^d$中。首先，我们给出关于序列 $\lambda \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$ 的一个结果；这些序列在第 3.1 节中表示为卷积平方和。随后，我们在第 3.2 节将这一结果推广到更一般的序列类，即那些可以表示为某个范数的非递增函数的序列。由于这涵盖了单变量情形中的所有非递增序列，因此在第 3.3 节中，我们推导出一个推论：对于任意固定的逼近数序列，最大可能误差 $e_n(H)$ 的一个全新且尖锐的结果。

3.1 平方和

回顾一下，非负可和序列 $\lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 在 H_λ 上的再生核 K_λ 由式 (4) 给出。其绝对值的平方则为

$$|K_\lambda(x,y)|^2 = \sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} \lambda_j \lambda_\ell e_{j-\ell}(x-y) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d} \lambda_\ell \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \lambda_{k+\ell} e_k(x-y). \tag{18}$$

因此，我们定义两个非负序列 $\lambda, \theta \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$ 的卷积 by

$$(\lambda * \theta)_k \;=\; \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d} \lambda_\ell\, \theta_{\ell+k}, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

直接计算可得 $\lambda * \theta \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$，且 $\|\lambda * \theta\|_1 = \|\lambda\|_1 \cdot \|\theta\|_1$。利用这一记号，我们可以将式 (18) 改写为 $|K_\lambda|^2 = K_{\lambda*\lambda}$。如果存在 $\lambda^{(i)} \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$、 $i \le m$，使得 $\lambda = \sum_{i\le m} \lambda^{(i)} * \lambda^{(i)}$，则称 λ 为卷积平方和。于是，定理 2 可表述如下。

推论 1. 如果 $\lambda \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$ 是卷积平方和，则

$$e_n(H_\lambda)^2 \;\ge\; \lambda_0 \left(1 - \frac{n\lambda_0}{\|\lambda\|_1}\right).$$

证明。由于不等式两边关于 λ 都是齐次的，我们可以假设 $\lambda_0 = 1$。在这种情况下， H_λ 上的积分表示元由 $h = 1$ 给出，其中 $\|h\|_{H_\lambda}^2 = 1$。根据 (18)，我们得到

$$K_\lambda \;=\; \sum_{i=1}^{m} K_{\lambda^{(i)}*\lambda^{(i)}} \;=\; \sum_{i=1}^{m} \left|K_{\lambda^{(i)}}\right|^2.$$

因此，我们可以应用定理 2，只需注意到 $K_\lambda(x,x) \;= \|\lambda\|_1$. □

这是对 [13, 定理 1] 的推广，涵盖了情形 $d = 1$ 和 $m = 1$.

3.2 范数递减序列

下一步，我们将推论 1 推广到更一般的序列 λ，这些序列并非表示为卷积平方和。具体而言，我们考虑形如 $\lambda_k = g(\|k\|)$ 的序列，其中 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的范数，并且 $g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 单调递减。我们称这类序列为 $\|\cdot\|$-递减。显然，当且仅当对所有满足 $\|k\| \geq \|\ell\|$ 的 $k, \ell \in \mathbb{Z}^d$，λ 满足 $\lambda_k \leq \lambda_\ell$ 时，λ 才是 $\|\cdot\|$-递减的。

定理 3. 设 $\lambda \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$ 是 $\|\cdot\|$-递减的。那么

$$e_n(H_\lambda)^2 \;\geq\; \lambda_0 \left(1 - \frac{2n\lambda_0}{\lambda_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \lambda_{2k}}\right).$$

证明. 同样，由于所述不等式两边关于 λ 都是齐次的，我们可以假设 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \lambda_{2k} = 1$。令 $\mu_\ell = 2^{-1/2}\lambda_{2\ell}$。根据三角不等式，对于每一对 k、$\ell \in \mathbb{Z}^d$，关系 $2\|k\| \geq \|\ell\|$ 或 $2\|k+\ell\| \geq \|\ell\|$ 必有一个成立，因此 $\lambda_{2k} \leq \lambda_\ell$ 或者 $\lambda_{2k+2\ell} \leq \lambda_\ell$。于是对所有 $\ell \in \mathbb{Z}^d$，都有

$$(\mu * \mu)_\ell = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \lambda_{2k}\lambda_{2k+2\ell} \leq \lambda_\ell.$$

此外，$(\mu*\mu)_0 \leq \lambda_0/2$。令 $\nu = \mu * \mu + t\delta_0$，并选取 $t \geq \lambda_0/2$ 使得 $\nu_0 = \lambda_0$。那么 ν 是卷积平方和。由推论 1 和 $\nu \leq \lambda$ 可得

$$e_n(H_\lambda)^2 \;\geq\; e_n(H_\nu)^2 \;\geq\; \lambda_0\left(1 - \frac{n\lambda_0}{\|\nu\|_1}\right)$$

with

$$\|\nu\|_1 \geq \frac{\lambda_0}{2} + \|\mu*\mu\|_1 = \frac{\lambda_0}{2} + \|\mu\|_1^2 = \frac{\lambda_0+1}{2}.$$

□

定理 3 非常适合用于证明维数灾难，见第5节。不过，我们也可以对其进行调整，使其适用于关于第 n 个最小误差的渐近行为的结果。

定理 4. 设 $\lambda \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$ 为 $\|\cdot\|$-递减的。对于 $n \in \mathbb{N}$，令 r_n 为 $(4n-1)$ $\|\cdot\|$-递增重排中 $(2\mathbb{Z})^d$ 的第 $4n-1$ 个元素的范数，即，

$$r_n := \min\left\{r \geq 0 \mid \#\{k \in \mathbb{Z}^d \colon \|2k\| \leq r\} \geq 4n-1\right\}.$$

Then

$$e_n(H_\lambda)^2 \;\geq\; \min\left\{\frac{\lambda_0}{2},\, \frac{1}{8n}\sum_{\|2k\|>r_n} \lambda_{2k}\right\}.$$

注意，对于所有满足 $1 \leq p \leq \infty$ 的范数 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$，均有 $r_n \asymp n^{1/d}$。

证明。取满足 $\|m\| = r_n$ 的 $m \in \mathbb{Z}^d$。我们通过令 $\tau_k = \lambda_k$（当 $\|k\| > r_n$ 时）以及 $\tau_k = \lambda_m$（当 $0 < \|k\| \leq r_n$ 时），定义 $\tau \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$，并且

$$\tau_0 \;=\; \min\left\{\lambda_0,\, \max\left\{\lambda_m,\, \frac{1}{4n}\sum_{\|2k\|>r_n} \lambda_{2k}\right\}\right\}.$$

那么 τ 是 $\|\cdot\|$-递减的，且以上界 λ 为界。此外，

$$\tau_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \tau_{2k} \;\geq\; 4n\lambda_m + \sum_{\|2k\|>r_n} \lambda_{2k} \;\geq\; 4n\tau_0$$

因此 T　　定理 3 给出 $e_n(H_\lambda)^2 \geq e_n(H_\tau)^2 \geq \tau_0/2$，从而得到所述下界。 □

在单变量情形下，前面的结果如下所示。

推论 2. 设 $\lambda \in \ell_1(\mathbb{Z})$ 在 $\mathbb{N}_0$ 上非负、对称且单调递减。那么

$$e_n(H_\lambda)^2 \;\geq\; \min\left\{\frac{\lambda_0}{2},\, \frac{1}{8n}\sum_{k\geq 4n}\lambda_k\right\} \qquad \textit{for all } n \in \mathbb{N}.$$

证明。我们对 $d = 1$ 和 $\|\cdot\| = |\cdot|$应用定理 4。因此， $r_n = 4n - 2$ 并且由于单调性和对称性，我们得到

$$\sum_{\|2k\|>r_n}\lambda_{2k} = \sum_{|k|\geq 2n}\lambda_{2k} = \sum_{k\geq 2n}(\lambda_{2k}+\lambda_{-2k}) \geq \sum_{k\geq 2n}(\lambda_{2k}+\lambda_{2k+1}) = \sum_{k\geq 4n}\lambda_k.$$

□

这改进了我们先前的结果 [13, 定理 4], ，在那里我们得到了类似的下界，但对序列 λ 额外要求正则性假设。

3.3 插曲：函数值在 L_2 近似中的作用

近年来，人们对在 L_2 近似问题中比较由函数值给出的标准信息与一般线性信息越来越感兴趣。有关最新的上界，参见[5, 19, 20, 25, 33] ；有关下界，参见 [12, 13] 。令 Ω 表示所有满足以下条件的配对 (H,μ) 的集合：其中 H 是定义在任意集合 D 上的可分再生核希尔伯特空间， μ 是 D 上的测度，且 H 嵌入到 $L_2(D,\mu)$ 中。对于 $(H,\mu) \in \Omega$，我们定义采样数

$$g_n(H,\mu) \;=\; \inf_{\substack{x_1,\ldots,x_n\in D\\ g_1,\ldots,g_n\in L_2}} \sup_{\|f\|_H\leq 1}\left\|f-\sum_{i=1}^n f(x_i)g_i\right\|_{L_2(D,\mu)}$$

以及逼近数

$$a_n(H,\mu) \;=\; \inf_{\substack{L_1,\ldots,L_n\in H'\\ g_1,\ldots,g_n\in L_2}} \sup_{\|f\|_H\leq 1}\left\|f-\sum_{i=1}^n L_i(f)g_i\right\|_{L_2(D,\mu)}.$$

人们关注这两个概念之间可能存在的最大差距，也就是说，给定一个序列$\sigma_0 \geq \sigma_1 \geq \ldots$ 和一个整数 $n \geq 0$，考虑

$$g_n^*(\sigma) \;:=\; \sup\Big\{g_n(H,\mu)\,\Big|\,(H,\mu)\in\Omega\colon \forall m\in\mathbb{N}_0\colon a_m(H,\mu)=\sigma_m\Big\}.$$

根据 [14] 可知，只要满足 $\sigma \notin \ell_2$，就有 $g_n^*(\sigma) = \sigma_0$。另一方面， [5] 证明存在一个通用常数 $c \in \mathbb{N}$ ，使得只要满足 $\sigma \in \ell_2$,

$$g_{cn}^*(\sigma) \;\leq\; \sigma_n^* \;:=\; \min\left\{\sigma_0,\, \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k\geq n}\sigma_k^2}\right\}.$$

根据推论 2，我们得到一个匹配的下界。对于空间 H_λ，平方逼近数序列等于序列 λ 的非递增重排。这里我们利用了这样一个事实：在 H_λ 上进行逼近比积分更困难，即 $e_n(H_\lambda) \leq g_n(H_\lambda)$。事实上，如果 $S_n =$

$\sum_{i=1}^{n} g_i \delta_{x_i}$ 是一个抽样算子，那么我们考虑求积公式 $Q_n(f) = \int_0^1 S_n(f)(x)\,\mathrm{d}x$，并得到

$$e(Q_n) = \sup_{\|f\|_{H_\lambda} \le 1} \left| \int_0^1 (f - S_n(f))(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \sup_{\|f\|_{H_\lambda} \le 1} \|f - S_n(f)\|_2 = e(S_n).$$

我们对希尔伯特空间 H_λ 应用推论 2，其中 $\lambda_k = \sigma^2_{\lfloor 2k \rfloor}$，并得到

$$g_n^*(\sigma) \ge \frac{1}{4}\sigma^*_{8n}.$$

这改进了目前已知的来自 [13, 定理 2] 的最佳下界，因为我们的下界对所有 $n \in \mathbb{N}_0$都成立，而不只是对无穷多个 $n \in \mathbb{N}_0$成立。此外，由于 $e_n(H) \le g_n(H)$，且我们的下界是针对积分问题证明的，因此将$g_n^*(\sigma)$替换为

$$e_n^*(\sigma) := \sup\left\{ e_n(H, \mathrm{INT}_\mu) \,\middle|\, (H,\mu) \in \Omega_0 \colon \forall m \in \mathbb{N}_0 \colon a_m(H,\mu) = \sigma_m \right\},$$

其中，Ω_0 是所有满足 μ 为概率测度的有序对 $(H,\mu) \in \Omega$ 构成的集合。因此，我们得到以下推论。

推论 3. 存在通用常数 $0 < c < 1 < C$，使得对于任意序列 $\sigma_0 \ge \sigma_1 \ge \ldots$和任意整数 $n \ge 0$，都有

$$c\,\sigma^*_{Cn} \le e_n^*(\sigma) \le g_n^*(\sigma) \le C\sigma^*_{\lfloor cn \rfloor}.$$

从这个意义上说，给定逼近数序列 σ 时，采样数（或最小积分误差）可能出现的最坏情况始终由序列 σ^*描述。如果 σ按 $\sigma_n \asymp \sigma_{2n}$的意义正则递减，则可得

$$g_n^*(\sigma) \asymp e_n^*(\sigma) \asymp \sigma_n^*.$$

我们来考虑多项式衰减的情形，即 $\sigma_n \asymp n^{-\alpha}\log^{-\beta} n$。当且仅当 $\alpha > 1/2$ 或 $\alpha = 1/2$ 且 $\beta > 1/2$时，这个序列是平方可和的。在 $\alpha > 1/2$ 的情形下，可得$g_n^*(\sigma) \asymp \sigma_n^* \asymp \sigma_n$。对于多变量周期函数的再生核希尔伯特空间 H_λ，逼近数序列总是平方可和的。因此，只有在 $\alpha = 1/2$的情形下，采样数与逼近数这两个概念之间才可能存在差异。这对应于低光滑度函数空间，将在下一节中讨论。

4 低光滑度下界

本节中，我们考察若干小光滑性空间。这类空间早已在 [24] 中出现，用于刻画维纳过程的路径正则性。关于这一主题的最新结果，可参见 [17]；关于具有对数光滑度的函数空间的全面论述，可参见 [6]。这些空间对我们特别重要，因为

- 这是逼近数与采样数之间可能存在渐近差距的唯一情形，见第 3.3 节。
- 标准的隆起函数技术无法得到最优下界，见第 2.1 节。

在 [13], 中，我们得到了结合分数阶光滑性$1/2$ 和对数光滑度的一元索博列夫空间下界。我们希望将这些结果推广到多元情形。在多变量情形下，存在不同的光滑度尺度，它们是对一元光滑度尺度的推广。我们考虑各向同性光滑性空间和混合光滑性空间。

4.1 各向同性光滑性

对于各向同性光滑性，我们考虑如下形式的序列

$$\lambda_k = (1+|k|)^{-d}\log^{-2\beta}(e+|k|), \quad k\in\mathbb{Z}^d, \quad \beta>1/2, \tag{19}$$

其中，$|\cdot|$ 表示 $\mathbb{Z}^d$上的欧几里得范数。该序列是 $|\cdot|$-递减的，因此我们可以应用定理 4 得到以下结果。回顾一下，逼近数和采样数定义于第 3.3 节。

推论 4. 设 λ 由（19）给出。则

$$a_n(H_\lambda) \asymp n^{-1/2}\log^{-\beta} n$$

and

$$e_n(H_\lambda) \asymp g_n(H_\lambda) \asymp n^{-1/2}\log^{-\beta+1/2} n.$$

证明。回顾一下，$a_n(H_\lambda)^2$ 是 λ中第（$n+1$）大的元素。我们有

$$\#\{k\in\mathbb{Z}^d\colon \lambda_k\ge\varepsilon\} \asymp \varepsilon^{-1}\big(\log\varepsilon^{-1}\big)^{-2\beta}$$

对于 $\varepsilon\to 0^+$，这很容易推出 $a_n(H_\lambda)$的渐近行为。注意到 $e_n(H_\lambda) \le g_n(H_\lambda)$，$e_n(H_\lambda)$和 $g_n(H_\lambda)$的上界由 [5, 定理 1] 以及

$$\sum_{k\ge n} k^{-1}\log^{-2\beta} k \asymp \log^{-2\beta+1} n. \tag{20}$$

下界由定理 4 和（20）推出，因为条件 $|2k|>r_n$ 只从定理 4 的下界求和中排除了 $\mathcal{O}(n)$个逼近数。 □

我们指出，无需做太多额外工作，命题 1 中的范数刻画可以推广到 H_λ，其中 λ 由 (19) 给出。在这种情况下，我们需要高阶差分，其对 h、$x\in\mathbb{R}^d$ 的定义如下：

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x+h)-f(x), \quad \Delta_h^{j+1} f(x) = \Delta_h^1(\Delta_h^j f)(x), \quad j\ge 1.$$

Usin采用这一记号，命题 1 的多变量对应形式如下。

命题4. 设 $\lambda\in\ell_1(\mathbb{Z}^d)$ 由 (19) 给出，且 $M>d/2$ 为整数。那么，$f\in C([0,1]^d)$ 属于 H_λ 当且仅当

$$\|f\|_2^2 + \int_{h\colon |h|\le 1} \frac{[1-\log|h|]^{2\beta}}{|h|^{2d}}\cdot\|\Delta_h^M f\|_2^2\, dh \tag{21}$$

有限。此外 ，$\|f\|_{H_\lambda}^2$ 等价于 (21)，且常数与 $f\in C([0,1]^d)$ 无关。 .

证明与命题 1 的证明非常相似，因此我们省略较为技术性的细节，另见 [6, 定理 10.9], ，其中可以找到对定义在整个 $\mathbb{R}^d$ 上的函数空间更一般的刻画。请注意，与单变量情形 (10) 不同——其中 h 取自单位区间 (0, 1)——我们现在在 (21) 中考虑来自 $\mathbb{R}^d$. 单位球的所有方向 h 。与单变量情形类似，用命题4代替命题 1，可以证明，鼓包函数技术不足以证明推论 4 中 H_λ 上的下界 e_n。

开放问题 2。最近，在 [11] 中也发现，索博列夫空间上的数值积分最坏情形误差的上界与下界之间存在对数间隙；这里的函数定义在单位球面 $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$. 上。正如 [11], 中已经猜想的那样，我们也认为现有的下界可以改进。遗憾的是，我们的结果无法直接应用于这种情形，因为这些函数空间中函数的范数是根据其在球谐函数标准正交基下的分解来定义的，而不是根据三角系统来定义的。不过，或许可以通过以下方式将我们的结果推广到球面：

- 这表明，推论 4 给出的下界对函数子空间 H_λ° 同样成立，其中这些函数在 (0,1) 上具有紧支撑^d 并且

- 利用单位分解和空间 H_λ° 的提升，建立球面上广义光滑空间的等价刻画，这与 [35, 第 27], 节类似

或者，也可以直接利用定理 2，并更仔细地考察球面上索博列夫空间核的平方（和）。对于第一种方法，命题4或许有所帮助。对于第二种方法，论文 [9] 或许值得参考。

4.2 混合光滑性

我们考虑具有较小混合光滑性的空间。该空间定义为第 2.1 节中单变量混合光滑性空间的 d 重张量积。由此得到的空间 H_λ 满足

$$\lambda_k \;=\; \prod_{j=1}^{d} (1+|k_j|)^{-1} \log^{-2\beta}(e+|k_j|), \quad k \in \mathbb{Z}^d, \quad \beta > 1/2. \tag{22}$$

这里， λ 并非范数递减，因此我们无法使用定理 4。不过，事实证明，在这种情况下，单变量空间给出的下界已经是尖锐的。 $d > 1$ 的逼近数具有与情形 $d = 1$相同的渐近行为。

定理 5. 设 λ 由 (22) 给出。则

$$a_n(H_\lambda) \;\asymp\; n^{-1/2} \log^{-\beta} n.$$

这与混合光滑性空间 $s > 1/2$形成鲜明对比；在这些空间中， $d > 1$ 的逼近数的收敛速度低于 $d = 1$的逼近数，参见例如 [7, 定理 4.45]。定理 5 的证明基于以下组合引理，这与[22, 引理 3.2]形成对比。对于 $r \geq 1$ 和 $d \in \mathbb{N}$，我们记

$$M(r,d) \;:=\; \left\{ (n_1,\dots,n_d) \in \mathbb{Z}^d \,\middle|\, \prod_{j=1}^{d} (1+|n_j|) \log^{2\beta}(e+|n_j|) \leq r \right\}$$

以及 $N(r,d) \;= \#M(r,d)$。

引理 1. 对于固定的 $d \in \mathbb{N}$,

$$N(r,d) \;\lesssim\; r \log^{-2\beta}(e+r).$$

证明。我们通过归纳法证明该命题。显然，该命题对 $d = 1$ 成立。设 $d > 1$ ，并假设该命题对 N（r, $d-1$）成立。则

$$\begin{aligned} N(r,d) &= \sum_{n \in M(r,1)} N\left(\frac{r}{(1+|n|)\log^{2\beta}(e+|n|)}, d-1 \right) \\ &\lesssim \sum_{n \in M(r,1)} \frac{r}{(1+|n|)\log^{2\beta}(e+|n|)} \log^{-2\beta}\left(e + \frac{r}{(1+|n|)\log^{2\beta}(e+|n|)} \right). \end{aligned}$$

在 $|n| \le \sqrt{r}$ 的情况下，我们有

$$\log^{-2\beta}\left(e + \frac{r}{(1+|n|)\log^{2\beta}(e+|n|)}\right) \lesssim \log^{-2\beta}(e+r)$$

因此

$$\sum_{|n|\le\sqrt{r}} \frac{r}{(1+|n|)\log^{2\beta}(e+|n|)} \log^{-2\beta}\left(e + \frac{r}{(1+|n|)\log^{2\beta}(e+|n|)}\right)$$
$$\lesssim r\log^{-2\beta}(e+r)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|n|)\log^{2\beta}(e+|n|)} \lesssim r\log^{-2\beta}(e+r).$$

在 $|n| \ge \sqrt{r}$, $n \in M(r,1)$ 的情况下，我们有 $\log^{2\beta}(e+|n|) \asymp \log^{2\beta}(e+r)$，因此，

$$\sum_{|n|\ge\sqrt{r}} \frac{r}{(1+|n|)\log^{2\beta}(e+|n|)} \log^{-2\beta}\left(e + \frac{r}{(1+|n|)\log^{2\beta}(e+|n|)}\right)$$
$$\lesssim \int_{\sqrt{r}}^{Cr\log^{-2\beta}(e+r)} \underbrace{\frac{r}{n\log^{2\beta}(e+r)}}_{=:u} \log^{-2\beta}\left(e + \frac{r}{n\log^{2\beta}(e+r)}\right) dn$$
$$\le \int_{1/C}^{\infty} u\log^{-2\beta}(e+u)\,\frac{r\log^{-2\beta}(e+r)}{u^2}\,du \lesssim r\log^{-2\beta}(e+r).$$

□

定理 5 的证明。逼近数序列 $a_{n,d} := a_n(H_\lambda, L_2)$ 是序列 $(\sqrt{\lambda_k})_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 的递减重排。令 $\lambda_0 = 1$，我们得到 $a_{n,d} \ge \sqrt{\lambda_{(n,0,\dots,0)}}$，下界显然成立。上界由引理 1 得出。给定 $n \ge 3$，我们选择 $r = r(n) \asymp n\log^{2\beta} n$，使得 $N(r,d) \le n$。由于

$$N(r,d) = \#\{k\in\mathbb{Z}^d \mid \lambda_k \ge r^{-1}\} = \#\{m\in\mathbb{N}_0 \mid a_{m,d} \ge r^{-1/2}\}$$

我们有 $a_{n,d} < r(n)^{-1/2}$，命题得证。 □

开放问题 3。确定所谓的渐近常数将会很有意义

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n(H_\lambda)}{n^{1/2}\log^\beta n} \qquad \text{and} \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n(H_\lambda)}{n^{1/2}\log^\beta n}$$

在具有对数扰动的混合光滑性 $1/2$ 情况下。与定理 5 相反，渐近常数可能揭示渐近衰减对维数 d 的依赖关系。混合光滑性 $s > 1/2$ 的渐近常数已在 [22] 中确定。与更高光滑性相比，具有对数扰动的混合光滑性 $1/2$ 的渐近常数不可能作为 d 的函数衰减。

现在，我们立即得到带有对数扰动的混合光滑性空间上的采样数和积分误差的行为 $1/2$。

定理 6。设 λ 由（22）给出。则

$$g_n(H_\lambda) \asymp e_n(H_\lambda) \asymp n^{-1/2}\log^{-\beta+1/2} n.$$

证明。上界由定理 5 和 [5, 推论 2]得出。下界的证明基本上是从一维情形移植而来的。为此，我们用 $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 表示（6）中引入的序列。注意， $\overline{\lambda}_k = \lambda_{ke_1}$，其中 $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ 是第一个标准单位向量。现在要证明数值积分 INT 的下界，设 Q_n 是定义在 H_λ 上的一个求积公式，其节点为x_1, ..., $x_n \in [0,1]^d$。对于 $x \in [0,1]^d$和 $k \le d$，令 $x^{(k)} \in [0,1]$ 表示 x 的第 k 个坐标。用$Q_n^{(1)}$表示一个求积公式，其节点为 $x_1^{(1)}$，..., $x_n^{(1)} \in [0,1]$，且权重与 Q_n相同。根据推论 4 或 [13, 定理 4]，存在一个函数 $f^{(1)}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$，属于 $H_{\overline{\lambda}}$ 的单位球，使得

$$\left| Q_n^{(1)}(f^{(1)}) - \int_0^1 f^{(1)}(x)\,dx \right| \gtrsim n^{-1/2} \log^{-\beta+1/2} n.$$

函数

$$f\colon [0,1]^d \to \mathbb{C}, \quad f(x) = f^{(1)}(x^{(1)})$$

包含在 H_λ的单位球中，并满足 $Q_n(f) = Q_n^{(1)}(f^{(1)})$ 和 $\int_{[0,1]^d} f(x)\,dx = \int_0^1 f^{(1)}(x)\,dx$。因此，

$$\left| Q_n(f) - \int_{[0,1]^d} f(x)\,dx \right| \gtrsim n^{-1/2} \log^{-\beta+1/2} n.$$

□

开放问题 4。由于 [5, 推论 2] 仅是一个存在性结果，定理 6 中积分误差的上界并非构造性的，也没有告诉我们如何最优地选择求积点。 [19, 36] 的结果表明，以高概率而言， $\mathcal{O}(n\log n)$ 个独立同分布的均匀求积点足以达到 $e_n(H_\lambda)$ 量级的误差。对于各向同性光滑性 $s > d/2$，已知 $\mathcal{O}(n)$ 个这样的点就足够了，参见 [21], 。由此引出一个问题：对于族 H_λ、 $\lambda \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$ 中的其他空间，是否也同样成立?

5 高光滑度下的下界

我们在第 4 节讨论过，如果序列 $\lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 较大，也就是说它几乎是平方可和的，那么隆起函数技巧无法为定义 1 中引入的 H_λ 函数的数值积分给出最优下界。很自然地，在另一个极端情形下，这种技巧也会失效——即序列 λ 衰减得非常快时。此时，空间 H_λ 只包含解析函数，因此根本不含任何紧支撑的鼓包函数。

解析函数的函数空间有着悠久的历史。尽管如此，能否利用这些函数空间来避免数值积分与逼近中的维数灾难，仍是一个活跃的研究问题。基于 [31], 的技巧，较近期的论文 [23] 和 [16] 给出了这类函数的数值积分下界，且未使用任何隆起函数。在本文中，我们证明了一类解析函数存在维数灾难，这与 [10] 的一项近期结果有关。论文 [10], 表明，定义在.....上的积分问题

$$F_d^1 = \left\{ f \in L_2([0,1]^d) \,\middle|\, \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\hat{f}(k)| \cdot g(\|k\|_\infty) \le 1 \right\}$$

对于增长极其缓慢的函数 g，也已经是多项式可处理的： $\mathbb{N}_0 \to (0,\infty)$，即对于$g(k) = \max(1,\log(k))$。我们通过证明以下结果来对比这一非常好的结论：如果在 F_d^1.的定义中，将 $|f(k)|$替换为$|\hat{}f(k)|^2$，那么对于本质上任何非平凡函数 g，积分问题^都会遭受维数灾难。

定理 7. 设 $d \geq 2$，并令 $g\colon \mathbb{N}_0 \to [0,\infty]$ 为任意满足 $g(2) \leq \tau < \infty$ 的非递减函数。若$4n-1 \leq 3^d$，则在该类上的数值积分最坏情形误差

$$F_d^2 \;=\; \left\{ f \in L_2([0,1]^d) \,\middle|\, \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\hat{f}(k)|^2 \cdot g(\|k\|_\infty) \leq 1 \right\}$$

满足 $e_n(F_d^2)^2 \geq 1/(2\tau)$。因此，数值积分在函数类 F_d^2. 上会遭遇维数灾难

证明。我们将函数类 F_d^2 与 H_λ等同，其中 $\lambda_k = 1/g(\|k\|_\infty)$。然后直接应用定理 3，得到

$$e_n(F_d^2)^2 \geq \lambda_0 \left(1 - \frac{2n\lambda_0}{\lambda_0 + \sum_{k\in\{-1,0,1\}^d} \lambda_{2k}}\right) \geq \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{2n}{1+3^d}\right) \geq \frac{1}{2\tau}.$$

□

我们还给出了解析函数的渐近下界。为简洁起见，我们只写出单变量情形。回顾一下，如果序列 λ 几何衰减，那么 H_λ 中的所有函数都是解析函数；在这种情况下，不可能通过凸起函数技术证明关于 $e_n(H_\lambda)$的下界。因此，我们写出使用舒尔技巧得到的下界。不过，我们注意到，在这种情况下，也可能使用来自 [31]的技术证明类似的下界。

推论 5。设对于某个 $c>0$、 $\omega > 1$ 以及所有 $k \in \mathbb{Z}$，有 $\lambda_k \geq c\,\omega^{-|k|}$。那么

$$e_n(H_\lambda)^2 \;\geq\; \frac{c}{2} \cdot \min\left\{1, \frac{\omega^{-4n}}{4n} \cdot \frac{1}{1-\omega^{-1}}\right\}.$$

证明。由推论 2 可立即得出。 □

参考文献

[1] N. Aronszajn，关于再生核的理论，《美国数学会汇刊》68，337–404，1950年。

[2] N. S. Bakhvalov，关于重积分的近似计算，《复杂性杂志》31(4)，502–516，2015年；译自 N. S. Bakhvalov 的文章，刊于《莫斯科大学学报》，数学、力学、天文学、物理学、化学系列 4，3–18，1959年，俄文。

[3] N. K. Bary，《三角级数论》，第 I 卷，Pergamon Press 出版书，The Macmillan Company，纽约，1964年。

[4]A. Berlinet 和 C. Thomas-Agnan，《概率与统计中的再生核希尔伯特空间》，克吕维尔学术出版社，波士顿，2004年

[5] M. Dolbeault、D. Krieg 和 M. Ullrich，《 L_2中的采样数的一个精确上界》，《应用与计算调和分析》63，113–134，2023年。

[6] O. Dom´ınguez 和 S. Tikhonov，《对数光滑函数空间：嵌入与刻画》，《美国数学会回忆录》282，第1393号，2023年。

[7] D. D˜ung、V. Temlyakov 和 T. Ullrich，《双曲十字逼近》，高级数学课程，巴塞罗那 CRM。Birkh¨auser/Springer，Cham，2018。

[8] A. Ebert和F. Pillichshammer，《最坏情形设定下加权 Korobov 空间中逼近的可处理性——完整图景》，《复杂性杂志》67，101571，2021年。

[9] G. Gasper, 《雅可比多项式乘积的线性化 I》, 《加拿大数学杂志》22, 171–175, 1970年。[10] T. Goda, 《绝对收敛傅里叶级数无权函数空间中的积分多项式可处理性》, 即将发表于《美国数学会会刊》。[11] P. J. Grabner和T. A. Stepanyuk, 《任意维球面上的数值积分误差上界与下界》, 《复杂性杂志》53, 113–132, 2019年。[12] A. Hinrichs、D. Krieg、E. Novak和J. Vyb´ıral, 《希尔伯特空间中求积公式误差的下界》, 《复杂性杂志》65, 101544, 2021年。[13] A. Hinrichs、D. Krieg、E. Novak和J. Vyb´ıral, 《 L_2中的积分与恢复下界》, 《复杂性杂志》72, 101662, 2022年。[14] A. Hinrichs、E. Novak和J. Vyb´ıral, 《线性信息与 L_2-逼近中的函数求值》, 《逼近理论杂志》153(1), 97–107, 2008年。[15] A. Hinrichs和J. Vyb´ıral, 《关于正定正定函数与博赫纳定理》, 《复杂性杂志》27, 264–272, 2011年。[16] C. Irrgeher、P. Kritzer、G. Leobacher和F. Pillichshammer, 《解析函数的埃尔米特空间中的积分》, 《复杂性杂志》31(3), 380–404, 2015年。[17] H. Kempka、C. Schneider和J. Vyb´ıral, 《布朗运动与布朗片的路径正则性》, 即将发表于《构造逼近》。[18] D. Krieg, 《无权函数类上的采样恢复可处理性》, arXiv:2304.14169, 2023年。[19] D. Krieg和M. Ullrich, 《函数值足以实现 L_2-逼近》, 《计算数学基础》21, 1141–1151, 2021年。[20] D. Krieg和M. Ullrich, 《函数值足以实现 L_2-逼近, 第二部分》, 《复杂性杂志》66, 101569, 2021年。[21] D. Krieg和M. Sonnleitner, 《随机点是逼近索博列夫函数的最优选择》, 即将发表于《IMA数值分析杂志》。[22] T. K¨uhn、W. Sickel和T. Ullrich, 《d维环面上混合阶索博列夫函数的逼近：渐近性、预渐近性及对d的依赖性》, 《构造逼近》42(3), 353–398, 2015年。[23] F. Y. Kuo、I. H. Sloan和H. Wo´zniakowski, 《高斯核解析函数的多元积分》, 《数学计算》86, 第304期, 829–853, 2017年。[24] P. L´evy, 《随机变量加法理论》, 《概率论专著; 概率论及其应用》, 由E. Borel主编, 第1号。巴黎：Gauthier-Villars, 1937年。[25] N. Nagel、M. Sch¨afer和T. Ullrich, 《采样数的一个新上界》, 《计算数学基础》22(2), 445–468, 2022年。[26] E. Novak, 《数值分析中的确定性与随机误差界》, 《数学讲义》1349, 施普林格出版社, 柏林, 1988年。[27] E. Novak和H. Triebel, 《利普希茨区域中的函数空间与采样的最优收敛率》, 《构造逼近》23, 325–350, 2006年。

[28] E. Novak 和 H. Wo´zniakowski，《积分与差异度的不可处理性结果》，《复杂性杂志》17(2)，388–441，2001年。[29] E. Novak 和 H. Wo´zniakowski，《多元问题的可处理性》，第一卷：线性信息，欧洲数学学会，苏黎世，2008年。[30] E. Novak 和 H. Wo´zniakowski，《多元问题的可处理性》，第二卷：泛函的标准信息，欧洲数学学会，苏黎世，2010年。[31] I. H. Sloan 和 H. Wo´zniakowski，《多重积分的一项不可处理性结果》，《数学计算》66，1119–1124，1997年。[32] V. N. Temlyakov，《周期函数逼近》，计算数学与分析丛书，Nova Science Publishers, Inc.，纽约州科马克，1993年。[33] V. N. Temlyakov，《关于 L_2 中的最优恢复》，《复杂性杂志》65，101545，2020年。[34] J. F. Traub、G. W. Wasilkowski 和H. Wo´zniakowski，《基于信息的复杂性》，Academic Press，纽约，1988年。[35] H. Triebel，《函数空间理论 II》，Birkhäuser Verlag，巴塞尔，1992年。[36] M. Ullrich，《高概率下 L_2-逼近的最小二乘算法的最坏情形误差》，《复杂性杂志》60，101484，2020年。[37] J. Vyb´ıral，《膨胀算子与采样数》，J. Funct. Spaces Appl. 6，17–46，2008年。[38] J. Vyb´ıral，《舒尔乘积定理的一种变体及其应用》，Adv. Math. 368，107140，2020年。