arXiv:2302.02640v1 [math-ph] 6 Feb 2023

给定磁化强度所产生的磁势和杂散场能量的一个简单公式

Tahar Zamene BOULMEZAOUD[1,2]

Abstract. 本文的主要目标是推导并证明一个简单且易于处理的公式，用于计算微磁学问题中的杂散场能。该公式基于 Arar-Boulmezaoud 函数展开。即使磁化强度的大小并非常数，或样品在几何上并非有界，该公式仍然成立。本文还介绍了该公式的一项直接而重要的应用，即一种用于计算杂散场能的快速求和技术。本文证明了该技术的收敛性，并通过多次数值实验验证了其效率。

Contents

1. 引言 1 2. Arar-Boulmezaoud 函数概述 4 3. 第一个主要结果：公式 6 4. 第二个主要结果：一种计算杂散场能量的新方法 9 5. 实现与计算测试 13 6. 结论与展望 18 参考文献 22

1. Introduction

磁性微结构的描述与理解通常基于 Landau和Lipschitz 理论 [28] （另见 [16]），该理论通过使总自由能最小化来建立（例如参见 [23], [33], [26] 和 [30]）：

$$(1)\quad E_{tot}(M) = \alpha \int_\Omega |\nabla M|^2 dx + \int_\Omega \phi(M) dx - \frac{1}{2}\int_\Omega H_d.J dx - \int_\Omega H_{ex}.J dx + E_s,$$

[1] 巴黎-萨克雷大学，UVSQ，LMV，法国凡尔赛。[2] 维多利亚大学数学与统计学系，加拿大不列颠哥伦比亚省维多利亚。*E-mail address*: tahar.boulmezaoud@uvsq.fr.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 35J47, 35J15 , 35C10, 35C20 .

*Key words and phrases.*微磁学，Landau–Lifshitz方程，杂散场，Arar- Boulmezaoud函数。

其中，Ω为样品（或磁性体），α 为交换刚度（正）常数，ϕ 为描述结构各向异性的函数，H_{ex} 为外场，H_d 为磁性体自身产生的杂散场（或退磁场），E_s 为其余能量之和（如磁致伸缩自能和磁弹相互作用能）。磁极化强度J 由公式 $J = \mu_0 M$给出，而杂散场 H_d 与 M 之间满足以下方程:

$$\mathbf{curl}\, H_d = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3,\ \operatorname{div}(\mu_0(H_d + M\chi_\Omega)) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3, \tag{2}$$

其中 χ_Ω 表示样品的特征函数。

磁化强度 M 通常受到海森堡-魏斯约束

$$|M| = M_s \text{ a. e. in } \Omega, \tag{3}$$

其中 M_s 是自发饱和磁化强度，假设其为常数（通常取决于温度）。尽管读者可以假设 M 满足这一约束，但我们将看到，这并非本文所述主要结果成立的必要条件；对 M 施加弱得多的约束便已足够（见下文假设（$\mathscr{H}_2$））。

在文献中，人们非常关注由退磁场 H_d产生的杂散场能的计算:

$$\mathscr{E}_{sf}(M) := -\frac{\mu_0}{2}\int_\Omega H_d.M dx. \tag{4}$$

根据方程（2），H_d 无旋，因此可以写成以下形式

$$H_d = -\nabla U \tag{5}$$

（见 [22]），其中 U 是磁势，它是全空间中泊松方程的解:

$$\Delta U = \operatorname{div}(M\chi_\Omega) \text{ in } \mathbb{R}^3. \tag{6}$$

杂散场能可表示为

$$\mathscr{E}_{sf}(M) = \frac{\mu_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U|^2 dx = \frac{\mu_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |H_d|^2 dx. \tag{7}$$

计算杂散场能（7）是微磁学中最具挑战性的问题之一（参见，例如，[23] 和 [33]）。其困难主要源于杂散场能的非局部性。目前有多种方法可以有效计算这一能量。其中一些方法基于求解椭圆型偏微分方程（6），所采用的方法包括有限差分法（参见，例如，[7], [38], [2]）、有限元法（参见，例如，[20, 25], [6], [17]）或反向有限元法（[10], [14], [12, 13], [8], [15], [24] 和 [13]）。其他方法则基于利用积分公式计算 U（参见，例如，[9], [29], [32], [19], [37], [27]）：

$$U(x) = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{(y-x).M(y)}{|y-x|^3} dy. \tag{8}$$

本文的主要目标是建立以下公式

$$\mathscr{E}_{sf}(M) = \frac{\mu_0}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{4(k+1)^2 - 1} \sum_{\alpha \in \Lambda_k} \left(\int_\Omega M . \nabla \mathscr{W}_\alpha dx \right)^2, \tag{9}$$

其中，$(\mathscr{W}_\alpha)_\alpha$ 表示在 [5] 和 [11]中引入的 Arar-Boulmezaoud 函数 [1] 。这些函数及其性质将在第 2 节中介绍。我们还证明了以下磁势公式

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha \in \Lambda_k} \frac{4}{4(k+1)^2 - 1} \left(\int_\Omega M . \nabla \mathscr{W}_\alpha dx \right) \mathscr{W}_\alpha. \tag{10}$$

正如我们将看到的，另一个附带结果涉及杂散场能量 (7) 的近似。更准确地说，对公式 (9) 作截断可得到近似

$$\mathscr{E}_{sf}^N(M) = \frac{\mu_0}{2} \sum_{k=0}^{N} \frac{4}{4(k+1)^2 - 1} \sum_{\alpha \in \Lambda_k} \left(\int_\Omega M . \nabla \mathscr{W}_\alpha dx \right)^2, \tag{11}$$

当 $M.n = 0$ 时，我们得到估计

$$0 \leqslant \mathscr{E}_{sf}(M) - \mathscr{E}_{sf}^N(M) \leqslant C N^{-2} \| \operatorname{div} M \|_{L^2(\Omega)}. \tag{12}$$

对上述公式感兴趣但不关心证明细节的读者，可以接受 (9) 对任意连通开集 Ω（不一定有界）以及满足以下条件的任意（可测）向量场 M 均成立。

$$\int_\Omega |M|^2 dx < +\infty$$

然而，当样品 Ω 具有有限体积，且 M 满足海森堡-魏斯约束 (3) 时，显然满足后一条件。

本文其余部分的组织如下。第 2 节介绍 Arar-Boulmezaoud 函数，这是本文的关键组成部分，并列出其最有用的性质。这些性质基本上都是已知的，因此第 2 节不主张具有原创性。构成本文主要成果的公式将在第 3 节中给出并加以证明。第 4 节提出并分析一种利用这些公式计算能量的新方法，特别是证明该方法的收敛性。第 5 节通过若干示例重点介绍计算测试。最后一节为结论。

[1] 尽管这些函数是 N. Arar 和作者在 [5]，发现的，但这一名称并非作者所取，而是一位审阅者为 [11] 中的一篇文章提出的；该审阅者要求采用这一名称。

2. Overview of Arar-Boulmezaoud functions

在 [5], Arar 与作者介绍了一族多维有理函数和拟有理函数（$\mathscr{W}_\alpha$），事实证明，这族函数特别适合用于求解无界空间区域中的二阶椭圆方程（参见 [11]）。这主要得益于它们的完备性、正交性质以及在远距离处的行为。

在 $\mathbf{R}^3$ 中定义这些函数，需要使用 $\mathbf{R}^4$ 的单位球面上的球谐函数以及立体投影（四维球谐函数不如 $\mathbf{S}^2$ 上，即 $\mathbf{R}^3$ 的单位球面上的球谐函数常见）。对于每个整数 $k \geqslant 0$，$\mathbf{H}_k$ 将是单位球面上次数为 k 的球谐函数空间（例如参见 [34], [31], [35], [36], [21]）：

$$\mathbb{S}^3 := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| = 1\}$$

（$\mathbf{S}^3$ 上次数为 k 的球谐函数，是 $\mathbf{R}^4$ 上次数为 k 的调和齐次多项式在 $\mathbf{S}^3$ 上的限制）。我们知道

$$\dim \mathbb{H}_k = (k+1)^2 \text{ for all } k \geqslant 0. \tag{13}$$

为了构造 $\mathbf{H}_k$ 的正交基，我们令

$$\Lambda = \{(i,\ell,m) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{Z} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant i \text{ and } -\ell \leqslant m \leqslant \ell\},$$

并对每个整数 $k \geqslant 0$

$$\begin{aligned} \Lambda_k &= \{(i,\ell,m) \in \Lambda \mid i = k\}, \\ \Lambda_k^\star &= \textstyle\bigcup_{i=0}^k \Lambda_i. \end{aligned}$$

如果 $\alpha = (k,\ell,m)$ $\beta = (k',\ell',m') \in \Lambda$，那么 $\delta_{\alpha,\ \beta}$ 表示 α, β 的通常克罗内克符号，即 $\delta_{\alpha,\ \beta} = \delta_{k,\ k'}\delta_{\ell,\ \ell'}\delta_{m,\ m'}$. 将 $\mathbf{S}^3$ 的球坐标定义为三元组 (ϕ,θ,χ)，使得 $0 \leqslant \phi < 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \chi \leqslant \pi$ 并且

$$\xi = (\sin\theta\cos\phi\sin\chi, \sin\theta\sin\phi\sin\chi, \cos\theta\sin\chi, \cos\chi), \tag{14}$$

$\mathbf{S}^3$ 上的球谐函数定义如下：

$$\mathscr{Y}_\alpha(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a_{k,\ell}}}(\sin\chi)^\ell T_{k+1}^{(\ell+1)}(\cos\chi) Y_{\ell,m}(\phi,\theta), \text{ for } \alpha = (k,\ell,m) \in \Lambda. \tag{15}$$

Here

- $(T_k)_{k\geqslant 0}$ designate Chebyshev polynomials of the first kind satisfying

$$\cos(k\theta) = T_k(\cos\theta) \text{ for } \theta \in \mathbb{R},$$

- $(Y_{\ell,m})_{\ell,m}$ are the usual real spherical harmonics on $\mathbb{S}^2$:

$$Y_{\ell,m}(\phi,\theta) = \eta_\ell K_\ell^{|m|}(\cos\theta) y_m(\phi) \tag{16}$$

其中

$$y_m(\phi) = \begin{cases} \cos(m\phi) & \text{if } m \geqslant 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \text{if } m = 0, \\ \sin(|m|\phi) & \text{if } m \leqslant -1, \end{cases} \tag{17}$$

$$\eta_\ell = \sqrt{\frac{2\ell+1}{2\pi}}, \tag{18}$$

and

$$K_\ell^m(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(x), \quad \text{for } -\ell \leqslant m \leqslant \ell \tag{19}$$

（因此， $K_\ell^{-m} = (-1)^m K_\ell^m$）。这里，$(P_\ell^m)_{\ell,\ m}$ 表示如下定义的相关勒让德函数:

$$P_\ell^m(t) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!}(1-t^2)^{m/2}\frac{d^{\ell+m}}{dt^{\ell+m}}(t^2-1)^\ell, \ -\ell \leqslant m \leqslant \ell$$

（有些作者省略 $(-1)^m$ 因子，该因子通常称为 Condon–Shortley 相位；也有些作者将其附加在 $Y_{\ell,m}$ 的定义中）。我们还采用约定 $P_\ell^m = 0$ 和 $K_\ell^m = 0$，其中 $|m| > \ell$。

– $(a_{k,\ell})$ 是归一化常数，定义为

$$a_{k,\ell} = \frac{(k+1)\pi}{2}\frac{(k+\ell+1)!}{(k-\ell)!}. \tag{20}$$

以下性质成立

- 对于所有 $k \geqslant 0$，$(\mathscr{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda_k}$ 是 H_k 的一组基。
- 对于所有 $\alpha, \beta \in \Lambda$

$$\int_{\mathbb{S}^3} \mathscr{Y}_\alpha(\xi)\mathscr{Y}_\beta(\xi)dS(\xi) = \delta_{\alpha,\beta}. \tag{21}$$

- 对于所有的 $k \geqslant 0$ 和 $\alpha \in \Lambda_k$,

$$-\Delta_S \mathscr{Y}_\alpha = k(k+2)\mathscr{Y}_\alpha,$$

其中， Δ_S 是单位球面 S^3上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。用球坐标表示，该算子定义为

$$\frac{1}{\sin^2\chi}\left\{\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^2\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\}.$$

在三维情形下（这是我们在此唯一关注的情形），Arar-Boulmezaoud 函数定义如下（参见 [5] 和 [11]）：对于任意 $\alpha \in \Lambda$

$$\mathscr{W}_\alpha(x) = \left(\frac{2}{|x|^2+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathscr{Y}_\alpha(\pi^{-1}(x)). \tag{22}$$

这里， π 表示定义在 $\mathsf{S}^3_\star = \mathsf{S}^3 - \{(0,\cdots,0,1)$ 上的立体投影，其定义为

$$\begin{aligned} \pi \ : \ \mathbb{S}^3_\star &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \xi &\longmapsto (\frac{\xi_1}{1-\xi_4}, \frac{\xi_2}{1-\xi_4}, \frac{\xi_3}{1-\xi_4}). \end{aligned}$$

其逆映射为

$$\begin{aligned}\pi^{-1} \ : \ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{S}^3_\star \\ x &\longmapsto \left(\frac{2x_1}{|x|^2+1}, \frac{2x_2}{|x|^2+1}, \frac{2x_3}{|x|^2+1}, \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}\right).\end{aligned}$$

函数 $(\mathscr{W}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 由 Arar 与作者在 [5] 研究 R^n 中加权拉普拉斯算子的谱时发现。在附录 B 的表 6 中，首批函数 $(\mathscr{W}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 的表达式已明确给出。由此可见，这些函数具有有理性。这是一个一般性质，稍后将予以说明。关于更高维情形以及 $n=1$ 或 $n=2$，还可参阅 [5] 和 [11]。

在下面的命题中，我们总结函数 $(\mathscr{W}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$的一些有用性质。其证明可参阅 [5] 和 [11]。

命题 2.1. 设 $k\geqslant 0$ 为整数且 $\alpha\in\Lambda_k$。那么，

– 我们有

$$-\Delta\mathscr{W}_\alpha = \frac{(2k+1)(2k+3)}{(|x|^2+1)^2}\mathscr{W}_\alpha, \tag{23}$$

– 存在 $k+1$ 个多项式函数 $p_0,\cdots,p_k$，使得:

$$\mathscr{W}_\alpha(x) = \sum_{i=0}^{k}\frac{p_i(x)}{(|x|^2+1)^{i+1/2}}, \tag{24}$$

其中，对于每个 $i\leqslant\ell$， p_i 的次数小于或等于 i，

– 对所有 $\beta\in\Lambda$

$$\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathscr{W}_\alpha(x)\mathscr{W}_\beta(x)}{(|x|^2+1)^2}dx = \frac{1}{4}\delta_{\alpha,\beta}, \tag{25}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\mathscr{W}_\alpha(x).\nabla\mathscr{W}_\beta(x)dx = \frac{(2k+1)(2k+3)}{4}\delta_{\alpha,\beta}. \tag{26}$$

正交恒等式 (25) 和 (26) 是 Arar-Boulmezaoud 函数最重要的性质之一，正如我们稍后将看到的那样。更具体地说，这些关系将成为本文所给公式及其所得数值近似的基石。

至此，我们对函数 $(\mathscr{W}_\alpha)$ 的性质进行了首次列举。稍后我们还需要其他性质，尤其是用于计算梯度的性质（见第 5.1 段）。

3. The first main result: the formulas

本文的目标是证明引言中提出的公式（9）和（10）。下一节将利用这些公式提出一种计算杂散场能量的新方法。不过，在陈述第一个主要结果之前，先介绍一下本文所用基础函数框架的相关知识是恰当的。特别是，我们将证明

方程（6）的适定
性。

此处及下文中，我们假设

($\mathscr{H}_1$) 材料填充一个连通开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$，其边界为 Lipschitz 边界，

($\mathscr{H}_2$) 磁化场 M 定义在 Ω 上，且可测，并满足 es

$$\int_\Omega |M|^2 dx < \infty, \tag{27}$$

即 $M \in L^2(\Omega)^3$。

假设 ($\mathscr{H}_2$) 显然成立，只要 $|M|$ 满足海森堡-魏斯约束 (3)，且 $|\Omega| < \infty$，因为

$$\|M\|^2_{L^2(\Omega)^3} = \int_\Omega |M|^2 dx = |M|^2 |\Omega| < +\infty.$$

尽管如此，我们既不假设 Ω 有界，也不假设 $|M|$ 满足海森堡-魏斯约束 (3)。这里只需要假设 ($\mathscr{H}_1$) 和 ($\mathscr{H}_2$)。

现在我们引入一些加权函数空间。对于所有整数 $\ell \in \mathbb{Z}$ 和 $m \geqslant 0$，$W^m_\ell(\mathbb{R}^3)$ 表示满足以下条件的函数空间 v

$$\forall |\lambda| \leqslant m,\ (1+|x|^2)^{(\ell+|\lambda|-m)/2} D^\lambda v \in L^2(\mathbb{R}^3).$$

该空间赋予范数

$$\|v\|_{W^m_\ell(\mathbb{R}^3)} = \Big(\sum_{|\lambda|\leqslant m} \int_{\mathbb{R}^3} (|x|^2+1)^{|\lambda|+\ell-m} |D^\lambda v|^2 dx\Big)^{1/2}. \tag{28}$$

当 $m \geqslant 1$ 时，以下包含关系成立：

$$W^m_\ell(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow W^{m-1}_{\ell-1}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow W^1_{\ell-m+1}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow W^0_{\ell-m}(\mathbb{R}^3).$$

以下渐近性质对任意函数 $v \in W^m_\ell(\mathbb{R}^3)$ 均成立（参见，例如，[3]）

$$\lim_{|x|\to+\infty} |x|^{\ell-m+3/2} \|v(|x|,.)\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} = 0. \tag{29}$$

其中 $\mathbb{S}^2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的单位球面，并且

$$\|v(|x|,.)\|^2_{L^2(\mathbb{S}^2)} = \int_{\mathbb{S}^2} |v(|x|,\sigma)|^2 d\sigma. \tag{30}$$

我们来提一下 $W^1_0(\mathbb{R}^3)$ 中的以下 Hardy 型不等式（参见 [13]）：

$$\forall v \in W^1_0(\mathbb{R}^3),\ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v|^2}{|x|^2+1} dx \leqslant 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v|^2 dx. \tag{31}$$

因此，从现在起，我们将认为希尔伯特空间 $W^1_0(\mathbb{R}^3)$ 配备了标量积

$$((v,w))_{W^1_0(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla v.\nabla w dx,$$

以及相应的范数

$$|v|_{W_0^1(\mathbb{R}^3)} = |\nabla v|_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

这等价于范数 $\|.\|_{W_0^1(\mathbb{R}^3)}$。

这里，我们寻求满足以下条件的解 U of (6)：

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U|^2 dx < \infty, \tag{32}$$

本文的第一个主要结果概述如下：

定理 3.1. 假设条件 ($\mathscr{H}_1$) 和 ($\mathscr{H}_2$) 成立。则 (6) 有唯一解 $U \in W_0^1(\mathrm{R}^3)$，其表达式为

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha \in \Lambda_k} \frac{4}{(2k+1)(2k+3)} \left(\int_\Omega M.\nabla \mathscr{W}_\alpha dx \right) \mathscr{W}_\alpha, \tag{33}$$

其中，右端的级数在 $W_0^1(\mathrm{R}^3)$ 中收敛。相应的杂散场能为

$$\mathscr{E}_{sf}(U) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\mu_0}{(2k+1)(2k+3)} \sum_{\alpha \in \Lambda_k} \left(\int_\Omega M.\nabla \mathscr{W}_\alpha dx \right)^2. \tag{34}$$

此外，

(1) 我们有

$$\|(1+|x|^2)^{-1/2} U\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant 4\|M\|_{L^2(\Omega)}, \tag{35}$$

$$\mathscr{E}_{sf}(U) \leqslant \frac{\mu_0}{2} \|M\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{36}$$

(2) $U \in L^2(\mathrm{R}^3)$，$(1+|x|^2)^{1/2} \nabla U \in L^2(\mathrm{R}^3)^3$ 且

$$\|U\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|(1+|x|^2)^{1/2} \nabla U\|_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} \leqslant C_0(\Omega) \|M\|_{L^2(\Omega)}, \tag{37}$$

其中某个常数 $C_0(\Omega) > 0$ 仅取决于 Ω。

(3) 我们有

$$\lim_{|x| \to +\infty} |x|^{3/2} \|U(|x|, .)\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} = 0, \tag{38}$$

关于解 U 正则性的问题留待下一节讨论（见定理 4.4）。

证明。我们可以将方程 (6) 改写如下：求 $U \in W_0^1(\mathrm{R}^3)$，使得

$$\forall v \in W_0^1(\mathbb{R}^3), \int_{\mathbb{R}^3} \nabla U.\nabla v dx = \int_\Omega M.\nabla v dx. \tag{39}$$

解的存在性和唯一性直接由 Lax-Milgram 定理得出。估计式 (36) 是在 (39) 中取 $v = u$ in 后，对右侧应用柯西-施瓦茨不等式得到的。结合 Hardy 不等式 (31)，即可得到 (35)。

我们还有以下引理（见 [5] 和 [11]）：

引理 3.2. 族 $(\mathscr{W}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 是 $W_0^1(\mathrm{R}^2)$ 上的希尔伯特基，该空间赋予范数 $|.|_{W_0^1(\mathbb{R}^3)}$。

因此，

$$\begin{aligned} U &= \sum_{\alpha\in\Lambda} \frac{((U,\mathscr{W}_\alpha))_{W_0^1(\mathbb{R}^3)}}{((\mathscr{W}_\alpha,\mathscr{W}_\alpha))_{W_0^1(\mathbb{R}^3)}}\mathscr{W}_\alpha, \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{(2k+1)(2k+3)} \sum_{\alpha\in\Lambda_k} (\nabla U, \nabla\mathscr{W}_\alpha)_{L^2(\mathbb{R}^3)^3}\mathscr{W}_\alpha. \end{aligned}$$

将 (39) 与 (26) 结合即可得到 (33)。由于右端在 $W_0^1(\mathrm{R}^3)$ 中收敛，我们也得到 (34)。估计 (37) 可参见 [13]。因此，$U \in W_1^1(\mathrm{R}^3)$，且 (29) 在 $\ell = m = 1$ 下成立。这便得到 (38)。□

4. The second main result: a new method for calculating the stray-field energy

本节的主要目的是说明，由公式 (33) 和 (34) 可以得到一种高效且易于实现的数值方法，用于计算杂散场能。这种数值方法可视为无界区域上的谱方法。然而，与通常在有界区域上使用多项式函数或三角函数的谱方法不同，我们在此使用（准）有理函数，以确保解在远距离处衰减。事实上，根据命题 2.1，函数 $(\mathscr{W}_\alpha)_\alpha$ 除了一个乘法因子外，都是有理函数。

4.1. 方法。鉴于 (34)，通过截断求和，可以合理地近似能量 $\mathscr{E}_{sf}(U)$。为此，我们对每个 $N \geqslant 1$ 定义

$$\mathscr{E}_{sf}^N(U) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{\alpha\in\Lambda_k} \frac{2\mu_0}{(2k+1)(2k+3)} \left(\int_\Omega M.\nabla\mathscr{W}_\alpha dx\right)^2. \tag{40}$$

我们注意到

$$\mathscr{E}_{sf}^N(U) = \frac{\mu_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U_N|^2 dx, \tag{41}$$

其中

$$U_N = \sum_{\ell=0}^{N}\sum_{\alpha\in\Lambda_k} \frac{4}{(2k+1)(2k+3)} \left(\int_\Omega M.\nabla\mathscr{W}_\alpha dx\right)\mathscr{W}_\alpha. \tag{42}$$

我们再来对 U_N 作另一种解释。定义有限维空间族 $(H_N)_{N\geqslant 0}$ 如下：对于 $N \geqslant 0$，H_N 是由以下形式的函数构成的函数空间

$$v(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{p_k(x)}{(|x|^2+1)^{k+1/2}},\ x\in\mathbb{R}^3, \tag{43}$$

其中，对于每个 $k \leqslant N$， p_k 是次数小于或等于 k 的多项式。显然，

$$H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_N \subset \cdots \tag{44}$$

对于 $N \geqslant 0$，以下包含关系成立：

$$H_N \hookrightarrow W_0^1(\mathbb{R}^3). \tag{45}$$

很容易证明（例如，参见 [5]）

$$\dim H_N = \left(\begin{array}{c} 3+N \\ 3 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} N+2 \\ 3 \end{array} \right) = \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6}. \tag{46}$$

由于

$$|\Lambda_k| = (k+1)^2 \text{ for } k \geqslant 0$$

（$|\Lambda_k|$ 表示集合 Λ_k 的基数），我们推得恒等式

$$\dim H_N = \sum_{k=0}^{N} |\Lambda_k| = |\Lambda_N^\star|. \tag{47}$$

另一方面，根据命题 2.1，对于所有 $N \geqslant 0$，我们有

$$(\alpha \in \Lambda_\ell \text{ for some } \ell \leqslant N) \Longrightarrow \mathscr{W}_\alpha \in H_N.$$

换言之，

$$\{\mathscr{W}_\alpha;\ \alpha \in \Lambda_N^\star\} \subset H_N.$$

将后者与 (47) 以及正交性 (25) 结合，可得 (26)

引理 4.1. 对所有 $N \geqslant 1$，族 $(\mathscr{W}_\alpha)^{\alpha \in \Lambda_N^\star}$ 是 H_N 的一个基。

现在，我们陈述如下

命题 4.2. 由公式 (42) 给出的函数 U_N 也是适定离散问题的唯一解

$$\forall v_N \in H_N,\ \int_{\mathbb{R}^3} \nabla U_N . \nabla v_N dx = \int_\Omega M . \nabla v_N dx. \tag{48}$$

此外， U_N 是 U 在 H_N 上关于内积 $((.,.))_{W_0^1(\mathbb{R}^3)}$ 的投影。

因此，可以认为，近似式 (42) 不过是离散问题 (48) 的解。该离散问题旨在通过谱方法，利用 H_N 的函数对原问题 (6) 进行近似。将族 $(\mathscr{W}_\alpha)^{\alpha \in \Lambda_N^\star}$ 用作 H_N 的基，可将离散问题 (48) 化为一个简单的对角线性方程组

$$DX = B \tag{49}$$

其中 D 为对角矩阵

$$D = \operatorname{diag}(\frac{4}{3}, \underbrace{\frac{4}{15}, \cdots, \frac{4}{15}}_{4 \text{ coefficients}}, \cdots, \underbrace{\frac{4}{4(N+1)^2-1}, \cdots, \frac{4}{4(N+1)^2-1}}_{(N+1)^2 \text{ coefficients}}).$$

这里 X 包含 U_N 在基 $(\mathscr{W}_\alpha)^{\alpha\in\Lambda_N^*}$ 下的分量，而B 涵盖了积分 $\int_\Omega M.\nabla\mathscr{W}_\alpha dx$. 因此，方程 (48) 的解显然由公式 (33) 给出。这一重要观察体现了使用函数 $(\mathscr{W}_\alpha)_\alpha$ 的优势。

4.2. 方法的收敛性与误差估计。
现在关注 $N\to+\infty$ 时的收敛性。我们有：

引理 4.3. 假设 $(\mathscr{H}_1)$ 和 $(\mathscr{H}_2)$ 均成立。那么，

$$\mathscr{E}_{sf}(U)-\mathscr{E}_{sf}(U_N)=\frac{\mu_0}{2}|U-U_N|^2_{W_0^1(\mathbb{R}^3)}. \tag{50}$$

and

$$\lim_{N\to+\infty}\mathscr{E}^N_{sf}(U_N)=\mathscr{E}_{sf}(U). \tag{51}$$

证明。我们首先注意到，(51) 是 (33) 的直接推论。事实上，根据 (39) 和 (48)，可得

$$\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla U-\nabla U_N).\nabla U_N dx=0,$$

而 (50) 立即成立。 □

定理 4.4. 假设满足 $(\mathscr{H}_1)$ 和 $(\mathscr{H}_2)$。此外，假设 Ω 有界，div $M\in L^2(\Omega)$，且 $M.n=0$ on $\partial\Omega$。则 $U\in W^2_2(\mathrm{R}^3)$，并且存在一个仅依赖于 Ω 的常数 C_1，使得

$$\|U-U_N\|_{W_0^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant \frac{C_1}{N}\|\mathrm{div}\,M\|_{L^2(\Omega)}, \tag{52}$$

$$0\leqslant\mathscr{E}_{sf}(U)-\mathscr{E}_{sf}(U_N) \leqslant \frac{C_1^2}{N^2}\|\mathrm{div}\,M\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{53}$$

此外，若对某个整数 $k\geqslant 2$，有 div$M\in H_0^{k-1}(\Omega)$，且若

$$\int_\Omega M.\nabla q dx=0 \ \textit{for all}\ q\in\mathbb{P}^\Delta_{k-1}, \tag{54}$$

则 $U\in W^{k+1}_{2k}$ (R³)，并且存在一个仅依赖于 k 和 Ω 的常数 C_k，使得

$$\|U-U_N\|_{W_0^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_kN^{-k}\|\mathrm{div}\,M\|^2_{H^{k-1}(\Omega)}, \tag{55}$$

$$0\leqslant\mathscr{E}_{sf}(U)-\mathscr{E}_{sf}(U_N) \leqslant C_k^2N^{-2k}\|\mathrm{div}\,M\|^2_{H^{k-1}(\Omega)} \tag{56}$$

此处，通常的 Sobolev 空间 $H_0^{k-1}(\Omega)$ 表示 $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ 在通常的 Sobolev 空间 $H^{k-1}(\Omega)$ 中的闭包。

证明。首先，我们采用以下记号：给定定义在 Ω 上的函数 f，将其延拓到 R^3 后记为 $\widetilde{f}$，其定义如下：

$$\widetilde{f} = \begin{cases} f & \text{in } \Omega, \\ 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \backslash \Omega. \end{cases}$$

以下引理出自 [4]（定理 6.6）：

引理 4.5. 设 $m \geqslant 1$ 和 $\ell \geqslant 1$ 是两个整数。则由下式定义的拉普拉斯算子Δ

$$\Delta : \ W^{1+m}_{\ell+m}(\mathbb{R}^3) \to W^{-1+m}_{\ell+m}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}^{\Delta}_{\ell-1},$$

是一个同构。这里 $\mathrm{P}^{\Delta}_{\ell-1} = \{p \in \mathrm{P}_{\ell-1} \mid \Delta p = 0\}$ 和

$$W^{-1+m}_{\ell+m}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}^{\Delta}_{\ell-1} = \{f \in W^{-1+m}_{\ell+m}(\mathbb{R}^3) \mid \int_{\mathbb{R}^3} f q dx = 0 \ for \ all \ q \in \mathbb{P}^{\Delta}_{\ell-1}\}.$$

现在假设 $\mathrm{div}\, M \in L^2(\Omega)$ 且 $M.n = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上。那么， U 是该问题的解

$$\Delta U = \widetilde{\mathrm{div}\, M} \text{ in } \mathbb{R}^3. \tag{57}$$

显然，$\mathrm{div}\ M \in W^0_2(\mathrm{R}^3)$ 且

$$\int_{\mathbb{R}^3} \widetilde{\mathrm{div}\, M} dx = \int_{\Omega} \mathrm{div}\, M dx = 0.$$

根据条件 (54) 和引理 4.5，我们推得 $U \in W^2_2(\mathrm{R}^3)$。此外，若对于某个 $k \geqslant 1$，有 $\mathrm{div}\, M \in H^{k-1}_0(\Omega)$，并且当 $k \geqslant 2$ 时， M 满足条件 (54)，则对于任意实数 s，都有 $\widetilde{\mathrm{div}}\, M \in W^{k-1}_s(\mathrm{R}^3)$（因为 $\widetilde{\mathrm{div}}\ M$ 在 Ω 外为零）。特别地，$\widetilde{\mathrm{div}}\ M \in W^{k-1}_{2k}(\mathrm{R}^3)$。由格林公式，我们还有

$$\forall q \in \mathbb{P}^{\Delta}_{k-1} \int_{\mathbb{R}^3} \widetilde{\mathrm{div}\, M} q dx = \int_{\Omega} \mathrm{div}\, M q dx = -\int_{\Omega} M.\nabla q dx = 0.$$

因此，由引理 4.5 可得 $U \in W^{k+1}_{2k}(\mathrm{R}^3)$。此外，存在一个仅依赖于 k 的常数 C_k，使得

$$\|U\|_{W^{k+1}_{2k}(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_k \|\widetilde{\mathrm{div}\, M}\|_{W^{k-1}_{2k}(\mathbb{R}^3)} \leqslant \widetilde{C}_k \|\mathrm{div}\, M\|_{H^{k-1}(\Omega)}. \tag{58}$$

设 π_N 为关于与范数 $|.|_{W^1_0(\mathbb{R}^3)}$ 相关联的标量积在 H_N 上的正交投影算子。以下结果归功于 [11]:

引理 4.6. 假设对于某个整数 $k \geqslant 0$，有 $v \in W^{k+1}_{2k}(\mathrm{R}^3)$。那么，

$$\|\nabla v - \nabla(\pi_N v)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} \leqslant C^{\star}_k N^{-k} \|v\|_{W^{k+1}_{2k}(\mathbb{R}^3)}, \tag{59}$$

其中 $C^{\star}_k$ 是一个既不依赖于 N 也不依赖于 v 的常数。

我们知道 $U_N = \pi_N U$。不等式（52）和（53）分别由（59）和（58）结合 $k = 1$ 以及（31）得出。不等式（55）和（56）可用类似的方法推导。

□

Remark – 关于 $\partial\Omega$的假设 $M.n = 0$ 意味着有效磁荷为零。容易看出，如果在 $\partial\Omega$上有 $M.n \neq 0$ ，那么 U 不属于 $W_2^2(\mathrm{R}^3)$。事实上，方程（6）可以改写为

$$\begin{cases} \Delta u &= \operatorname{div} M & \text{in } \Omega, \\ \Delta u &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}, \\ [u] &= 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \left[\dfrac{\partial u}{\partial n}\right] &= -M.n & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

其中， n是 $\partial\Omega$上的外法向量。因此， $\left[\dfrac{\partial u}{\partial n}\right] \neq 0$在 $\partial\Omega$上，且 $U \notin W_2^2(\mathrm{R}^3)$。

5. Implementation and computational tests

本节首先旨在考察按照上一节提出的方法实现后得到的数值结果，并检验理论误差估计是否得到数值验证，以及这些估计是否是最优的。另一个目标是补充介绍该方法的实现细节，包括积分的计算。值得在此指出，尽管问题具有三维特性，且定义在一个无界区域上，该方法的实现仍相当简单且快速。

5.1. 关于 Arar-Boulmezaoud 函数梯度的补充细节。

定理 3.1 中的公式以及第 4.1 节提出的近似方法，都涉及对函数 $(\mathscr{W}_\alpha)_\alpha$ 取梯度，尤其是在积分系数中

$$\int_\Omega M.\nabla \mathscr{W}_\alpha dx. \tag{60}$$

在实际应用中，在实现该方法的过程中，精确计算这些梯度可能至关重要。因此，最好通过精确的解析表达式来计算它们，而不是对微分算子进行离散化。当然，可以在（60）中使用格林公式消去这些梯度：

$$\int_\Omega M.\nabla \mathscr{W}_\alpha dx = -\int_\Omega (\operatorname{div} M)\mathscr{W}_\alpha dx + \langle M.n, \mathscr{W}_\alpha \rangle_{\partial\Omega},$$

（$\langle .,\ . \rangle_{\partial\Omega}$ 表示 $H^{1/2}$（$\partial\Omega$）与 $H^{-1/2}$（$\partial\Omega$）之间的对偶配对）。然而，这需要磁化矢量场 M具有更高一些的正则性（例如，$\operatorname{div} M \in L^2$（$\Omega$）），而且还会引入曲面积分。因此，详细写出梯度（$\nabla \mathscr{W}_\alpha$）$_\alpha$并非多此一举。实际上，根据（15）和（22），这些梯度并不容易计算，尤其是因为其公式中出现了特殊函数（即切比雪夫多项式和勒让德缔合勒让德函数）。

在本段中，我们推导出更简单且精确的梯度表达式 f

函数 $(\mathscr{W}_\alpha)_\alpha$，以便通过公式 (42) 和 (40) 计算磁势和杂散场能量。

起点是以下命题

命题 5.1. 对于 $\alpha \in \Lambda$ 和 $x \in \mathrm{R}^3$:

$$\nabla \mathscr{W}_\alpha(x) = (1-\xi_4)^{1/2}(\mathscr{V}_\alpha(\xi) - \frac{1}{2}\mathscr{Y}_\alpha(\xi)\hat{\xi}), \tag{61}$$

其中 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \pi^{-1}(x) \in \mathsf{S}^3$, $\hat{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, (ϕ, θ, χ) 是 ξ 的球坐标（见 (14)），并且

$$\mathscr{V}_\alpha(\xi) = (1-\cos\chi)\begin{pmatrix} -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta & -\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & \sin\phi\cos\theta & -\sin\phi\sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin\theta\sin\chi}\dfrac{\partial \mathscr{Y}_\alpha}{\partial\phi}(\xi) \\ \dfrac{1}{\sin\chi}\dfrac{\partial \mathscr{Y}_\alpha}{\partial\theta}(\xi) \\ \dfrac{\partial \mathscr{Y}_\alpha}{\partial\chi}(\xi) \end{pmatrix}. \tag{62}$$

为求简便，命题 5.1 的证明推迟至附录 A。

Remark – 在命题 5.1 中，$\frac{\partial \mathscr{Y}_\alpha}{\partial\phi}$、$\frac{\partial \mathscr{Y}_\alpha}{\partial\theta}$和 $\frac{\partial \mathscr{Y}_\alpha}{\partial\chi}$（不严格地）表示将 $\mathscr{Y}_\alpha$ 视为 θ、ϕ 和 χ 的函数时的导数。

此时，只剩下计算偏导数这一项工作。

$$\frac{\partial \mathscr{Y}_\alpha}{\partial\phi},\ \frac{\partial \mathscr{Y}_\alpha}{\partial\theta} \text{ and } \frac{\partial \mathscr{Y}_\alpha}{\partial\chi}.$$

根据公式 (15)，前两个可以很容易地用 S^2 上球谐函数的导数表示。例如，若 $\alpha = (k, \ell, m)$，则

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{Y}_\alpha}{\partial\phi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{a_{k,\ell}}}(\sin\chi)^\ell T_{k+1}^{(\ell+1)}(\cos\chi)\frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial\phi}(\phi,\theta) \\ &= -\frac{m}{\sqrt{a_{k,\ell}}}(\sin\chi)^\ell T_{k+1}^{(\ell+1)}(\cos\chi)Y_{\ell,-m}(\phi,\theta) \end{aligned} \tag{63}$$

为了避免在 (62) 中除以零（当 $\sin\theta = 0$ 时），这种情况并无必要，可以在 $Y_{\ell,-m}$ 的定义 (16) 中利用缔合勒让德函数的递推性质:

$$2mK_\ell^m(\cos\theta) = \sin\theta\left(\tau_{\ell,m}K_{\ell+1}^{m+1}(\cos\theta) + \tau_{\ell,-m}K_{\ell+1}^{m-1}(\cos\theta)\right), \tag{64}$$

with

$$\tau_{\ell,m} = \sqrt{(\ell+m+2)(\ell+m+1)} \text{ for } -\ell \leqslant m \leqslant \ell.$$

因此，对于 $m \neq 0$，我们有

$$\begin{aligned} \frac{2|m|}{\sin\theta}\frac{\partial \mathscr{Y}_\alpha}{\partial\phi}(\xi) &= -m\frac{\eta_\ell}{\sqrt{a_{k,\ell}}}(\sin\chi)^\ell T_{k+1}^{(\ell+1)}(\cos\chi)y_{-m}(\phi) \\ &\quad \left(\tau_{\ell,|m|}K_{\ell+1}^{|m|+1}(\cos\theta) + \tau_{\ell,-|m|}K_{\ell+1}^{|m|-1}(\cos\theta)\right) \end{aligned} \tag{65}$$

同理，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{Y}_\alpha}{\partial \phi}(\xi) &= \frac{\eta_\ell}{\sqrt{a_{k,\ell}}}(\sin\chi)^\ell T_{k+1}^{(\ell+1)}(\cos\chi)\\ &\quad\Big(c_{\ell,-|m|}K_\ell^{|m|-1}(\cos\theta) - c_{\ell,|m|}K_\ell^{|m|+1}(\cos\theta)\Big)y_m(\phi),\end{aligned} \tag{66}$$

其中

$$c_{\ell,m} = \frac{1}{2}\sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)} \text{ for } \ell \geqslant 0 \text{ and } -\ell \leqslant m \leqslant \ell. \tag{67}$$

注意，我们使用了以下递推公式:

$$(\sin\theta)(K_\ell^m)'(\cos\theta) = c_{\ell,m}K_\ell^{m+1}(\cos\theta) - c_{\ell,-m}K_\ell^{m-1}(\cos\theta). \tag{68}$$

（并约定 $K_\ell^j = 0$ 当 $|j| > \ell$ 时）。因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{Y}_\alpha}{\partial \theta}(\xi) &= \frac{\eta_\ell}{\sqrt{a_{k,\ell}}}(\sin\chi)^\ell T_{k+1}^{(\ell+1)}(\cos\chi)\\ &\quad\Big(c_{\ell,-|m|}K_\ell^{|m|-1}(\cos\theta) - c_{\ell,|m|}K_\ell^{|m|+1}(\cos\theta)\Big)y_m(\phi).\end{aligned} \tag{69}$$

最后，我们还有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{Y}_\alpha}{\partial \chi}(\xi) &= \frac{(\sin\chi)^{\ell-1}}{\sqrt{a_{k,\ell}}}Y_{\ell,m}(\phi,\theta),\\ &\quad\Big(\ell\cos(\chi)T_{k+1}^{(\ell+1)}(\cos\chi) - (\sin\chi)^2 T_{k+1}^{(\ell+2)}(\cos\chi)\Big),\end{aligned} \tag{70}$$

对所有 $\alpha = (k,\ell,m) \in \Lambda$ 均成立。

将函数偏导数的这些表达式 ($\mathscr{Y}_\alpha$) 代入 (61)，即可得到一个完整公式，可直接用于实际应用和实现。

5.2. 计算测试与数值验证。本节重点介绍一些数值结果，用以评估公式 (33) 和 (34) 的实际适用性，以及第 3 节所述相应数值方法的性能。下面将研究三个不同的例子。第一个例子讨论非均匀磁化球形区域，对此我们有定理 4.4 给出的误差估计。最后两个例子中，区域均为均匀磁化。在这三个例子中，我们都推导出杂散场的精确表达式，并将数值解与之进行比较。在所有这些计算测试中，我们设定 $\mu_0 = 1$。

例1：满足 $M.n = 0$ 的非均匀磁化球体。
我们预[illegible]

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < r_0\}$$

and

$$M = (\cos\theta)e_\varphi + (\sin\theta)e_\theta \text{ in } \Omega. \tag{71}$$

N	$\mathscr{E}_{sf}(u)$	$\mathscr{E}_{sf}(u_N)$	$\frac{\lvert\mathscr{E}_{sf}(u)-\mathscr{E}_{sf}(u_N)\rvert}{\mathscr{E}_{sf}(u)}$	$e_0(H_d)$
10	0.07757018	0.07696625	7.78E-3	8.82E-2
20	-	0.07750001	9.03E-4	3.00E-2
30	-	0.07754315	3.48E-4	1.86E-2
40	-	0.07756016	1.29E-4	1.13E-2
50	-	0.07756414	7.79E-5	8.82E-3
60	-	0.07756708	4.00E-5	6.32E-3
对数斜率			-2.90	-1.45

TABLE 1. 非均匀磁化球体（例1）产生的精确杂散场能量和近似杂散场能量。

值得注意的是，M 满足海森堡-魏斯约束 (3)，因为$|M| = 1$ 在 Ω 中。此外，M 在 Ω 的边界上是切向的，因为 $M.n = 0$ 在$\partial\Omega$ 上（此处 $n[x)\ = x/|x|$）。

我们能够给出精确解的解析表达式（见 [24, 13]）。更确切地说，

$$U(x) = \begin{cases} -\dfrac{2z}{9} + \dfrac{2z}{3}\ln(\dfrac{|x|}{r_0}) & \text{if } |x| \leqslant r_0, \\ -\dfrac{2{r_0}^3 z}{9|x|^3} & \text{if } |x| \geqslant r_0. \end{cases} \tag{72}$$

精确杂散场能量为

$$\mathscr{E}_{sf}(U) = \frac{\mu_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U|^2 dx = \frac{16}{81}\pi {r_0}^3. \tag{73}$$

这里我们选择 $r_0 = 1/2$。在表1中，我们列出了若干 N 值下计算得到的杂散场能量（40）（将其视为离散化参数）。我们还列出了杂散场上的相对 L^2 误差 $H_d = -\nabla U$，其定义为

$$e_0(H_d) = \frac{|U_N - U|_{W_0^1(\mathbb{R}^3)}}{|U|_{W_0^1(\mathbb{R}^3)}}.$$

由此我们可以观察到，随着 $N^{-1.45}$，误差 e_0（H_d）逐渐减小。这与命题 4.3 一致，该命题预言

$$|U - U_N|_{W_0^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant CN^{-1}\|\mathrm{div}\, M\|_{L^2(\Omega)}.$$

事实上，解 u 属于 $W_2^2(\mathrm{R}^3)$，因为 div $M \in L^2(\Omega)$，且 $M.n = 0$ on$\partial\Omega$。相对于这一估计，甚至还存在超收敛。另请注意，杂散场能的误差按 $N^{-2.90}$ 递减（这与恒等式 $|\mathscr{E}_{sf}(U)\ - \mathscr{E}_{sf}(U_N)| = |U - U_N|^2_{W_0^1(\mathbb{R}^3)^3}$一致）。

N	$\mathscr{E}_{sf}(u)$	$\mathscr{E}_{sf}(u_N)$	$\frac{\lvert\mathscr{E}_{sf}(u) - \mathscr{E}_{sf}(u_N)\rvert}{\mathscr{E}_{sf}(u)}$	$e_0(H_d)$
10	0.08726646	0.07845252	10.10E-2	0.3153
20		0.08252939	5.42E-2	0.2322
30	-	0.08402011	3.72E-2	0.1924
40	-	0.08479348	2.83E-2	0.1680
50	-	0.08526692	2.29E-2	0.1511
60	-	0.08558669	1.92E-2	0.1385
对数斜率			-0.93	-0.46

TABLE 2. 均匀磁化球体（例2）产生的精确杂散场能量与近似杂散场能量。

例2：均匀磁化球体。
在第二个基准测试中，我们考虑一个磁化强度为 $M = M_0$ 的球形样品 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < r_0\}$。容易证明，方程 (6) 的精确解由以下公式给出：

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} M_0.x & \text{if } |x| < r_0, \\ \frac{{r_0}^3}{3} \frac{M_0.x}{|x|^3} & \text{if } |x| \geqslant r_0. \end{cases} \tag{74}$$

精确能量为

$$\mathscr{E}_{sf}(U) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U|^2 dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} M_0.h dx = \frac{2\pi |M_0|^2}{9} {r_0}^3. \tag{75}$$

这里，我们取 $M_0 =$ (0,0, 1) 和 $r_0 = 0.5$。因此，

$$\mathscr{E}_{sf}(u) = \frac{\pi}{36} = 0.08726646$$

可以看到，$[\frac{\partial U}{\partial n}] = -M_0.n \neq 0$ 在 $\partial\Omega$ 上。因此，$U \notin W_2^2(\mathbb{R}^3)$，尽管 $U_{|\Omega} \in H^2(\Omega)$ 且 $U_{|\mathbb{R}^3\setminus\Omega} \in W_2^2(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})$（这里 $U_{|\Omega}$ 和 $U_{|\mathbb{R}^3\setminus\Omega}$ 分别表示 U 在 Ω 和 $\mathbb{R}^3\setminus\Omega$ 上的限制）。因此，我们不满足定理 4.4 的适用条件，误差估计 (52) 和 (53) 不再必然成立。

表2给出了离散化参数 N 取若干不同值时的近似能量 $\mathscr{E}_{sf}(U_N)$。我们还计算了杂散场 $H_d = -\nabla U$ 的相对误差 L^2。可以观察到，该误差随着 $N^{-0.46}$ 而减小。能量误差随着 $N^{-0.93}$ 而减小。

这里，尽管 $h = -\nabla U$ 的法向分量在样品边界处不连续，近似解仍然收敛到精确解。

N	$\mathscr{E}_{sf}(u)$	$\mathscr{E}_{sf}(u_N)$	$\frac{\lvert\mathscr{E}_{sf}(u)-\mathscr{E}_{sf}(u_N)\rvert}{\mathscr{E}_{sf}(u)}$	$e_0(H_d)$
10	0.16666666	0.14711046	0.1173	0.3397
20	-	0.15617466	6.3E-2	0.2499
30	-	0.15951131	4.2E-2.	0.2066
40	-	0.16123614	3.2E-2	0.180
50	-	0.16229007	2.62E-2	0.1618
60	-	0.16300181	2.19E-2	0.1481
对数斜率			-0.94	-0.47

TABLE 3. 均匀磁化立方体产生的精确和近似杂散场能量（例3）。

例3：均匀磁化立方体。
在最后这项测试中，我们改变样品的几何形状，考虑一根均匀磁化的立方杆 $\Omega =]-\gamma, \gamma[^3,$，其 $\gamma = 1/2$，以及 $M = (0, 1, 0)$。此时的杂散场能量为（参见例如 [1]）

$$\mathscr{E}_{sf}(U) = \frac{1}{6}. \tag{76}$$

退磁场的精确解析表达式为（见 [18]）：

$$\begin{aligned} H_d(x) &= \frac{1}{4\pi}\Big(\sum_{k,\ell,m=1}^{2}(-1)^{k+\ell+m}\ln(z+(-1)^m\gamma+\varrho)\Big)e_x, \\ &- \frac{1}{4\pi}\Big(\sum_{k,\ell,m=1}^{2}(-1)^{k+\ell+m}\arctan\big(\frac{(x+(-1)^k\gamma)(z+(-1)^m\gamma)}{(y+(-1)^\ell\gamma)\varrho}\big)\Big)e_y, \\ &+ \frac{1}{4\pi}\Big(\sum_{k,\ell,m=1}^{2}(-1)^{k+\ell+m}\ln(x+(-1)^k\gamma+\varrho)\Big)e_z, \end{aligned}$$

其中 $\varrho = \sqrt{(x+(-1)^k\gamma)^2+(y+(-1)^\ell\gamma)^2+(z+(-1)^m\gamma)^2}$。
可以观察到，在 $\partial\Omega$ 上，$M.n \neq 0$。因此，$U \notin W_2^2(\mathrm{R}^3)$（见注4.2）。表3中汇总的数值结果证实了该方法的收敛性，并表明这里杂散场上的 L^2 误差也随 $N^{-0.47}$ 而减小。能量误差随 $N^{-0.93}$ 而减小，而能量误差则按 $N^{-0.97}$ 的速度减小。

6. Conclusion and perspectives

公式 (33) 不仅具有原创性，在理论和数值方面也有诸多优点。从计算角度来看，已有结果表明，该公式可用于设计一种特别高效且易于实现的数值方法，以计算退磁场及其相关能量。事实上，数值结果显示，该方法收敛迅速，尤其是在 $M.n = 0$ on $\partial\Omega$ 的情况下。在后一种情况下，观察到的收敛

甚至快于定理 4.4 中误差估计所预测的速度，因为能量收敛的阶接近 $O(\frac{1}{N^3})$。这表明这些估计并非最优，理论上可能还有改进空间。在 $M.n \neq 0$ 的情况下，该方法也按引理所述收敛，但值得注意的是，能量的收敛阶接近 $O(\frac{1}{N})$。这一点仍有待理论证明。

从理论角度来看，可以利用公式（33）给出待最小化泛函的新表达式。实际上，总自由能可以表示为:

$$\begin{aligned} E_{tot}(M) &= \alpha \int_\Omega |\nabla M|^2 dx + \int_\Omega \phi(M) dx - \mu_0 \int_\Omega H_{ex}.M dx \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\mu_0}{4(k+1)^2-1} \sum_{\alpha \in \Lambda_k} \left(\int_\Omega M.\nabla \mathscr{W}_\alpha dx \right)^2 + E_s. \end{aligned} \tag{77}$$

众所周知，在海森堡-魏斯约束（3）下，关于变量 M 最小化泛函 E_{tot} 会导出以下偏微分方程（例如参见 [23] 及其中的参考文献）：

$$-2\alpha \Delta M + \nabla_M \phi(M) - \mu_0(H_d + H_{ext}) = \lambda M \text{ in } \Omega, \tag{78}$$

其中 λ 是一个拉格朗日乘子。为简化起见，这里假设 $E_s = 0$ （考虑这一项的一般方程可参见例如 [23] ）。

公式（33）简化了系统（78），并将其化简为一个方程

$$\begin{aligned} &-2\alpha \Delta M + \nabla_M \phi(M) - \mu_0 H_{ext} \\ &\qquad + \mu_0 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha \in \Lambda_k} \frac{2}{4(k+1)^2-1} \left(\int_\Omega M.\nabla \mathscr{W}_\alpha dx \right) \nabla \mathscr{W}_\alpha = \lambda M \text{ in } \Omega. \end{aligned} \tag{79}$$

研究这个非局部偏微分方程，或可为使泛函 E_{tot} 最小化的最佳构型提供新的信息。如果截断左侧的级数，仅保留第一项，就可得到简化的近似非局部方程

$$-2\alpha \Delta M + \nabla_M \phi(M) - \mu_0 H_{ext} + \frac{2\mu_0}{3\pi^2(|x|^2+1)^{3/2}} \left(\int_\Omega \frac{M.x}{(|x|^2+1)^{3/2}} dx \right) x = \lambda M \text{ in } \Omega. \tag{80}$$

对此类方程的研究超出了本文的范围；这将是后续论文的研究主题。

A. 命题 5.1 的证明。这里的目标是证明公式 (61)。令 Y 为定义在 S^3 上的任意光滑函数，并设

$$W(x) = \left(\frac{2}{|x|^2+1} \right)^{1/2} Y(\pi^{-1}(x)),$$

（因此，若 $Y = \mathscr{Y}_\alpha$、 $\alpha \in \Lambda$，则 $W = \mathscr{W}_\alpha$）。在 [5] 和 [11]（公式 A.9）中，作者证明了以下恒等式（将 W 的梯度与 Y 及其在单位球面上的切向导数联系起来）：

$$\nabla W(x) = (1-\xi_4)^{1/2}\left(S(\xi)\nabla_\xi Y(\xi) - \frac{1}{2}Y(\xi)\hat{\xi}\right), \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^3, \tag{81}$$

其中，$\xi = \pi^{-1}(x) \in \mathbb{S}^3$, $\hat{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 是 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上的正交投影，$\nabla_\xi Y$ 是 Y 在 $\mathbb{S}^3$ 上的切向梯度，而 $S(\xi)$ 是 3×4 矩形矩阵

$$\begin{aligned} S(\xi) &= \begin{pmatrix} 1-\xi_4 & 0 & 0 & \xi_1 \\ 0 & 1-\xi_4 & 0 & \xi_2 \\ 0 & 0 & 1-\xi_4 & \xi_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-\cos\chi & 0 & 0 & \cos\phi\sin\theta\sin\chi \\ 0 & 1-\cos\chi & 0 & \sin\phi\sin\theta\sin\chi \\ 0 & 0 & 1-\cos\chi & \cos\theta\sin\chi \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{82}$$

接下来，我们将给出切向梯度 $\nabla_\xi Y(\xi)$ 关于 Y 对 ϕ、θ 和 χ 的偏导数的表达式，其中 ϕ、θ 和 χ 是 ξ 的球坐标（见第 2 节）。我们陈述如下

引理 .1. 若 $\sin\chi \neq 0$，则

$$\nabla_\xi Y(\xi) = \frac{1}{\sin\chi}\begin{pmatrix} -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta\cos\chi \\ \cos\phi & \sin\phi\cos\theta & \sin\phi\sin\theta\cos\chi \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\cos\chi \\ 0 & 0 & -\sin\chi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\widetilde{Y}}{\partial\phi}(\phi,\theta,\chi) \\ \frac{\partial\widetilde{Y}}{\partial\theta}(\phi,\theta,\chi) \\ \sin\chi\frac{\partial\widetilde{Y}}{\partial\chi}(\phi,\theta,\chi) \end{pmatrix}. \tag{83}$$

$\widetilde{\ }$其中 $Y(\phi,\theta,\chi) = Y(\cos\phi\sin\theta\sin\chi, \sin\phi\sin\theta\sin\chi, \cos\theta\sin\chi, \cos\chi)$。

证明。考虑定义在 $\mathbb{R}^4\backslash\{0\}$ 上的零次齐次函数 F，其定义为

$$F(y) = Y(\frac{y}{|y|}),\ y \in \mathbb{R}^4\backslash\{0\}.$$

由此可得

$$\nabla_\xi Y(\xi) = \nabla F(\xi) \text{ for } \xi \in \mathbb{S}^3. \tag{84}$$

根据欧拉齐次函数引理，我们有

$$\sum_{i=1}^{4} y_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(y) = 0 \text{ for } y \in \mathbb{R}^4\backslash\{0\}. \tag{85}$$

由于

$$\widetilde{Y}(\phi,\theta,\chi) = F(\cos\phi\sin\theta\sin\chi, \sin\phi\sin\theta\sin\chi, \cos\theta\sin\chi, \cos\chi),$$

我们推导得出

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{Y}}{\partial \phi}(\phi,\theta,\chi) &= \sin\theta\sin\chi\left(-\sin\phi\frac{\partial F}{\partial y_1}(y)+\cos\phi\frac{\partial F}{\partial y_2}(y)\right),\\
\frac{\partial \widetilde{Y}}{\partial \theta}(\phi,\theta,\chi) &= \cos\theta\sin\chi\left(\cos\phi\frac{\partial F}{\partial y_1}(y)+\sin\phi\frac{\partial F}{\partial y_2}(y)\right)\\
&\quad -\sin\theta\sin\chi\frac{\partial F}{\partial y_3}(y),\\
\frac{\partial \widetilde{Y}}{\partial \chi}(\phi,\theta,\chi) &= \sin\theta\cos\chi\left(\cos\phi\frac{\partial F}{\partial y_1}(y)+\sin\phi\frac{\partial F}{\partial y_2}(y)\right)\\
&\quad +\cos\theta\cos\chi\frac{\partial F}{\partial y_3}(y)-\sin\chi\frac{\partial F}{\partial y_4}(y),
\end{aligned}$$

其中 $y=(\cos\ \phi\sin\ \theta\sin\ \chi,\sin\ \phi\sin\ \theta\sin\ \chi,\cos\ \theta\sin\chi,\cos\ \chi)$。
将这些恒等式与方程 (85) 结合，可得一个关于导数 $\frac{\partial F}{\partial y_i}(y)$，$1\leqslant i\leqslant 4$ 的方阵线性系统。求解该系统得

$$\nabla F(y)=R(\xi)\begin{pmatrix}\frac{\partial \widetilde{Y}}{\partial \phi}\\ \frac{\partial \widetilde{Y}}{\partial \theta}\\ \frac{\partial \widetilde{Y}}{\partial \chi}\\ 0,\end{pmatrix}$$

其中

$$R(\xi)=\begin{pmatrix}
-\frac{\sin\phi}{\sin\theta\sin\chi} & \frac{\cos\phi\cos\theta}{\sin\chi} & \cos\phi\sin\theta\cos\chi & \cos\phi\sin\theta\sin\chi\\
\frac{\cos\phi}{\sin\theta\sin\chi} & \frac{\sin\phi\cos\theta}{\sin\chi} & \sin\phi\sin\theta\cos\chi & \sin\phi\sin\theta\sin\chi\\
0 & -\frac{\sin\theta}{\sin\chi} & \cos\theta\cos\chi & \cos\theta\sin\chi\\
0 & 0 & -\sin\chi & \cos\chi
\end{pmatrix}$$

至此，(83) 的证明完成。公式 (61) 直接由 (81) 和 (83) 得出。□

B. 前几个三维 Arar-Boulmezaoud 函数。
在本附录中，我们给出由公式 (22) 定义的前几个三维 Arar-Boulmezaoud 函数的显式公式。这些函数见表 6。

声明。
利益冲突：作者声明不存在利益冲突。

k	ℓ	m	$\mathscr{W}_{(k,\ell,m)}(x)$
0	0	0	$\frac{1}{\pi(\lvert x\rvert^2+1)^{1/2}}$
1	0	0	$\frac{2}{\pi}\frac{\lvert x\rvert^2-1}{(\lvert x\rvert^2+1)^{3/2}}$
	1	0	$\frac{4}{\pi}\frac{x_3}{(\lvert x\rvert^2+1)^{3/2}}$
		1	$\frac{4}{\pi}\frac{x_1}{(\lvert x\rvert^2+1)^{3/2}}$
		-1	$\frac{4}{\pi}\frac{x_2}{(\lvert x\rvert^2+1)^{3/2}}$
2	0	0	$\frac{1}{\pi}\frac{3\lvert x\rvert^4-10\lvert x\rvert^2+3}{(\lvert x\rvert^2+1)^{5/2}}$
	1	0	$\frac{4\sqrt{6}}{\pi}\frac{x_3(\lvert x\rvert^2-1)}{(\lvert x\rvert^2+1)^{5/2}}$
		1	$\frac{4\sqrt{6}}{\pi}\frac{x_1(\lvert x\rvert^2-1)}{(\lvert x\rvert^2+1)^{5/2}}$
		-1	$\frac{4\sqrt{6}}{\pi}\frac{x_2(\lvert x\rvert^2-1)}{(\lvert x\rvert^2+1)^{5/2}}$
	2	0	$\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\frac{3x_3^2-\lvert x\rvert^2}{(\lvert x\rvert^2+1)^{5/2}}$
		1	$\frac{8\sqrt{6}}{\pi}\frac{x_1x_3}{(\lvert x\rvert^2+1)^{5/2}}$
		2	$\frac{4\sqrt{6}}{\pi}\frac{x_1^2-x_2^2}{(\lvert x\rvert^2+1)^{5/2}}$
		-1	$\frac{8\sqrt{6}}{\pi}\frac{x_2x_3}{(\lvert x\rvert^2+1)^{5/2}}$
		-2	$\frac{8\sqrt{6}}{\pi}\frac{x_1x_2}{(\lvert x\rvert^2+1)^{5/2}}$

TABLE 4.第一个 Arar-Boulmezaoud 函数在 R 中的显式表达式[3]

REFERENCES

[1] C. Abert、L. Exl、G. Selke、A. Drews 和 Th. Schrefl。杂散场计算的数值方法：近期开发算法的比较。 *Journal of magnetism and magnetic materials* 326 326 176 185, 2013 , ( ): – 。

[2] C. Abert、Gunnar Selke G.、Kruger B. 和 A. Drews。使用磁标势进行微磁学计算的一种快速有限差分法。*IEEE transactions on magnetics*, 38 3 1105 1109, 2011 ( ): 。[3] F. Alliot, *Etude des équations stationnaires de Stokes et Navier-Stokes dans des domaines extérieurs* 1998 。博士论文，ENPC，巴黎，。[4] C. Amrouche、V. Girault 和 J. Giroire。R^n 中拉普拉斯方程的加权索博列夫空间。 *J. Math. Pures Appl. (9)*, 73(6):579–606，1994。

[5] N. Arar 和 T. Z. Boulmezaoud。全空间中加权拉普拉斯算子的特征函数。
J. Math. Anal. Appl., 400(1):161–173, 2013. [6] M. Aurada、J.M. Melenk 和 Dirk Praetorius。微磁学大物体极限的有限元-边界元耦合。
Journal of Computational and Applied Mathematics 281 10 31, 06 , : – .[7]
2015
D. V. Berkov、K. Ramst¨ock 和 A. Hubert。求解微磁学问题：迈向一种最优数值方法。
Phys. Stat. Sol (a), 137:207–225, 1993. [8] S. K. Bhowmik、R. Belbaki、Boulmezaada T. Z. 和 S. Mziou。使用反向有限元法求解外部区域中的二维二阶椭圆方程。
Computers & Mathematics with Applications, 72(9):2315–2333, 2016. [9] J. L. Blue 和 M. R. Scheinfein。使用多极子可缩短磁自能的计算时间。 *IEEE Trans. Magn.*, 27:4778–4780, 1991. [10] T. Z. Boulmezaoud。反演有限元：一种求解无界区域中椭圆问题的新方法。
M2AN Math. Model. Numer. Anal., 39(1):109–145, 2005. [11] T. Z. Boulmezaoud、N. Arar、N. Kerdid 和 A. Kourta。用有理函数和拟有理函数离散化全空间中的多维椭圆问题。 *ESAIM*
Math. Model. Numer. Anal. 50 1 263 288, 2016 , ( ): – .

[12] T. Z. Boulmezaoud、Kaliche K. 和 N. Kerdid。全空间中散度-旋度系统的反演有限元。
Advances in Computational Mathematics, 43(6):1469–1489, 2017. [13] T. Z. Boulmezaoud 和 K. Kaliche。通过反演有限元计算杂散场：一种用于微磁学模拟的新方法。 *arXiv:2301.10544*, 2023.
[14] T. Z. Boulmezaoud、S. Mziou、B. Boudjedaa 和 M. M. Babatin。无界区域中退化与径向椭圆问题的反演有限元。 *Japan Journal*
of Industrial and Applied Mathematics 32 1 237 261, 2015 , ( ): – .

[15] T. Z. Boulmezaoud、S. Mziou 和 T. Boudjedaa。无界区域中二阶椭圆问题的数值近似。
Journal of Scientific Computing 60 2 295 312, , ( ): – .
2014
[16] W. F. Brown。 *Micromagnetics. Interscience*。Interscience Publishers, 1963。[17] C. Carstensen 和 A. Prohl。通过惩罚有限元对松弛微磁学进行数值分析。 *Numer. Math.*, 90(1):65–99, 2001. [18] R. Engel-Herbert 和 T. Hesjedal。单轴磁畴磁杂散场的计算。
Journal of Applied Physics, 97:074504–074504, 05 2005. [19] L. Exl、W. Auzinger、S. Bance、M. Gusenbauer、F. Reichel 和 T. Schrefl。张量网格上的快速杂散场计算。 *J. Comput. Phys.*, 231(7):2840–2850, 2012. [20] D. R. Fredkin 和 T. R. Koehler。计算退磁场的混合方法。
IEEE Trans. Magn., 26:415–417, 1990. [21] J. J. Friess、S. S. Gubser、G. Michalogiorgakis 和 S. S. Pufu。膨胀等离子体与反德西特黑洞的准正规模。 *Journal of High Energy Physics*, (4), 2007. [22] V. Girault 和 P. A. Raviart。 *Finite element methods for Navier-Stokes equations*,
*Springer Series in Computational Mathematics*第 5 卷。Springer-Verlag, 柏林, 1986。[23] A. Hubert 和 R. Sch¨afer。 *Magnetic domains: the analysis of magnetic microstructures*。Spri nger, 1998。[24] K. Kaliche。 *Méthode des éléments finis inversés pour des domaines non bornés*。博士论文, 巴黎-萨克雷大学, 巴黎, 2016。[25] T. R. Koehler 和 D. R. Fredkin。微磁学的有限元方 *IEEE*
法。*Trans. Magn.* 28 1239 1244, 1992 , : – .

[26] M. Kruvz´ık 和 A. Prohl。铁磁性建模、分析与数值计算的最新进展。 *Numer. Math.*, 48(3):439–483, 2006. [27] S. Labb´e。针对微磁学优化的大型静磁系统快速计算。
SIAM J. Sci. Comput., 26(6):2160–2175, 2005. [28] L. D. Landau 和 E. M. Lifschitz。关于铁磁体中磁导率色散理论。 *Phys. Z. Sowjetunion*, 8(8):153–69, 1935.

[29] H. Long、E. Ong、Z. Liu 和 E. Li。基于多极子的快速傅里叶变换，用于快速计算静磁场。 *IEEE Trans. Magn.*, 42:295–300, 2006. [30] T. Miyazaki 和 H. Jin。 *The Physics of Ferromagnetism*。Springer，2012。[31] C. M¨uller。 *Spherical harmonics*, *Lecture Notes in Mathematics*第 17 卷。Springer-Verlag，柏林，1966。[32] N. Popovi´c 和 D. Praetorius。微磁学中 H-矩阵技术的应用。*Computing*, 74(3):177–204, 2005. [33] A. Prohl。 *Computational micromagnetism*。《数值数学进展》。B. G. Teubner，斯图加特，2001。[34] R. T. Seeley。球谐函数。 *Amer. Math. Monthly*, 73(4, part II):115–121, 1966. [35] K. To mita。四维空间中的张量球谐函数和伪球谐函数。*RRK*, 82(3), 1982. [36] G. F. Torres del Castillo 和 J. L. Calvario Ac´ocal。通过四维球谐函数研究氢原子。 *Revista Mexicana de física*, 53(5):407–414, 2007. [37] J.C. Toussaint 、 A. Marty 、 N. Vukadinovic 、 M. Youssef 、 J. B.and Labrune。一种用于铁磁共振计算的新技术。 *Computational Materials Sciences*, 24:175–180, 2002. [38] A. Vansteenkiste、J. Leliaert、M. Dvornik、M. Helsen、F. Garcia-Sanchez 和 B. Van Waeyenberge。mumax

3 *AIP ADVANCES* 4 10 22, 的 2014

设计与验证。 , ( ): .