arXiv:2302.02660v1 [math.DG] 6 Feb 2023

次黎曼几何中的次微分与极小化Sard猜想

L. Rifford*

谨以此文献给 Francis Clarke 教授，祝贺他七十五岁生日

摘要

我们运用非光滑分析和几何测度论的技术，给出满足极小化Sard猜想的完备次黎曼结构的新例子。特别地，我们证明，与余秩 2 分布或秩为≥ 2 的一般位置分布相关联的完备次黎曼结构满足极小化Sard猜想。

1 引言

设 M 是一个维数为 $n \geq 3$ 的光滑连通流形，配备了次黎曼结构（Δ，g），该结构由一个秩为 $m < n$ 的完全非完整光滑分布 Δ 和定义在 Δ 上的光滑度量 g 组成。根据乔-拉舍夫斯基定理，这种结构使 M 水平连通，也就是说，对于任意 x，$y \in M$，都存在一条绝对连续的路径 $\gamma\colon [0,1] \to M$，其导数取值于 $\mathbb{R}^2$，称为水平路径，它连接 x 与 y，并满足

$$\dot{\gamma}(t) \in \Delta\left(\gamma(t)\right) \qquad \text{for a.e. } t \in [0,1].$$

然后，定义函数 $d_{SR}\colon M \times M \to \mathbb{R}$ 为

$$d_{SR}(x,y) := \inf\Big\{ \text{length}^g(\gamma) \,|\, \gamma \in \Omega_x^\Delta,\, \gamma(1) = y \Big\} \qquad \forall (x,y) \in M \times M,$$

其中，Ω_x^Δ 表示满足 $\gamma(0) = x$ 的水平路径 $\gamma\colon [0,1] \to M$ 所构成的集合。函数 d_{SR} 称为关于（Δ，g）的次黎曼距离，它使（M，d_{SR}）成为一个度量空间，其拓扑与 M 作为流形时的拓扑相同。此外，与黎曼几何中的情形一样，借助 Hopf-Rinow 定理的次黎曼版本，（M，d_{SR}）的完备性保证，对任意一对 x，$y \in M$，都存在一条极小化水平路径，使 x 与 y 之间的次黎曼距离达到最小。关于次黎曼几何的更多细节，请参阅专著 [4, 34, 38]。从现在起，我们假设度量空间（M，d_{SR}）是完备的（此时称次黎曼结构（Δ，g）是完备的）。

在水平路径集合中，所谓的奇异极小水平路径在次黎曼几何中发挥着重要作用。它们是

*蔚蓝海岸大学，法国国家科学研究中心，J.-A. 迪厄多内实验室，法国国家科学研究中心 UMR 7351，瓦尔罗斯公园，06108 尼斯 Cedex 02，法国（ludovic.rifford@math.cnrs.fr）

端点映射的临界点，其终点可能对应于次黎曼距离的正则性丧失，因此，深入理解由这些终点构成的空间至关重要。极小化Sard猜想所关注的，正是可从给定点 $x \in M$ 经由奇异极小水平路径到达的点所构成的（闭）集合的大小，该集合记为 $\mathrm{Abn}^{min}(x)$（参见 [34, §10.2], [40, 猜想 1，第 158], [3,§III.] 或 [11, §2.1]）：

极小化Sard猜想。 对于每个 $x \in M$，$\mathrm{Abn}^{min}(x)$ 在 M 中的勒贝格测度为零。

尽管极小化Sard猜想的各种特殊情形已得到验证，但该猜想在完全一般的情形下仍未解决。关于这一猜想，目前最好的结果由 Agrachev [2], 给出，证明了 $\mathrm{Abn}^{min}(x)$ 总是具有空内部；迄今已知极小化Sard猜想在以下情形成立：

(i) 分布 Δ 是中等丰厚的，也就是说，对于每个 $x \in M$ 以及 Δ 的每个满足 $X(x) \neq 0$ 的光滑截面 X，都有

$$T_xM = \Delta(x) + [\Delta,\Delta](x) + \big[X,[\Delta,\Delta]\big](x),$$

其中

$$[\Delta,\Delta](x) := \mathrm{Span}\Big\{[Y,Z](x)\,|\,Y,Z \text{ smooth sections of } \Delta\Big\}$$

and

$$\big[X,[\Delta,\Delta]\big](x) := \mathrm{Span}\Big\{\big[X,[Y,Z]\big](x)\,|\,Y,Z \text{ smooth sections of } \Delta\Big\}.$$

该结果源于 Agrachev 和 Lee [6] 得到的次黎曼距离的利普希茨连续性性质，而这本身是 Agrachev 和 Sarychev [10] 关于中等丰厚分布和 Goh 异常曲线的早期工作的推论（另见 [38]）。由此可以很容易地得到如下分布的猜想：几乎处处为中等丰厚的分布，例如几乎处处为步长 2 的分布（$\Delta(x) + [\Delta,\Delta](x) = T_xM$ 对几乎每个 $x \in M$），比如余秩 1 分布（$m = n-1$）。

(ii) 次黎曼结构 (Δ, g) 的秩为 $m \geq 3$，并且在赋予 Whitney 光滑拓扑的秩为 m 、定义于 M 上的次黎曼结构集合中是一般的。该结果源于秩为 $m \geq 3$ 的一般分布不存在 Goh 控制（见 Agrachev 和 Gauthier [5, 定理 8] 以及 Chitour、Jean 和 Trélat [19, 推论 2.5]），并结合了以下事实：一般次黎曼结构的奇异极小水平路径都是严格异常的（见 [19]）。

(iii) M 上的次黎曼结构 (Δ, g) 对应于步数为 ≤ 3 的 Carnot 群（见 [31]），或对应于秩为 2、步数为 4 的 Carnot 群（见 [18]）。后一种情形确实验证了更强的 Sard 猜想。关于满足 Sard 猜想的其他几个具体 Carnot 群示例，请参阅 [17, 31]; 有关该猜想的更多细节、结果与讨论，请参阅 [3, 14, 15, 16, 17, 18, 31, 34, 36, 39, 40]。

本文旨在提供满足极小化 Sard 猜想的完备次黎曼结构的新例子。延续 Trélat 与作者此前的工作 [40], ，我们将证明，只要所有基点距离 $d_{SR}(x,\cdot)$（其中 $x \in M$）几乎处处从下方为利普希茨连续，次黎曼结构 (Δ, g) 就满足极小化 Sard 猜想。接着，我们将给出确保这一性质成立的充分条件。我们的结果如下：

对于每个 $x \in M$，我们将 Goh-Abn$^{min}(x)$ 记作满足以下条件的 $y \in M$ 集合：存在一条连接 x 与 y、位于 Ω_x^{Δ} 中的最小化水平路径 $\gamma \in$，该路径是奇异的，并且存在满足 Goh 条件的异常提升 ψ： $[0,1] \to \Delta^{\perp}$

$$\psi(t) \cdot [\Delta, \Delta](\gamma(t)) = 0 \qquad \forall t \in [0,1]. \tag{1.1}$$

正如 Agrachev 和 Sarychev 所证明的（见 [9, 10]），任何不是正规极值曲线投影的奇异最小化水平路径，都存在满足 Goh 条件 (1.1) 的异常提升；此外，Agrachev 和 Lee [6] 证明，若所有从 x 到 y 的极小路径上都不存在满足 (1.1) 的异常提升，则基点距离 $d_{SR}(x, \cdot)$ 在 y 的某个充分小邻域内是利普希茨连续的。关于这些结果的若干评论和证明，请参阅第 3.3 节。根据定义，Goh-Abn$^{min}(x)$ 是一个闭集合，并满足

$$\text{Goh-Abn}^{min}(x) \subset \text{Abn}^{min}(x).$$

我们将水平路径 $\gamma \in \Omega_x^{\Delta}$ 的 Goh 秩定义为 Goh-rank(γ)，即满足 Goh 条件（3.13）的异常提升 ψ 所构成的向量空间的维数： $[0,1] \to \Delta^{\perp}$ 。注意，如果 γ 不是奇异的，则它不具有任何异常提升，因此其 Goh 秩必为 0。我们的主要结果如下：

定理 1.1。设 M 是一个配备完备次黎曼结构 (Δ, g) 的光滑流形，并固定 $x \in M$。如果对于几乎每个 $y \in M$，从 x 到 y 的所有最小化水平路径的 *Goh* 秩至多为1，那么闭集合 $Abn^{min}(x)$ 在 M 中的勒贝格测度为零。

尽管定理 1.1 的假设似乎不易检验，但在接下来所描述的若干情形中，这些假设会自动得到满足。

如果对于每个 $x \in M$，几乎处处的 $y \in M$，从 x 到 y 的每条奇异最小化水平路径的余秩均为 1，我们就称次黎曼结构 (Δ, g) 几乎处处具有余秩 1 。显然，余秩为 1 的最小化水平路径的 Goh 秩不可能严格大于 1。因此，我们有：

推论 1.2。设 M 是一个配备了完备次黎曼结构 (Δ, g) 的光滑流形，且该结构几乎处处具有最小化余秩1 。那么极小化*Sard*猜想成立。

我们称分布 Δ 几乎处处具有预中等胖性，如果对几乎所有 $x \in M$ 以及 Δ 的每个满足 $X(x) \neq 0$的光滑截面 X，都有

$$\dim\big(\Delta(x) + [\Delta,\Delta](x) + \big[X, [\Delta,\Delta]\big](x)\big) \geq n-1. \tag{1.2}$$

例如，秩为 $m \geq n-2$ 的全非完整光滑分布就满足这一情形。由对 (1.1) 求一次导数可知，若 $\gamma \in \Omega_x^{\Delta}$ 是 M 中从 x 到 $y \neq x$ 的一条最小化水平路径，那么任何满足 γ 的 Goh 条件的异常提升 ψ 都必须满足

$$\psi(t) \cdot \big(\Delta(\gamma(t)) + [\Delta, \Delta](\gamma(t)) + [X^t(\gamma(t)), [\Delta, \Delta]]\big) = 0 \qquad \text{for a.e. } t \in [0,1],$$

其中，X^t 是定义在 $\gamma(t)$的某个邻域上的 Δ 的光滑截面，满足 $X(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$。因此，若 y 是满足 (1.2) 的点，那么对于几乎所有接近 1 的 $t \in [0,1]$，任何满足 (1.1) 的 γ 的异常提升都必须湮灭一个向量超平面，这意味着 Goh 秩(γ)至多为 1。综上，我们得到以下结论：

推论1.3。设 M 是一个配备完备次黎曼结构(Δ, g) 的光滑流形，且 Δ 几乎处处预中等胖。那么极小化*Sard*猜想成立。

最后，我们给出一个实际上可由推论 1.2 推出的推论。正如 Chitour、Jean 和 Trélat 所示（见 [19, 定理 2.4]），在赋予 Whitney C^∞ 拓扑的、秩为 m 的光滑完全非全纯分布集合 $\mathcal{D}_m$（带有 $m \geq 2$）中，存在一个稠密开集 O_m，使得对于每个 $\Delta \in O_m$，每条非平凡奇异水平路径（相对于 Δ）的余秩均为 1。因此，对于任意 $\Delta \in O_m$ 以及 Δ 上的任意光滑度量 g，若(Δ, g)完备，则次黎曼结构(Δ, g)几乎处处余秩为 1。综上，我们得到：

推论1.4. 设 M 是一个光滑流形，配备有秩为 $m \geq 2$ 的完备次黎曼结构 (Δ, g)，其中 Δ 在 M 上秩为 m 的光滑完全非霍尔诺米分布集合中一般。则极小化*Sard*猜想成立。

定理 1.1 的证明在于证明：对每个 $x \in M$，有向距离 $d_{SR}(x, \cdot)$ 在几乎处处的 $y \in M$ 处都存在一个利普希茨的下方支撑函数。粗略地说，这一结果一方面源于对极小测地线的 Goh 秩所作的假设会在 y 附近的一个超曲面 $\mathcal{S}$ 上提供某种利普希茨连续性；另一方面，一维连续函数 $d_{SR}(x, \cdot)$ 在与 $\mathcal{S}$ 横截的一条曲线上的限制，几乎处处要么可微，要么是许多振荡的极限（见第2.4节）。证明中的关键结果是：一维连续函数几乎处处满足这样一种二择一性质，即函数可微，或该点是函数取得局部极小值的点列的极限（见命题 2.8）。由于高维情况下可能不存在这样的二择一性质，我们的方法无法处理具有 Goh 秩为 ≥ 2 的最小化水平路径的分布情形。

本文结构如下：在第2节中，我们回顾几种次微分的概念，并证明若干对本文其余部分至关重要的结果，这些结果涉及连续函数的 Lipschitz型性质。在第3节中，我们说明这些次微分所满足的某些性质如何与极小化 Sard 猜想相互作用；特别地，我们在命题 3.10 中给出了该猜想的若干种刻画。随后，第4节专门用于证明定理 1.1，我们还将评论

我们的结果，并在第5节中加以讨论。最后，附录 A 回顾了关于开性的二阶条件。

致谢。作者谨向 Aris Daniilidis 和 Alex Ioffe 致以谢意，感谢他们富有成效的讨论。

2 次微分与利普希茨连续性

在本节中，我们考虑定义在开集$\mathcal{O} \subset M$ 上的函数 $f\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}$，并假设 f 在 $\mathcal{O}$上连续。回顾一下，如果 f 在某点 $x \in \mathcal{O}$ 处存在下方支撑函数 φ，则称其满足：$\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ 定义在 x 的某个开邻域 $\mathcal{V} \subset \mathcal{O}$ 上，并且满足

$$f(x) = \varphi(x) \quad \text{and} \quad f(y) \geq \varphi(y) \quad \forall y \in \mathcal{V}.$$

接下来的几节将汇集一些非光滑分析中的概念和结果，这些内容可见于 [21] 或 [42]；对于欧几里得情形，为确保完备性，我们给出所有证明。

2.1 黏性次微分与近端次微分

f 在 $x \in \mathcal{O}$处的黏性（或弗雷歇）次微分记作 $\partial^- f(x)$，定义为所有满足以下条件的 $p \in T_x^* M$组成的集合：f在 x处存在一个下方支撑函数 φ，其属于C^1 类，并满足 $d\varphi(x) = p$。注意，如果 f 存在一个在 x 处可微的下方支撑函数，那么它在 x 处也存在一个属于 C^1类的下方支撑函数。因此，我们容易验证，如果 f在 x处可微，那么有 $\partial^- f(x) = \{df(x)\}$；此外，我们注意到，如果 f 在 x 处取得局部极小值，那么有 $0 \in \partial^- f(x)$。集合 $\partial^- f(x)$始终是 $T_x^* M$的凸子集，但也可能为空，例如实数轴上的 $f(x) = -|x|$，其中 $x = 0$。尽管如此，我们有以下结果：

命题 2.1. 满足 $\partial^- f(x) \neq \emptyset$ 的 $x \in \mathcal{O}$ 构成 $\mathcal{O}$的一个稠密子集。

命题 *2.1* 的证明。 对于每个满足$\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$的开集 $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$，我们可以构造一个光滑函数 $\beta\colon \mathcal{O}' \to [0, +\infty)$，当趋近 $\mathcal{O}'$的边界时，该函数趋于 $+\infty$，从而使 $f + \beta$ 在某点 $x \in \mathcal{O}'$处取得最小值，其中 $\varphi := -\beta + f(x) + \beta(x)$ 满足

$$f(x) = \varphi(x) \quad \text{and} \quad f(y) \geq \varphi(y) \quad \forall y \in \mathcal{O}',$$

这表明 $d\varphi(x) = -d\beta(x)$ 属于 $\partial^- f(x)$。 □

请注意，这一结果是尖锐的；一般而言，我们不能期望黏性次微分在稠密点集之外还有更多性质。对于单变量函数，其黏性次微分仅在可数个点上非空，这类函数的例子包括魏尔斯特拉斯函数或 Van der Waerden 函数，参见 [26]。

f在 $x \in \mathcal{O}$处的近端次微分 记作 $\partial_P^- f(x)$，定义为满足以下条件的 $p \in T_x^* M$的集合：f在 x处存在一个下支撑函数 φ，其类为 C^2

在其定义域上且满足 $d\varphi(x) = p$。注意，如果 f 存在一个类为 C^2 的下支撑函数，那么它在 x 处也存在一个类为 C^∞的下支撑函数。集合 $\partial_P^- f(x)$ 是 $T_x^* M$的一个凸子集，该集合可能为空，并且包含于 $\partial^- f(x)$ 中。注意，如实数轴上的例子 $f(x) = -|x|^{3/2}$ 在 $x = 0$处所示，包含关系 $\partial_P^- f(x) \subset \partial^- f(x)$ 可能是严格的。命题 2.1 的证明表明，使得 $\partial_P^- f(x) \neq \emptyset$ 成立的 $x \in \mathcal{O}$ 构成 $\mathcal{O}$的稠密子集。事实上，我们可以得到更多：$\partial^- f$ 中的元素可以由 $\partial_P^- f$中的元素逼近。更准确地说，我们有：

命题 2.2。 对于任意 $x \in \mathcal{O}$、任意 $p \in \partial^- f(x)$ 以及 T^*M 中 $\mathcal{W}$ of(x, p) 的任意邻域，都存在 $y \in \mathcal{O}$ 和 $q \in \partial_P^- f(y)$，使得 $(y, q) \in \mathcal{W}$。

我们不提供命题 2.2 的完整证明，只展示如何根据 Subbotin 的一个定理 [44] 推导出该结果。我们遵循 Clarke、Ledyaev、Stern 和 Wolenski 在 [21, 命题 4.5，第 138] 页中给出的证明。

命题 *2.2* 的证明。 Subbotin 定理表述如下（其证明见 [21, 定理 4.2，第 137] 页）。

引理 2.3。 设 $h : O \to \mathbb{R}$ 是开集 $O \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续函数，$x \in \mathbb{R}^n$，并设 $\rho \in \mathbb{R}$ 满足

$$Dh(x; v) := \lim_{\substack{w \to v \\ t \downarrow 0}} \frac{h(x + tw) - h(x)}{t} > \rho \qquad \forall v \in \bar{B}_1,$$

其中 B_1 表示 $\mathbb{R}^n$中的闭单位球。那么，对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $z \in B_\epsilon(x)$和 $\zeta \in \partial_P^- h(z)$，使得

$$|f(z) - f(x)| < \epsilon \quad and \quad \zeta \cdot v > \rho \qquad \forall v \in \bar{B}_1.$$

为了证明命题 2.2，我们考虑一点 $x \in \mathcal{O}$、一个余向量 $p \in \partial^- f(x)$以及 $(x, p) \in T^*M$ 的一个邻域 $\mathcal{W}$。事实上，经过选取一个坐标图，我们可以假设在 $\mathbb{R}^n$ 中工作，其中函数 f 定义在开集 $O \subset \mathbb{R}^n$上，且 $x \in O$ 和$p \in (\mathbb{R}^n)^*$；并且 $(x, p) \in T^*(\mathbb{R}^n)$有一个邻域 $\mathcal{W}$，其中包含形如 $B_\delta(x) \times B_\delta^*(p)$的集合，且 $\delta > 0$。令 $h : O \to \mathbb{R}$ 为如下定义的连续函数：

$$h(y) := f(y) - p \cdot y \qquad \forall y \in O.$$

由于 $p \in \partial^- f(x)$，我们很容易验证

$$Dh(x; v) \geq 0 \qquad \forall v \in \bar{B}_1.$$

因此，通过将引理 2.3 应用于 $\rho = -\delta$ 和 $\epsilon = \delta$，存在 $z \in B_\delta(x)$ 和$\zeta \in \partial_P^- h(z)$，使得 $|h(z) - h(x)| < \delta$ 且

$$\zeta \cdot v > -\delta \qquad \forall v \in \bar{B}_1.$$

由此我们推知 $|\zeta| < \delta$ 和 $p + \zeta \in \partial_P^- f(z)$。 □

2.2 Lipschitz 点

本节假设 M 配备了光滑黎曼度量 h，其测地距离记为 d^h，并且对每个 $x \in M$，T_xM中的相应范数记为 $|\cdot|_x$，某个 $p \in T_x^*M$的范数定义为 $|p|_x := |v|_x$，其中 $p = h_x(v, \cdot)$（有关黎曼几何的更多细节，请参阅 [43] ）。那么，对于每个 $x \in M$，基点距离 $d_x^h := d^h(x, \cdot)$ 关于 d^h是 1-利普希茨的；存在 x 的一个开邻域 $\mathcal{V}$，使得 d_x^h 在 $\mathcal{V} \setminus \{x\}$ 中光滑，且其微分的范数为 1，并且我们有

$$\partial^- d_x^h(x) = \Big\{ p \in T_x^*M \,|\, |p|_x \le 1 \Big\}. \tag{2.1}$$

如下结果表明，f 的利普希茨连续性受 $\partial^- f$中协向量大小的控制。回顾一下，若集合 $\mathcal{C} \subset M$ 中的任意两点之间的极小测地线都包含在 $\mathcal{C}$中，则称集合 $\mathcal{C} \subset M$ 关于 h 是凸 的。

命题 2.4. 设 $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$ 是一个开凸集（关于 h），且 $K \ge 0$ 固定，则以下性质等价：

(i) f 在 $\mathcal{C}$上关于 d^h是 K-利普希茨的。

(ii) 对每个 $x \in \mathcal{C}$ 和每个 $p \in \partial^- f(x)$，$|p|_x \le K$。

命题 *2.4* 的证明。假设(i)成立，并固定 $x \in \mathcal{C}$ 和 $p \in \partial^- f$（x）（若 $\partial^- f$（x）非空）。根据假设，f 存在一个从下方给出的支撑函数φ：$\mathcal{V} \to \mathbb{R}$，满足 $d\varphi$（x）$= p$；由 f的 K-利普希茨连续性可得

$$\varphi(y) \le f(y) \le f(x) + Kd^h(x,y) = \varphi(x) + Kd_x^h(y) \qquad \forall y \in \mathcal{V} \cap \mathcal{C}.$$

我们推得 $p = d\varphi(x)$ 属于 $\partial^-(Kd_x^h)(x) = K\partial^- d_x^h(x)$，由 (2.1) 得到$|p|_x \le K$。

现在假设 (ii) 成立，并固定 $\bar{x} \in \mathcal{C}$, $\bar{\delta} > 0$，使得 $\bar{B}^h(\bar{x}, \bar{\delta}) \subset \mathcal{C}$ 且¯某个常数 $K' > K$。取一个光滑凸函数 $\phi : [0, \delta) \to [0, +\infty)$，使得

$$\phi(t) = K't \qquad \forall t \in [0, \bar{\delta}/4] \tag{2.2}$$

and

$$\phi(5\bar{\delta}/16) + \min_{x \in \bar{B}^h(\bar{x}, \bar{\delta})} \{f(x)\} \ge f(\bar{x}) + \phi(\bar{\delta}/8), \tag{2.3}$$

固定 y, z 属于 $B(\bar{x}, \bar{\delta}/8)$，并定义 g: $B^h(\bar{x}, \bar{\delta}/2) \to \mathbb{R}$，其定义为

$$g(x) := f(x) + \phi\left(d^h(x,y)\right) \qquad \forall x \in B^h(\bar{x}, \bar{\delta}/2).$$

函数 g 在 $B(\bar{x}, \delta/2)$ 上连续，并且对于每个 $x \in B^h(\bar{x}, \bar{\delta}/2)$，根据（2.3）以及 ϕ 递增这一事实，满足 $\setminus B^h(\bar{x}, 7\bar{\delta}/16)$，

$$g(x) > f(x) + \phi(5\bar{\delta}/16) \ge f(\bar{x}) + \phi(\bar{\delta}/8) \ge g(\bar{x}),$$

¯因此它在某个点 $x_g \in B(\bar{x},\ \delta/2)$ 处取得最小值。如果 $x_g \neq y$，由于 $x \mapsto \phi(d^h(x,\ y))$ 在 $B(\bar{x},\ \bar{\delta}/2)$ 上是 C^1（微分的范数为 1），这意味着

$$-\phi'\left(d^h(x_g, y)\right) dd_y^h(x_g) \in \partial^- f(x_g),$$

因此 $|\phi'(d(x_g,\ y))| \leq K$，这与 ϕ 满足的性质（(2.2) 和凸性）相矛盾。因此 $x_g = y$。所以，

$$f(y) = g(x_g) \leq g(z) = f(z) + \phi\left(d^h(z, y)\right) \leq f(z) + K' d^h(z, y),$$

这里我们用到了 $d^h(y,\ z) \leq \bar{\delta}/8$ 和 (2.2)。由于 $y,\ z$ 是 _$B(\bar{x},\ \delta/8)$ 中的任意点，且 K' 是任意常数 $> K$，证毕。 □

如果存在 M 上的一个光滑黎曼度量，使得 f 在 x 的某个开邻域上相对于该度量是利普希茨的，我们就称 f 在某点 $x \in \mathcal{O}$ 处是 利普希茨 的，并用 Lip (*f*) 表示这类点的集合。当然，如果 f 在某点 $x \in \mathcal{O}$ 相对于某个度量是利普希茨的，那么相对于任何其他度量也都是利普希茨的。命题 2.4 给出了以下刻画：

命题 2.5。对于每个 $x \in \mathcal{O}$，以下性质等价：

(i) $x \in Lip\,(f)$.

(ii) $\partial^- f$ 在 x 的某个邻域内有界，也就是说，存在 x 的一个邻域 $\mathcal{V} \subset \mathcal{O}$，使得由满足 $y \in \mathcal{V}, q \in \partial^- f(y)$ 的 (y, q) 构成的集合在 T^*M 中相对紧。

最后，我们注意到，根据构造，集合 Lip(*f*) 是开集，且 f 在 Lip(*f*) 上局部利普希茨，因此拉德马赫定理（例如见 [23, 24]）推出，f 在 Lip(*f*) 上几乎处处可微。

2.3 下方利普希茨点与极限次微分

如果 f 在某点 $x \in M$ 处存在一个定义域上为利普希茨的下方支撑函数，我们就称 f 在该点下方利普希茨，并用 Lip¯(*f*) 表示这类点的集合。此外，我们称 f 在 x 处的极限次微分（记作 $\partial_L^- f(x)$）为满足以下条件的 $p \in T_x^* M$ 的集合：存在一个序列 $\{(x_k, p_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$，它在 T^*M 中收敛到 (x, p)，且对所有 $k \in \mathbb{N}$，都有 $p_k \in \partial^- f(x_k)$。如下述结果所示，下方利普希茨点属于极限次微分的定义域。

命题 2.6。设 h 是 M上的光滑黎曼度量，$K > 0$ 和 $x \in \mathcal{O}$ 满足：f 在 $x \in M$ 处存在一个下方支撑函数，且该函数在其定义域上关于 d^h是 K-利普希茨的，那么存在 $p \in \partial_L^- f(x)$，使得 $|p|_x \leq K$。

命题 *2.6* 的证明。设 $x \in \mathcal{O}$ 满足：f 在 $x \in M$ 处有一个下方支撑函数 φ，且该函数关于某个光滑黎曼度量h是 K-利普希茨的。适当选取坐标图，并将 $f_{|\mathcal{V}}$ 和 $\varphi_{|\mathcal{V}}$ 在 $x \in \mathbb{R}^n$ 的一个小开邻域 $\mathcal{V}$ 上的限制适当地延拓到整个 $\mathbb{R}^n$后，不妨设我们在 $\mathbb{R}^n$ 中

~ ~ ~工作，其中 f满足：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 连续，且 $f_{|\mathcal{V}} = f_{|\mathcal{V}}$（从而 $\partial_L^- f(x) = \partial_L^- f(x)$），并且

˜ ˜一个支撑函数 $\tilde{\varphi}$：在 x 处的 f（或 f）的 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，关于˜欧几里得度量是 K-利普希茨的，其中某个 $K > K$ 可以任意接近 K。因此，根据假设，我们有

$$\tilde{f}(x) = \tilde{\varphi}(x) \quad \text{and} \quad \tilde{f}(y) - \tilde{\varphi}(y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.4}$$

对每个正整数 k，定义函数 ψ_k：$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\psi_k(y,z) := \tilde{f}(y) - \tilde{\varphi}(z) + k|y-z|^2 + |z-x|^2 \qquad \forall (y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

并令

$$m_k := \inf\Big\{\psi_k(y,z) \,|\, (y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\Big\}.$$

˜由 K 的利普希茨连续性以及 (2.4)，可知对每个 $k \in \mathbb{N}^*$ 和任意 $y,\ z \in \mathbb{R}^n$，

$$\begin{aligned} \psi_k(y,z) &= \tilde{f}(y) - \tilde{\varphi}(y) + (\tilde{\varphi}(y) - \tilde{\varphi}(z)) + k|y-z|^2 + |z-x|^2 \\ &\geq -\tilde{K}|y-z| + k|y-z|^2 + |z-x|^2. \end{aligned}$$

因此，由于 $m_k \leq \psi_k(x,\ x) = 0$，我们推知，对每个 $k \in \mathbb{N}^*$，m_k 定义中的下确界都在某个 $(y_k,\ z_k)$ 处取得，即 $m_k = \psi_k(y_k,\ z_k)$，并且有

$$\lim_{k\to+\infty} y_k = \lim_{k\to+\infty} z_k = x.$$

给定 $k \in \mathbb{N}^*$，注意到 $\psi_k(y_k,\ \cdot) \geq m_k$，可得

$$\tilde{f}(y_k) - \tilde{\varphi}(z) + k|y_k - z|^2 + |z-x|^2 \geq \tilde{f}(y_k) - \tilde{\varphi}(z_k) + k|y_k - z_k|^2 + |z_k - x|^2$$

对所有 $z \in \mathbb{R}^n$ 均成立，这意味着函数 $-\tilde{\varphi}$ 存在光滑函数

$$z \longmapsto -\tilde{\varphi}(z_k) + k|y_k - z_k|^2 - k|y_k - z|^2 + |y_k - x|^2 - |z-x|^2$$

作为在 z_k 处从下方的支撑函数，因此得到

$$-2k\,(z_k - y_k)^* - 2\,(z_k - x)^* \in \partial^-(-\tilde{\varphi})(z_k).$$

类似地，$\psi_k(\cdot,\ z_k) \geq m_k$ 给出

$$p_k := -2k\,(y_k - z_k)^* \in \partial^- \tilde{f}(y_k) \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

˜由于 $-\tilde{\varphi}$ 关于欧几里得度量是 K-利普希茨的，由命题 2.4 可得

$$|-2k\,(z_k - y_k)^* - 2\,(z_k - x)^*| \leq \tilde{K} \quad \text{for all } k.$$

˜总之，我们已证明对于所有 k，都有 $p_k \in \partial^- f(y_k)$，且 $\lim_{k\to+\infty} y_k = x$

˜ ˜，并且当 k 足够大时有 $|p_k| \leq K + o(1)$。由于 $f_{|\mathcal{V}} = f_{|\mathcal{V}}$，这意味着当 k˜ 足够大时，$p_k \in \partial^- f(y_k)$；由紧致性可得某个 $\tilde{p} \in \partial_L^- f(x)$ 满足 $|p| \leq K$。令 K 趋于 K，即可得出结论 ˜。 □

以下结果是拉德马赫定理的直接推论，它表明 f 的黏性次微分在 $\mathrm{Lip}^-(f)$ 上几乎处处非空。

命题 2.7. 存在一个集合 $\mathcal{N} \subset Lip^{-}(f)$，其在 M 中的勒贝格测度为零，使得对于每个 $x \in Lip^{-}(f) \setminus \mathcal{N}$，都有 $\partial^{-} f(x) \neq \emptyset$。

命题 *2.7* 的证明。不失一般性，通过考虑坐标图，我们可以假设 $M = \mathbb{R}^n$。取一个在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密的序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$，并对每个$k$，$l \in \mathbb{N}^*$定义，

$$A_{k,l} := \Big\{ x \in \mathrm{Lip}^{-}(f) \cap B(x_k, 1/l) \,|\, f(y) - f(x) \geq -l|y-x|,\ \forall y \in B(x_k, 1/l) \Big\}.$$

由于 $\mathrm{Lip}^{-}(f) = \cup_{l,\ k\in\mathbb{N}^*} A_{l,\ k}$，只需证明对每个 k，$l \in \mathbb{N}^*$，$\partial^{-} f(x) \neq \emptyset$ 对几乎所有 $x \in A_{k,\ l}$成立。固定 k，$l \in \mathbb{N}^*$，使得 $A_{k,\ l} \neq \emptyset$，并定义函数$\phi_{k,\ l} : A_{k,\ l} \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\phi_{k,l}(x) := \sup \Big\{ \phi(x) \,|\, \phi : B(x_k, 1/l) \to \mathbb{R} \text{ is } l\text{-Lipschitz and } \phi \leq f \text{ on } B(x_k, 1/l) \Big\}.$$

根据构造，$\phi_{k,\ l}$ 是有限的（因为 $A_{k,\ l} \neq \emptyset$），是 l-利普希茨函数，且在 $A_{k,\ l}$ 上等于 f。由拉德马赫定理（例如参见 [23, 24]），我们推知，对几乎所有 $x \in A_{k,\ l}$，$\phi_{k,\ l}$ 在 x 处可微；这意味着 $\partial^{-}\phi_{k,\ l}(x)$ 是单点集，并且 $\phi_{k,\ l}$ 在 x 处存在一个从下方可微的支撑函数，由此可知 $\partial^{-} f(x)$ 非空。 □

2.4 极限次微分的定义域

我们可能会想知道，极限次微分是否几乎处处非空。以下结果在一维情形下给出了肯定的答案:

命题 2.8。设 $a, b \in \mathbb{R}$ 满足 $a < b$ 且 $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ 为连续函数。那么，对于几乎所有的 $x \in (a, b)$，以下性质之一成立:

(i) φ 在 x处可微。

(ii) 存在一个收敛到 x 的序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $k \in \mathbb{N}$都有 $0 \in \partial^{-}\varphi(x_k)$，特别地，我们有 $0 \in \partial_L^{-}\varphi(x)$。

命题 *2.8* 的证明。该结果是以下引理的一个直接推论:

引理 2.9. 设 $I = [c, d] \subset (a, b)$ 是一个满足 $c < d$ 的闭区间，使得

$$\min\{\varphi(z) \,|\, z \in [x, y]\} = \min\{\varphi(x), \varphi(y)\} \qquad \forall x < y \text{ in } I.$$

那么存在 $e \in I$，使得 φ 在 $[c, e]$ 和 $[e, d]$ 上单调。

引理 *2.9* 的证明。设 $\bar{x}, e \in \mathbb{R}$ 满足

$$\varphi(\bar{x}) = \min\{\varphi(z) \,|\, z \in [c, d]\} \quad \text{and} \quad \varphi(e) = \max\{\varphi(z) \,|\, z \in [c, d]\}.$$

由于根据假设，φ 在 I 上的最小值等于 $\varphi(c)$ 和 $\varphi(d)$ 的最小值，因此不妨设 $\bar{x} = c$ 或 $\bar{x} = d$。若 $\bar{x} = c$，我们断言 φ 在$[c, e]$ 上非递减，在 $[e, d]$ 上非递增。否则，存在 $x < y$ 属于 $[c, e]$，使得 $\varphi(x) > \varphi(y)$，于是

$$\min\{\varphi(z) \,|\, z \in [x, e]\} \leq \varphi(y) < \varphi(x) \leq \varphi(e),$$

这与假设矛盾。证明的其余部分留给读者。 □

满足如下条件的 S 集合 $x \in (a,b)$：存在一个收敛到 x的序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $k \in \mathbb{N}$，$0 \in \partial^- \varphi(x_k)$，在 (a,b) 中是闭集。我们需要证明 φ 在 $(a,b) \setminus S$ 中几乎处处可微。反设存在一个 $E \subset (a,b) \setminus S$ 集合，其勒贝格测度为正，并且 φ 在任意 $x \in E$处都不可微；取 E的一个密度点 $\bar{x}$。我们声称存在 $c,d,e \in (a,b) \setminus S$，满足 $\bar{x} \in (c,d) \subset (a,b) \setminus S$且 $e \in [c,d]$，使得 φ在 $[c,e]$和 $[e,d]$上单调。事实上，否则，对于每个足够大的 $k \in \mathbb{N}^*$，引理 2.9 的假设在区间 $I_k := [\bar{x} - 1/k, \bar{x} + 1/k] \subset (a,b) \setminus S$上不成立，因此存在$x_k, y_k, z_k \in I_k$，满足 $x_k < z_k < y_k$，使得

$$\varphi(z_k) = \min\{\varphi(z) \,|\, z \in [x_k, y_k]\} < \min\{\varphi(x_k), \varphi(y_k)\},$$

这意味着 φ 在 z_k 处取得局部极小值，因此 $0 \in \partial^- f(z_k)$，且当 k 趋于 $+\infty$时，z_k 收敛到 x，这与前述结论矛盾。总之，由于单调函数几乎处处可微，我们推断 φ 在 $\bar{x}$的某个邻域内几乎处处可微，这与 $\bar{x}$ 是 E的密度点这一事实矛盾。 □

注 2.10。*Denjoy-Young-Saks* 定理可以使断言 *(ii)* 更加精确。给定命题 *2.8* 中的 φ，φ在 $x \in (a,b)$ 处的 ***Dini*** 导数 $D^+\varphi$、$D_+\varphi$、$D^-\varphi$、$D_-\varphi$:(a,b) 定义如下

$$D^+\varphi(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}, \quad D_+\varphi(x) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

$$D_-\varphi(x) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{\varphi(x)-\varphi(x-h)}{h}, \quad D^-\varphi(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{\varphi(x)-\varphi(x-h)}{h}.$$

Denjoy-Young-Saks 定理（参见 *[28]* 及其中的参考文献）断言，对于几乎所有的 $x \in (a,b)$，以下断言之一成立：

(1) $D^+\varphi(x) = D_+\varphi(x) = D^-\varphi(x) = D_-\varphi(x) \in \mathbb{R}$，即 f 在 x处可微；*(2)* $D^+f(x) = D^-f(x) = +\infty$ 且 $D_+f(x) = D_-f(x) = -\infty$；*(3)* $D^+f(x) = +\infty$，$D_-f(x) = -\infty$ 且 $D_+f(x) = D^-f(x) \in \mathbb{R}$；*(4)* $D^-f(x) = +\infty$，$D_+f(x) = -\infty$ 且 $D_-f(x) = D^+f(x) \in \mathbb{R}$。

因此，我们还可以在命题 *2.8 (ii)* 中假设上述断言 *(2)*、*(3)*、*(4)* 中有一项成立。

命题 2.8 表明，一维连续函数的极限次微分几乎处处非空；但我们不知道这一结果在高维情况下是否仍然成立（见第 5.1 节）。

2.5 射影极限次微分

现在，我们引入一个对象，用于捕捉趋于无穷的 $\partial^- f$ 的元素的极限。对于每个 $x \in \mathcal{O}$，我们将 f 在 x 处的射影极限次微分记为

$\partial^-_{PL} f(x)$，即满足以下条件的 $p \in T^*_x M \setminus \{0\}$ 的集合：存在序列 $\{(x_k,\ p_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$属于 T^*M，以及 $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 属于 $(0,\ +\infty)$，使得

$$\lim_{k\to+\infty} |p_k|_{x_k} = +\infty, \quad \lim_{k\to+\infty} (x_k, \lambda_k p_k) = (x, p) \quad \text{and} \quad p_k \in \partial^- f(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

根据构造，集合 $\partial^-_{PL} f(x)$ 是一个正锥，也就是说，若 $p \in \partial^-_{PL} f(x)$，则对所有 $\lambda > 0$，都有 $\lambda p \in \partial^-_{PL} f(x)$。命题 2.5 推出：

命题 2.11。对于每个 $x \in \mathcal{O}$, $\partial^-_{PL} f(x) = \emptyset$，当且仅当 $x \in Lip(f)$。

正如我们将在下一节中看到的，定点次黎曼距离的黏性次微分和极限次微分与极小正规极值曲线相伴，而射影极限次微分则与极小异常极值曲线相关联。

3 MinimizingSard 猜想、次微分与 Lipschitz 性

在本节中，我们始终考虑一点 $x \in M$，并在 M 上固定一个光滑黎曼度量h。于是，我们将定点次黎曼距离记为 $d^x_{SR} := d_{SR}(x, \cdot)$，并定义 $f_x : M \to \mathbb{R}$，如下：

$$f_x(y) := \frac{1}{2} d^x_{SR}(y)^2 \qquad \forall y \in M. \tag{3.1}$$

根据黏性次微分的定义，我们很容易验证，对于每个$y \in M \setminus \{x\}$和每个 $p \in T^*_y M$,

$$p \in \partial^- d^x_{SR}(y) \quad \iff \quad d_{SR}(x, y) p \in \partial^- f_x(y). \tag{3.2}$$

本节旨在阐释 f_x 的次微分与极小测地线之间的联系，并最终给出极小化Sard猜想的若干种刻画。

3.1 异常与正规极值曲线

下面我们将说明异常极值轨线和正规极值曲线的概念如何在次黎曼几何中出现，并介绍下一节中将用到的若干记号；有关更多细节，请参阅 [38]。

考虑 M 中的 $\bar{y} \neq x$ 和 $\bar{\gamma} :\ [0,1] \to M$ 一条从 x 到 $\bar{y}$的极小测地线，即一条使（$|v|^2 = g_x(v,\ v)$)达到极小值的水平路径

$$\text{energy}^g(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|^2 \, dt,$$

在所有满足 $\gamma(1) = \bar{y}$ 的路径 $\gamma \in \Omega^{\Delta}_x$ 中。接着，考虑一个由 $\mathcal{F} = \{X^1, \ldots, X^m\}$ 个光滑向量场组成的标准正交族，它在一个开邻域上参数化 Δ

$\mathcal{V} \subset M$ 个 $\bar{\gamma}([0,1])$，并将由 x 和 $\mathcal{F}$ 定义的端点映射记为 E，其定义如下：

$$E(u) := \gamma^u(1) \qquad \forall u \in L^2([0,1], \mathbb{R}^m),$$

其中 γ^u 是解柯西问题的 Ω_x^{Δ} 中的曲线

$$\dot{\gamma}^u(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\, X^i\left(\gamma^u(t)\right) \text{ for a.e. } t \in [0,1], \quad \gamma^u(0) = x.$$

根据构造，存在控制 $\bar{u} \in L^2([0,1],\ \mathbb{R}^m)$，使得 $\bar{\gamma} = \gamma^{\bar{u}}$ 且 E 在包含 $\bar{u}$ 的开集 $U \subset L^2([0,1],\ \mathbb{R}^m)$ 上定义良好且光滑。于是，我们定义光滑映射 $C\colon U \to \mathbb{R}$ 和 $F\colon U \to M \times \mathbb{R}$ 如下：

$$C(u) := \frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2 \quad \text{and} \quad F(u) := (E(u), C(u)) \qquad \forall u \in U \tag{3.3}$$

并注意到，对于每个 $u \in U$，由于 $\mathcal{F}$ 是正交规范的，我们有

$$C(u) = \frac{1}{2}\mathrm{energy}^g(\gamma^u).$$

特别地，根据构造，我们有

$$C(\bar{u}) = \frac{1}{2}\mathrm{energy}^g(\bar{\gamma}) = \frac{1}{2} d_{SR}(x, \bar{y})^2 \quad \text{and} \quad |\bar{u}(t)| = d_{SR}(x, \bar{y}) \quad \text{for a.e. } t \in [0,1].$$

此外，我们注意到，由于 $\bar{\gamma}$ 没有自交，必要时通过缩小 $\mathcal{V}$，可以假设 $\mathcal{V}$ 与开单位球 $B^n(0,\ 1) \subset \mathbb{R}^n$ 微分同胚，且该微分同胚为 $\Phi\colon \mathcal{V} \to B^n(0,\ 1)$，满足

$$\frac{1}{K}|p| \le |p \cdot d_x\Phi|_x^* \le K|p| \qquad \forall x \in \mathcal{V},\ \forall p \in (\mathbb{R}^n)^* \tag{3.4}$$

对于某个依赖于 $\bar{\gamma}$ 的常数 $K > 0$，因此我们从现在起可以假设处于 $\mathbb{R}^n$ 中。

现在考虑 C 的一个局部极小值 $u \in U$，其终点为 $y := E(u)$，也就是说，满足

$$C(u) = \min\Big\{C(u') \,|\, u' \in U,\ E(u') = y\Big\}.$$

根据上述构造，这意味着水平路径 γ^u 在所有充分接近 γ^u 且满足 $\gamma(1) = y$ 的路径 $\gamma \in \Omega_x^{\Delta}$ 中，使能量 $\mathrm{energy}^g(\gamma)$ 达到最小值。根据拉格朗日乘数定理，存在 $\bar{p}^u \in T_y^*M$ 和 $\bar{p}_0^u \in \{0,1\}$，使得 $(\bar{p}^u,\ \bar{p}_0^u) \neq (0,\ 0)$（这里我们用大写字母“D”表示光滑函数的微分）

$$\bar{p}^u \cdot D_u E = \bar{p}_0^u\, D_u C, \tag{3.5}$$

其中，E 和 C 在 u 处的微分分别为

$$D_u E(v) = \int_0^1 S^u(1) S^u(t)^{-1} B^u(t) v(t)\, dt \qquad \forall v \in L^2([0,1], \mathbb{R}^m) \tag{3.6}$$

and

$$D_u C(v) = \int_0^1 \langle u(t), v(t) \rangle \, dt \qquad \forall v \in L^2([0,1], \mathbb{R}^m), \tag{3.7}$$

其中，我们定义 $B^u : [0,1] \to M_{n,\ m}(\mathbb{R})$为

$$B^u(t) := \left(X^1(\gamma^u(t), \cdots, X^m(\gamma^u(t)\right) \qquad \forall t \in [0,1] \tag{3.8}$$

并且 $S^u : [0,1] \to M_n(\mathbb{R})$ 是柯西问题的解

$$\dot{S}^u(t) = A^u(t) S^u(t) \quad \text{for a.e. } t \in [0,1], \quad S^u(0) = I_n, \tag{3.9}$$

其中 $A^u : [0,1] \to M_n(\mathbb{R})$ 由下式给出（J_{X^i} 是 X^i 的雅可比矩阵）

$$A^u(t) := \sum_{i=1}^m u_i(t) J_{X^i}(\gamma^u(t)) \qquad \text{for a.e. } t \in [0,1]. \tag{3.10}$$

然后，我们定义极值曲线 $\psi^{u,\ \bar{p}^u} : [0,1] \to T^*M$如下

$$\psi^{u,\bar{p}^u}(t) := \left(\gamma^u(t), p^{u,\bar{p}^u}(t)\right) := \left(\gamma_u(t), \bar{p}^u \cdot S^u(1) S^u(t)^{-1}\right) \qquad \forall t \in [0,1]. \tag{3.11}$$

根据构造，$\psi^{u,\ \bar{p}^u}$ 是 γ^u 的一个提升，满足 $\psi^{u,\ \bar{p}^u}(1) = (y,\ \bar{p}^u)$，并且有如下结果：

命题 3.1. 根据 *(3.5)* 中 $\bar{p}_0^u \in \{0,1\}$ 的取值，我们有：

(i) 若 $\bar{p}_0^u = 0$，则 $\psi^{u,\ \bar{p}^u}$ 是一条异常极值轨线（且 γ^u 是奇异的）。

(ii) 若 $\bar{p}_0^u = 1$，则 $\psi^{u,\ \bar{p}^u}$ 是正规极值曲线，且我们有

$$u(t) = B^u(t)^* p(t)^* \qquad \textit{for a.e. } t \in [0,1].$$

话虽如此，我们将在下一节说明 f_x 的次微分与极值轨线之间的联系。我们沿用上文的记号。

3.2 次微分与极值轨线

将 f_x 的次微分与正规极值轨线联系起来的关键结果归功于 Trélat 和作者 [40], ，如下：

命题 3.2. 设 $y \in M \setminus \{x\}$、$p \in \partial^- f_x(y)$ 和 $u \in U$ 是 C 的局部极小值，其终点为 $E(u) = y$，则有

$$p \cdot D_u E = D_u C. \tag{3.12}$$

特别地，从 x 到 y存在唯一的极小测地线，它由满足 $\psi(1) = (y, p)$ 的正规极值曲线 $\psi : [0,1] \to T^*M$ 的投影给出。此外，若 $\psi(0)$ 不是指数映射 $\exp_x$ 的临界点，则 y 不属于 $Abn^{min}(x)$。

命题 *3.2* 的证明。设 $y \in M\setminus\{x\}, p \in \partial^- f_x(y)$ 和 $u \in U$ 是 C 的一个局部极小值，其终点为 $E(u) = y$，并设 $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ 是一个 C^1 类的下方支撑函数，满足 $d\varphi(x) = p$。根据假设，我们有

$$C(u) = f_x(y) = \varphi(y) \quad \text{and} \quad C(u') \geq f_x\left(E(u')\right) \geq \varphi\left(E(u')\right) \quad \forall u' \in U,$$

这意味着函数 $C - \varphi \circ E$ 在 u 处取得局部极小值。因此我们有 (3.12)，并由命题 3.1 可知，γ^u 必须是正规极值曲线 $\psi^{u,\,\bar{p}^u}$ 的投影，其中 $\bar{p}^u := d_y\varphi = p$。如果 $\psi(0)$ 不是 $\exp_x$ 的临界点，那么水平路径 γ^u 不是奇异的，并且不存在从 x 到 y 的其他极小测地线，因此我们推得 $y \notin \mathrm{Abn}^{min}(x)$。 □

注 3.3。我们注意到，如果 $y \in M\setminus\{x\}, p \in \partial_P^- f_x(y)$ 且 $u \in U$ 是以 $E(u) = y$ 为终点的 C 的局部极小值，那么我们有 *(3.12)*。此外，由于在 u 处取得局部极小值的函数$C - \varphi \circ E$ 属于 C^2 类（其中 $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ 是一个 C^2 类的下方支撑函数，且 $d\varphi(x) = p$），我们有

$$D_u^2 C(v) - p \cdot D_u^2 E(v) \geq 0 \qquad \forall v \in \mathrm{Ker}(D_u E),$$

其中，$D_u^2 C$ 和 $D_u^2 E$ 分别表示由 C 和 E 在 u处的二阶微分所定义的二次型。

因此，命题 3.2 允许为每个 $p \in \partial_L^- f_x$（y）关联一条其投影为极小化的正规极值曲线。

命题 3.4。设 $y \in M \setminus \{x\}$ 和 $p \in \partial_L^- f_x(y)$，则满足 $\psi(1) = (y, p)$ 的正规极值曲线 $\psi\colon [0,1] \to T^*M$ 的投影，是一条从 x 到y的极小测地线。

命题 *3.4* 的证明。设 $y \in M\setminus\{x\}$、$p \in \partial_L^- f_x$（y）和 $\{$（y_k, p_k）$\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个收敛到 T^*M 中（y, p）的序列，并且对所有 $k \in \mathbb{N}$都有 $p_k \in \partial^- u$（y_k）。根据命题 3.2，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，满足 $\psi_k(1) =$（y_k, p_k）的正规极值曲线 $\psi_k\colon [0,1] \to T^*M$的投影 $\gamma_k\colon [0,1] \to M$，是从 x 到 y_k的极小测地线。由哈密顿流的正则性，序列 $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛到满足 $\psi(1) =$（y, p）的正规极值曲线 $\psi\colon [0,1] \to T^*M$；其投影作为从 x 到 y_k 且收敛到 y的极小测地线的极限，也是极小化的。 □

然而，若我们考虑 p in $\partial_{PL}^- f_x(y)$ 中的余向量，则命题 3.2 允许我们得到与 p 相关联的一条极小化奇异测地线。更准确地说，我们有：

命题 3.5. 设 $y \in M \setminus \{x\}$ 和 $p \in \partial_{PL}^- f_x(y)$，则存在一条从 x 到 y 的奇异极小化测地线。此外，对于所有满足以下条件的序列 $\{(y_k, p_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$，其中 T^*M 和 $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 属于 $(0, +\infty)$

$$\lim_{k\to+\infty} |p_k|_{y_k} = +\infty, \quad \lim_{k\to+\infty} (y_k, \lambda_k p_k) = (y, p) \quad and \quad p_k \in \partial^- f(y_k) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

由正规极值曲线的投影给出的极小测地线序列 $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的任意一致收敛子列 $\psi_k\colon [0,1] \to T^*M$，若满足 $\psi_k(1) = (y_k, p_k)$，则收敛到一条奇异极小测地线，该测地线存在一条异常极值轨线$\psi\colon [0,1] \to T^*M$，使得 $\psi(1) = (y, p)$。

命题 3.5 的证明。设 $y \in M\backslash\{x\}, p \in \partial_{PL}^{-} f_x(y)$ 以及两个序列 $\{(y_k, p_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 属于 T^*M，且 $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 属于 $(0,+\infty)$，并满足陈述中给出的性质。假设由正规极值曲线 ψ_k：$[0,1] \to T^*M$ 的投影所给出的序列 $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的某个子列 $\{\gamma_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ 满足 $\psi_k(1) = (y_k, p_k)$，并一致收敛（在 $W^{1,2}([0,1], M)$ 中）到某条极小测地线 $\bar{\gamma}$。采用上一节的记号，我们写作 $\gamma = \gamma^{\bar{u}}$，其中 $\bar{u} \in L^2([0,1], \mathbb{R}^m)$，并注意到当指标 l 充分大时，$l \geq L$，可将 γ_{k_l} 写成 γ^{u_l}，其中某个 $u_l \in U$ 使得子列 $\{u_l\}_{l\geq L}$ 在 $L^2([0,1], \mathbb{R}^m)$ 中收敛到 $\bar{u}$，当 l 趋于 ∞ 时成立。于是对所有指标 $l \geq L$,

$$p_{k_l} \cdot D_{u_l} E = D_{u_l} C$$

由此得到

$$\lambda_{k_l} p_{k_l} \cdot D_{u_l} E = \lambda_{k_l} D_{u_l} C \qquad \forall l \geq L,$$

其中

$$\lim_{l\to+\infty} \lambda_{k_l} p_{k_l} = p \quad \text{and} \quad \lim_{l\to+\infty} \lambda_{k_l} = 0.$$

取极限后，我们得到 $p \cdot D_{\bar{u}} E = 0$；由命题 3.1 可知，$\gamma = \gamma^{\bar{u}}$ 是一条奇异极小测地线，并存在一个异常极值轨线 ψ：$[0,1] \to T^*M$，使得 $\psi(1) = (y, p)$。

□

3.3 非利普希茨点存在 Goh 异常曲线

对于每个 $x \in M$，Goh-Abn$^{min}(x)$ 表示这样的 $y \in M$ 所构成的集合：存在一条极小路径 $\gamma \in \Omega_x^{\Delta}$，连接 x 和 y，该路径是奇异的，且存在一个异常提升 ψ：$[0,1] \to \Delta^{\perp}$ 满足 Goh 条件

$$\psi(t) \cdot [\Delta, \Delta](\gamma(t)) = 0 \qquad \forall t \in [0,1]. \tag{3.13}$$

根据构造，Goh-Abn$^{min}(x)$ 是一个闭集合，并满足

$$\text{Goh-Abn}^{min}(x) \subset \text{Abn}^{min}(x).$$

Agrachev 和 Sarychev [10]证明，任何没有正规极值曲线提升的奇异极小测地线都存在满足 Goh 条件的异常提升；而 Agrachev 和 Lee [6] 证明，不存在满足 Goh 条件的异常极值轨线意味着 f_x具有 Lipschitz 性质。从某种意义上说，下面的结果结合了这两个结果。

命题 3.6。对于每个 $x \in M$，我们有 $M\backslash Lip(d_x) \subset Goh\text{-}Abn^{min}(x)$。此外，对于任意 $y \in M \setminus Lip(f_x)$、任意 $p \in \partial_{PL}^{-} f_x(y)$ 以及任意序列 $\{(y_k, p_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$，其中 T^*M且 $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 属于 $(0,+\infty)$，满足

$$\lim_{k\to+\infty} |p_k|_{y_k} = +\infty, \quad \lim_{k\to+\infty} (y_k, \lambda_k p_k) = (y, p) \quad and \quad p_k \in \partial^{-} f_x(y_k) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

任意一条从 x 到 y的最小化水平路径，若它是由正规极值曲线 ψ_k：$[0,1] \to T^*M$满足 $\psi_k(1) = (y_k, p_k)$的投影所给出的极小测地线序列 $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的某个子序列的一致极限，则它确实存在一条异常极值轨线 ψ：$[0,1] \to T^*M$，满足 $\psi(1) = (y, p)$，且符合 *Goh* 条件。

令 $\bar{y} \neq x$ 属于 M，并取一条从 x 到 $\bar{y}$ 的极小测地线 $\bar{\gamma}\colon\ [0,1] \to M$。考虑第 3.1 节中引入的所有记号（尤其是 (3.3)），将 $\bar{\gamma} = \gamma^{\bar{u}}$ 写作某个 $\bar{u} \in U$。命题 3.6 将很容易由以下结果推出（关于二次型的负指标（ind_-）的更多细节，请参见附录 A）：

命题 3.7。假设对于某个 $L > 0$，有 $\|\bar{u}\|_{L^\infty} < L$。那么对于每个 $\kappa > 0$ 和每个 $N \in \mathbb{N}$，存在 ρ、$\Lambda > 0$，使得满足以下性质：对于每个满足下式的 $u \in U$

$$\|u - \bar{u}\|_{L^2} < \rho, \quad \|u\|_{L^\infty} < 2L, \tag{3.14}$$

an 以及每个 $\bar{p}^u \in T^*_y M$ 和 $\bar{p}^u_0 \in \mathbb{R}$，其中 $y\colon = E(u)$ 以及 $(\bar{p}^u, \bar{p}^u_0) \neq (0,\ 0)$，满足

$$\bar{p}^u \cdot D_u E = \bar{p}^u_0\, D_u C, \tag{3.15}$$

以及

$$|\bar{p}^u|_y \geq \Lambda\ |\bar{p}^u_0| \tag{3.16}$$

and

$$\mathrm{ind}_-\left((\bar{p}^u, -\bar{p}^u_0) \cdot \left(D^2_u F\right)_{|\mathrm{Ker}(D_u F)}\right) < N, \tag{3.17}$$

极值曲线 $\psi^{u,\ \bar{p}^u} = (\gamma^u(t)\ \ p^{u,\ \bar{p}^u}(t))\colon\ [0,1] \to T^*M$ 由 *(3.11)* 定义，满足

$$\left|p^{u,\bar{p}^u}(t) \cdot \left[X^i, X^j\right](\gamma^u(t))\right| \leq \kappa\, |\bar{p}^u|_y \qquad \forall t \in [0,1],\, \forall i,j = 1,\dots,m. \tag{3.18}$$

命题 *3.7* 的证明。$D_u E$ 的公式已在 (3.6) 中回顾过，而分别由 C 和 E 的二阶微分定义的二次型为

$$D^2_u C(v) = \|v\|^2_{L^2} \qquad \forall v \in L^2([0,1], \mathbb{R}^m) \tag{3.19}$$

and

$$D^2_u E(v) = 2\int_0^1 S^u(1) S^u(t)^{-1} \left[A^u_v(t) + D^u_v(t)\right] dt \qquad \forall v \in L^2([0,1], \mathbb{R}^m), \tag{3.20}$$

其中，对于每个 $v \in L^2([0,1],\ \mathbb{R}^m)$，函数 $A^u_v,\ D^u_v\colon\ [0,1] \to M_n(\mathbb{R})$ 几乎处处由 $t \in [0,1]$ 定义为

$$A^u_v(t) := \sum_{i=1}^m v_i(t) D_{\gamma^u(t)} X^i\left(\delta^1_v(t)\right), \quad D^u_v(t) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m u_i(t) D^2_{\gamma^u(t)} X^i\left(\delta^1_v(t)\right) \tag{3.21}$$

with

$$\delta^1_v(t) := \int_0^t S^u(t) S^u(s)^{-1} B^u(s) v(s)\, ds. \tag{3.22}$$

上述公式请参阅 [38]。命题 3.7 的证明将由以下引理推出（比较 [38, 引理 2.21，第 63] 页）：

引理 3.8。 存在 $\rho, K > 0$，使得对于任意满足 $\|u - \bar{u}\|_{L^2} < \rho$ 的 $u \in U$、$\|u\|_{L^\infty} < 2L$ 以及任意满足 $[\bar{t}, \bar{t} + \delta] \subset [0,1]$ 的 $\bar{t}$、$\delta > 0$，以下性质成立：对于每个 $v \in$ 核$(D_u E)$ 满足 $\mathrm{Supp}(v) \in [\bar{t}, \bar{t} + \delta]$ 的 $\bar{p}^u \in T^*_y M$，我们有

$$\left| \bar{p}^u \cdot D_u^2 E(v) - Q^{u,\bar{p}^u}_{\bar{t},\delta}(v) \right| \leq K \|v\|^2_{L^2} \, |\bar{p}^u|_y \, \delta^2, \tag{3.23}$$

其中 $Q^{u,\bar{p}^u}_{\bar{t},\delta} : L^2([0,1], \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n$ 是由下式定义的二次型

$$Q^{u,\bar{p}^u}_{\bar{t},\delta}(v) := \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\delta} \int_{\bar{t}}^{t} \langle v(s), M^{u,\bar{p}^u}_{\bar{t}} v(t) \rangle \, ds \, dt \qquad \forall v \in L^2([0,1], \mathbb{R}^m) \tag{3.24}$$

with

$$\left(M^{u,\bar{p}^u}_{\bar{t}} \right)_{i,j} = 2 \, p^{u,\bar{p}^u}(\bar{t}) \cdot D_{\gamma^u(\bar{t})} X^i \left(X^j(\gamma^u(\bar{t})) \right) \qquad \forall i,j = 1, \ldots, m. \tag{3.25}$$

引理 *3.8* 的证明。 固定满足 $[\bar{t}, \bar{t} + \delta] \subset [0,1]$ 的 $\bar{t}$，$\delta > 0$，以及满足 $\mathrm{Supp}(v) \in [\bar{t}, \bar{t} + \delta]$ 的 $v \in$ 核$(D_u E)$。由 (3.11) 和 (3.20)，我们有

$$\bar{p}^u \cdot \left(D_u^2 E \right)_{|\mathrm{Ker}(D_u E)}(v) = 2 \int_0^1 p^{u,\bar{p}^u}(t) \cdot \left[A^u_v(t) + D^u_v(t) \right] dt. \tag{3.26}$$

由于 $v \in$ 核$(D_u E)$ 且 $\mathrm{Supp}(v) \in [\bar{t}, \bar{t} + \delta]$，对于每个 $t \in [0, \bar{t}] \cup [\bar{t} + \delta, \ 1]$，都有 $\delta^1_v(t) = 0$；并且根据柯西-施瓦茨不等式，对于每个 $t \in [\bar{t}, \bar{t} + \delta]$，我们有，

$$\left| \bar{\delta}^1_v(t) \right| \leq \sup_{s \in [0,1]} \left\{ \left\| S^u(t) S^u(s)^{-1} B^u(s) \right\| \right\} \sqrt{t - \bar{t}} \, \|v\|_{L^2} \leq K_1 \|v\|_{L^2} \sqrt{\delta},$$

其中 K_1 是一个常数，仅取决于 S^u,$(S^u)^{-1}$, B^u 的大小，且 u 接近$\bar{u}$。于是我们有

$$A^u_v(t) = D^u_v(t) = 0 \qquad \forall t \in t \in \left[0, \bar{t}\right] \cup \left[\bar{t} + \delta, 1\right],$$

and

$$\left| D^u_v(t) \right| \leq K_2 \|v\|^2_{L^2} \left\| u \right\|_{L^\infty} \delta \qquad \forall t \in \left[\bar{t}, \bar{t} + \delta\right],$$

由此得到

$$\left| \int_0^1 \bar{p}^{u,\bar{p}^u}(t) \cdot D^u_v(t) \, dt \right| \leq K_3 \|v\|^2_{L^2} \, |\bar{p}^u|_y \, \delta^2, \tag{3.27}$$

其中 K_2，K_3 是一些常数，取决于 K_1、$D^2 X^j$ 的大小以及 L

(r记住 $\|u\|_{L^\infty} < 2L$)。注意，由于我们可以对每个 $t \in [\bar{t}, \bar{t}+\delta$ 写出 $]$,

$$\begin{aligned}
& \delta_v^1(t) - \int_{\bar{t}}^t \sum_{j=1}^m v_j(s) X^j\big(\gamma^u(\bar{t})\big)\, ds \\
= \;& \delta_v^1(t) - \int_{\bar{t}}^t \sum_{j=1}^m v_j(s) X^j\big(\gamma^u(s)\big)\, ds + \int_{\bar{t}}^t \sum_{j=1}^m v_j(s) \left[X^j\big(\gamma^u(s)\big) - X^j\big(\gamma^u(\bar{t})\big)\right] ds \\
= \;& \int_0^t S^u(t) S^u(s)^{-1} B^u(s) v(s) - B^u(s) v(s)\, ds \\
& \qquad + \int_{\bar{t}}^t \sum_{j=1}^m v_j(s) \left[X^j\big(\gamma^u(s)\big) - X^j\big(\gamma^u(\bar{t})\big)\right] ds \\
= \;& \int_{\bar{t}}^t \left(S^u(t) - S^u(s)\right) S^u(s)^{-1} B^u(s) v(s)\, ds \\
& \qquad + \int_{\bar{t}}^t \sum_{j=1}^m v_j(s) \left[X^j\big(\gamma^u(s)\big) - X^j\big(\gamma^u(\bar{t})\big)\right] ds,
\end{aligned}$$

我们有（因为 $\|u\|_{L^\infty} < 2L$、 S^u 和 γ^u 都是利普希茨的）

$$\left|\delta_v^1(t) - \int_{\bar{t}}^t \sum_{j=1}^m v_j(s) X^j\big(\gamma^u(\bar{t})\big)\, ds\right| \;\leq\; K_4 \|v\|_{L^2}\, \delta^{\frac{3}{2}}, \quad \forall t \in \big[\bar{t}, \bar{t}+\delta\big], \tag{3.28}$$

其中， K_4 是一个常数，仅取决于 S^u,$(S^u)^{-1}$, B^u 的大小（当 u 接近 $\bar{u}$ 时）、曲线 $\bar{\gamma}$ 邻域内各 X^j 的 Lipschitz 常数以及 L。此外，注意到 $Q^u_{\bar{t},\delta}$, $\bar{p}^u$ 对每个 $v \in L^2$([0,1], $\mathbb{R}^m$) 都满足（由 (3.24)-(3.25)），

$$Q^{u,\bar{p}^u}_{\bar{t},\delta} = 2\int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\delta} p^{u,\bar{p}^u}(t) \cdot \sum_{i=1}^m v_i(t) D_{\gamma^u(\bar{t})} X^i \left(\int_{\bar{t}}^t \sum_{j=1}^m v_j(s) X^j(\gamma^u(\bar{t}))\, ds\right) dt$$

(3.21) 中的第一个等式给出

$$\begin{aligned}
& 2\int_0^1 p^{u,\bar{p}^u}(t) \cdot A^u_v(t)\, dt - Q^{u,\bar{p}^u}_{\bar{t},\delta}(v) \\
= \;& 2\int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\delta} p^{u,\bar{p}^u}(t) \cdot \left(\sum_{i=1}^m v_i(t) D_{\gamma^u(t)} X^i \left[\delta_v^1(t)\right]\right. \\
& \qquad \left. - \sum_{i=1}^m v_i(t) D_{\gamma^u(\bar{t})} X^i \left[\int_{\bar{t}}^t \sum_{j=1}^m v_j(s) X^j\big(\gamma^u(\bar{t})\big)\, ds\right]\right) dt \\
= \;& 2\int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\delta} p^{u,\bar{p}^u}(t) \cdot \left(\sum_{i=1}^m v_i(t) D_{\bar{\gamma}(t)} X^i\right) \left[\delta_v^1(t) - \int_{\bar{t}}^t \sum_{j=1}^m v_j(s) X^j\big(\gamma^u(\bar{t})\big)\, ds\right] dt.
\end{aligned}$$

由式 (3.28)，我们推知

$$\left|2\int_0^1 p^{u,\bar{p}^u}(t) \cdot A^u_v(t)\, dt - Q^{u,\bar{p}^u}_{\bar{t},\delta}(v)\right| \leq K_5 \|v\|^2_{L^2}\, |\bar{p}^u|_y\, \delta^2,$$

其中某个常数 K_5 取决于这些数据，由式 (3.27) 可得

$$\left| 2\int_0^1 p^{u,\bar{p}^u}(t)\cdot[A_v^u(t)+D_v^u(t)]\,dt - Q_{\bar{t},\delta}^{u,\bar{p}^u}(v)\right| \le K_6\,\|v\|_{L^2}^2\;|\bar{p}^u|_y\;\delta^2,$$

其中某个常数 K_6 取决于这些数据。由 (3.26) 可轻易得出结论。 □

回到命题 3.7 的证明，我们固定 $\kappa>0$, $N\in\mathbb{N}$, $u\in U$ ，使得$\|u-\bar{u}\|_{L^2}<\rho$, $\|u\|_{L^\infty}<2L$ ，并反设存在 $\bar{t}\in(0,1)$ 和 $i\neq j\in\{1,\cdots,m\}$ ，满足

$$P_{\bar{i},\bar{j}}(\bar{t}) \;:=\; \frac{p^{u,\bar{p}^u}(\bar{t})}{|\bar{p}^u|_y}\cdot\Big[X^{\bar{i}},X^{\bar{j}}\Big]\big(\gamma^u(\bar{t})\big)>\kappa. \tag{3.29}$$

考虑 $\delta>0$ ，其中 $[\bar{t},\bar{t}+\delta]\subset[0,1]$ 稍后选定。注意，对每个 $v\in L^2\big([0,1],\mathbb{R}^m\big)$，都有

$$\begin{aligned} Q_{\bar{t},\delta}^{u,\bar{p}^u}(v) &= \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\delta}\int_{\bar{t}}^{t}\langle v(s),M_{\bar{t}}^{u,\bar{p}^u}v(t)\rangle\,ds\,dt\\ &= \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\delta}\langle w^v(t),M_{\bar{t}}^{u,\bar{p}^u}v(t)\rangle\,dt\\ &= \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\delta}\sum_{i,j=1}^{m}w_i^v(t)\left(M_{\bar{t}}^{u,\bar{p}^u}\right)_{i,j}v_j(t)\,dt, \end{aligned} \tag{3.30}$$

with

$$w^v(t):=\int_{\bar{t}}^{t}v(s)\,ds\qquad\forall t\in[\bar{t},\bar{t}+\delta].$$

令 $\bar{N}:=N+n+1$ ，并用 $L=L_{\bar{t},\delta}^2$ 表示 $L^2\big([0,1],\mathbb{R}^m\big)$ 中的向量空间，该空间由所有控制 v组成，且对每个控制，都存在一个序列 $\{a_1,\ldots,a_{\bar{N}}\}$ 使得

$$\begin{cases} v_{\bar{i}}(t) &= \sum_{k=1}^{\bar{N}}a_k\cos\left(k\frac{(t-\bar{t})2\pi}{\delta}\right)\\ v_{\bar{j}}(t) &= \sum_{k=1}^{\bar{N}}a_k\sin\left(k\frac{(t-\bar{t})2\pi}{\delta}\right)\end{cases}\qquad\forall t\in\big[\bar{t},\bar{t}+\delta\big],$$

$$\text{and}\quad v_i(t)=0,\quad\forall i\neq\bar{i},\bar{j}\qquad\forall t\in[0,1].$$

那么，对于每个 $v\in L$,

$$\begin{cases} w_{\bar{i}}^v(t) &= \frac{\delta}{2\pi}\sum_{k=1}^{\bar{N}}\frac{a_k}{k}\sin\left(k\frac{(t-\bar{t})2\pi}{\delta}\right)\\ w_{\bar{j}}^v(t) &= \frac{\delta}{2\pi}\sum_{k=1}^{\bar{N}}\frac{a_k}{k}\left(1-\cos\left(k\frac{(t-\bar{t})2\pi}{\delta}\right)\right),\end{cases}\qquad\forall t\in\big[\bar{t},\bar{t}+\delta\big],$$

$$\text{and}\quad w_i^v(t)=0,\quad\forall i\neq\bar{i},\bar{j}\qquad\forall t\in[0,1],$$

这就得到了

$$\int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\delta}w_{\bar{i}}^v(t)v_{\bar{j}}(t)\,dt=\sum_{k=1}^{\bar{N}}\frac{\delta^2a_k^2}{4\pi k},\quad\int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\delta}w_{\bar{j}}^v(t)v_{\bar{i}}(t)\,dt=-\sum_{k=1}^{\bar{N}}\frac{\delta^2a_k^2}{4\pi k}$$

and

$$\int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\delta} w_{\bar{i}}^{v}(t)v_{\bar{i}}(t)\,dt = \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\delta} w_{\bar{j}}^{v}(t)v_{\bar{j}}(t)\,dt = 0.$$

总之，由式 (3.30)，并注意到

$$P_{\bar{i},\bar{j}}(\bar{t}) = \frac{1}{2|\bar{p}^u|_y}\cdot\left(\left(M_{\bar{t}}^{u,\bar{p}^u}\right)_{\bar{j},\bar{i}} - \left(M_{\bar{t}}^{u,\bar{p}^u}\right)_{\bar{i},\bar{j}}\right)$$

我们推得

$$\begin{aligned} Q_{\bar{t},\delta}^{u,\bar{p}^u}(v) &= \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\delta} w_{\bar{i}}^{v}(t)\left(M_{\bar{t}}^{u,\bar{p}^u}\right)_{\bar{i},\bar{j}} v_{\bar{j}}(t) + w_{\bar{j}}^{v}(t)\left(M_{\bar{t}}^{u,\bar{p}^u}\right)_{\bar{j},\bar{i}} v_{\bar{i}}(t)\,dt \\ &= -\sum_{k=1}^{\bar{N}} \frac{\delta^2 a_k^2|\bar{p}^u|_y}{2\pi k} P_{\bar{i},\bar{j}}(\bar{t}), \end{aligned} \tag{3.31}$$

其中我们有

$$\|v\|_{L^2}^2 = \delta\sum_{k=1}^{\bar{N}} a_k^2. \tag{3.32}$$

现在区分 $\bar{p}_0^u = 0$ 和 $\bar{p}_0^u \neq 0$两种情况。

情况 1: $\bar{p}_0^u = 0$。
若 $\delta > 0$ 足够小，则由 (3.23)、(3.31) 和 (3.32) 可得

$$\bar{p}^u \cdot D_u^2 E(v) < 0 \qquad \forall v \in L\setminus\{0\},$$

其中向量空间 $L \subset L^2\big([0,1],\mathbb{R}^m\big)$ 的维数为 $\bar{N} = N + n + 1$。由于 $\bar{p}_0^u = 0$且 codim(核($D_u E$)) $\leq n$，这与 (3.17) 矛盾。

情形 2: $\bar{p}_0^u \neq 0$。
根据 (3.29)、(3.31) 和 (3.32)，并注意到

$$\sum_{k=1}^{\bar{N}} a_k^2 \leq \bar{N}\sum_{k=1}^{\bar{N}} \frac{a_k^2}{k},$$

我们注意到，对于每个 $v \in L\setminus\{0\}$，都有

$$\frac{Q_{\bar{t},\delta}^{u,\bar{p}^u}(v) - \bar{p}_0^u\|v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{L^2}^2|\bar{p}^u|_y\delta^2} = \frac{-P_{\bar{i},\bar{j}}(\bar{t})}{2\pi}\frac{\sum_{k=1}^{\bar{N}}\frac{a_k^2}{k}}{\delta\sum_{k=1}^{\bar{N}}a_k^2} - \frac{\bar{p}_0^u}{|\bar{p}^u|_y\delta^2} \leq -\frac{\kappa}{2\pi\bar{N}\delta} + \frac{|\bar{p}_0^u|}{|\bar{p}^u|_y\delta^2}.$$

取足够小的 $\delta > 0$，使得

$$-\frac{\kappa}{2\pi\bar{N}\delta} + K < 0$$

并假设

$$\frac{|\bar{p}_0^u|}{|\bar{p}^u|_y\delta^2} < \left|-\frac{\kappa}{2\pi\bar{N}\delta} + K\right| \quad\Leftrightarrow\quad |\bar{p}^u|_y > \left|K\delta^2 - \frac{\kappa\delta}{2\pi\bar{N}}\right|^{-1}|\bar{p}_0^u|.$$

由（3.23）及上述不等式，并由于 $D_u^2 C = \|\cdot\|_{L^2}$，我们推得

$$\bar{p}^u \cdot D_u^2 E(v) - \bar{p}_0^u D_u^2 C(v) < 0 \qquad \forall v \in L \setminus \{0\},$$

其中向量空间 $L \subset L^2\big([0,1],\ \mathbb{R}^m\big)$ 的维数为 $\bar{N} = N + n + 1$。由于 codim(核($D_u F$)) $\leq n+1$，这与 (3.17) 矛盾。

□

注 3.9。我们注意到，在 $u = \bar{u}$ 和 $\bar{p}_0^u = 0$的情形下，命题 *3.7* 断言，如果我们有

$$\operatorname{ind}_-\left(\bar{p}^{\bar{u}} \cdot \big(D_{\bar{u}}^2 E\big)_{|\operatorname{Ker}(D_{\bar{u}} E)}\right) < +\infty$$

对于满足 $\bar{p}^{\bar{u}} \cdot D_{\bar{u}} E = 0$ 的某个 $\bar{p}^{\bar{u}} \neq 0$，即 $\bar{p}^{\bar{u}} \in Im\,(D_{\bar{u}} E)^{\perp}$，则相应的异常极值轨线 $\psi^{\bar{u}},\ \bar{p}^{\bar{u}}$ 满足 *Goh* 条件。这是 *Agrachev* 和 *Sarychev* 关于异常测地线的经典 *Goh* 条件，参见 *[10,* 命题 *3.6*，第 *389]* 页，以及 *[38,* 定理 *2.20*，第 *61]* 页。

命题 *3.6* 的证明。设 $x \in M$, $y \in M \setminus \mathrm{Lip}(f_x)$, $p \in \partial_{PL}^- f_x(y)$ 是两个序列$\{(y_k,\ p_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$属于 T^*M，且 $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$属于 $(0,\ +\infty)$，满足

$$\lim_{k\to+\infty} |p_k|_{y_k} = +\infty, \quad \lim_{k\to+\infty} (y_k, \lambda_k p_k) = (y,p) \quad \text{and} \quad p_k \in \partial^- f_x(y_k) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

并且 $\gamma:\ [0,1] \to M$ 是一条从 x 到 y 的水平极小化路径，它是序列 $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 中某个子列的一致极限；该序列由正规极值曲线 $\psi_k\colon [0,1] \to T^*M$ 的投影给出的极小测地线组成，并满足 $\psi_k(1) = (y_k,\ p_k)$。由命题 2.2 可知，我们确实可以假设存在两个序列 $\{(\tilde{y}_k,\ \tilde{p}_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$~属于 T^*M，且 $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$属于 $(0,\ +\infty)$，满足

$$\lim_{k\to+\infty} |\tilde{p}_k|_{\tilde{y}_k} = +\infty, \quad \lim_{k\to+\infty} \left(\tilde{y}_k, \tilde{\lambda}_k \tilde{p}_k\right) = (y,p) \quad \text{and} \quad \tilde{p}_k \in \partial_P^- f_x(\tilde{y}_k) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

并且 $\gamma:\ [0,1] \to M$ 是序列~中的极小测地线 $\{\tilde{\gamma}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$的某个子列的一致极限；这些极小测地线由正规极值曲线 $\psi_k\colon [0,1] \to T^*M$ 的投影给出，并满足 $\tilde{\psi}_k(1) = (\tilde{y}_k,\ \tilde{p}_k)$。如第 3.1 节所述，假设对于某个 $\bar{u}$，有 $\gamma = \gamma^{\bar{u}}$，其中 $\bar{u}$ 属于开集 U，该开集包含于 $L^2([0,1],\ \mathbb{R}^m)$，且端点映射 E 定义良好并且光滑。那么，当 k 足够大时，存在 $\tilde{u}_k \in U$ 使得 $\tilde{\gamma}_k = \bar{\gamma}^{u_k}$，而且不失一般性，我们可以用弧长对 $\bar{\gamma}^{u_k}$ 进行参数化，并假设在 $[0,1]$，上几乎处处有 $|\tilde{u}_k(t)| = d_{SR}(x,\ \tilde{y}_k)$，从而 $\|\tilde{u}_k\|_\infty < \infty$。由注 3.3 可知

$$D_{\tilde{u}_k}^2 C(v) - \tilde{p}_k \cdot D_{\tilde{u}_k}^2 E \geq 0 \qquad \forall v \in \operatorname{Ker}(D_{\tilde{u}_k} E)$$

因此，我们有

$$\operatorname{ind}_-\left((-\tilde{p}_k, 1) \cdot \big(D_{\tilde{u}_k}^2 F\big)_{|\operatorname{Ker}(D_{\tilde{u}_k} F)}\right) = 0.$$

因此，由命题 3.7 可得

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\tilde{\psi}_k(t)}{|\tilde{p}_k|_{\tilde{y}_k}} \cdot \left[X^i, X^j\right](\tilde{\gamma}_k(t)) = 0.$$

通过紧性论证，我们得出结论：取适当子列后，~ ~极值轨线的序列 $\{\lambda_k \psi_k\}_k$ 收敛到一条满足所需性质的异常极值轨线（参见例如 [45,引理 4.8]）。

□

3.4 MinimizingSard 猜想的刻画

现在我们可以给出极小化Sard猜想的几种不同刻画（回顾一下， f_x 已在（3.1）中定义）。

命题 3.10。 对于每个 $x \in M$，以下性质等价:

(i) 闭集合 $Abn^{min}(x)$ 在 M 中的勒贝格测度为零。*(ii)* 闭集合 $Goh\text{-}Abn^{min}(x)$ 在 M 中的勒贝格测度为零。*(iii)* 对几乎所有的 $y \in M$, $\partial_{PL}^{-} f_x(y) = \emptyset$。*(iv)* 对几乎所有的 $y \in M$, $\partial^{-} f_x(y) \neq \emptyset$。*(v)* 集合 $Lip^{-}(f_x)$ 在 M 中具有全勒贝格测度。*(vi)* 函数 d_x 在 M 中几乎处处可微。*(vii)* 开集 $Lip(f_x)$ 在 M 中具有全勒贝格测度。*(viii)* 对几乎所有的 $y \in M$, $\partial_{P}^{-} f_x(y) \neq \emptyset$。*(ix)* 函数 f_x 在 M 的一个具有全勒贝格测度的开子集上光滑

M中的测度。

命题 *3.10* 的证明。(ix) $\Rightarrow$ (viii) 和 (ix) $\Rightarrow$ (vii) 的蕴含关系显然；(viii) $\Rightarrow$ (iv) 由包含关系 $\partial_{P}^{-} f_x \subset \partial^{-} f_x$ 得出；(vii) $\Rightarrow$ (vi) 是拉德马赫定理的推论；(vii) $\Rightarrow$ (v) 由包含关系 Lip(d_x) $\subset$Lip^{-}(d_x) 得出；(vii) $\Leftrightarrow$ (iii) 是命题 2.11 的推论；(v) $\Rightarrow$ (iv) 是命题 2.7 的推论；而 (vi) $\Rightarrow$ (iv) 根据 $\partial^{-} d_x$ 的定义得出。此外，(iv) $\Rightarrow$ (i) 由命题 3.2 以及应用于映射 exp$_x$ 的 Sard 定理得出；(ii)$\Rightarrow$ (vii) 是命题 3.6 的推论；(i) $\Rightarrow$ (ii) 则由包含关系 Goh-Abn^{min}(x) $\subset$Abn^{min}(x) 得出。因此，剩下只需证明 (i) $\Rightarrow$ (ix)；证明见 [11,§2.1]。

□

4 定理 1.1 的证明

设 $x \in M$ 固定， M_x 是这样一组点 $y \in M \setminus \{x\}$ ：对于这些点，所有极小测地线的 Goh 秩至多为 1。根据假设，该集合在 M 中具有全勒贝格测度。证明定理 1.1 的第一步是说明，我们确实可以假设在 $\mathbb{R}^n$ 的开单位球中工作，且其分布可由 m 个光滑向量场进行全局参数化。对于每个 $y \in \mathbb{R}^n$ 和 $r > 0$，我们用 $B_r(y)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中以 y 为中心、半径为 r 的开单位球。此外，回顾一下，若可测集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 满足以下条件，则点 $y \in \mathbb{R}^n$ 称为其勒贝格密度点（或密度为 1 的点）：

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n\left(B_r(y) \cap E\right)}{\mathcal{L}^n\left(B_r(y)\right)} = 1,$$

其中 $\mathcal{L}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的勒贝格测度，并且如果 E 的勒贝格测度为正，那么 E 中几乎每个点都是 E 的勒贝格密度点（例如 [23]）。我们的第一个结果如下:

命题 4.1. 如果$\mathrm{Abn}^{min}(x)$ 在 M中的勒贝格测度为正，那么存在一个完备次黎曼结构 $(\Delta, \bar{g})$ ，其在 $B_1(0)$ 上的秩为 m ，由 $B_1(0)$上的一族光滑向量场 $\bar{\mathcal{F}} = \{\bar{X}^1, \ldots, \bar{X}^m\}$ 所生成，且该族为正交归一族；此外还存在一点$\bar{y} \in B_1(0) \setminus \{0\}$，使得以下性质成立：

(i) 从0 到 $\bar{y}$ 的所有最短水平路径的 *Goh* 秩至多为1,

(ii) $\bar{y}$ 是$\mathrm{Abn}^{min}(0)$的一个勒贝格密度点。

命题 *4.1* 的证明。 我们先回顾一个关于极小测地线紧致性的结果。对于每个 $y \in M$, 我们用 $\Gamma^y \subset W^{1,2}([0,1], M)$ 表示从 x 到 y的极小测地线集合。以下结果的证明请参见 [1, 38]：

引理 4.2。 对于每个紧集 $\mathcal{K} \subset M$，满足 $y \in \mathcal{K}$ 的 $\gamma \in \Gamma^y$ 构成 $W^{1,2}([0,1], M)$ 的一个紧子集，并且映射 $y \in M \mapsto \Gamma^y \in \mathcal{C}(W^{1,2}([0,1], M))$ 具有闭图（此处， $\mathcal{C}(W^{1,2}([0,1], M))$ 表示 $W^{1,2}([0,1], M)$的紧子集所构成的集合，并赋予 *Hausdorff*拓扑）。

现在假设 $\mathrm{Abn}^{min}(x)$ 在 M 中具有正的勒贝格测度，并取集合 $\mathrm{Abn}^{min}(x) \cap M_x$ 的一个勒贝格密度点 $\bar{y}$。结合引理 4.2，以及如第 3.1 节所示可沿每条极小测地线作出的参数化，可得以下结果：

引理 4.3。 存在 $\bar{y}$ 的一个开邻域 $\mathcal{B}$、一个正整数 N、 N 条极小测地线 $\bar{\gamma}^1$、.....、 $\bar{\gamma}^N \in \Gamma^{\bar{y}}$，以及 N 个与 $B_1(0)$ 微分同胚、分别包含 $\bar{\gamma}^1([0,1])$ 、 ..... 、 $\bar{\gamma}^N([0,1])$ 的开集 $\mathcal{V}^1$ 、 ..... 、 $\mathcal{V}^N \subset M$ ；还存在 N 组光滑向量场的标准正交族 $\mathcal{F}^1 = \{X^{1,1}, \ldots, X^{1,m}\}$、.....、 $\mathcal{F}^N = \{X^{N,1}, \ldots, X^{N,m}\}$，分别定义在 $\mathcal{V}^1$、.....、 $\mathcal{V}^N$ 上；并且存在包含 $\mathcal{B}$ 的 N 个开集 $\mathcal{W}^1$、.....、 $\mathcal{W}^N$，使得

$$\bar{\gamma}^1([0,1]) \subset \overline{\mathcal{W}}^1 \subset \mathcal{V}^1, \ldots, \bar{\gamma}^N([0,1]) \subset \overline{\mathcal{W}}^N \subset \mathcal{V}^N$$

使得以下性质得到满足：

(i) *For every* $k = 1, \ldots, N$ *and every* $z \in \mathcal{V}^k$, $\Delta(z) = Span\{X^{k,1}(z), \ldots, X^{k,m}(z)\}$

(ii) 对于每个 $y \in \mathcal{B}$ 和每个 $\gamma \in \Gamma^y$，存在 $k_\gamma \in \{1, \ldots, N\}$ 使得

$$\gamma([0,1]) \subset \mathcal{W}^{k_\gamma}.$$

现在我们需要考虑一族从 x 出发的次黎曼距离，使其在 $\mathcal{B}$ 上的最小值与 $d_{SR}(x, \cdot)$ 相一致（相对于 (Δ, g) 的次黎曼距离）。为此，我们陈述以下引理，其证明留给读者。

引理 4.4。 对于每个 $k = 1$，..., N，存在一个光滑函数 ψ^k： $\mathcal{V}^k \to [1, +\infty)$，满足以下性质：

(i) $\psi^k(z) = 1$ *for all* $z \in \mathcal{W}^k$.

(ii) $\psi^k(z) > 1$ 对所有 $z \in \mathcal{V}^k \setminus \mathcal{W}^k$均成立。

(iii) $\mathcal{V}^k$ 上的次黎曼结构 $(\Delta, g^k := \psi^k g)$ 是完备的。

对于每个 $k = 1, \dots, N$，我们定义函数 $F^k\colon \mathcal{V}^k \to [0, +\infty)$ 如下：

$$F^k(y) := \frac{1}{2} d_{SR}^{g^k}(x, y)^2 \qquad \forall y \in \mathcal{V}^k,$$

其中，$d_{SR}^{g^k}$ 表示与 (Δ, g^k) 相关联的次黎曼距离。由于每个次黎曼结构 (Δ, g^k) 在 $\mathcal{V}_k$ 上都是完备的，因此每个 F^k 都是连续的。此外，由于 $\mathcal{B}$ 包含于所有 $\mathcal{W}^k$ 中，根据引理 4.3 (ii) 和引理 4.4 (i)，我们有：

$$f_x(y) := \frac{1}{2} d_{SR}(x, y)^2 = \min\Big\{F^1(y), \dots, F^N(y)\Big\} \qquad \forall y \in \mathcal{B}.$$

必要时置换指标 $1, \dots, N$，我们确实可以假设存在 $\bar{N} \in \{1, \dots, N\}$ 使得

$$f_x(\bar{y}) = F^1(\bar{y}) = \cdots = F^{\bar{N}}(\bar{y}),$$

因此存在 $\bar{y}$ 的一个开邻域 $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$，满足

$$f_x(y) = \min\Big\{F^1(y), \dots, F^{\bar{N}}(y)\Big\} \qquad \forall y \in \mathcal{B}'.$$

此外，对于每个 $y \in \mathcal{B}'$ 和每个 $k \in \{1, \dots, \bar{N}\}$，若将关于 (Δ, g^k) 从 x 到 y 的极小测地线集合记为 $\Gamma_k^y \subset W^{1,2}([0,1], M)$，则根据引理 4.3 (ii) 和引理 4.4 (i)-(ii)，有

$$\Gamma_k^{\bar{y}} = \Gamma^{\bar{y}} \qquad \forall k = 1, \dots, \bar{N},$$

此外，由于 $\bar{y} \in M_x$，从 x到 $\bar{y}$的所有极小测地线的 Goh 秩至多为 1。因此，由于 $\Gamma^{\bar{y}}$是 $W^{1,\,2}([0,1],\ M)$ 的紧子集，且映射 $y \in \mathcal{B}' \mapsto \Gamma_k^y \in \mathcal{C}(W^{1,\,2}([0,1],\ M))$，其中 $k = 1,\ \dots\dots,\ \bar{N}$，具有闭图，并且映射 $\gamma \in \Omega_x^\Delta \mapsto$ Goh 秩$(\gamma) \in \mathbb{N}$（回想一下，Ω_x^Δ 表示水平路径的集合 $\gamma\colon\ [0,1] \to M$ 满足 $\gamma(0) = x$），是上半连续的，因此我们推得存在 $\bar{y}$ 的一个开邻域 $\mathcal{B}'' \subset \mathcal{B}'$，使得

$$\text{Goh-rank}(\gamma) \le 1 \qquad \forall y \in \mathcal{B}'', \forall k = 1, \dots, \bar{N}, \forall \gamma \in \Gamma_k^y.$$

我们现在可以完成命题 4.1 的证明。我们断言，存在 k属于 $\{1, \dots, \bar{N}\}$，使得 $\mathcal{B}'' \setminus \text{Lip}^-(F^{\bar{k}})$ 具有正的勒贝格测度。事实上，反之，便存在一个集合 $\mathcal{B}$，它在 $\mathcal{B}''$ 中具有全勒贝格测度，且其中每一点$\tilde{\mathcal{B}}$对所有 $k = 1$、……、$\bar{N}$都属于 $\text{Lip}^-(F^k)$。那么，对每个 $y \in \tilde{\mathcal{B}}$，每个 F^k都存在一个在 y处从下方支撑它的支撑函数 φ^k，该函数在其定义域上是利普希茨的，因此函数 $\min\{\varphi^k \mid k = 1, \dots, N\}$是一个在 y处从下方支撑 f_x的支撑函数，且在其定义域上是利普希茨的（其定义域由 φ^1、……、φ^N的定义域之交给出）。因此，$\tilde{\mathcal{B}}$包含于 $\text{Lip}^-(f_x)$，由此命题 3.10 的证明可知，$\text{Abn}^{min}(x) \cap \mathcal{B}''$ 的勒贝格测度为零。这与 $\bar{y} \in \mathcal{B}$ 是 $\text{Abn}^{min}(x)$ 的勒贝格密度点这一事实矛盾。最后，考虑集合中的一个勒贝格密度点 $\hat{}y$，即可完成证明

$$\mathcal{B}'' \setminus \text{Lip}^-(F^{\bar{k}}) \subset \mathcal{B}'' \setminus \text{Lip}(F^{\bar{k}}) \subset \text{Abn}_{\bar{k}}^{min}(x) \cap \mathcal{B}''$$

（该包含关系由命题 2.11 和命题 3.5 得出；$\mathrm{Abn}_k^{min}(x)$ 表示这样一个点集：其中的点可以通过相对于 $(\Delta、\ g^{\bar{k}})$ 的奇异最短水平路径从 x到达。）然后，利用从 $\mathcal{V}^{\bar{k}}$到 $B_1(0)$ 的微分同胚，将次黎曼结构 $(\Delta、\ g^{\bar{k}})$、 $\mathcal{V}^{\bar{k}}$上的向量场族 $\mathcal{F}^{\bar{k}} = \{X^{\bar{k},1}, \dots, X^{\bar{k},m}\}$ 以及 $\hat{y}$推前到 $B_1(0)$（注意，要得到一个标准正交族，必须将每个向量场乘以 $1/\sqrt{\psi^{\bar{k}}}$）。

□

现在，为了导出矛盾，我们假设 $\mathrm{Abn}^{min}(x)$ 在 M 中具有正的勒贝格测度，并考虑命题 4.1 给出的 $B_1(0)$ 上的次黎曼结构 $(\Delta, \bar{g})$、 $B_1(0)$ 上由光滑向量场 $\bar{\mathcal{F}}$ 组成的标准正交族，以及 $\mathrm{Abn}^{min}(0)$ 的勒贝格密度点 $\bar{y}$。我们定义连续函数 $F\colon B_1(0) \to [0, +\infty)$ 为

$$F(y) := \frac{1}{2} d_{SR}(0, y)^2 \qquad \forall y \in B_1(0),$$

其中， d_{SR} 表示与 $(\Delta, \bar{g})$ 相关联的次黎曼度量；我们分别用$^-$表示与 $(\Delta, \bar{g})$ 相关联的指数映射 $\exp_0$ ，用 $\mathcal{C}_0$ 表示其临界值的集合，用 M_0 表示 $y \in B_1(0) \setminus \{0\}$ 中满足从 0 到 y 的所有极小测地线的 Goh 秩至多为 1 的点的集合，并用 $\Gamma^y \subset W^{1,2}([0,1], B_0(1))$ 表示从 0 到 $y \in B_1(0)$ 的极小测地线集合。由命题 3.10 的证明以及映射 $\gamma \in \Omega_0^{\bar{\Delta}} \mapsto \text{Goh 秩}(\gamma) \in \mathbb{N}$ 的上半连续性可知（其中 $\Omega_0^{\bar{\Delta}}$表示水平路径 $\gamma\colon [0,1] \to B_0(1)$ 满足 $\gamma(0) = 0$ 的集合），按如下方式定义的集合 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_1(0)$

$$\mathcal{A} := M_0 \setminus \left(\mathrm{Lip}^-(F) \cup \mathcal{C}_0\right) \tag{4.1}$$

具有正的勒贝格测度。我们选取 $\mathcal{A}$ 的一个勒贝格密度点 $\hat{y}$。

然后，我们将 $u \in L^2([0,1],\ \mathbb{R}^m)$ 中使柯西问题的解 $\gamma^u\colon [0,1] \to B_1(0)$ 有定义的开集记为 U

$$\dot{\gamma}^u(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\, \bar{X}^i\left(\gamma^u(t)\right) \ \text{ for a.e. } t \in [0,1], \quad \gamma^u(0) = 0$$

我们将与 0^- 和 $\mathcal{F}$ 相关联的端点映射记为 $E : U \to B_1(0)$，其定义为

$$E(u) := \gamma^u(1) \qquad \forall u \in U,$$

并回顾一下，函数 $C\colon L^2([0,1],\ \mathbb{R}^m) \to [0, +\infty)$ 已在第 3.1 节中定义为

$$C(u) := \frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2 \qquad \forall u \in L^2([0,1], \mathbb{R}^m).$$

此外，对于每个向量空间 $V \subset \mathbb{R}^n$，我们将到 V 的正交投影（相对于欧几里得度量）记为 $\mathrm{Proj}_V^{\perp}\colon \mathbb{R}^n \to V$；对于每个 $y \in \mathbb{R}^n$，我们将仿射空间 $V(y)$ 定义为

$$V(y) := \{y\} + V.$$

定理 1.1 证明的第二步是证明以下结果，该结果为下一步做准备。

命题 4.5. 存在 δ、r、$\rho \in (0,\ 1)$、$K > 0$，一个控制 $\hat{u}$ 属于 U 且满足 $\gamma^{\hat{u}} \in \Gamma^{\hat{y}}$，一个线性超平面 $V \subset \mathbb{R}^n$ 以及一个光滑函数 $h\colon\ [0, \delta^2/4) \to [0, +\infty)$，使得以下性质成立：

(i) 对每个 $u \in U$，若 $\|u - \hat{u}\|_{L^2} < \delta$ 且对每个 $z \in V(\gamma^u(1)) \cap B_\rho(\gamma^u(1))$，则存在 $v \in U$ 使得

$$\mathrm{Proj}^{\perp}_{V(\gamma^u(1))}\left(\gamma^v(1)\right) = z, \tag{4.2}$$

$$|\gamma^v(1) - z| \le K\,|z - \gamma^u(1)|\,, \tag{4.3}$$

$$C(v) \le C(u) + K\,|z - \gamma^u(1)|\,, \tag{4.4}$$

$$\left|\|v - \hat{u}\|^2_{L^2} - \|u - \hat{u}\|^2_{L^2}\right| \le K\,|z - \gamma^u(1)|\,. \tag{4.5}$$

(ii) 函数 h 光滑、单调不减，并满足

$$h(\alpha) = 0\ \forall \alpha \in [0, \delta^2/4], \quad h(\alpha) > 0\ \forall \alpha \in (\delta^2/4, \delta^2), \quad \lim_{\alpha \to \delta^2} h(\alpha) = +\infty.$$

(iii) 由下式定义的函数 $W\colon\ B_r(\hat{y}) \to [0, +\infty)$

$$W(y) := \inf\Big\{C(u) + h\left(\|u - \hat{u}\|^2_{L^2}\right)\ |\ u \in U\ s.t.\ \gamma^u(1) = y\Big\} \qquad \forall y \in B_r(\hat{y})$$

是连续的，且集合

$$\mathcal{K} := \Big\{y \in B_{r/2}(\hat{y}) \setminus \mathrm{Lip}^-(W)\,|\,W(y) = F(y)\Big\}$$

具有正的勒贝格测度。

命题 *4.5* 的证明。我们先给出下面这个引理，它是由 $\hat{y}$ 的构造直接得到的。

引理 4.6. 对于每个 $\gamma \in \Gamma^y$，以下情形之一成立：

(i) γ 不是奇异水平路径。

(ii) γ 是奇异水平路径，且 *Goh* 秩$(\gamma) = 1$。

引理 *4.6* 的证明。固定 $\gamma \in \Gamma^y$。如果 γ 是正规极值曲线[-]（相对于 $(\Delta, \bar{g})$）的投影，则存在 $p \in T^*_0 B_1(0) = (\mathbb{R}^n)^*$，使得 $y = \exp_0(p)$。由于 $\hat{y} \in \mathcal{A} \subset B_1(0) \setminus \mathcal{C}_0$，映射 $\exp_0$ 在 p 处是浸没，因此 γ 不是奇异水平路径。否则，γ 不是正规极值曲线的投影，因此它是奇异的，并且存在满足 Goh 条件的异常提升（见注 3.9）。由于 $\hat{y}$ 属于 M_0，我们有 Goh 秩$(\gamma) = 1$。 □

[-]我们需要考虑 Γ^y 中的所有极小测地线，以区分引理 4.6 的情形 (i) 和 (ii)。根据反函数定理（例如，见 [38, 定理 3.14 的证明，第 99] 页），很容易得出以下结果。

引理 4.7。固定满足 $\gamma^u \in \Gamma^y$ 且 γ^u 非奇异的 $u \in U$。那么存在 δ、$\rho \in (0,\ 1)$ 和 $K > 0$，使得以下性质成立：对于每个满足 $\|v-u\|_{L^2} < \delta$ 的 $v \in U$，以及每个 $z \in B_\rho(\gamma^v(1))$，都存在 $w \in U$，使得

$$\gamma^w(1) = z, \tag{4.6}$$

$$C(w) \leq C(v) + K\left|z - \gamma^v(1)\right|, \tag{4.7}$$

$$\|w-v\|_{L^2} \leq K\left|z-\gamma^v(1)\right|, \tag{4.8}$$

其中最后一个不等式意味着

$$\left|\|w-u\|_{L^2}^2 - \|v-u\|_{L^2}^2\right| \leq K(K+2)\left|z-\gamma^v(1)\right|. \tag{4.9}$$

对于每条奇异极小测地线 $\gamma^u \in \Gamma^{\hat{y}}$，满足 $u \in U$（由于 $\hat{y} \in M_0$，所有这些γ^u 都满足 Goh 秩 $(\gamma^u) = 1$），我们将满足 Goh 条件且有 $\psi(1) = (\hat{y},\ p)$ 的 γ^u 的异常提升 ψ 所对应的余向量 $p \in (\mathbb{R}^n)^*$ 所在的向量直线记为 P^u，并将超平面 $V^u \subset \mathbb{R}^n$ 定义为

$$V^u := (P^u)^\perp := \left\{v \in \mathbb{R}^n \,|\, p \cdot v = 0,\ \forall p \in P^u\right\}. \tag{4.10}$$

注意，由于 P^u 中的任意余向量都湮灭了与 $\mathcal{F}$ 在 U 中相关的、从 0 出发的端点映射 E 的像（见第 3.1 节），因此有

$$\mathrm{Im}\,(D_u E) \subset V^u. \tag{4.11}$$

下面的引理源于 Agrachev 和 Sachkov 提出的一个定理的推广，该定理给出了映射在二阶意义下局部开性的充分条件[8], 。结果的陈述及其证明见附录 A。

引理 4.8. 固定 $u \in U$，其中 $\gamma^u \in \Gamma^y$ 和 γ^u 是 *Goh* 秩 *1* 的奇异对象。则存在 δ、$\rho \in (0,1)$ 和 $K > 0$，使得满足以下性质：对于任意满足 $\|v-u\|_{L^2} < \delta$ 的 $v \in U$，以及任意 $z \in V^u(\gamma^v(1)) \cap B_\rho(\gamma^v(1))$，都存在 $w \in U$，使得

$$\mathrm{Proj}^{\perp}_{V^u(\gamma^v(1))}\left(\gamma^w(1)\right) = z, \tag{4.12}$$

$$\left|\gamma^w(1) - z\right| \leq K\left|z-\gamma^v(1)\right|, \tag{4.13}$$

$$C(w) \leq C(v) + K\left|z-\gamma^v(1)\right|, \tag{4.14}$$

$$\left|\|w-u\|_{L^2}^2 - \|v-u\|_{L^2}^2\right| \leq K\left|z-\gamma^v(1)\right|. \tag{4.15}$$

ˆ引理 *4.8* 的证明. 固定 $u \in U$，其中 $\gamma^u \in \Gamma^y$ 是 Goh 秩 1 的奇异对象，并令 $\mathcal{E}$: $U \to V^u(\hat{y})$ 为如下定义的光滑映射

$$\mathcal{E}(v) := \mathrm{Proj}^{\perp}_{V^u(\hat{y})}\left(E(v)\right) \qquad \forall v \in U.$$

我们需要考虑两种不同的情况。

第一种情况：$\mathrm{Im}(D_u\mathcal{E}) = V^u$。
存在 $u^1, \ldots, u^{n-1} \in L^2([0,1], \mathbb{R}^m)$，使得线性算子

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{n-1} & \longrightarrow & V^u \\ \alpha & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i D_u\mathcal{E}\left(u^i\right) \end{array}$$

是可逆的。因此，根据反函数定理，在原点的某个邻域内定义的光滑映射 $\mathcal{G}^u$: $\mathbb{R}^{n-1} \to V^u(\hat{y})$

$$\mathcal{G}^u(\alpha) := \mathcal{E}\left(u + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u^i\right)$$

存在一个 C^1 类逆映射 $\mathcal{H}^u$，其定义域为 u 的某个开邻域。事实上，由于 E 的 C^1 正则性，该性质在 u 的某个邻域内一致成立。存在 $\delta, \rho \in (0,1)$ 和 $K > 0$，使得对于满足 $\|v - u\|_{L^2} < \delta$ 的每个 $v \in U$，在原点的某个邻域内定义的光滑映射$\mathcal{G}^v : \mathbb{R}^{n-1} \to V^u(\hat{y})$

$$\mathcal{G}^v(\alpha) := \mathcal{E}\left(v + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u^i\right)$$

存在一个 $\mathcal{H}^v = (\mathcal{H}^v_1, \ldots, \mathcal{H}^v_{n-1}) : V^u(\hat{y}) \cap B_\rho(\mathcal{E}(v)) \to \mathbb{R}^{n-1}$ 类逆映射 C^1，使得

$$\left|\mathcal{H}^v(z) - \mathcal{H}^v(z')\right| \le K|z - z'| \qquad \forall z, z' \in V^u(\hat{y}) \cap B_\rho(\mathcal{E}(v)).$$

因此，若 v 属于 U 且满足 $\|v - u\|_{L^2} < \delta$，并且 z 属于 $V^u(\gamma^v(1)) \cap B_\rho(\gamma^v(1))$，则有

$$z' := \mathrm{Proj}^{\perp}_{V^u(\hat{y})}(z) \in V^u(\hat{y}) \cap B_\rho(\mathcal{E}(v)).$$

因此，由上述结果可知，由以下式子定义的控制 $w \in U$

$$w := v + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{H}^v_i(z')u^i \tag{4.16}$$

满足

$$\mathrm{Proj}^{\perp}_{V^u(\hat{y})}\left(\gamma^w(1)\right) = \mathcal{E}(w) = z',$$

这意味着

$$\mathrm{Proj}^{\perp}_{V^u(\gamma^v(1))}\left(\gamma^w(1)\right) = z,$$

并且，通过注意到

$$\mathcal{H}^v(\mathrm{Proj}^{\perp}_{V^u(\hat{y})}\gamma^v(1)) = \mathcal{H}^v(\mathcal{E}(v)) = 0 \quad \text{and} \quad \left|z' - \mathcal{E}(v)\right| = \left|z - \bar{\gamma}^v(1)\right|,$$

我们还有

$$\begin{aligned}\|w-v\|_{L^2} &= \left\|\sum_{i=1}^{n-1}\mathcal{H}_i^v(z')u^i-\sum_{i=1}^{n-1}\mathcal{H}_i^v(\mathcal{E}(v))u^i\right\|_{L^2}\\ &\le \left|\mathcal{H}^v(z')-\mathcal{H}^v(\mathcal{E}(v))\right|\sum_{i=1}^{n-1}\left\|u^i\right\|_{L^2}\\ &\le K\left|z'-\mathcal{E}(v)\right|\sum_{i=1}^{n-1}\left\|u^i\right\|_{L^2}\\ &= K\left|z-\gamma^v(1)\right|\sum_{i=1}^{n-1}\left\|u^i\right\|_{L^2}=:KK'\left|z-\gamma^v(1)\right|.\end{aligned}$$

因此，分别考虑 E 和 C的局部 Lipschitz 常数 L_E，L_C 可知，对于任意满足 $\|v-u\|_{L^2}<\delta$ 的 $v\in U$，以及任意 $z\in V^u(\gamma^v(1))\cap B_\rho(\gamma^v(1))$，由 (4.16) 给出的控制$w$ 满足 (4.12)，

$$\begin{aligned}|\gamma^w(1)-z| &\le |\gamma^w(1)-\gamma^v(1)|+|\gamma^v(1)-z|\\ &\le L_E\|w-v\|_{L^2}+|\gamma^v(1)-z|\\ &= (L_EKK'+1)\left|z-\gamma^v(1)\right|\end{aligned}$$

由此得到 (4.13)（对于某个常数），

$$C(w)\le C(v)+L_C\|w-v\|_{L^2}\le C(v)+L_CKK'\left|z-\gamma^v(1)\right|$$

由此得到 (4.14)（对于某个常数），并且（因为 $\|v-u\|_{L^2}<\delta<1$ 和$|z-\gamma^v(1)|<\rho<1$）

$$\begin{aligned}\left|\|w-u\|_{L^2}^2-\|v-u\|_{L^2}^2\right| &= \left|\|w-v\|_{L^2}^2+2\langle w-v,v-u\rangle_{L^2}\right|\\ &\le \|w-v\|_{L^2}^2+2\|w-v\|_{L^2}\\ &\le KK'(KK'+2)\left|z-\gamma^v(1)\right|\end{aligned}$$

由此得到 (4.15)（对于某个常数）。取上述常数的最大值，即完成证明。

第二种情况：$\mathrm{Im}(D_u\mathcal{E})\neq V^u$。
我们断言

$$\mathrm{ind}_-\left(\lambda\cdot\left(D_u^2\mathcal{E}\right)_{|\mathrm{Ker}(D_u\mathcal{E})}\right)=+\infty\qquad\forall\lambda\in\left(\mathrm{Im}\left(D_u\mathcal{E}\right)\right)^{\perp_{V^u}}\setminus\{0\},\tag{4.17}$$

其中，$(\mathrm{Im}(D_u\mathcal{E}))^{\perp_{V^u}}$ 表示 V^u 上所有在 $\mathrm{Im}(D_u\mathcal{E})$ 上取值为零的线性形式。为证明这一断言，我们注意到，如果 (4.17) 不成立，那么存在一个线性形式 $\lambda\neq0$ 属于 $(\mathrm{Im}(D_u\mathcal{E}))^{\perp_{V^u}}$，使得

$$\mathrm{ind}_-\left(\lambda\cdot\left(D_u^2\mathcal{E}\right)_{|\mathrm{Ker}(D_u\mathcal{E})}\right)<+\infty.$$

通过令 $\tilde{\lambda} := \lambda \cdot \mathrm{Proj}^{\perp}_{V^u}$，将 λ 延拓为 $\mathbb{R}^n$ 上的一个非零线性形式 $\tilde{\lambda}$。由于 $\mathrm{Im}\,(D_u E) \subset V^u$（由 (4.11)），线性形式 $\tilde{\lambda}$ 属于 $(\mathrm{Im}(D_u E))^{\perp}$，且我们有 $\mathrm{Ker}(D_u \mathcal{E}) = \mathrm{Ker}(D_u E)$。因此，由于

$$D_u^2 E = D_u^2 \mathcal{E} + \left(D_u^2 E - D_u^2 \mathcal{E} \right),$$

其中，$D_u^2 E - D_u^2 \mathcal{E}$ 的像与 V^u 正交，因此我们推得

$$\mathrm{ind}_- \left(\lambda \cdot \left(D_u^2 \mathcal{E} \right)_{|\mathrm{Ker}(D_u \mathcal{E})} \right) = \mathrm{ind}_- \left(\tilde{\lambda} \cdot \left(D_u^2 E \right)_{|\mathrm{Ker}(D_u E)} \right).$$

因此，若该断言不成立，则根据注 3.9，水平路径 γ^u 存在一条满足 Goh 条件的异常 $\tilde{}$ $\tilde{}$ 正规极值曲线 ψ，且 $\psi(1) = \lambda$。由于 $\lambda \notin P^u$，这就产生了矛盾。

现在，在 $\bar{u} = u$ 处应用定理 A.1，并取

$$(X, \|\cdot\|) = \left(L^2([0,1], \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{L^2} \right), \quad F = \mathcal{E} : U \longrightarrow V^u(\hat{y}),$$
$$\text{and} \quad G = (E, C, \bar{C}) : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+2} \quad \text{with} \quad \bar{C} = \|\cdot - u\|_{L^2}^2 : U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

由 (4.17)，存在 $\delta, \rho \in$ (0,1) 和 $K > 0$，使得对任意 $v \in U$ 及任意满足以下条件的 $z' \in V^u(\hat{} y)$

$$\|v - u\|_{L^2} < \delta \quad \text{and} \quad |z' - \mathcal{E}(v)| < \rho,$$

存在 $w_1, w_2 \in L^2([0,1], \mathbb{R}^m)$，使得 $v + w_1 + w_2 \in U$，

$$z' = \mathcal{E}(v + w_1 + w_2),$$

$$w_1 \in \mathrm{Ker}\,(D_v \mathcal{E}) \cap \mathrm{Ker}\,(D_v G)$$
$$\text{and} \quad \|w_1\|_{L^2} < K\sqrt{|z' - \mathcal{E}(v)|}, \quad \|w_2\|_{L^2} < K|z' - \mathcal{E}(v)|.$$

令 $w := v + w_1 + w_2$，并注意到 $w_1 \in$ 核$(D_v G) \subset$ 核$(D_v E)$，泰勒公式给出

$$\begin{aligned} \gamma^w(1) - \gamma^v(1) &= E(w) - E(v) \\ &= D_v E(w_1 + w_2) + D_v^2 E(w_1 + w_2) + o\left(\|w_1 + w_2\|_{L_2}^2 \right) \\ &= D_v E(w_2) + D_v^2 E(w_1 + w_2) + o\left(\|w_1 + w_2\|_{L_2}^2 \right) \end{aligned}$$

因此

$$|\gamma^w(1) - \gamma^v(1)| \leq KK'|z' - \mathcal{E}(v)|$$

对于某个 $K' > 0$。因此，如果 z' 由下式给出

$$z' = \mathrm{Proj}^{\perp}_{V^u(\hat{y})}(z) \in V^u(\hat{y}) \cap B_\rho(\mathcal{E}(v)) \quad \text{with} \quad z \in V^u(\gamma^v(1)) \cap B_\rho(\gamma^v(1)),$$

那么我们有 (4.12)。若记 L_E 为 E 的一个局部 Lipschitz 常数，则我们有（因为 $|z' - \mathcal{E}(v)| = |z - \gamma^v(1)|$）

$$\begin{aligned} |\gamma^w(1) - z| &\leq |\gamma^w(1) - \gamma^v(1)| + |\gamma^v(1) - z| \\ &\leq (L_E KK' + 1)\,|z - \gamma^v(1)| \end{aligned}$$

注意到 $w_1 \in \text{Ker}(D_v G) \subset \text{Ker}(D_v C)$，且 $|z' - \mathcal{E}(v)| = |z - \gamma^v(1)| < \rho < 1$，我们便得到 (4.13)（对于某个常数）。

$$\begin{aligned}
2C(w) &= \|v + w_1 + w_2\|_{L^2}^2 \\
&= 2C(v) + 2\langle v, w_1 + w_2\rangle_{L^2} + \|w_1 + w_2\|_{L^2}^2 \\
&= 2C(v) + 2\langle v, w_2\rangle_{L^2} + \|w_1 + w_2\|_{L^2}^2 \\
&\leq 2C(v) + 2\|v\|_{L^2}\|w_2\|_{L^2} + \left(\|w_1\|_{L^2} + \|w_2\|_{L^2}\right)^2 \\
&\leq 2C(v) + 2\left(\|u\|_{L^2} + \delta\right) K\,|z - \gamma^v(1)| + \left(2K\sqrt{|z - \gamma^v(1)|}\right)^2 \\
&= 2C(v) + K\left(2\|u\|_{L^2} + 2 + 4K\right)|z - \gamma^v(1)|\,,
\end{aligned}$$

从而得到 (4.14)（对于某个常数），最后注意到 $w_1 \in \text{核}(D_v G) \bar{\subset} \text{核}(D_v C)$，我们还得到

$$\begin{aligned}
\left|\|w - u\|_{L^2}^2 - \|v - u\|_{L^2}^2\right| &= \left|\|w - v\|_{L^2}^2 + 2\langle w - v, v - u\rangle_{L^2}\right| \\
&\leq \|w_1 + w_2\|_{L^2}^2 + 2\left|\langle w_2, v - u\rangle_{L^2}\right| \\
&\leq \left(2K\sqrt{|z - \gamma^v(1)|}\right)^2 + 2K\,|z - \gamma^v(1)| \\
&= 2K(2K + 1)\,|z - \gamma^v(1)|\,.
\end{aligned}$$

引理 4.8 的证明完成。 □

引理 4.2 的紧性结果与引理 4.7 和 4.8 的结果一起给出以下结果：

引理 4.9。存在 δ, r{style id='6'>(0, 1)，$K > 0$，一个正整数 N，N控制$u^1, \ldots, u^N$在 U中，使得对于 $l = 1, \ldots, N$和 N个线性超平面 $V^{u^1}, \ldots V^{u^N}$在 $\mathbb{R}^n$ 中满足 $\gamma^{u^l} \in \Gamma^{\hat{y}}$，并满足以下性质：

(i) 对于每个 $l \in \{1, \ldots N\}$、每个满足 $\|v - u^l\|_{L^2} < \delta$的 $v \in U$以及每个 $z \in V^{u^l}(\gamma^v(1) \cap B_\rho(\gamma^v(1))$，存在 $w \in U$使得

$$\text{Proj}^{\perp}_{V^{u^l}(\gamma^v(1))}\left(\gamma^w(1)\right) = z, \tag{4.18}$$

$$|\gamma^w(1) - z| \leq K\,|z - \gamma^v(1)|\,, \tag{4.19}$$

$$C(w) \leq C(v) + K\,|z - \gamma^v(1)|\,, \tag{4.20}$$

$$\left|\|w - u^l\|_{L^2}^2 - \|v - u^l\|_{L^2}^2\right| \leq K\,|z - \gamma^v(1)|\,. \tag{4.21}$$

(ii) F 对于任意 $y \in B_r(\hat{}y)$和 $v \in \Gamma^y$，存在 $l \in \{1, \ldots, N\}$，使得 $\|v - u^l\|_{L^2} < \delta/2$。

取一个光滑非减函数 $h\colon [0, \delta^2/4) \to [0, +\infty)$，使得

$$h(\alpha) = 0\,\forall \alpha \in [0, \delta^2/4], \quad h(\alpha) > 0\,\forall \alpha \in (\delta^2/4, \delta^2) \quad \text{and} \quad \lim_{\alpha \to \delta^2} h(\alpha) = +\infty.$$

然后，对于每个 $l = 1, \dots, N$，定义函数 $W^l\colon B_r(\hat{y}) \to [0, +\infty)$ 如下

$$W^l(y) := \inf \left\{ C(u) + h\left(\|u - u^l\|_{L^2}^2 \right) \mid u \in U \text{ s.t. } \bar{\gamma}^u(1) = y \right\} \qquad \forall y \in B_r(\hat{y}).$$

根据构造，函数 $W^1, \dots, W^N$ 在其定义域上连续（记住，端点映射 $E\colon U \to M$ 是开映射，参见例如 [38, §1.4]），并且我们有（由引理 4.9 (ii) 以及 h 的构造）

$$F(y) = \min \left\{ W^1(y), \dots, W^N(y) \right\} \qquad \forall y \in B_r(\hat{y})$$

and

$$F(\hat{y}) = W^1(\hat{y}) = \cdots = W^N(\hat{y}).$$

于是，对于每个集合 $I \subset \{1, \dots, N\}$，我们定义集合 $\mathcal{Z}^I \subset B_{r/2}(\hat{y})$ 如下：

$$\mathcal{Z}^I := \left\{ y \in B_{r/2}(\hat{y}) \mid F(y) = W^k(y)\, \forall k \in I \text{ and } F(y) < W^k(y)\, \forall k \notin I \right\}$$

并且我们容易验证

$$B_{r/2}(\hat{y}) = \bigcup_{I \subset \{1,\dots,N\}} \mathcal{Z}^I$$

并且对于每个 $y \in B_{r/2}(\hat{y})$ 和每个 $I \subset \{1, \dots, N\}$，我们有（参见命题 4.1 的证明末尾）

$$y \in \mathcal{Z}^I \setminus \operatorname{Lip}^-(F) \quad \Longrightarrow \quad y \in \bigcup_{k \in I} \left(\mathcal{Z}^I \setminus \operatorname{Lip}^-(W^k) \right).$$

由于根据构造，点 $\hat{y}$ 是由集合 (4.1) 给出的 $\mathcal{A}$ 的勒贝格密度点，因此集合

$$B_{r/2}(\bar{y}) \setminus \operatorname{Lip}^-(F) = \bigcup_{I \subset \{1,\dots,N\}} \left(\mathcal{Z}^I \setminus \operatorname{Lip}^-(F) \right) \subset \bigcup_{I \subset \{1,\dots,N\}} \bigcup_{k \in I} \left(\mathcal{Z}^I \setminus \operatorname{Lip}^-(W^k) \right)$$

具有正的勒贝格测度，因此我们很容易得出结论。 □

我们用 $P \subset \mathbb{R}^n$ 表示与 V正交的向量直线。对于每个 a 属于 $B_{r/2}(\hat{y}) \cap V(\hat{y})$，我们定义仿射直线片段 P_a 如下：

$$P_a := (a + P) \cap B_{r/2}(\hat{y}),$$

并用 $W_{|P_a}$ 表示 W 在 P_a上的限制。根据构造，每个 $W_{|P_a}$ 都是定义在一维开集上的连续函数。定理 1.1 证明的第三步可视为证明的核心，其内容是证明函数 W 和 $W_{|P_a}$ 在相同的点处都存在下方的 Lipschitz 函数。

命题 4.10. 存在 $K > 0$，使得对于每个 $a \in B_{r/2}(\hat{y}) \cap V(\hat{y})$ 以及每个 $y \in P_a$，下列性质成立：若 $W_{|P_a}$ 在 y 处存在下方支撑函数 φ，且该函数在其定义域上是 *Lipschitz* 的（*Lipschitz* 常数为$\operatorname{Lip}(\varphi)$），则存在 $\nu > 0$ 使得

$$W(y) \geq W(\check{y}) - \check{K}\left(1 + \operatorname{Lip}(\varphi)\right) |y - \check{y}| \qquad \forall y \in B_\nu(\check{y});$$

特别地，y 属于 $\operatorname{Lip}^-(W)$。

命题 *4.10* 的证明。 首先注意到，由于 W 在闭球 $B_{r/2}(\hat{y})$ 上定义良好且连续，因此存在 $A > 0$，使得对所有 $y \in B_{r/2}(\hat{y})$，$W(y) \leq A$。因此，若我们考虑某个 $y \in B_{r/2}(\hat{y})$ 以及满足以下条件的 $u \in U$

$$W(y) = C(u) + h\left(\|u - \hat{u}\|_{L^2}^2\right) \quad \text{and} \quad \gamma^u(1) = y, \tag{4.22}$$

于是我们有 $h(\|u - \hat{u}\|_{L^2}^2) \leq A$，因此（因为 $h(\alpha)$ 随着 α 增大至 δ^2 而趋于 $+\infty$）存在 $\delta \in (0, \delta)$，使得 $\|u - \hat{u}\|_{L^2} < \delta$。我们用 $L > 0$ 表示 h 在集合 $[0, \check{\delta}^2]$ 上的 Lipschitz 常数，其中 $\check{\delta}^2 := \bar{\delta}^2 + (\bar{\delta}^2 + \delta^2)/2$（请记住，$h$ 在其定义域上是光滑的）。

设 $a \in B_{r/2}(\hat{y}) \cap V(\hat{y})$，$\check{y} \in P_a$，并设 φ 是一个函数，它在包含 $\check{y}$ 的 P_a 的一个开区间上是利普希茨的（Lipschitz 常数为 Lip(φ)），且 $W_{|P_a}$ 在 $\check{y}$ 处以 φ 为下方支撑函数。给定 $y \in B_\rho(\hat{y}) \cap B_{r/2}(\hat{y})$，我们考虑一个满足 (4.22) 的控制 $u \in U$，并令（见图 1）

$$z := \mathrm{Proj}_{P_a}^{\perp}(y).$$

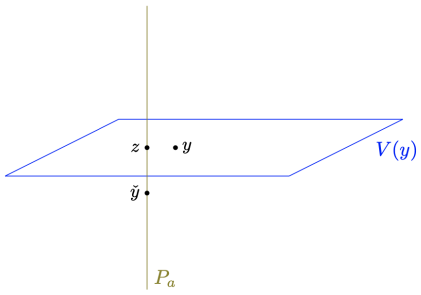

图 1： z 属于 $P_a \cap V(y)$

根据构造，我们有 $|y - z| \leq |y - \check{y}| < \rho$，其中 $y = \gamma^u(1)$，并且由于 $h(\|u - \hat{u}\|_{L^2}^2) < +\infty$，我们有 $\|u - \hat{u}\|_{L^2} < \delta$。因此，根据命题 4.5，存在 $v \in U$ 使得

$$\mathrm{Proj}_{V(y)}^{\perp}\left(\gamma^v(1)\right) = z, \quad |\gamma^v(1) - z| \leq K\,|z - y|\,,$$

$$C(v) \leq C(u) + K|z - y| \quad \text{and} \quad \left|\|v - \hat{u}\|_{L^2}^2 - \|u - \hat{u}\|_{L^2}^2\right| \leq K\,|z - y|\,.$$

$\mathrm{Proj}_{V(y)}^{\perp}(\gamma^v(1)) = z$ 和 $z \in P_a$ 的性质表明 $\gamma^v(1) \in P_a$。此外，我们注意到，如果 y 属于以 $\check{y}$ 为中心、半径小于 $(\check{\delta}^2 - \bar{\delta}^2)/K$ 的球，那么我们有

$$\|u - \hat{u}\|_{L^2}^2 \leq \bar{\delta}^2 \leq \check{\delta}^2 \quad \text{and} \quad \|v - \hat{u}\|_{L^2}^2 \leq \|u - \hat{u}\|_{L^2}^2 + K|z - y| \leq \bar{\delta}^2 + K|y - \check{y}| \leq \check{\delta}^2,$$

因此

$$h\left(\|v - \hat{u}\|_{L^2}^2\right) \leq h\left(\|u - \hat{u}\|_{L^2}^2\right) + L\left|\|v - \hat{u}\|_{L^2}^2 - \|u - \hat{u}\|_{L^2}^2\right| \leq KL|z - y|.$$

因此，对于以 $\check{}y$ 为球心、半径小于 $(\check{}\delta^2 - \bar{\delta}^2)/K$ 的球内每个 y，我们有

$$\begin{aligned} W_{|P_a}(\gamma^v(1)) &\leq C(v) + h\left(\|v - \hat{u}\|_{L^2}^2\right) \\ &\leq C(u) + K|z-y| + h\left(\|u - \hat{u}\|_{L^2}^2\right) + KL|z-y| \\ &\leq W(y) + K(L+1)\,|z-y|\,. \end{aligned}$$

此外，存在 $\nu > 0$，使得若 y 属于 $B_\nu(\check{}y)$，则 $\gamma^v(1)$ 属于 φ 的定义域（因为 $|\gamma^v(1) - \check{}y| \leq |\gamma^v(1) - z| + |z-y| + |y - \check{}y| \leq K|z-y| + 2|y - \check{}y| \leq (K+2)|y - \check{}y|$），因此，若 $y \in B_\nu(\check{}y)$，则有

$$\varphi(\gamma^v(1)) \leq W_{|P_a}(\gamma^v(1)) \leq W(y) + K(L+1)\,|z-y|\,.$$

总之，我们得到，对于任意充分接近 $\check{}y$ 的 y，都有（令 $\hat{}K := K(L+1)$）

$$\begin{aligned} W(y) &\geq \varphi(\gamma^v(1)) - \hat{K}\,|z-y| \\ &\geq \varphi(\check{y}) - \mathrm{Lip}(\varphi)\,|\gamma^v(1) - \check{y}| - \hat{K}\,|z-y| \\ &\geq \varphi(\check{y}) - \mathrm{Lip}(\varphi)\,(|\gamma^v(1) - z| + |z-y| + |y-\check{y}|) - \hat{K}\,|z-y| \\ &\geq \varphi(\check{y}) - \mathrm{Lip}(\varphi)(\hat{K}+2)\,|y-\check{y}| - \hat{K}\,|y-\check{y}| \\ &\geq \varphi(\check{y}) - \check{K}\,(1 + \mathrm{Lip}(\varphi))\,|y-\check{y}|\,, \end{aligned}$$

$\check{}\hat{}$ 令 $K := K + 2$。 □

命题 4.10 使我们能够区分两种情形。对于每个 $a \in B_{r/2}(\hat{}y) \cap V(\hat{}y)$，我们将 $\mathcal{K}$（在命题 4.5 (iii) 中引入）与P_a的交集记为 $\mathcal{K}_a$，即

$$\mathcal{K}_a := \mathcal{K} \cap P_a \quad \forall a \in B_{r/2}(\hat{y}) \cap V(\hat{y}).$$

根据命题 4.5 (iii)，集合 $\mathcal{K} \subset B_{r/2}(\hat{}y)$ 的勒贝格测度为正；此外，根据命题 2.8，对于每个 $a \in B_{r/2}(\hat{}y) \cap V(\hat{}y)$，存在两个可测集 $\mathcal{K}_a^i$，$\mathcal{K}_a^{ii} \subset \mathcal{K}_a$，使得

$$\mathcal{L}^1\left(\mathcal{K}_a^i \cup \mathcal{K}_a^{ii}\right) = \mathcal{L}^1\left(\mathcal{K}_a\right)$$

满足以下性质：

(i) 对每个 $y \in \mathcal{K}_a^i$，函数 $W_{|P_a}$ 在 y 处可微。

(ii) 对每个 $y \in \mathcal{K}_a^{ii}$，函数 $W_{|P_a}$ 在 y 处不可微，并且存在一个序列 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，它属于 P_a 且收敛到 y，使得对所有 $k \in \mathbb{N}$，都有 $0 \in \partial^- W_{|P_a}(y_k)$；特别地，我们有 $0 \in \partial_L^- W_{|P_a}(y)$。

令

$$\mathcal{K}^i := \bigcup_{a \in B_{r/2}(\hat{y}) \cap V(\hat{y}} \mathcal{K}_a^i \quad \text{and} \quad \mathcal{K}^{ii} := \bigcup_{a \in B_{r/2}(\hat{y}) \cap V(\hat{y})} \mathcal{K}_a^{ii}$$

并且注意到，根据Fubini定理，我们有

$$\mathcal{L}^n(\mathcal{K}) = \mathcal{L}^n\left(\mathcal{K}^i \cup \mathcal{K}^{ii}\right) > 0.$$

需要区分两种不同的情况： $\mathcal{L}^n(\mathcal{K}^i) > 0$ 或 $\mathcal{L}^n(\mathcal{K}^i) = 0$ 且 $\mathcal{L}^n(\mathcal{K}^{ii}) > 0$。第一种情况（$\mathcal{L}^n(\mathcal{K}^i) > 0$）很容易导出矛盾，因为 $\mathcal{L}(\mathcal{K}^i) > 0$与命题 4.10结合起来意味着 $\mathcal{K}^i \subset \mathcal{K}$ 中的任意一点都属于$\mathrm{Lip}^-(W)$，这与命题 4.5 (iii)矛盾。因此，从现在起，我们假设

$$\mathcal{L}^n(\mathcal{K}^i) = 0 \quad \text{and} \quad \mathcal{L}^n(\mathcal{K}^{ii}) > 0$$

并解释如何得到矛盾。

由Fubini定理，存在 $\check{a} \in B_{r/2}(\hat{y}) \cap V(\hat{y})$ 使得

$$\mathcal{L}^1\left(\mathcal{K}^{ii}_{\check{a}}\right) > 0. \tag{4.23}$$

我们选取 $\mathcal{K}^{ii}_{\check{a}}$ 在 $P_{\check{a}}$ 中的一个勒贝格密度点 $\check{y}$ （相对于 $\mathcal{L}^1$），并注意到，根据 $\mathcal{A}$ 的构造（见（4.1）），点 $\check{y}$ 不属于 $\mathcal{C}_0$ $\exp_0$的临界值集合。然后我们选取一个 $P_{\check{a}}$ 的切向单位向量 $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$，并定义连续函数 $W^{\check{a}}$： $(-r/10,\ r/10) \to [0, +\infty)$ 为

$$W^{\check{a}}(t) := W_{|P_{\check{a}}}(\check{y} + t\vec{v}) - W_{|P_{\check{a}}}(\check{y}) \qquad \forall t \in (-r/10, r/10).$$

下一个引理基本上由 $\check{y}$的构造、命题 4.10、逆函数定理和 Denjoy-Young-Saks 定理（见注 2.10）推出。

命题 4.11。 存在 μ、$\sigma > 0$，满足 $B_\mu(\check{y}) \subset B_{r/2}(\hat{y})$，使得以下性质成立：

(i) 对任意 $t \in (-\mu, \mu)$ 以及任意 $p \in \partial^- W^{\check{a}}(t)$，有

$$|p| \le 1 \quad \Longrightarrow \quad \Big(W^{\check{a}}(s) \le W^{\check{a}}(t) + p(s-t) + \sigma(s-t)^2 \quad \forall s \in (-\mu, \mu)\Big).$$

(ii) $D^- W^{\check{a}}(0) = +\infty, D_+ W^{\check{a}}(0) = -\infty$ 以及 $D_- W^{\check{a}}(0) = D^+ W^{\check{a}}(0) \in \mathbb{R}$.

命题 *4.11* 的证明。 对于每个 $y \in M$，我们将满足以下条件的控制 $u \in L^2([0,1], \mathbb{R}^m)$ 的集合记为 Γ^y_W

$$W(y) = C(u) + h\left(\|u - \hat{u}\|^2_{L^2}\right).$$

以下结果的证明是由 W 的连续性以及 h 单调不减这一事实得到的。

引理 4.12。 对于每个紧集 $\mathcal{K} \subset B_{r/2}(\hat{y})$，满足 $y \in \mathcal{K}$ $L^2([0,1], \mathbb{R}^m)$ $y \in B_{r/2}$ $y \mapsto \Gamma^y_W$ 的控制 $u \in \Gamma^y_W$ 构成 $\mathcal{C}$ $L^2([0,1], \mathbb{R}^m)$ 的一个紧子集，并且映射 $(\hat{\ }) : \mathcal{C}(([0,1], \mathbb{R}^m)) \to \mathcal{C}(([0,1], \mathbb{R}^m))$ 具有闭图（这里 $\mathcal{C}(([0,1], \mathbb{R}^m))$ 表示 $L^2([0,1], \mathbb{R}^m)$ 的紧子集所构成的集合，该集合赋有*Hausdorff*拓扑）。

引理 *4.12* 的证明。 令 $\mathcal{K}$ 为 $B_{r/2}(\hat{y})$ 的紧子集，且 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，$\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为分别取自 $L^2([0,1], \mathbb{R}^m)$ 和 $\mathcal{K}$ 的两个序列，使得 $u_k \in \Gamma^{y_k}_W$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。序列 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 取值于 $\mathcal{K}$ 中的紧集；又因为 W 在 $\mathcal{K}$ 上有界（因为它是连续的），并且

$$W(y_k) = \frac{1}{2}\|u_k\|^2_{L^2} + h\left(\|u_k - \hat{u}\|^2_{L^2}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

序列 $\{u\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $L^2([0,1],\ \mathbb{R}^m)$ 中有界，因此存在一个递增子列$\{k_l\}_{l\in\mathbb{N}}$，使得 $\{y_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ 在无穷远处趋于某个 $\bar{y}\in\mathcal{K}$，且 $\{u_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ 弱收敛于某个 $\bar{u}\in L^2([0,1],\ \mathbb{R}^m)$。注意，根据汉-巴拿赫分离定理（参见例如 [20]），我们有

$$\|\bar{u}\|_{L^2}\le\liminf_{l\to+\infty}\|u_{k_l}\|_{L^2}\quad\text{and}\quad\|\bar{u}-\hat{u}\|_{L^2}\le\liminf_{l\to+\infty}\|u_{k_l}-\hat{u}\|_{L^2},$$

因此，由于 h 是非递减的，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\bar{u}\|^2_{L^2}+h\left(\|\bar{u}-\hat{u}\|^2_{L^2}\right)&\le\liminf_{l\to+\infty}\frac{1}{2}\|u_{k_l}\|^2_{L^2}+\liminf_{l\to+\infty}h\left(\|u_{k_l}-\hat{u}\|^2_{L^2}\right)\\&\le\liminf_{l\to+\infty}\left\{\frac{1}{2}\|u_{k_l}\|^2_{L^2}+h\left(\|u_{k_l}-\hat{u}\|^2_{L^2}\right)\right\}\\&=\lim_{l\to+\infty}W(y_{k_l})=W(\bar{y}).\end{aligned}$$

这表明 $\bar{u}$ 属于 $\Gamma^{\bar{y}}_W$，并且除去一个子列外，序列 $\{u_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$在 $L^2([0,1],\ \mathbb{R}^m)$ 中强收敛于 $\bar{u}$ （因为 $\{u_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ 弱收敛于 $\bar{u}$且 $\|\bar{u}\|_{L^2}=$下极限$_{l\to+\infty}\|u_{k_l}\|_{L^2}$），从而完成了第一部分的证明。第二部分留给读者。

□

现在我们考虑由下式定义的集合 $\Theta\subset\Gamma^{\check{y}}_W\subset L^2([0,1],\ \mathbb{R}^m)$

$$\Theta:=\Big\{u\in\Gamma^{\check{y}}_W\,|\,\exists\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}\text{ in }B_{r/2}(\hat{y}),\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}\text{ in }(\mathbb{R}^n)^*,\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}\text{ in }L^2([0,1],\mathbb{R}^m)\text{ s.t.}$$

$$\lim_{k\to+\infty}y_k=\check{y},\ \lim_{k\to+\infty}u_k=u\text{ and }u_k\in\Gamma^{y_k}_W,\ p_k\in\partial^-W(y_k),\ |p_k|\le 2\check{K}+1\,\forall k\in\mathbb{N}\Big\}.$$

在下面的结果中，第一部分由上述性质(ii)结合引理 4.12 得出，第二部分则是由于 $\check{y}$ 属于 $\mathcal{K}^{ii}_{\hat{a}}$，因此不属于 $\mathcal{C}_0$。

引理 4.13. 集合 Θ 是 $L^2([0,1],\mathbb{R}^m)$ 的非空紧子集，并且对每个$u\in\Theta$，都存在 $v^1,\dots,v^n\in L^2([0,1],\mathbb{R}^m)$，使得线性映射

$$\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n\longmapsto D_uE\left(\sum_{i=1}^m\lambda_iv^i\right)\in\mathbb{R}^n$$

在 $\lambda=0$ 处可逆。

引理 *4.13* 的证明。根据 $\check{y}$ 的构造及上述性质 (ii)，存在一个序列 $\{\bar{y}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 属于 $P_{\hat{a}}$，收敛到 $\check{y}$，使得对于所有 $k\in\mathbb{N}$，都有 $0\in\partial^-W_{|P_{\hat{a}}}(\bar{y}_k)$。注意，这一性质应理解为：对于所有 $k\in\mathbb{N}$，都有 $0\in\partial^-W^{\check{a}}(\bar{t}_k)$，其中 $\bar{t}_k$ 是由 $\check{y}+t_k\vec{v}=\bar{y}_k$ 定义的 $^-$。命题 4.10 表明，事实上，对于任意 $k\in\mathbb{N}$，函数 W 在 $\bar{y}_k$ 处存在一个从下方支撑的支撑函数，且该函数在其定义域上是 $(2\check{K})$-利普希茨的。因此，命题 2.6 给出，对于每个 $k\in\mathbb{N}$，存在一个余向量 $\bar{p}_k\in\partial^-_LW(\bar{y}_k)$，使得 $|\bar{p}_k|\le 2\check{K}$。根据 ∂^-_LW 的定义，我们推得存在一个序列 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 属于 $B_{r/2}(\hat{y})$，以及一个序列 $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 属于 $(\mathbb{R}^n)^*$，使得

$$\lim_{k\to+\infty}y_k=\check{y}\quad\text{and}\quad p_k\in\partial^-W(y_k),\ |p_k|\le 2\check{K}+1\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

在每个 $\Gamma_W^{y_k}$ 中取一个控制 u_k 并应用引理 4.12，我们得出 Θ 非空。由引理 4.12 可轻易推出 Θ 的紧致性。

现在证明引理 4.13 的最后一部分，并固定某个 $u \in \Theta$。根据定义，分别存在序列 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$、$\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$、$\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，它们属于 $B_{r/2}(\check{y})$、$(\mathbb{R}^n)^*$ 和 $L^2([0,1],\ \mathbb{R}^m)$，使得

$$\lim_{k\to+\infty} y_k = \check{y},\ \lim_{k\to+\infty} u_k = u \text{ and } u_k \in \Gamma_W^{y_k},\ p_k \in \partial^- W(y_k),\ |p_k| \le 2\check{K}+1\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

因此，对每个 $k\in\mathbb{N}$，都存在一个从下方支撑 φ_k 的支撑函数：$\mathcal{U}_k \to \mathbb{R}$，它在其定义域 $\mathcal{U}_k \subset B_{r/2}(\check{y})$ 上属于 $C^{1,1}$ 类，且满足 $d\varphi_k(y_k) = p_k$，使得（我们定义 $C: U\to\mathbb{R}$，令 $\check{C}(u) := \|u-\check{u}\|_{L^2}$ 对所有 $u\in U$ 均成立）

$$C(u_k) + h\big(\hat{C}(u_k)\big) = W(y_k) = \varphi(y_k)$$
$$\text{and}\quad C(u) + h\big(\hat{C}(u)\big) \ge W\left(E(u)\right) \ge \varphi\left(E(u)\right)\quad \forall u\in U_k,$$

其中 U_k 是 U 中 u_k 的一个开邻域，且满足 $E(U_k)\subset\mathcal{U}_k$。于是我们推得

$$p_k\cdot D_{u_k}E = D_{u_k}C + h'\left(\|u_k-\hat{u}\|_{L^2}^2\right)\cdot D_{u_k}\hat{C}\qquad \forall k\in\mathbb{N}.$$

由紧致性（所有 p_k 均满足 $|p_k|\le 2\check{K}+1$），并取一个子列后，$\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛到某个 $p\in\partial_L^- W(\check{y})$，此外 $u_k-\check{u}$ 在 $L^2([0,1],\ \mathbb{R}^m)$ 中收敛到 $u-\check{u}$，后者满足 $h'(\|u-\check{u}\|_{L^2}) = h(\|u-\check{u}\|_{L^2}) = 0$（根据命题 4.5 (ii)，且因为 $\check{u}\in\Gamma_W^y$ 和 $W(\check{y}) = F(\check{y})$）。于是，令其取极限可得

$$p\cdot D_u E = D_u C.$$

由命题 3.2，我们推知 $\check{y}$ 属于 $\exp_0$ 的像；由于 $\check{y}\notin\mathcal{C}_0$，结论得证。

□

以下结果是反函数定理和引理 4.13 的直接推论，其证明留给读者。

引理 4.14. 存在 $\check{\delta}$、$\check{\rho}\in(0,1)$、$\check{M}>0$、一个正整数 N、N个控制u^1、.....、u^N，属于 Θ，满足以下性质：对于每个 $l\in\{1,\dots N\}$，以及每个满足 $\|v-u^l\|_{L^2}<\check{\delta}$的 $v\in U$，都存在一个映射 $\mathcal{G}^{l,\,v}: B_{\check{\rho}}(\gamma^v(1)) \to U$，使得

$$E\left(\mathcal{G}^{l,v}(y)\right) = y\qquad \forall y\in B_{\check{\rho}}(\gamma^v(1))$$

and

$$\left\|\mathcal{G}^{l,v}\right\|_{C^2}\le\check{M}.$$

现在我们可以完成命题 4.11 的证明了。根据 Θ 的构造，存在 $\mu>0$，使得对于任意满足 $\partial^- W_{|P_{\check{a}}}(y)$具有范数为 ≤ 1 的余向量的 $y\in P_{\check{a}}\cap B_\mu(\check{y})$，任意 v属于 Γ_W^y都满足 $\|v-u^l\|_{L^2}<\check{\delta}$，其中某个 $l\in\{1,\dots,N\}$成立。因此，若我们考虑满足 $|p|\le 1$ 和 $v\in\Gamma_W^y$的 $y\in P_{\check{a}}\cap B_\mu(\check{y})$、$p\in\partial^- W_{|P_{\check{a}}}(y)$，则有

$$W(z)\le C\left(\mathcal{G}^v(z)\right) + h\left(\tilde{C}\left(\mathcal{G}^v(z)\right)\right)\qquad \forall z\in B_{\check{\rho}}(y)$$

此外，若 $\varphi:\ \mathcal{I}\to\mathbb{R}$ 是 $W_{|P_{\check{a}}}$ 在 y处的下方支撑函数，在包含 y 的 $P_{\check{a}}$ 中的某个开线段上满足 C^1，且验证了 $d\varphi(y)=p$，那么我们也有

$$\varphi(z)\le W_{|P_{\check{a}}}(z)\le C\left(\mathcal{G}^v(z)\right)+h\left(\tilde{C}\left(\mathcal{G}^v(z)\right)\right)\qquad\forall z\in P_{\check{a}}\cap\mathcal{I}\cap B_{\check{\rho}}(y).$$

我们推知，函数在 y 处的微分

$$z\longmapsto C\left(\mathcal{G}^v(z)\right)+h\left(\tilde{C}\left(\mathcal{G}^v(z)\right)\right)$$

等于 p。注意到引理 4.14 可以给出该函数的 C^2-范数的上界，便可轻易得出结论。

为证明 (ii)，注意到由上述性质 (ii)，存在一个序列 $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，属于 $(-\mu,\ \mu)$，且收敛于 0，使得对所有 $k\in\mathbb{N}$，都有 $0\in\partial^- W^{\check{a}}(t_k)$；由 (i) 可得

$$W^{\check{a}}(s)\le W^{\check{a}}(t_k)+\sigma(s-t_k)^2\quad\forall s\in(-\mu,\mu),\forall k\in\mathbb{N}.$$

因此，令其趋于极限可推知（注意 $W^{\check{a}}(0)=0$），我们有

$$W^{\check{a}}(s)\le\sigma s^2\quad\forall z\in P_{\check{a}}\cap B_\mu(\check{y}).\tag{4.24}$$

根据 Denjoy-Young-Saks 定理（见注 2.10），由于 $W^{\check{a}}$ 在 $\check{a}$ 处不可微，以下性质之一成立:

(2) $D^+W^{\check{a}}(0)=D^-W^{\check{a}}(0)=+\infty$ and $D_+W^{\check{a}}(0)=D_-W^{\check{a}}(0)=-\infty$,

(3) $D^+W^{\check{a}}(0)=+\infty$, $D_-W^{\check{a}}(0)=-\infty$ 且 $D_+W^{\check{a}}(0)=D^-W^{\check{a}}(0)\in\mathbb{R}$,

(4) $D^-W^{\check{a}}(0)=+\infty$, $D_+W^{\check{a}}(0)=-\infty$ 且 $D_-W^{\check{a}}(0)=D^+W^{\check{a}}(0)\in\mathbb{R}$。

但性质 (2)-(3) 与 (4.24) 相矛盾，因此证明完成。 □

最终的矛盾将由以下结论得出:

命题 4.15. 设 $\epsilon,\sigma>0$, $a,b\in\mathbb{R}$ 满足 $b>a$，使得

$$\epsilon\ge\frac{(b-a)\sigma}{4}\tag{4.25}$$

并设 $h:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ 满足 $h(a)=h(b)=0$ 是一个连续函数，使得对任意$s\in(a,b)$ 和 $p\in\partial^- h(s)$，均有

$$|p|\le\epsilon\quad\Longrightarrow\quad\Big(h(s')\le h(s)+p(s'-s)+\sigma(s'-s)^2\quad\forall s\in[a,b]\Big).\tag{4.26}$$

于是我们有

$$h(s)\ge D(s):=\max\Big\{-\epsilon(s-a),\epsilon(s-b)\Big\}\qquad\forall s\in[a,b].\tag{4.27}$$

命题 *4.15* 的证明。反设（4.27）不成立，并考虑函数 $h-D$ 在 $[a,b]$上的全局最小值 $\bar{s}\in(a,\ b)$。因此，我们有 $h(\bar{s})<D(\bar{s})$。若 $\bar{s}$ 属于 $(0,\ (a+b)/2)$，则有 $0\in\partial^-(h-D)(\bar{s})=\partial^- h(\bar{s})-\epsilon$，故可推得 $\epsilon\in\partial^- h(\bar{s})$，由（4.26）可得

$$h(a)=0\le h(\bar{s})+\epsilon(a-\bar{s})+\sigma(a-\bar{s})^2.$$

因此，我们有

$$\epsilon(\bar{s}-a)-\sigma(\bar{s}-a)^2\le h(\bar{s})<D(\bar{s})=-\epsilon(\bar{s}-a),$$

也就是说,

$$2\epsilon(\bar{s}-a)<\sigma(\bar{s}-a)^2\quad\Longleftrightarrow\quad\epsilon<\frac{(\bar{s}-a)\sigma}{2}<\frac{(b-a)\sigma}{4},$$

这与 (4.25) 矛盾。若 $\bar{s}=(a+b)/2$，则有

$$h(s)-D(s)\ge h(\bar{s})-D(\bar{s})\qquad\forall s\in[a,b],$$

这意味着

$$h(s)\ge h(\bar{s})-D(\bar{s})+D(s)\qquad\forall s\in[a,b],$$

其中，当 $s=\bar{s}$ 时，不等式取等号。由于函数 $s\in[a,b]\mapsto h(\bar{s})-D(\bar{s})+D(s)$ 在 $s=\bar{s}$ 处取得最小值，我们推得 $0\in\partial^- h(\bar{s})$。于是，由 (4.26) 以及 $h(a)=h(b)=0$ 可得

$$\begin{cases} h(a)=0 & \le\quad h(\bar{s})+\sigma(a-\bar{s})^2=h(\bar{s})+\sigma\frac{(b-a)^2}{4}\\ h(b)=0 & \le\quad h(\bar{s})+\sigma(b-\bar{s})^2=h(\bar{s})+\sigma\frac{(b-a)^2}{4}.\end{cases}$$

因此，我们有

$$\begin{cases} -\sigma\frac{(b-a)^2}{4} & \le\quad h(\bar{s})<D(\bar{s})=-\frac{\epsilon(b-a)}{2}\\ -\sigma\frac{(b-a)^2}{4} & \le\quad h(\bar{s})<D(\bar{s})=-\frac{\epsilon(b-a)}{2}.\end{cases}$$

由此我们推得

$$-\sigma\frac{(b-a)}{4}+\frac{\epsilon}{2}<0<\sigma\frac{(b-a)}{4}-\frac{\epsilon}{2},$$

矛盾。情况 $\bar{s}\in((a+b)/2,b)$ 留给读者处理。 □

回想一下，存在一个序列 $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $(-\mu,\mu)$ 收敛到 0，使得对所有 $k\in\mathbb{N}$ 都有 $0\in\partial^- W^{\check{a}}(t_k)$。不失一般性，我们可以假设 $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 包含于 $(0,\mu)$，且单调递减。由命题 4.11 (i) 可得

$$0=W^{\check{a}}(0)\le W^{\check{a}}(t_k)+\sigma t_k^2\quad\forall k\in\mathbb{N}.\tag{4.28}$$

我们分两种情况讨论。

第一种情况：存在 $k\in\mathbb{N}$，使得 $t_k\le\sigma/4$ 且 $W^{\check{a}}(t_k)\ge 0$。
由于 $W^{-a}(0)=0$和 W^{-a}是连续的，因此存在 $b\in(0,\ t_k]$使得 $W^{\check{a}}(b)=0$。因此，根据命题 4.11 (i)，函数 $h=W^{\check{a}}\colon\ [0,b]\to\mathbb{R}$ 满足以下

命题 4.15 的假设（其中 $\epsilon = 1$、 $a = 0$ 和 $(b-a)\sigma/4 \le t_k\sigma/4 \le 1$），从而我们得到

$$W^{\check{a}}(t) \ge \max\Big\{a - t, t - b\Big\} \qquad \forall t \in [a, b].$$

这一性质与命题 4.11 (ii) 给出的性质 $D_+W^{\check{a}}(0) = -\infty$ 矛盾。

第二种情况：对所有足够大的 k，都有 $W^{\check{a}}(t_k) < 0$。

对于每个足够大的 k，我们定义连续函数 $h_k\colon [0, t_k] \to \mathbb{R}$ 如下：

$$h_k(t) := W^{\check{a}}(t) - \frac{t}{t_k} W^{\check{a}}(t_k) \qquad \forall t \in [0, t_k].$$

我们有 $h_k(0) = h_k(t_k) = 0$，此外，任何满足 $t \in [0, t_k]$ 且属于 $\partial^- h_k(t)$ 的 p 都满足（由 (4.28) 得）

$$p + \frac{1}{t_k} W^{\check{a}}(t_k) \in \partial^- W^{\check{a}}(t) \quad \text{with} \quad \left|\frac{1}{t_k} W^{\check{a}}(t_k)\right| = -\frac{1}{t_k} W^{\check{a}}(t_k) \le \sigma t_k.$$

因此，由命题 4.11 (i)，我们推知，若 $\sigma t_k \le 1/2$，则对于任何属于$\partial^- h_k(t)$ 且满足 $t \in [0, t_k]$ 和 $|p| \le 1/2$ 的 p，都有：

$$W^{\check{a}}(s) \le W^{\check{a}}(t) + \left(p + \frac{1}{t_k} W^{\check{a}}(t_k)\right)(s - t) + \sigma(s - t)^2 \quad \forall s \in [0, t_k].$$

从而得到

$$h_k(s) \le h_k(t) + p(s - t) + \sigma(s - t)^2 \quad \forall s \in [0, t_k].$$

与第一种情况一样，通过应用命题 4.15，我们得到与性质 $D_+W^{\check{a}}(0) = -\infty$ 相矛盾的结论。因此，定理 1.1 的证明完成。

5 最后的评论

5.1 连续函数的极限次微分的定义域

给定一个定义在 $\mathbb{R}^n$ 的开集 $\mathcal{O}$ 上的连续函数 $f\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}$，我们将其极限次微分的定义域记为 $\mathrm{dom}(\partial_L^- f)$，即 $\partial_L^- f(x)$ 非空的 $x \in \mathcal{O}$ 的集合。在第 2.4 节中，我们证明了，如果 $n = 1$，那么 $\mathrm{dom}(\partial_L^- f)$ 在 $\mathcal{O}$ 中具有全勒贝格测度。但对于下面的问题，我们还不知道答案：

开放问题。 如果 $n \ge 2$，那么 $\mathrm{dom}(\partial_L^- f)$ 在 $\mathcal{O}$ 中是否具有全勒贝格测度?

我们预期答案是否定的，即使 f 局部赫尔德连续。尽管如此，由于定点次黎曼距离（局部）赫尔德连续（这是球盒定理的推论，参见例如 [4, 13, 34]），如果上述问题在赫尔德连续的情形下得到肯定回答，那么次黎曼指数映射的像将具有一些有趣的性质，见下文 (5.1)。

5.2 关于 f_x的极限次微分

设 M 是一个配备完备次黎曼结构 $(\Delta,\ g)$ 的光滑流形。与 $(\Delta,\ g)$ 相应的次黎曼哈密顿量 $H\colon T^*M \to \mathbb{R}$ 按照如下方式定义：

$$(x,p) \longmapsto \frac{1}{2}\max\left\{\frac{p(v)^2}{g_x(v,v)} \,|\, v\in\Delta(x)\setminus\{0\}\right\}$$

在 T^*M的局部坐标中。若将 ϕ_t^H记为哈密顿流（由 H相对于 T^*M上的典范辛结构给出），那么对每个 $x \in M$，指数映射 $\exp_x\colon T_x^*M \to M$定义为

$$\exp_x(p) := \pi\left(\phi_1^H(x,p)\right) \qquad \forall p\in T_x^*M,$$

其中 $\pi:\ T^*M \to M$ 表示典范投影，并且它满足

$$\exp_x(\lambda\, p) := \pi\left(\phi_\lambda^H(x,p)\right) \qquad \forall p\in T_x^*M,\ \forall \lambda\geq 0.$$

固定 $x\in M$，我们定义集合 $\mathcal{P}_x^{min}\subset T_x^*M$，称为指数映射 $\exp_x$的极小化区域，如下：

$$\mathcal{P}_x^{min} := \left\{p\in T_x^*M \ \,|\, d_{SR}\left(x,\exp_x(p)\right)^2 = 2H(x,p)\right\},$$

它是余向量 $p\in T_x^*M$的集合，对于这些余向量，由 $\gamma_p(t):=\pi(\phi_t^H(x,p))$给出的水平路径 $\gamma_p\colon [0,1]\to M$对所有 $t\in[0,1]$而言，都是从 x到 $\gamma_p(1)=\exp_x(p)$的极小路径。命题 3.4表明

$$\mathrm{dom}\left(\partial_L^- f_x\right) \subset \exp_x\left(\mathcal{P}_x^{min}\right), \tag{5.1}$$

其中 $f_x := d_{SR}^x(\cdot)^2/2$，且 $\mathrm{dom}(\partial_L^- f_x)$ 表示满足 $\partial_L^- f_x(y)$ 非空的所有 $y\in M$ 的集合。我们不知道以下问题的答案：

开放问题。是否有 $\mathrm{dom}\left(\partial_L^- f_x\right) = \exp_x\left(\mathcal{P}_x^{min}\right)$？

值得注意的是，性质“$\partial_L^- f_x(y)\neq\emptyset$ 对几乎处处的 $y\in M$ 成立”未列入命题 3.10。我们也不知道这一性质是否足以保证极小化Sard猜想成立。

5.3 无穷远处的法向容器

这里沿用上一节的记号。给定 $x\in M$，我们用 ℓ_x 表示 T_x^*M 中满足以下条件的所有序列 $\{p_k\}_k$ 的集合：

$$\lim_{r\to+\infty}|p_k|_x = +\infty \quad \text{and} \quad \lim_{k\to+\infty} H(x,p_k) = \frac{1}{2}.$$

由紧致性可知，我们可以为 ℓ_x 中的每个序列 $\{p_k\}_k$ 关联一组从 x 出发的水平路径。事实上，每个 p_k 都会导出一条水平路径 $\gamma_{p_k}\colon [0,+\infty)\to M$（令 $\gamma_{p_k}(t):=\pi(\phi_t^H(x,p_k))$ 对所有 $t\geq 0$ 成立）；并且由于 $H(x,p_k)$ 趋于 $1/2$，所有这些曲线在每个满足 $T>0$ 的区间 $[0,T]$ 上都是一致 Lipschitz 的。

因此，根据 Arzelà–Ascoli定理，序列 $\{\gamma_{p_k}\}_k$ 在紧集上一致收敛；经过选取子列后，它收敛到 $[0,+\infty)$ 上从 x 出发的水平路径。我们将所有此类路径组成的集合记为 Γ_x^∞，并称其为从 x 出发的无穷远处的正规容器 。根据构造， Γ_x^∞ 中的任意路径都是奇异的。

我们将来自 x 的无穷远处的极小正规容器 称为由路径 $\gamma_{p_k}\colon [0,1]\to M$ 的一致极限得到的最短水平路径 $\gamma\colon [0,1]\to M$ 的集合，其中 $\{p_k\}_k$ 是 T_x^*M 中满足以下条件的一个序列:

$$p_k \in \mathcal{P}_x^{min} \quad \forall k \quad \text{and} \quad \lim_{r\to+\infty} |p_k|_x = +\infty.$$

根据构造，我们有

$$\Gamma_x^{\infty,min}([0,1]) \subset \Gamma_x^\infty\left([0,+\infty)\right).$$

根据命题 3.10，集合 $\mathrm{Abn}^{min}(x)$ 在 M 中的勒贝格测度为零，当且仅当对几乎所有 $y\in M$，都有 $\partial_{PL}^- f_x(y) = \emptyset$。此外，由命题 3.6 可轻易推得，对于任意满足 $p\in\partial_{PL}^- f_x(y)$ 的 $(y,\ p)\in T^*M$，存在一条满足 Goh 条件的最小化水平路径 $\gamma\in\Gamma_x^{\infty,min}$，使得 $\gamma(1)=y$。这些结果表明，深入研究无穷远处的法向容器 Γ_x^∞ 和 $\Gamma_x^{\infty,min}$或许有助于理解极小化Sard猜想。

5.4 测度收缩性质

测度收缩性质是指比较从给定点出发沿测地线收缩体积的情况，与黎曼几何经典模型中的情形。与其他定义在测度度量空间上、但不适用于次黎曼几何的 Ricci 曲率（下界）概念不同（见 [30]），已有研究表明，若干类型的次黎曼结构满足测度收缩性质（见 [29, 37, 7, 32, 33, 41, 14, 11]），而这些结构均不存在严格异常的最小化水平路径。本文给出了新的次黎曼结构实例，这些结构可能存在严格异常的最小化水平路径，并且 Ohta的定义的测度收缩性质在其中有意义（见[35, 37]）；因此，自然会想到它们是否也具有测度收缩性质。

A 二阶条件：二阶局部开性

本节中，我们陈述并证明一个局部开性结果，并将在引理 4.8 的证明中应用该结果。为此，我们考虑一个 Banach空间 $(X,\ \|\cdot\|)$（其以 $u\in X$为中心、半径为 $r>0$的开球记作 $B_X(u,\ r)$）、一个正整数 N、 X 的一个开子集 U，以及一个映射 $F\colon U\to\mathbb{R}^N$。假设该映射在 U上属于 C^2类，这意味着它满足以下性质（ $\mathbb{R}^N$ 上的通常欧几里得范数记作 $|\cdot|$）：

(i) 函数 F 在每个 $u \in U$ 处均（弗雷歇）可微，也就是说，存在一个有界线性算子 $D_u F : X \to \mathbb{R}^N$，使得

$$\lim_{h \to 0} \frac{|F(u+h) - F(u) - D_u F(h)|}{\|h\|} = 0,$$

(ii) 映射 $u \mapsto D_u F$ 从 U 到由算子范数 $\|\cdot\|$ 赋范的、从 X 到 $\mathbb{R}^N$ 的有界线性算子集合 $L(X, \mathbb{R}^N)$ 连续，

(iii) 函数 $u \in U \mapsto D_u F \in L(X, \mathbb{R}^N)$ 属于 C^1 类，视为从 $(X, \|\cdot\|)$ 到 $(L(X, \mathbb{R}^N), \|\cdot\|)$ 的函数（注意，上述 (i)-(ii) 可推广到取值于 Banach 空间而非 $\mathbb{R}^N$ 的函数），这意味着

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left|F(u+h) - F(u) - D_u F(h) - \frac{1}{2} D_u^2 F(h)\right|}{\|h\|^2} = 0 \qquad \forall u \in U,$$

其中，对任意 $u \in U$, $D_u^2 F : X \to \mathbb{R}^N$ 表示由对称双线性形式 $(h, k) \mapsto D_u^2 F(h, k)$ 所定义的二次型，该双线性形式由 $u \mapsto D_u F(h)$ 在 u 方向上的导数给出（沿着 k），且映射 $u \in U \mapsto D_u^2 F \in L^2(X, \mathbb{R}^n)$ 连续。

例如，关于无限维空间中的微分演算，读者可参阅专著 [27] 以了解更多细节。

根据反函数定理，在 F 为浸没的任意点处，也就是说在 $D_u F$ 为满射的任意点处，F 在「一阶」意义下是局部开映射。Agrachev-Sachkov [8]和 Agrachev-Lee [6]发展的二阶理论，使我们能够给出保证「二阶」局部开性的充分条件，下面将对此进行说明。给定一个临界点 $u \in U$，也就是说，一个 $D_u F : X \to \mathbb{R}^N$ 不是满射的点，我们将 u 的余秩定义为

$$\operatorname{corank}_F(u) := N - \dim\big(\operatorname{Im}(D_u F)\big) \in [1, N]$$

并且回顾一下，二次型 $Q : X \to \mathbb{R}$（即 Q 由 $Q(v)$ 定义：$= B(v, v)$，其中 $B : X \times X \to \mathbb{R}$ 是一个对称双线性型）的负指标定义为

$$\operatorname{ind}_-(Q) := \max\Big\{\dim(L) \mid Q_{|L\setminus\{0\}} < 0\Big\},$$

其中 $Q_{|L\setminus\{0\}} < 0$ 表示

$$Q(u) < 0 \qquad \forall u \in L \setminus \{0\}.$$

以下结果改进了 [38, 定理 B.3 p.128] 。该定理本身是应用 Agrachev-Sachkov[8, 第 20] 章和 Agrachev-Lee [6, 第 5] 节所发展的二阶理论得到的（另见 [4, 第 12] 章）（给定一个向量空间 $V \subset \mathbb{R}^N$，$V^\perp$ 表示在 $\mathbb{R}^N$ 上消去 V 的线性形式所构成的集合）：

定理 A.1. 设 $F : U \to \mathbb{R}^N$ 是定义在开集 $U \subset X$ 上的 C^2 类映射，$\bar{u} \in U$ 是 F 的一个余秩为 r 的临界点，并设 $G : U \to \mathbb{R}^d$ 是定义在 U 上的 C^1 类映射，其中 $d \in \mathbb{N}^*$。若满足

$$\operatorname{ind}_-\Big(\lambda \cdot \big(D_{\bar{u}}^2 F\big)_{|\operatorname{Ker}(D_{\bar{u}} F)}\Big) \geq N + d \qquad \forall \lambda \in \big(\operatorname{Im}(D_{\bar{u}} F)\big)^\perp \setminus \{0\}, \tag{A.1}$$

则存在$(\delta,\rho)\in(0,1)$和 $K>0$，使得以下性质成立：对于每个 $u\in U$, $x\in\mathbb{R}^N$，满足

$$\|u-\bar{u}\|<\delta \quad and \quad |x-F(u)|<\rho,$$

存在 $w_1, w_2\in X$ 使得 $u+w_1+w_2\in U$,

$$x=F(u+w_1+w_2),$$

$$w_1\in \mathrm{Ker}\,(D_uF)\cap \mathrm{Ker}\,(D_uG)$$

and

$$\|w_1\|<K\sqrt{|x-F(u)|},\quad \|w_2\|<K|x-F(u)|.$$

定理 *A.1* 的证明。固定陈述中给出的 $F:\ U\to\mathbb{R}^N$, $\bar{u}\in U$ 和 $G:\ U\to\mathbb{R}^d$，使得 (A.1) 成立。以下结果将使我们能够在有限维空间上进行研究，它是 (A.1) 的推论。

引理 A.2。存在一个维数为 D 的向量空间 $W\subset X$，以及一个维数为 $N-r$ 的向量空间 $V\subset W$，使得 F 对 $W_{\bar{u}}:=\{\bar{u}\}+W$ 的限制 $\tilde{F}\colon W_{\bar{u}}\to\mathbb{R}^N$ 满足以下性质：有

$$W=V\oplus\mathrm{Ker}\big(D_{\bar{u}}\tilde{F}\big),\quad \mathrm{Im}\big(D_{\bar{u}}\tilde{F}\big)=\mathrm{Im}\big(D_{\bar{u}}\tilde{F}_{|V}\big)=\mathrm{Im}\big(D_{\bar{u}}F\big) \tag{A.2}$$

˜ 且对于每个维数为 $\geq D+r-N-d$ 的向量空间 $Z\subset$ 核$(D_{\bar{u}}F)$，

$$\mathrm{ind}_-\left(\lambda\cdot\big(D^2_{\bar{u}}\tilde{F}\big)_{|Z}\right)\geq r\qquad \forall\lambda\in\left(\mathrm{Im}\big(D_{\bar{u}}\tilde{F}\big)\right)^{\perp}\setminus\{0\}. \tag{A.3}$$

引理 *A.2* 的证明。考虑由以下条件定义的 $(N-1)$ 维球面 $S\subset(\mathbb{R}^N)^*$

$$S:=\left\{\lambda\in\big(\mathrm{Im}\big(D_{\bar{u}}F\big)\big)^{\perp}\ |\ |\lambda|=1\right\}\subset\big(\mathbb{R}^N\big)^*.$$

由（A.1），对每个 $\lambda\in S$，存在一个维数为 $N+d$ 的子空间 $E_\lambda\subset$ 核 $(D_{\bar{u}}F)$，使得

$$\lambda\cdot\big(D^2_{\bar{u}}F\big)_{|E_\lambda\setminus\{0\}}<0$$

此外，由于映射 $\nu\mapsto\nu\cdot\big(D^2_uF\big)_{|E_\lambda}$ 的连续性，确实存在一个包含 λ 的开集 $\mathcal{O}_\lambda\subset S$，使得

$$\nu\cdot\big(D^2_uF\big)_{|E_\lambda\setminus\{0\}}<0\qquad\forall\nu\in\mathcal{O}_\lambda.$$

因此，由于 S 的紧致性，存在有限个开集 $\mathcal{O}_{\lambda_1},\ldots,\mathcal{O}_{\lambda_I}$，它们属于 S，使得

$$S=\bigcup_{i=1}^{I}\mathcal{O}_{\lambda_i}.$$

现在选取一个维数为 $N-r$ 的有限维空间 $V\subset X$，使得（注意 $V\cap$ 核$(D_{\bar{u}}F)=\{0\}$）

$$\mathrm{Im}\left(D_{\bar{u}}F_{|V}\right)=\mathrm{Im}\big(D_{\bar{u}}F\big)$$

并定义有限维向量空间 $W \subset X$，其维数设为 D，如下：

$$W := V \oplus \left(\sum_{i=1}^{I} E_{\lambda_i} \right).$$

根据构造， F 对 $W_{\bar{u}}$ 的限制 $\tilde{F}$: $W_{\bar{u}} \to \mathbb{R}^N$ 满足且 (A.2)

$$\operatorname{ind}_- \left(\lambda \cdot \left(D^2_{\bar{u}} \tilde{F} \right)_{|\operatorname{Ker}(D_{\bar{u}} \tilde{F})} \right) \geq N + d \qquad \forall \lambda \in \left(\operatorname{Im}\left(D_{\bar{u}} \tilde{F} \right) \right)^{\perp} \setminus \{0\}. \tag{A.4}$$

˜此外，若 $Z \subset \operatorname{Ker}(D_{\bar{u}} F)$ 是维数为 $\geq D + r - N - d$ 的向量空间，且 λ 属于 $(\operatorname{Im}(D_{\bar{u}} \tilde{F}))^{\perp} \setminus \{0\}$，那么根据 (A.4)，存在一个维数为 $N + d$ 的向量空间 $E \subset \operatorname{Ker}(D_{\bar{u}} \tilde{F})$，使得

$$\lambda \cdot \left(D^2_{\bar{u}} \tilde{F} \right)_{|E \setminus \{0\}} < 0$$

并且此外我们有

$$\begin{aligned} \dim(Z \cap E) &= \dim(Z) + \dim(E) - \dim(Z + E) \\ &\geq (D + r - N - d) + (N + d) - D = r. \end{aligned}$$

这证明了 (A.3)。 □

˜对于每个维数为 $\geq D + r - N - d$ 的向量空间 $Z \subset \operatorname{Ker}(D_{\bar{u}} F)$，我们定义向量空间

$$X_Z := V \oplus Z \subset X$$

以及映射 $H_Z : X_Z \longrightarrow \mathbb{R}^N$，定义为

$$H_Z(v, z) := D_{\bar{u}} \tilde{F}(v) + \frac{1}{2} \left(D^2_{\bar{u}} \tilde{F} \right)(z) \qquad \forall (v, z) \in V \times Z \simeq X_Z,$$

并且我们设

$$\mathcal{B}_Z(a) := \left\{ (v, z) \in X_Z \,|\, \|v + z\| < a \right\} \qquad \forall a > 0.$$

以下引理的证明与 [38, 引理 B.7 p. 135], 的证明大致相同。为保证完备性，我们给出证明。

˜**引理 A.3**。对于每个维数为 $\geq D + r - N - d$ 的向量空间 $Z \subset$ 核$(D_{\bar{u}} F)$，存在 $\mu_Z, c_Z > 0$，使得任意连续映射 H: $\mathcal{B}_Z(1) \to \mathbb{R}^N$ 的像满足

$$\sup \left\{ |H(v, z) - H_Z(v, z)| \,|\, (v, z) \in \mathcal{B}_Z(1) \right\} \leq \mu_Z \tag{A.5}$$

包含球 $\bar{B}(0, c_Z) \subset \mathbb{R}^N$。

˜引理 *A.3* 的证明。设 $Z \subset \operatorname{Ker}(D_{\bar{u}} F)$ 是一个维数为 $\geq D + r - N - d$ 的向量空间。记 $\mathcal{K}$为 $\mathbb{R}^N$ 中 $\operatorname{Im}(D_{\bar{u}} \tilde{F}) = \operatorname{Im}(D_0 H_Z)$ 的正交补

它是 $\mathbb{R}^N$ 的一个维数为 r 的向量子空间，并定义二次映射$Q_Z : Z \to \mathcal{K}$ 为

$$Q_Z(z) := \mathrm{Proj}_{\mathcal{K}}^{\perp}\left[\left(D_{\bar{u}}^2\tilde{F}\right)(z)\right] \qquad \forall z \in Z,$$

其中，$\mathrm{Proj}_{\mathcal{K}}^{\perp}: \mathbb{R}^N \to \mathcal{K}$ 表示到 $\mathcal{K}$的正交投影。由 (A.2)-(A.3)，可得

$$\mathrm{ind}_-\left(\Lambda^* \cdot Q_Z\right) \geq r \qquad \forall \Lambda \in \mathcal{K} \setminus \{0\}.$$

因此，由 [8, 引理 20.8，第 301] 页，或 [38, 引理 B.6，第 130] 页， Q_Z 存在一个正则零点$\bar{z} \in Z$。于是，点 $\bar{z} \in X_Z$ 满足

$$\tilde{z} \in \mathrm{Ker}(D_0 H_Z) = Z,$$

$D_0^2 H_Z(\bar{z}, \bar{z}) \in \mathrm{Im}(D_0 H_Z)$（因为 $Q_Z(\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow D_{\bar{u}}^2\tilde{F}(\bar{z}) \in \mathcal{K}^{\perp} = \mathrm{Im}(D_0 H_Z)$），且线性映射

$$(v, z) \in \mathrm{Ker}(D_0 H_Z) \longmapsto \mathrm{Proj}_{\mathcal{K}}^{\perp}\left[\left(D_0^2 H_Z\right)\left(\bar{z}, (v, z)\right)\right] \in \mathcal{K} = \left(\mathrm{Im}\left(D_0 H_Z\right)\right)^{\perp}$$

是满射，因此由 [38, 引理 B.5，第 129] 页，我们推知存在一个序列 $\{(v_i, z_i)\}_i$，属于 X_Z，并且关于 $\|\cdot\|$收敛到 0，使得 $H_Z(v_i, z_i) = 0$ 且 $D_{(v_i,z_i)}H_Z$对所有 i都是满射。取足够大的 i，使得 $u_i := (v_i, z_i)$ 属于 $\mathcal{B}_Z(1/4)$。由于 $D_{u_i}H_Z$是满射，存在一个维数为 N 的仿射空间 $Y \subset X_Z$，包含 u_i，使得$D_{u_i}(H_Z)_{|Y}$ 可逆。因此，由反函数定理，存在一个开球$\mathcal{B} := B_X(u_i, \rho) \cap Y \subset \mathcal{B}_Z(1)$，以 u_i为中心，位于 Y中，使得该映射

$$(H_Z)_{|Y} : \mathcal{B} \longrightarrow (H_Z)_{|Y}(\mathcal{B}) \subset \mathbb{R}^N$$

是一个微分同胚。记 $\mathcal{H} : (H_Z)_{|Y}(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$ 为其逆映射，我们选取某个 $c_Z > 0$使得

$$\bar{B}(0, c_Z) \subset (H_Z)_{|Y}(\mathcal{B}) \quad \text{and} \quad \mathcal{H}\left(\bar{B}(0, c_Z)\right) \subset B_X\left(u_i, \rho/4\right),$$

此外，我们还考虑某个足够小的 $\mu_Z > 0$，使得任何满足 (A.5) 的连续映射$H : \mathcal{B}_Z(1) \to \mathbb{R}^N$ 都满足

$$H(u) \in (H_Z)_{|Y}(\mathcal{B}) \qquad \forall u \in B_X(u_i, \rho/2) \cap Y$$

and

$$|(\mathcal{H} \circ H)(u) - u| \leq \frac{\rho}{4} \qquad \forall u \in B_X(u_i, \rho/2) \cap Y.$$

我们断言，根据构造，任何满足 (A.5) 的连续映射 $H : \mathcal{B}_Z(1) \to \mathbb{R}^N$ 的像都包含球 $\bar{B}(0, c_Z)$。事实上，对于每个 $x \in \bar{B}(0, c_Z)$，上述构造意味着函数

$$\Psi : \bar{B}_X(\mathcal{H}(x), \rho/4) \cap Y \longrightarrow \bar{B}_X(\mathcal{H}(x), \rho/4) \cap Y$$

定义为

$$\Psi(u) := u - (\mathcal{H} \circ H)(u) + \mathcal{H}(x) \qquad \forall u \in \bar{B}_X(\mathcal{H}(x), \rho/4) \cap Y,$$

Ψ是从 N 维球 $B_X(\mathcal{H}(x), \rho/4) \cap Y$到其自身的连续映射。因此，根据布劳威尔不动点定理，Ψ 有一个不动点，也就是说，存在 $u \in B_X(\mathcal{H}(x), \rho/4) \cap Y$使得

$$\Psi(u) = u \iff \mathcal{H}\big(H(u)\big) = \mathcal{H}(x) \iff H(u) = x,$$

由此完成引理的证明。 □

˜设 $\bar{\epsilon} > 0$ 满足 $B_X(\bar{u}, 10\bar{\epsilon}) \subset U$。对于每个维数为 $e \in [D+r-N-d, D+r-N]$ 的向量空间 $Z \subset \mathrm{Ker}(D_{\bar{u}}F)$（注意，$\mathrm{Ker}(D_{\bar{u}}F)$ 的维数为 $D+r-N$），以及每个维数为 e 的向量空间 $Z' \subset W$，我们用 $D_H(Z, Z')$ 表示 Z 与 Z' 在单位球上的豪斯多夫距离，即（令 $B_X^1 := B_X(0, 1)$）

$$D_H(Z, Z') := \max\left\{ \sup_{u \in Z \cap B_X^1} \inf_{u \in Z \cap B_X^1} \left\{\|u - u'\|\right\}, \sup_{u' \in Z' \cap B_X^1} \inf_{u \in Z \cap B_X^1} \left\{\|u - u'\|\right\} \right\}$$

并记 $\pi_{Z'} : W \to Z'$ 为相对于 $W \simeq \mathbb{R}^D$ 中某个固定欧几里得度量的到 Z' 的正交投影。注意，由于有限维空间中的范数等价，存在一个不依赖于 Z，Z' 的 $K > 0$，使得

$$\|\pi_{Z'}(z) - z\| \leq K d_H(Z, Z') \|z\| \qquad \forall z \in Z. \tag{A.6}$$

于是，对于每个 $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ 以及每个满足 $\|u - \bar{u}\| < \bar{\epsilon}$ 的 $u \in U$，我们定义 $\Phi^{\epsilon}_{Z,\, Z',\, u} : X_Z \to \mathbb{R}^N$ 上的一个 C^2 类函数 $\Phi^{\epsilon}_{Z,\, Z',\, u}$，如下所示：

$$\Phi^{\epsilon}_{Z,Z',u}(v, z) := \frac{1}{\epsilon^2}\Big(F\big(u + \epsilon^2 v + \epsilon \pi_{Z'}(z)\big) - F(u)\Big) \qquad \forall (v, z) \in X_Z.$$

以下引理由上述二阶泰勒公式 (iii) 和引理 A.3 得出：

˜**引理 A.4**。对于每个维数为 $e \in [D + r - N -$ 的向量空间 $Z \subset$ 核$(D_{\bar{u}}F)\, d$, $D + r - N]$，存在 $\epsilon_Z > 0$，使得对于每个维数为 e 且满足以下条件的向量空间 $Z' \subset W$

$$D_H(Z, Z') < \epsilon_Z,$$

并且对于每个 $u \in U$ 满足 $\|u - \bar{u}\| < \epsilon_Z$ 的情况，我们有

$$\bar{B}(0, c_Z) \subset \Phi^{\epsilon}_{Z,Z',u}\left(\mathcal{B}_Z(1)\right) \qquad \forall \epsilon \in (0, \epsilon_Z).$$

˜引理 *A.4* 的证明。设 $Z \subset \mathrm{Ker}(D_{\bar{u}}F)$ 为一个维数为 $e \in [D+r-N-d,\ D+r-N]$ 的向量空间。我们断言

$$\lim_{u \to \bar{u}, Z' \to Z, \epsilon \to 0} \sup\Big\{ \big|\Phi^{\epsilon}_{Z,Z',u}(v, z) - H_Z(v, z)\big| \mid (v, z) \in \mathcal{B}_Z(1) \Big\} = 0.$$

事实上，对于每个维数为 e 的向量空间 $Z' \subset W$ 以及每个 $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$，对于每个 $(v, z) \in \mathcal{B}_Z(1)$，我们有

$$\begin{aligned}\Phi^{\epsilon}_{Z,Z',u}(v, z) - H_Z(v, z) = &\left(D_u F(v) + \frac{1}{2} D_u^2 F\big(\pi_{Z'}(z)\big)\right) \\ &- \left(D_{\bar{u}}\tilde{F}(v) + \frac{1}{2}\big(D_{\bar{u}}^2 \tilde{F}\big)(z)\right) + \Theta^{\epsilon}_{Z,Z',u}(v, z),\end{aligned}$$

with

$$\Theta^{\epsilon}_{Z,Z',u}(v, z) \;=\; \frac{1}{\epsilon^2}\left(F\big(u + \epsilon^2 v + \epsilon \pi_{Z'}(z)\big) - F(u) - D_u F\big(\epsilon^2 v\big)\right) \;-\; \frac{1}{2} D_u^2 F\big(\pi_{Z'}(z)\big).$$

根据 F 的正则性 C^1，我们有

$$\lim_{u\to\bar{u}} \sup\Big\{\Big|D_uF(v) - D_{\bar{u}}\tilde{F}(v)\Big| \mid (v,z)\in\mathcal{B}_Z(1)\Big\} = 0$$

并且根据 C^2 F 的正则性以及 (A.6)，我们有

$$\lim_{u\to\bar{u},Z'\to Z} \sup\Big\{\Big|D_u^2F\big(\pi_{Z'}(z)\big) - \big(D_{\bar{u}}^2\tilde{F}\big)(z)\Big| \mid (v,z)\in\mathcal{B}_Z(1)\Big\} = 0.$$

此外，对于每个 $(v,z)\in\mathcal{B}_Z(1)$，我们可以写成，

$$\begin{aligned}
& F\big(u+\epsilon^2 v+\epsilon\pi_{Z'}(z)\big) - F(u) - D_uF\big(\epsilon^2 v\big)\\
= \;& F\big(u+\epsilon^2 v+\epsilon\pi_{Z'}(z)\big) - F(u) - D_uF\big(\epsilon^2 v+\epsilon\pi_{Z'}(z)\big)\\
= \;& \frac{1}{2}\int_0^1 D^2_{tu+(1-t)(\epsilon^2 v+\epsilon\pi_{Z'}(z))}F\big(\epsilon^2 v+\epsilon\pi_{Z'}(z)\big)\,dt\\
= \;& \frac{\epsilon^2}{2}\int_0^1 D^2_{tu+(1-t)(\epsilon^2 v+\epsilon\pi_{Z'}(z))}F\big(\epsilon v+\pi_{Z'}(z)\big)\,dt,
\end{aligned}$$

因此，根据 C^2 F 的正则性以及 (A.6)，我们还可以推得

$$\lim_{u\to\bar{u},Z'\to Z,\epsilon\to 0} \sup\Big\{\big|\Theta^{\epsilon}_{Z,Z',u}(v,z)\big| \mid (v,z)\in\mathcal{B}_Z(1)\Big\} = 0.$$

因此，所述结论得证，引理 A.3 完成了证明。 □

我们现在可以结束定理 A.1 的证明。首先注意，对于˜每个整数 $e\in[D+r-N-d, D+r-N]$，由维数为 e 的向量空间 $Z\subset\mathrm{Ker}(D_{\bar{u}}F)$ 构成的集合，在度量 D_H下是紧的。因此，根据引理 A.4，我们推得˜存在 ˆ$c,\hat{\epsilon}\in(0,1)$，使得对于每个维数为$e\geq[D+r-N-d, D+r-N]$的向量空间 $Z\subset\mathrm{Ker}(D_{\bar{u}}F)$，对于每个维数为 e 且满足$D_H(Z,Z')<\hat{\epsilon}$的向量空间 $Z'\subset W$，以及对于任意满足 $\|u-\bar{u}\|<\hat{\epsilon}$的 $u\in U$，都有

$$\bar{B}(0,\hat{c})\subset\Phi^{\epsilon}_{Z,Z',u}\left(\mathcal{B}_Z(1)\right)\qquad\forall\epsilon\in(0,\hat{\epsilon}). \tag{A.7}$$

其次，我们注意到，对于每个足够接近 $\bar{u}$ 的 $u\in U$，由此定义的两个向量空间 Z'_u，$Z_u\subset W$ （$\mathrm{Proj}^{\perp}_E$ 表示相对于 $W\simeq\mathbb{R}^D$ 中固定的欧几里得度量到向量空间 $E\subset W$ 的正交投影）

$$Z'_u := \mathrm{Ker}\left(D_uF\right)\cap\mathrm{Ker}\left(D_uG\right)\cap W \quad\text{and}\quad Z_u := \mathrm{Proj}^{\perp}_{\mathrm{Ker}(D_{\bar{u}}\tilde{F})}\big(Z'_u\big)$$

在 $[D+r-N-d, D+r-N]$ 中具有相同的维数。因此，存在 $\delta\in(0,1)$，使得对任意满足 $\|u-\bar{u}\|<\delta$, $Z=Z_u$ 和 $Z'=Z'_u$ 的 $u\in U$，(A.7) 均成立；此外，我们注意到也可以假设，对某个 $C\geq 1$，$\|\pi_{Z'}(z)\|<C\|z\|$。现在证明定理 A.1 的结论对_ $K:=C/\sqrt{\hat{c}}$ 和 $\rho:=\hat{\epsilon}^2\hat{c}$ 成立。给定满足 $\|u-\bar{u}\|<\delta$ 的 $u\in U$，若 $x\in\mathbb{R}^N$ 满足 $|x-F(u)|<\rho$，则有

$$\epsilon := \sqrt{\frac{|x-F(u)|}{\hat{c}}} < \hat{\epsilon}\quad\text{and}\quad \frac{1}{\epsilon^2}\big(x-F(u)\big) < \bar{c}.$$

因此，由 (A.7)（取 $Z = Z_u$ 和 $Z' = Z'_u$），存在 $(v,\ z) \in \mathcal{B}_Z(1)$，使得 $\Phi^{\epsilon}_{Z,\ Z',\ u}(v,\ z) = (x - F(u))/\epsilon^2$，由此可得

$$x = F(u + w_1 + w_2) \quad \text{with} \quad w_1 := \epsilon \pi_{Z'}(z) \text{ and } w_2 := \epsilon^2 v,$$

其中

$$w_1 \in \operatorname{Ker}(D_u F) \cap \operatorname{Ker}(D_u G)$$
$$\text{and} \quad \|w_1\| < K\sqrt{|x - F(u)|}, \quad \|w_2\| < K|x - F(u)|$$

根据构造，这些条件均得以满足。 □

参考文献

[1] A. Agrachev. 次黎曼长度极小曲线的紧致性与次解析性。控制理论及其应用（格拉多，1998），都灵理工大学数学研讨会报告，56(4):1–12，2001。[2] A. Agrachev. 任意次黎曼度量都存在光滑点。《科学院通报》 424（2009），第3期，295-298；译文见《数学通报》 79（2009），第1期，45-47。[3] A. Agrachev. 若干开放问题。几何控制理论与次黎曼几何，1–13，Springer INdAM丛书。**5** （2014）。[4] A. Agrachev、A. Barilari 和 U. Boscain。次黎曼几何综合导论：哈密顿视角。附 *Igor Zelenko* 撰写的附录。 剑桥高等数学研究丛书，第181卷。剑桥大学出版社，剑桥，2020。[5] A. Agrachev 和 J.-P. Gauthier。Carnot-Carathéodory 距离的次解析性。《庞加莱研究所非线性分析年刊》，18(3):359–382，2001。[6] A. Agrachev 和 P. Lee。非完整约束下的最优传输。《美国数学会汇刊》，361(11):6019–6047，2009。[7] A. Agrachev 和 P. Lee。三维接触次黎曼流形的广义里奇曲率界。《数学年刊》，360(1-2):209–253，2014。[8] A. Agrachev 和 A. Sachkov。几何视角下的控制理论。数学科学百科全书，第87卷。施普林格出版社，柏林，2004。[9] A. Agrachev 和 A.V. Sarychev。异常次黎曼测地线：莫尔斯指标与刚性。《庞加莱研究所年刊》，13:635–690，1996。[10] A. Agrachev 和 A.V. Sarychev。次黎曼度量：异常测地线的极小性与次解析性之比较。*ESAIM*，《控制、优化与变分法》，4:377–403，1999。[11] Z. Badreddine 和 L. Rifford。步长为二的解析次黎曼结构与利普希茨卡诺群的测度收缩性质。《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔），70（2020），第6期，2303–2330。

[12] D. Barilari 和 L. Rizzi。广义 H- 型 Carnot 群的尖锐测度收缩性质。*Commun. Contemp. Math.*，20（2018），第6期，1750081，24页。[13] A. Bellaïche。次黎曼几何中的切空间。次黎曼几何，1–78，数学进展丛书，第144卷，Birkhäuser，巴塞尔，1996。[14] A. Belotto da Silva 和 L. Rifford。Martinet 曲面上的次黎曼 Sard 猜想。*Duke Math. J.* 167（2018），第8期，1433–1471。[15] A. Belotto da Silva、A. Figalli、A. Parusiński 和 L. Rifford。3维解析次黎曼结构中强 Sard 猜想与奇异极小测地线的正则性。*Inventiones Math.* 229（2022），第1期，395–448。[16] A. Belotto da Silva、A. Parusiński 和 L. Rifford。异常次解析分布与最小秩 Sard 猜想。预印本，arXiv:2208。01392, [math.DG],（2022）。[17] F. Boarotto、L. Nalon 和 D. Vittone。步长 2 及丝状 Carnot 群中的 Sard 问题。预印本，arXiv:2203。16360, [math.DG], （2022）。[18] F. Boarotto 和 D. Vittone。Carnot 群中 Sard 问题的动力学方法。*J. Differential Equations*，269（2020），第6期，4998–5033。[19] Y. Chitour、F. Jean 和 E. Trélat。奇异曲线的一般性结果。*J. Diff. Geom.*，73（2006），第1期，45–73。[20] F. Clarke。泛函分析、变分法与最优控制。数学研究生丛书，第164卷。施普林格出版社，伦敦，1013。[21] F. H. Clarke、Yu. S. Ledyaev、R. .J. Stern 和 P. .R. Wolenski。非光滑分析与控制理论。数学研究生丛书，第178卷。施普林格出版社，纽约，1998。[22] M.-O. Czarnecki 和 L. Rifford。Lipschitz 函数的逼近与正则化：梯度的收敛。《美国数学会汇刊》，358（2006），第10期，4467–4520。[23] L.C. Evans 和 R.F. Gariepy。测度论与函数的精细性质。数学教材丛书。CRC出版社，博卡拉顿，2015。[24] H. Federer。几何测度论。 数学科学基础丛书，第153卷。施普林格出版社，纽约，1969。[25] A. Figalli 和 L. Rifford。次黎曼流形上的质量输运。*Geom. Funct. Anal.*，20(1):124–159，2010。[26] P. Góra 和 R.J. Stern。Van der Waerden 函数的次微分分析。*J. Convex Anal.*，18（2011），第3期，699–705。[27] R. S. Hamilton。Nash 与 Moser 的反函数定理。*Bull. Amer.Math. Soc. (N.S.)*，7（1982），第1期，65–222。

[28] E. H. Hanson. Denjoy、Young 和 Saks 定理的新证明。《美国数学会通报》，40（1934），第 10 期，691–694。[29] N. Juillet. 海森堡群中的几何不等式与广义 Ricci 界。《国际数学研究通知》，13：2347–2373，2009。[30] N. Juillet. 海森堡群中的几何不等式与广义 Ricci 界。《伊比利亚美洲数学评论》，37（2021），第 1 期，177-188。[31] E. Le Donne、R. Montgomery、A. Ottazzi、P. Pansu 和 D. Vittone. 某些 Carnot 群上端点映射的萨德性质。《庞加莱研究所年刊：非线性分析》，33（2016），第 6 期，1639–1666。[32]P.W.Y. Lee. 在没有 Ricci 曲率下界时的测度收缩性质。《势分析》，44:(1):27–41，2016。[33]P.W.Y. Lee、C. Li 和 I. Zelenko. 萨萨基流形上次黎曼结构的 Ricci 曲率型下界。《离散与连续动力系统》，36:(1):303–321，2016。[34] R. Montgomery. 次黎曼几何、测地线及其应用巡礼。《数学调查与专著》，第 91 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2002。[35] S. Ohta. 关于度量测度空间的测度收缩性质。《赫尔维蒂数学评论》，82(4):805–828，2007。[36] A. Ottazzi 和 D. Vittone. 二阶 Carnot 群中异常集的余维数。*ESAIM*《控制、优化与变分法》25（2019），论文编号 18，共 17 页。[37] L. Rifford. Carnot 群中的 Ricci 曲率。《数学、控制与相关领域》，3（2013），第 4 期，467–487。[38] L. Rifford. 次黎曼几何与最优传输。《数学简明丛书》，施普林格出版社，纽约，2014。[39] L. Rifford. 次黎曼几何中的奇异极小测地线。《布尔巴基研讨班》，2015/2016 卷，第 1104–1119 讲。《阿斯特里斯克》，第 390 号（2017），第 1113 讲，277–301。[40] L. Rifford 和 E. Trélat. 次黎曼几何中的莫尔斯–萨德型结果。《数学年刊》，332（2005），第 1 期，145–159。[41] L. Rizzi. Carnot 群的测度收缩性质。《变分法与偏微分方程》，55(3)，论文编号 60，共 20 页，2016。[42] R. T. Rockafellar 和 R. J.-B. Wets. 变分分析。《数学科学基础原理丛书》 [。施普林格出版社，柏林，1998。[43] T. Sakai. 黎曼几何。《数学专著译丛》，149。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996。

[44] A. I. Subbotin. 一阶偏微分方程的广义解。Birkhäuser，波士顿，1995。

[45] E. Trélat。关于带二次代价的仿射控制系统的值函数及其等值集的一些性质。《动力学与控制系统杂志》，6（2000），第4期，511–541。