arXiv:2302.02669v1 [math.DS] 6 Feb 2023

全纯动力系统中 Fatou 分支导论

Xavier Buff 与 Jasmin Raissy

Abstract. 本综述旨在介绍全纯动力系统中 Fatou 分支的分类。我们从黎曼球面上有理映射的 Fatou 集与 Julia 集的描述入手，最后介绍复二维中多项式斜积的 Fatou 分支方面的最新研究成果，并重点阐述构造的关键步骤；该构造证明了 $\mathbb{C}^2$ 上存在多项式自映射的游荡域。

1. 引言

离散动力系统 研究从一个空间到其自身的映射 $f\colon X \to X$。其主要目标之一是理解如下形式的序列:

$$x_0 \in X, \quad x_1 := f(x_0), \quad x_2 := f(x_1) = f^{\circ 2}(x_0), \quad x_3 := f(x_2) = f^{\circ 3}(x_0), \dots$$

通过对 f 进行迭代 得到。x_0 在 f 作用下的正向轨道 为

$$\mathcal{O}^+(x_0) := \bigcup_{n\geq 0} \{f^{\circ n}(x_0)\}.$$

主要问题是理解序列 $(x_n)_{n\geq 0}$ 的长期行为。答案取决于我们对空间 X 和映射 $f\colon X \to X$ 所作的假设。

如果 X 是一个拓扑空间，我们可能会想知道该序列是否收敛。如果确实如此，并且 $f\colon X \to X$ 还是连续映射，那么极限 ℓ 就是 f 的不动点，即 $f(\ell) = \ell$。

如果 X 是紧的，那么借助博尔查诺–魏尔斯特拉斯定理，我们可以抽取收敛子列。我们将 $\omega(x_0)$ 记作 x_0 的-极限集，也就是所有可能极限值构成的集合:

$$\omega(x_0) := \bigcap_{n\geq 0} \overline{\mathcal{O}^+(x_n)}.$$

如果 $f\colon X \to X$ 连续，那么对于任意 $x \in X$， ω-极限集 $\omega(x)$ 都是 f-不变的。

练习 1.1. 证明它。

在本讲义余下部分中，我们将研究 X 为复流形且 $f\colon X \to X$ 为全纯映射的情形。我们首先考虑 $\widehat{X} = \mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 为黎曼球面，且 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为多项式或有理映射的情形。

本书属于 C.I.M.E. 讲义《动力系统的现代方面》，该书将于施普林格数学讲义——C.I.M.E. 子系列中出版，内容对应第二作者于2021年8月在切特拉罗讲授的课程。

这一领域的历史相当悠久。19世纪末，Koenigs [43], Schr¨oder[57], B¨ottcher [18] 作出了贡献；1920年左右，Fatou [30,31, 32]和 Julia [41]发表了重要的长篇论文。关于这一早期阶段的历史，读者可参阅 Alexander [1] 的著作。此后该领域经历了一段沉寂期，期间 Cremer [22, 23]（1936年）和 Siegel [58] （1942年）作出了值得注意的贡献；20世纪60年代（Brolin、Guckenheimer、Jakobson），这一领域又重新兴起。自20世纪80年代初以来，在一定程度上受到计算机图形学的推动，该领域蓬勃发展，Douady、Hubbard、Sullivan、Thurston，以及较近时期的 Lyu- bich、McMullen、Milnor、Shishikura、Yoccoz 等人作出了重要贡献。尽管这一领域仍有许多未解问题，但现已积累了大量知识，并出版了多部著作：Beardon [5], 、Carleson 和 Gamelin [21], 、Milnor [50] 、Steinmetz [59], 以及 McMullen [48] [49] 撰写的专题性更强的著作。Blanchard [12], 、Devaney [25], 、Douady [26], 、Keen [42] 和 Lyubich [46] 撰写的综述也值得特别推荐。

有一小类多项式，例如

$$f(z) = az + b, \quad f(z) = z^d \quad \text{and} \quad f(z) = z^2 - 2,$$

它们的动力学可以相当容易地理解。

练习 1.2. 假设 $f(z) = az + b$ 满足 $a \in \mathbb{C}$ 且 $b \in \mathbb{C}$。

(1) 证明当 $|a| \neq 1$ 或当 $a = 1$ 且 $b \neq 0$时，该映射

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \omega(z) \in \widehat{\mathbb{C}}$$

是常数。

(2) 证明在所有其他情况下， $\omega(z)$ 取决于 z ，并且要么是有限集，要么是欧几里得圆。

练习 1.3. 假设 $f(z) = z^d$ 且 $d \geq 2$。

(1) 证明如果 z 属于单位圆盘 $\mathbb{D}$ ，则 $\omega(z) = \{0\}$ ；如果$\sim z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$，则 $\omega(z) = \{\infty\}$ 。(2) 证明 (a) 如果 z 属于单位圆 S^1，则 $\omega(z) \subset S^1$ ；(b) $\omega(z)$ 可以等于 S^1 ；(c) $\omega(z)$ 可以是任意基数的有限集。

练习 1.4. 假设 $f(z) = z^2 - 2$。

(1) 证明每个 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 都可以写成 $z = w + 1/w$ ，其中某个 $w \in \mathbb{C}$ 满足：如果 $z \in [-2, 2]$ ，则 $|w| = 1$ ；如果 $z \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$, 则 $|w| > 1$ 。(2) 证明 (a) 如果 $z \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ ，则 $\omega(z) = \{\infty\}$ ；(b) 如果 $z \in [-2, 2]$, 则 $\omega(z) \subset [-2, 2]$ 。

练习 1.5。 假设 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个次数为 d 的切比雪夫多项式，即满足 $\cos(d\theta) = f(\cos(\theta))$。证明：当 $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ 时， $\omega(z) = \{\infty\}$ ；当 $z \in [-1, 1]$时，$\omega(z) \subset [-1, 1]$ 。

这些例子确实非常 atypical，因为大多数情形都呈现出分形和混沌的行为，对其进行分析需要用到复分析、动力系统、拓扑、组合学.....

2. Fatou sets and Julia sets

Fatou 和 Julia 的工作都以这样一个重要主题为核心：黎曼球面$\widehat{\mathbb{C}}$ 清晰地分解为两个互补子集：具有有序动力学的开 Fatou 集 $\mathcal{F}_f$，以及其中 f的动力学行为是混沌的 Julia 集 $\mathcal{J}_f$。实际上，理解有理映射的动力学，意味着理解 Julia 集的拓扑（如果可能，还包括其几何性质），并对 Fatou 集的分支进行分类。

2.1. 定义。 Fatou 集和 Julia 集有几种可能的定义。我们将采用基于正规族的定义，这对我们来说似乎十分自然：解析映射的正规族是“表现良好”的。但这种定义之所以成为标准，恰恰反映了全纯动力学源自复分析这一事实，也可能解释了为什么这一学科始终未能真正融入动力系统的主流。

定义 2.1 (正规族)。 复平面开子集 $U \subset \mathbb{C}$ 上的全纯映射族$(f_\alpha : U \to \mathbb{C})_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 称为正规 族，如果对于任意序列$(f_{\alpha_n})_{n\geq 0}$，都可以提取出一个子序列，使其在 U 的紧子集上一致收敛（值域采用球面度量）。

一个可用于处理正规性的判据归功于蒙泰尔。

定理 2.2 (蒙泰尔)。 如果映射族$(f_\alpha : U \to \mathbb{C})_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 是定义在开子集 $U \subset \mathbb{C}$ 上的全纯映射，且在 $\mathbb{C}$ 中至少遗漏三个值，那么它是正规族。

特别地，全纯映射的有界序列（$f_n : U \to \mathbb{C}$）$_{n\in\mathbb{N}}$ 是正规族。

定义 2.3 (Fatou 集与 Julia 集)。 有理映射的 Fatou 集 $\mathcal{F}_f$ 是 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上最大的开子集，在该子集上，迭代族$(f^{\circ n})_{n\in\mathbb{N}}$是正规族。Julia 集 $\mathcal{J}_f$ 是 *Fatou* 集的补集。

例 2.4。 例：对于 $f(z) = z^d$，其中 $d \geq 2$ 或 $d \leq -2$，Julia 集 $\mathcal{J}_f$ 是单位圆

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| = 1\}.$$

事实上，迭代族 $(f^{\circ n} : \widehat{\mathbb{C}} \setminus S^1 \to \widehat{\mathbb{C}})_{n\in\mathbb{N}}$ 的取值都在 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus S^1$ 中，因此它在 $\mathbb{C}$中遗漏了三个以上的值。根据蒙特尔定理，它是正规的，因此，$\mathcal{J}_f \subseteq S^1$。为了证明 $S^1 \subseteq \mathcal{J}_f$，可以说明序列 $\left(f^{\circ(2n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的任意紧子集上一致收敛于常值映射 0，并在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ 的任意紧子集上一致收敛于常值映射 ∞。由于点$z \in S^1$ 的任意邻域都包含 $\mathbb{D}$ 中的点和 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$中的点，所以不存在一个 z 的邻域，使序列 $\left(f^{\circ n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 在其上正规。

2.2. 多项式情形。 对于多项式，有一种略微不同的理解方式。在这种情形下，∞ 是不动点，而且这个不动点除了自身以外没有其他原像。它是一个例外点。

定义 2.5。 设 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个次数为 $d \geq 2$ 的多项式。f 的填充 Julia 集 是由具有有界轨道的点组成的集合 $\mathcal{K}_f$：

$$\mathcal{K}_f = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left(f^{\circ n}(z)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ is bounded} \right\}.$$

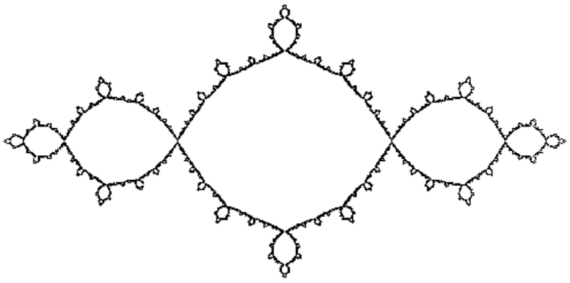

FIGURE 1. 二次多项式 f 的 Julia 集：$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$由 $f(z) = z^2 - 1$ 定义。

这个集合不仅对动力系统而言十分自然，而且与一般理论也十分契合。

命题2.6. 填充 *Julia* 集 $\mathcal{K}_f$ 是一个非空紧集。*Julia* 集是 $\mathcal{K}_f$ 的拓扑边界。

证明. 由于 f 的次数为 $d \geq 2$，当 $z \to \infty$ 时，$f(z)/z \to \infty$，因此存在常数 $R > 0$，使得只要 $|z| > R$，就有 $\left|f(z)\right| > 2|z|$。令 $D_R := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$。那么，紧集的嵌套交集

$$\mathcal{K}_f = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}\left(\overline{D}_R\right)$$

是一个非空紧集。

此外，定义 U_R 为开集 $U_R := \mathbb{C} \setminus D_R$。那么，序列$(f^{\circ n})_{n \geq 0}$ 在 U_R 上一致地趋于无穷远。显然，同样的性质在开集上也成立

$$\Omega_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U_R)$$

注意，$\Omega_\infty = \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_f$和 $\partial\Omega_\infty = \partial\mathcal{K}_f$。

我们首先证明 $\partial\mathcal{K}_f \subseteq \mathcal{J}_f$。取一点 $z_0 \in \partial\Omega_\infty = \partial\mathcal{K}_f$，并假设存在 z_0 的一个邻域 U，使得 f 的迭代族在其上正规。于是，U 与 Ω_∞ 相交，并且序列 $(f^{\circ n})_{n \geq 0}$ 必须在整个集合 U 上收敛到无穷远。这与序列 $(f^{\circ n}(z_0))_{n \geq 0}$ 有界这一事实矛盾。

现在我们证明 $\mathcal{J}_f \subseteq \partial\mathcal{K}_f$。如前所述，序列 $(f^{\circ n})$ 在局部一致地收敛于一个常值映射，该映射在$\mathcal{K}_f$之外等于 ∞。因此，$\mathcal{K}_f$ 的补集包含于 Fatou 集 $\mathcal{F}_f$ 和 $\mathcal{J}_f \subseteq \mathcal{K}_f$ 中。类似地，在 $\mathcal{K}_f$ 的内部，序列 $(f^{\circ n})$ 有界，因此根据蒙泰尔定理是正规族。由此可得，$\mathcal{K}_f$ 的内部包含于 $\mathcal{F}_f$ 和$\mathcal{J}_f \subseteq \partial\mathcal{K}_f$ 中。□

称 $\mathcal{K}_f$ 为填充 Julia 集的原因如下。

定义2.7。若紧子集 $K \subset \mathbb{C}$ 是连通的，且其补集也是连通的，则称其为满的。

命题2.8. 设 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个多项式。$\mathcal{K}_f$ 的每个连通分支都是满的。

证明. 显然，任意分支 K_0 都是紧且连通的。补集的任意分支 U都必须满足 $\partial U \subset K_0$; 若补集不连通，则至少有一个这样的分支是有界的。于是，根据最大值原理

$$\sup_{U}\left|f^{\circ n}(z)\right| = \sup_{\partial U}\left|f^{\circ n}(z)\right| \leq \sup_{K_0}\left|f^{\circ n}(z)\right|.$$

因此，它是一致有界的，所以 $U \subset K_0$。 □

2.3. **Fatou 集与 Julia 集的不变性**。

命题2.9. *Julia* 集和 *Fatou* 集都是完全不变的:

$$f(\mathcal{J}_f) = \mathcal{J}_f\,, \quad f^{-1}(\mathcal{J}_f) = \mathcal{J}_f\,, \quad f(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}_f\,, \quad f^{-1}(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}_f\,.$$

证明。 由于 Julia 集是 Fatou 集的补集，只需证明关于 Fatou 集的陈述。这直接由下面的引理得出。

引理 2.10。 设 U 是 $\mathbb{C}$的一个开子集，且 $\phi : U \to \mathbb{C}$ 是全纯的且非常值。那么，族 $(g_\alpha :\ \phi(U)\ \to \mathbb{C})_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 正规，当且仅当$(f_\alpha := g_\alpha \circ \phi :\ U \to \mathbb{C})_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 正规。

注 2.11。 由于 ϕ 是非常值的解析映射，因此它是开映射。所以$\phi(U)$是开集，族 g_α 定义在一个开集上。

证明。 (⇒) 这是显然的。若序列 g_{α_n} 收敛到 g，则 $f_{\alpha_n} := g_{\alpha_n} \circ \phi$收敛到 $g \circ \phi$。

(⇐) 假设序列 $f_{\alpha_k} := g_{\alpha_k} \circ \phi$ 在 U的每个紧子集上一致收敛。令 $K \subset \phi(U)$ 为紧集，并选取由具有紧闭包的开子集 U_i 构成的 U的一个覆盖。由于 ϕ 是开集，$\{\phi(U_i)\}$ 是 K的一个开覆盖，因此存在有限子覆盖 $\{\phi(U_{i_j})\}$。集合

$$K' := \phi^{-1}(K) \cap \bigcup_j \overline{U}_{i_j}$$

是 U 的一个紧子集，使得 $\phi(K') = K$。于是,

$$\sup_{z\in K} \operatorname{dist}_{\widehat{\mathbb{C}}}(g_{\alpha_n}(z), g_{\alpha_m}(z)) = \sup_{w\in K'} \operatorname{dist}_{\widehat{\mathbb{C}}}(f_{\alpha_n}(w), f_{\alpha_m}(w)) \to 0$$

当 $n,\ m \to \infty$时。引理得证。 □

为了证明 $\mathcal{F}_f = f^{-1}(\mathcal{F}_f)$，将此引理应用于以下族

$$\left\{f^{\circ(m+1)} : f^{-1}(\mathcal{F}_f) \to \widehat{\mathbb{C}}\right\} \quad \text{and} \quad \left\{f^{\circ m} : \mathcal{F}_f \to \widehat{\mathbb{C}}\right\}$$

以及全纯映射 $f\colon\ f^{-1}(\mathcal{F}_f)\ \to \mathcal{F}_f$。将 f应用于等式 $\mathcal{F}_f = f^{-1}(\mathcal{F}_f)$ 两边，可推出 $f(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}_f$。□

命题 2.12。 k阶迭代 $f^{\circ k}$ 的 *Julia* 集和 *Fatou* 集分别等于 f的 *Julia* 集和 *Fatou* 集:

$$\mathcal{J}_{f^{\circ k}} = \mathcal{J}_f \quad \textit{and} \quad \mathcal{F}_{f^{\circ k}} = \mathcal{F}_f$$

证明。只需对 Fatou 集证明此命题即可。如果迭代族 $f^{\circ n}$ 在开集 U 上是正规的，那么子族 $f^{\circ(kn)}$ 也正规。因此，$\mathcal{F}_f \subseteq \mathcal{F}_{f^{\circ k}}$。

现在，假设 $z \in \mathcal{F}_{f^{\circ k}}$，并令 U 为 z 的一个邻域，在该邻域上迭代族 $f^{\circ(kn)}$ 是正规的。对于任意序列 $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$，存在一个整数 N，使得 $n_i = N \bmod (k)$ 对无穷多个 i 成立。我们提取这个子序列；为避免记号繁复，仍将其记为 n_i。根据假设，序列 $f^{\circ(n_i-N)}\colon U \to \widehat{\mathbb{C}}$ 是正规的，因此可以提取一个收敛到映射 $g\colon U \to \widehat{\mathbb{C}}$ 的子序列。由于 $f^{\circ n_i} = f^{\circ N} \circ f^{\circ(n_i-N)}$，我们可以从序列 $f^{\circ n_i}\colon U \to \widehat{\mathbb{C}}$ 中提取一个收敛到 $f^{\circ N} \circ g\colon U \to \widehat{\mathbb{C}}$ 的子序列。这表明族 $\left(f^{\circ n}\colon U \to \widehat{\mathbb{C}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 是正规的，并且 $\mathcal{F}_{f^{\circ k}} \subseteq \mathcal{F}_f$。□

3. Conjugacy

在数学的每个领域中，态射都是保持结构的映射。因此，动力系统 $f\colon X \to X$ 到动力系统 $g\colon Y \to Y$ 的态射，就是将 f 的迭代序列映射为 g 的迭代序列的映射。这正是满足 $\phi \circ f = g \circ \phi$ 的映射 $\phi\colon X \to Y$ 所做的事；这类映射称为 f 与 g 之间的半共轭。事实上，我们通过归纳可知，对所有 $n \geq 1$，都有 $\phi \circ f^{\circ n} = g^{\circ n} \circ \phi$：根据假设，这对 $n = 1$ 成立；若对 $n-1$ 成立，那么

$$\phi \circ f^{\circ n} = \phi \circ f \circ f^{\circ(n-1)} = g \circ \phi \circ f^{\circ(n-1)} = g \circ g^{\circ(n-1)} \circ \phi = g^{\circ n} \circ \phi.$$

当 ϕ 可逆时，$\phi \circ f = g \circ \phi$ 可以改写为 $f = \phi^{-1} \circ g \circ \phi$，因此 f 与 g 是共轭的：共轭是动力系统之间的同构。在研究动力系统时，我们不断尝试构造共轭或半共轭，将其与更简单的动力系统联系起来，尤其是线性动力系统。

定义 3.1（共轭有理映射）。若存在一个同胚 $\phi\colon \widehat{\ } \to \widehat{\ }\mathbb{C} \to \mathbb{C}$（分别为解析同构），使得 $\phi \circ f = g \circ \phi$，则称两个有理映射 f 和 g 拓扑地（分别解析地）共轭。

$\widehat{\ }$应将 ϕ 理解为 $\mathbb{C}$上的坐标变换。$\mathbb{C}$ 的唯一解析$\widehat{\ }$同构是 Möbius 变换 $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$，而 $\mathbb{C}$ 的唯一同构是仿射映射 $z \mapsto az+b$。有理映射的零点或极点取决于坐标，而有理映射的不动点或临界点则不取决于坐标的选择。

命题 3.2。如果 f 和 g 通过 $\phi\colon \widehat{\ } \to \widehat{\ }\mathbb{C} \to \mathbb{C}$（在拓扑意义下或解析意义下）共轭，那么 $\phi(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}_g$，且 $\phi(\mathcal{J}_f) = \mathcal{J}_g$。

$\widehat{\ }$证明。</style>当且仅当族 $(f^{\circ n}\colon U \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ 是正规族时，族 $(\phi \circ f^{\circ n} \circ \phi^{-1}\colon \phi(U) \to \widehat{\mathbb{C}})_{n\in\mathbb{N}}$ 也是正规族。□

例 3.3。例：我们将在下文看到，牛顿法

$$N_P : z \mapsto z - \frac{P(z)}{P'(z)} \quad \text{and} \quad N_Q : z \mapsto z - \frac{Q(z)}{Q'(z)}$$

只要 $Q(z) = \lambda P(\alpha z + \beta)$，两者便解析共轭。

习题 3.4. 设 $a \neq b$ 为复数，并令 $P(z) := (z-a)(z-b)$。

(1) 证明牛顿法 N_P 通过同构 $z \mapsto w := (z-a)/(z-b)$ 与 $f : w \mapsto w^2$ 共轭。(2) 求 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{J}_{N_P}$的 Julia 集以及集合 $\omega(z)$。

4. Periodic point and critical points

周期点和临界点是全纯动力系统中的重要对象，正如我们将在本节中看到的。

4.1. **周期点**。

定义 4.1（不动点处的乘子）。 f 的一个不动点 是满足 $f(\alpha) = \alpha$的点 α 。 f 在 α 处的导数是切线$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$上的一个自同态$\mathrm{D}_\alpha f$： $T_\alpha\mathbb{C} \to T_\alpha\mathbb{C}$，因此等于乘以某个数 $\lambda \in \mathbb{C}$。自同态$\mathrm{D}_\alpha f$： $T_\alpha\mathbb{C} \to T_\alpha\mathbb{C}$ 的特征值 λ 称为$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ f 在 α 处的乘子。该不动点称为

- 超吸引，如果 $\lambda = 0$;
- 吸引，如果 $0 < |\lambda| < 1$;
- 排斥，如果 $|\lambda| > 1$;
- 中性如果 $|\lambda| = 1$，更准确地说– 如果 λ 是 *1* 的根，则为抛物型；– 否则为椭圆型，也就是说 $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ 且 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$。

练习 4.2. 设 α 是全纯映射 f 的一个不动点。(1) 证明，若 $\alpha \neq \infty$，则 f 在 α 处的乘子为 $\lambda = f'(\alpha)$。(2) 证明，若 $\alpha = \infty$ 且若 $f(z) \sim az$ 如 $z \to \infty$，则乘子为 $\lambda = 1/a$；而若 $f(z) \sim az^k$ 且 $k \geq 2$，则乘子为 $\lambda = 0$。(3) 证明，若 f 是次数为 $d \geq 2$ 的多项式，则 ∞ 是 f 的超吸引不动点。

不动点处的乘子在解析共轭下是不变的。换句话说，若 $\phi : (\mathbb{C}, \alpha) \to (\mathbb{C}, \beta)$ 是一个将 $f : (\mathbb{C}, \alpha) \to (\mathbb{C}, \alpha)$$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$共轭到 $g : (\mathbb{C}, \beta) \to (\mathbb{C}, \beta)$ 的局部同构，那么 f 在 α 处的乘子等于 g 在 β 处的乘子。事实上， $\phi \circ f = g \circ \phi$ 在 α 处的导数为

$$\mathrm{D}_\alpha\phi \circ \mathrm{D}_\alpha f = \mathrm{D}_\beta g \circ \mathrm{D}_\alpha\phi.$$

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$换句话说，$\mathrm{D}_\alpha\phi$ 共轭于 $\mathrm{D}_\alpha f : T_\alpha\mathbb{C} \to T_\alpha\mathbb{C}$ 和 $\mathrm{D}_\beta g : T_\beta\mathbb{C} \to T_\beta\mathbb{C}$ ，且这两个自同态具有相同的特征值。

定义 4.3（周期点）。 f 的周期点 是指对某个 $p \geq 1$， f 的一个不动点。满足条件的最小整数 $p \geq 1$ 称为 α的周期。在这种情况下，我们称 $\langle \alpha, f(\alpha) \ldots\ldots, f^{\circ(p-1)}(\alpha) \rangle$是 f的一个周期 。

命题 *4.4*。 *</style}*如果 $\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \rangle$ 是一个周期，那么 $f^{\circ p}$ 在该周期上所有点处的乘子都相同。

证明。 根据链式法则， $f^{\circ p}$ 在周期上任意一点的导数，都是沿周期将 f的导数视为线性变换后进行复合的结果。如果 f 的导数在周期上的某一点处为零，那么周期上所有点处的乘子都为 0。如果导数处处不为零，那么 f 在周期的每一点处都局部可逆，并且 f 将 $f^{\circ p}$ 在 α_i 处共轭于 $f^{\circ p}$ 在 α_{i+1}处。因此， $f^{\circ p}$ 在 α_i 处的乘子等于 $f^{\circ p}$ 在 α_{i+1}处的乘子。□

定义 4.5 (沿周期的乘子)。 f 沿一个周期为 p 的周期的乘子，是 $f^{\circ p}$ 在周期上任意一点处的乘子。对于 f，若周期上的各点分别是 $f^{\circ p}$的超吸引（分别为吸引、中性或排斥）不动点，则该周期称为超吸引（分别为吸引、中性或排斥）。

若 $\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \rangle$ 是一个避开 ∞、周期为 p 的周期，则其乘子由以下乘积给出

$$\lambda = (f^{\circ p})'(\alpha_1) = \prod_{i=1}^{p} f'(\alpha_i).$$

命题 4.6. 设 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个有理映射，且 α 是 f 的一个周期点。若 α 是超吸引或吸引的，则 $\alpha \in \mathcal{F}_f$。若 α 是排斥的，则 $\alpha \in \mathcal{J}_f$。

证明。 如有必要，将 f 替换为 $f^{\circ p}$，于是可以假设 α 是 f 的不动点。如有必要，通过一个莫比乌斯变换作共轭，可假设 $\alpha = 0$。若 α 是（超）吸引的，即 $|f'(\alpha)| < 1$，那么存在 α 的一个有界邻域 U，其映入自身。特别地，对所有 $n \in \mathbb{N}$，$f^{\circ n}(U) \subset U$。因此，$f^{\circ n}\colon U \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ 这一族是正规的，这意味着 $\alpha \in \mathcal{F}_f$。若 α 是排斥的，则

$$(f^{\circ n})'(\alpha) = \left[f'(\alpha)\right]^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

因此，函数族 $(f^{\circ n})_{n\in\mathbb{N}}$ 在 α 的某个邻域内不是正规族。 □

一个周期是超吸引的，当且仅当它包含一点，使得 f 在该点的导数为零，即该点是 f 的一个 临界点 。

4.2. **临界点与临界值**。 我们将看到，有理映射 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 的动力学性质与 f 的临界点的动力学行为密切相关。例如，多项式 f 的 Julia 集连通，当且仅当 f 的每个临界点的轨道都是有界的。

定义 4.7 (临界点与临界值)。 设 U 和 V 是两个黎曼曲面，且 $f\colon (U, x) \to (V, y)$ 是一个在 x 处不局部常值的解析映射。点 x 是一个临界点，如果导数 $\mathrm{D}_x f\colon T_x U \to T_y V$ 为零。在这种情况下，y 是一个临界值。

更精确地，在于 x 处消失的局部坐标 z 和于 $y = f$处消失的局部坐标 w (x) 下，f 的表达式具有如下形式

$$z \mapsto a w^k + O(w^{k+1}) \quad \text{for some integer } k \geq 1 \text{ and some complex number } a \neq 0.$$

整数 k 不依赖于坐标的选取，称为 f 在 x处的局部度数 。当且仅当 $k \geq 2$时，点 x 是临界点。在这种情况下，x 称为临界点 f，其重数为 $k - 1$。

例4.8。 例子：映射 $z \mapsto z^3$ 在 0 处有一个临界点。该映射在 0 处的局部度数为 3，这个临界点的重数为 2。

我们将使用以下结果，它是黎曼-赫尔维茨公式的推论（本讲义中不予证明）。

定义4.9 （欧拉示性数）。 如果 U 是 $\mathbb{C}$ 的一个开子集，且具有 m 个边界分支，则 U 的欧拉示性数为

$$\chi(U) := 2 - m.$$

定理4.10。设 $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一个次数为 d的有理映射，$V\subseteq\mathbb{C}$ 是一个开集，且 $U:=f^{-1}(V)$。则，

$$\chi(U)=d\cdot\chi(V)-N$$

其中，N 是 f 在 U中的临界点数，按重数计。

习题4.11。设 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一个次数为 d的有理映射。

(1) 证明 f有 $2d-2$ 个临界点，按重数计。(2) 证明 f 至少有两个不同的临界值。(3) 证明，若 f 是多项式，则 ∞ 是一个重数为$d-1$ 的临界点，并且 $\mathbb{C}$ 中有 $d-1$ 个临界点，按重数计。

5. Description of the Julia set

5.1. Julia 集的拓扑。

命题5.1. *Julia* 集 $\mathcal{J}_f$ 非空且紧。

证明. 如果 Julia 集为空，那么 $f^{\circ m}$ 会存在一个子序列在 $\mathbb{C}$上一致收敛；设 f_0 为其极限。有理映射 f_0 必须具有某个有限次数。由于次数是同伦不变量，逼近的迭代$f^{\circ m_i}$ 必须具有相同的次数。但 $f^{\circ m_i}$ 的次数是 d^{m_i}，这就导致了矛盾。

显然，Fatou 集 $\mathcal{F}_f$ 是开集，因此 Julia 集 $\mathcal{J}_f$ 是闭集。由于 $\mathbb{C}$ 是紧的，Julia 集 $\mathcal{J}_f$ 也紧。□

命题 5.2. *Julia* 集 $\mathcal{J}_f$ 的内部要么为空，要么就是整个黎曼球面。

证明. 假设 $U\subset\mathcal{J}_f$ 是 $\mathbb{C}$的一个开子集。族 $\{f^{\circ m}:U\to\mathbb{C}\}$ 必须避开 $\mathcal{F}_f$；$\mathcal{F}_f$是开集，若非空，则至少包含两个点。但这样一来，$\{f^{\circ m}:U\to\mathbb{C}\}$ 就是正规族，这与假设矛盾。因此，如果 $\mathcal{J}_f$ 的内部非空，$\mathcal{J}_f$ 就是整个黎曼球面。□

我们已经看到，Julia 集 $\mathcal{J}_f$ 是完全不变的。现在我们将确定，除了 $\mathcal{J}_f$之外，是否还有其他完全不变的闭集。为此，我们将使用黎曼-赫尔维茨公式。

命题 5.3. 设 E 是一个完全不变的闭集。若 E 是有限集，则E 至多包含两个点。

证明。如果 E 是有限集，那么它的补集 U 是连通的且完全不变。其欧拉示性数 $\chi(U)=2-\text{card}(E)$ 是有限的。记 N为 f 在 U中的临界点数（按重数计）。将黎曼-赫尔维茨公式应用于 $f:U\to U$，得到

$$\chi(U)=d\cdot\chi(U)-N.$$

Thus

$$\chi(U)=\frac{N}{d-1}\geq 0,$$

由此可得 $\text{card}(E)\leq 2$。□

完全不变集的并仍然是完全不变的，因此下面的定义是有意义的。

定义 5.4。 例外集 E_f 是最大的有限完全不变集。

注 5.5. 一个点的全轨道是一个完全不变集。如果它是有限集，那么根据例外集 E_f 的定义，我们有 $z \in E_f$。

注意，当两个有理映射 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 和 $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 通过同胚 ϕ共轭时，同胚 ϕ 会将点 $z \in \mathbb{C}$ 在 f 作用下的正向轨道（分别是反向轨道）映射为点 $\phi(z)$ 在 g作用下的正向轨道（分别是反向轨道）。因此， f-不变集在 ϕ 下映射为 g-不变集。于是，最大的有限完全 f-不变集在 ϕ 下映射为最大的有限完全 g-不变集。换言之，当例外集 E_f 非空时，它在 ϕ 下映射为例外集 E_g。

例外集 E_f 是个小小的麻烦，之后还会在好几处给我们添乱。下面的描述应该能消除人们对它并不重要这一点的疑虑。

命题 5.6。 在共轭意义下，例外集 E_f 恰好在以下两种情形中非空：

- *when* $f(z) = z^d$ *with* $|d| \geq 2$, $E_f = \{0, \infty\}$ *and*
- *when* f *is a polynomial but is not conjugate to* $z \mapsto z^d$, $E_f = \{\infty\}$.

证明。 从构造可明显看出， E_f 是完全不变的；因此，若它只有一个点，该点必是不动点；若它由两个点组成，则这两个点必是不动或被 f互换。我们将逐一考察这三种情形。

如果 E_f 只有一个点 a，就将它移到 ∞，例如通过坐标变换 $w = 1/(z - a)$。那么， $f = P/Q$ 是一个有理映射，且无穷远是它唯一的原像。因此，多项式 Q 没有根，故为常数，而 f是一个多项式。

如果 E_f 有两个点 a 和 b，且二者都是不动点，那么我们可以将其中一个置于 ∞，另一个置于 0（进行坐标变换 $w = (z - b)/(z - a)$）。我们看到， f是一个多项式，且 0 是多项式方程 $f(w) = 0$的唯一根，因此对于某个 λ，有 $f(w) = \lambda w^d$。选取一个满足 $\nu^{d-1} = \lambda$的数 ν，并进行坐标变换 $z = \nu w$。那么很容易看出， f的表达式变为 $z \mapsto z^d$。

如果 E_f 有两个在 f作用下互换的点，就将其中一个置于 ∞，另一个置于 0，并写作$f = P/Q$。由于 ∞ 是 0 的唯一原像，我们可知 P 没有根，因此它是一个常数，不妨取为 1。由于 0 是 ∞的唯一原像，我们可知 $Q(w) = \lambda w^d$，其中 $\lambda \neq 0$，因此 $f(w) = 1/(\lambda w^d)$。我们可以作坐标变换 $z = \nu w$，其中 $\nu^{d+1} = \lambda$。同样容易验证， f 的表达式变为 $z \mapsto z^{-d}$。□

命题 5.7。 例外集 E_f 总包含于 *Fatou* 集 $\mathcal{F}_f$。

证明。 在这三种情形中， E_f 都是超吸引周期的并集。命题 4.6 表明，这类周期总包含于 Fatou 集 $\mathcal{F}_f$。□

现在我们可以给出 Julia 集的新刻画。

命题 5.8。 有理映射的 *Julia* 集是包含至少三个点的最小完全不变闭集。

证明。 Julia 集是一个完全不变闭集。它至少包含三个点，否则它就会包含于例外集 $E_f \subset \mathcal{F}_f$ 中。此外，若 E 是一个包含至少 3 个点的完全不变闭集，则 E 的补集 $\Omega = \mathbb{C} \setminus E$ 是一个完全不变开集，且遗漏了三个以上的点。因此，根据蒙泰尔定理，迭代族 $f^{\circ n}$ 在 Ω 上是正规的。于是 $\Omega \subset \mathcal{F}_f$ 且 $\mathcal{J}_f \subset E$。□

以下命题断言，若 z 不属于例外集 E_f，则 z 的反向轨道的闭包

$$\mathcal{O}^-(z) := \bigcup_{m \geq 0} f^{-m}\{z\},$$

包含 Julia 集 $\mathcal{J}_f$。

命题 5.9。对于任意 $z \notin E_f$，我们有

$$\mathcal{J}_f \subseteq \overline{\mathcal{O}^-(z)}.$$

证明。 取一点 $z_0 \in \mathcal{J}_f$，并令 U 为 z_0的任意邻域。我们必须证明集合 $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{\circ n}(U)$ 包含 $z_\circ$ 我们将证明其补集 $E = \mathbb{C} \setminus \Omega$ 包含于例外集 E_f。事实上，Ω 是一个正向不变开集，至多遗漏两个点；否则，族 $f^{\circ n}$ 在 U上将不是正规的。因此， $E = \mathbb{C} \setminus \Omega$ 是一个逆向不变集。由于 E 是有限的，它在 f下被置换，因此是正向不变的。于是，根据例外集的定义，它包含于 E_f。□

命题5.10。 *Julia* 集 $\mathcal{J}_f$ 是完美集。

证明。 由于 Julia 集是闭集，只需证明它没有孤立点。Julia 集 $\mathcal{J}_f$ 不是有限集。因此，它含有一个非孤立点 z_0。由于 z_0 的反向轨道在 $\mathcal{J}_f$中稠密， $\mathcal{J}_f$ 中的任意点都不是孤立点。这证明了 $\mathcal{J}_f$ 是完美集，因此不可数。□

5.2. **Julia 集与周期点**。 Fatou 和 Julia 都证明了，Julia 集是排斥周期点集合的闭包。对于动力系统专家而言，这种关于 Julia 集的“动力学”定义可能更为自然，也将全纯动力系统与“Axiom A 吸引子”和双曲动力系统联系起来。Fatou 和 Julia 的证明各不相同，但都涉及一些将在后文证明的结果。Fatou 的证明基于非排斥周期环只有有限多个这一事实。Julia 的证明则基于排斥周期环的存在性。

在这些讲义中，我们只证明以下由蒙特尔定理直接推出的较弱结果。这是 Fatou 证明的第一步。Julia 集中排斥周期环的稠密性，进而可由非排斥周期环的有限性推出。

命题 5.11。 周期点集合的闭包包含 *Julia* 集。

证明。 任取 $z_0 \in \mathcal{J}_f$。由于 $\mathcal{J}_f$ 是完美集，我们可以假设 z_0 不是 $f^{\circ 2}$的临界值，因此存在 z_0 的一个邻域 U，以及 f^{-2} 的三个分支g_1， g_2， g_3，它们的像两两不相交。我们考虑二次迭代，因为如果 $d = 2$， f^{-1}就只有两个分支。

现在考虑映射族

$$h_m(z) := \frac{f^{\circ m}(z) - g_1(z)}{f^{\circ m}(z) - g_2(z)} \Big/ \frac{g_3(z) - g_1(z)}{g_3(z) - g_2(z)}.$$

如果在 z 的某个邻域内，对所有 z，都有 $f^{\circ m}(z) \neq g_i(z)$ $i = 1$，2，3，那么映射$h_m(z)$ 永不取值 0，1 或 ∞，因此它们构成一个正规族。但此时族 $f^{\circ m}$ 也正规，因为我们可以用 h_m 表示 $f^{\circ m}$：

$$f^{\circ m} = \frac{g_1(g_3 - g_2) - g_2(g_3 - g_1)h_m}{(g_3 - g_2) - (g_3 - g_1)h_m}.$$

这就产生了矛盾，因此在 z 的每个邻域内，都存在某个 i 和某个 m，使得 $f^{\circ m}(z)$ $=g_i(z)$ 有根；也就是说， $f^{\circ(m+2)}(z) = z$ 有根。□

5.3. **多项式的 Julia 集的连通性**。 这里给出了临界轨道的行为与 Julia 集的拓扑之间的第一个关系。

定理 5.12 (Fatou)。多项式 f 的填充 *Julia* 集 $\mathcal{K}_f$ 连通，当且仅当 f 的所有临界点都属于 $\mathcal{K}_f$。

注 5.13。 注意，由于 Julia 集 $\mathcal{J}_f$ 是 $\mathcal{K}_f$的边界，因此 $\mathcal{J}_f$ 连通当且仅当 $\mathcal{K}_f$ 连通。

证明。 由于 f 是次数为 $d \geq 2$的多项式，因此当 z 趋于无穷远时， $f(z)/z$ 趋于无穷远，故存在 $R > 0$，使得对于 $|z| > R$，有 $\big|f(z)\big| \geq 2|z|$。令$U_0 := \widehat{\mathbb{C}} \setminus D_R$，并归纳定义 $U_{n+1} := f^{-1}(U_n)$。由黎曼-赫尔维茨公式可得

$$\chi(U_{n+1}) = d\chi(U_n) - (d-1),$$

其中，数 $d-1$ 是 ∞处临界点的重数。由于 U_0 是单连通的，我们有 $\chi(U_0) = 1$；由归纳法可知，当 f 的所有临界点都属于 $\mathcal{K}_f$时，对于所有 $n \geq 0$，均有 $\chi(U_n) = 1$。由此可得

$$\Omega_\infty := \bigcup_{n \geq 0} U_n$$

是单连通的，且其补集 $\mathcal{K}_f$ 是连通的。

反过来，设 $\Omega_\infty \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 为 Fatou 集 $\mathcal{F}_f$ 中包含 ∞ 的连通分支。由于 ∞ 的唯一原像就是其本身 ∞，因此 $f^{-1}(\Omega_\infty) = \Omega_\infty$。将黎曼-赫尔维茨公式应用于 $f : \Omega_\infty \to \Omega_\infty$，得到

$$\chi(\Omega_\infty) = d\chi(\Omega_\infty) - (d-1) - k,$$

其中，数值 $d-1$ 来自 ∞ 处的临界点，而数值 k 是 Ω_∞ 中其他临界点（即不在 $\mathcal{K}_f$ 中）的重数计数。若 $\chi(\Omega_\infty)$ 有限，则 $\chi(\Omega_\infty) = 1 + k/(d-1)$。但连通平面区域的欧拉示性数至多为 1。因此，若没有临界点被 ∞ 吸引，则 $\chi(\Omega_\infty) = 1$；否则 $\chi(\Omega_\infty)$ 为无穷大。□

6. Description of the Fatou set

现在我们回到 f 是有理映射（不一定是多项式）的情形。我们的目标是对周期 Fatou分支进行分类。

定义6.1。 映射 $f\colon\ U \to V$ 是一个真映射，如果对于任意紧集 $K \subseteq V$，其原像 $f^{-1}(K)$ 是紧的。

命题6.2。 如果 U是 $\mathcal{F}_f$的一个连通分支，那么 $f(U)$也是 $\mathcal{F}_f$的一个连通分支，并且 $f\colon U \to f(U)$是一个真映射。

证明。 有理映射 $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ 是真映射。因此，对于任意开集$V \subset \widehat{\mathbb{C}}$, $f\colon f^{-1}(V) \to V$是真映射。特别地，这对 $U = \mathcal{F}_f$也成立。但由于 $f^{-1}(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}_f$（根据命题2.9），可知 $f\colon \mathcal{F}_f \to \mathcal{F}_f$是真映射。于是命题得证，因为真映射在定义域的连通分支上的限制仍是真映射。□

定义6.3。 $\mathcal{F}_f$ 的一个连通分支 U 称为 f的Fatou 分支。

定义6.4。 如果存在整数 $k \geq 1$使得某个 *Fatou* 分支是周期的，则称该 *Fatou* 分支为周期的。

$$f^{\circ k}(U) = U.$$

注意，如果 U 对 f而言是周期为 k 的周期点，那么它对 $f^{\circ k}$而言是不变的。

定义6.5. 称 f 的一个不变 *Fatou* 分支 U 为

- 一个（超）吸引域，如果存在一个（超）吸引不动点 $\alpha \in U$（$f(\alpha) = \alpha$ 且 $0 \leq |f'(\alpha)| < 1$），并且序列 $f^{\circ n}$ 在 U的每个紧子集上都一致收敛到 α；
- 一个抛物域，如果存在一个不动点 $\alpha \in \partial U$ 满足 $f'(\alpha) = 1$，并且序列 $f^{\circ n}$在 U的每个紧子集上都一致收敛到 α；
- 一个Siegel圆盘，如果它是单连通的，且存在一个同构$h\colon U \to \mathbb{D}$ 使得

  $$h \circ f \circ h^{-1}(z) = e^{2i\pi\theta} z$$

  其中 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
- 若为 Herman 环，则它是双连通的，并且存在半径 r 和一个同构

  $$h : U \to \mathcal{A}_r := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ r < |z| < 1\},$$

  使得

  $$h \circ f \circ h^{-1}(z) = e^{2i\pi\theta} z$$

  且 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$。

注 6.6。 显然，这些可能性彼此互斥。下面的定理 6.9 断言，这些是唯一的可能性，并且已知它们都会出现。Siegel 圆盘的存在性由 Siegel 于 1942年证明，而 Herman 环的存在性则由 Herman 于 1981 年证明。

图2显示了一个具有 Siegel圆盘的多项式的 Julia 集，以及一个具有 Herman 环的有理映射的 Julia 集。

命题 6.7。 如果 U 是有理映射 f 的一个不变 *Fatou* 分支，且其次数为 $d \geq 2$, 那么它要么是单连通的，要么是双连通的，要么其补集具有无限多个连通分支。当且仅当它是 *Herman* 环时，它才是双连通的。

证明。 我们可以对 $f\colon U \to U$ 应用黎曼-赫尔维茨公式。由此可得

$$\chi(U) = d\chi(U) - n$$

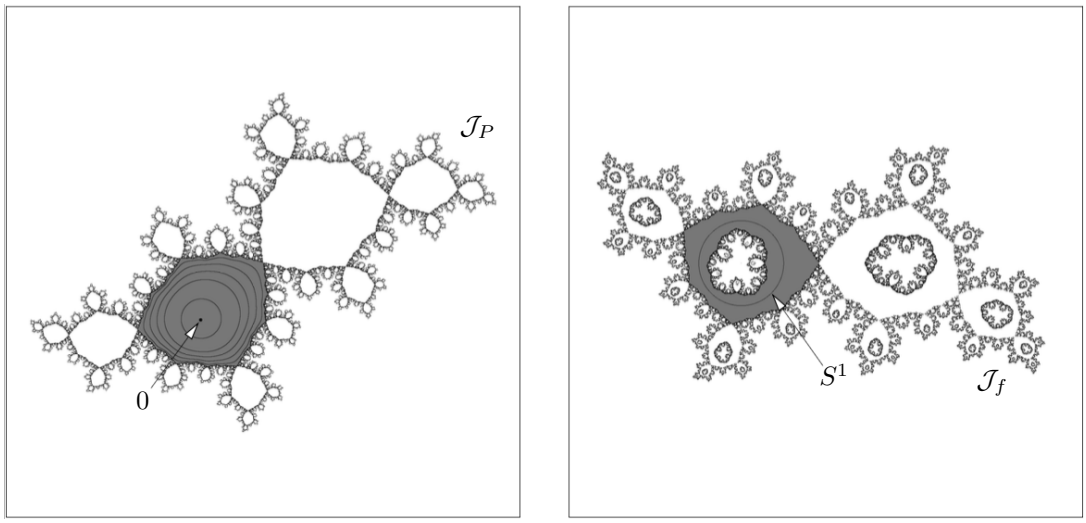

FIGURE 2. 左图：多项式 $P: z \mapsto e^{i\pi(\sqrt{5}-1)}z + z^{\overline{2}}$ 有一个 Siegel圆盘（以灰色标出）。我们画出了 Siegel 圆盘中若干点的轨道。每条轨道都累积到一个 $\mathbb{R}$-解析圆上。右图：如果足够谨慎地选取 $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，有理映射 $f(z) = e^{2i\pi t}z^2(z-4)/(1-4z)$ 就有一个 Herman 环。它使圆 S^1 保持不变，并且在S^1上与无理旋转共轭。图中绘制的是 $t = 0.61517321588\ldots$

其中，d 是 $f: U \to U$ 的次数，n 是 f 在U 中的临界点数（按重数计）。如果 $\chi(U)$ 有限，那么 $\chi(U) = n/(d-1)$ 非负；又因为 U 不等于整个黎曼球面，所以 $\chi(U) = 0$ 或为 1。此外，若 $\chi(U) = 0$，即 U 是双连通的，那么 $n = 0$ 和 $f: U \to U$ 是一个覆盖映射。另外，$f: U \to U$ 的次数为 1，因为它保持 U 的模。因此，$f: U \to U$ 是一个同构。这个同构不可能是有限阶的，否则 f 的某个迭代会有无穷多个不动点。因此，U 是一个 Herman 环。□

注6.8. 如果 f 是多项式，且 U 是有界 Fatou 分支，那么根据最大值原理，U 是单连通的。特别地，不存在 Herman 环。

以下结果归功于 Fatou。我们不提供详细证明。

定理6.9 (不变 Fatou 分支的分类)。设 $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个次数为 $d \geq 2$ 的有理函数。不变 *Fatou* 分支 U 属于 f，它是一个（超）吸引域、抛物域、*Siegel*圆盘或 *Herman* 环。

证明概要。分类首先从研究迭代序列（$f^{\circ n}: U \to U$）可能有哪些极限值开始。

情形1。存在一个非常数极限值。
情形1.1. 存在一个序列 (n_k)，使得 $f^{\circ n_k} \to \mathrm{Id}$。这是我们首次没有给出详细证明的地方。可以证明

- 要么 f 是有限阶的（事实并非如此，因为若 $f^{\circ p} = \mathrm{Id}$ 在 U 上对某个 $p \geq 1$成立，则根据解析延拓，$f^{\circ p} = \mathrm{Id}$ 在 $\mathbb{C}$ 上也成立；但这是不可能的，因为 $f^{\circ p}$ 是一个次数为 $d^p > 1$的有理映射）；
- 或 U 是单连通的，此时它是一个 Siegel圆盘；
- 或 U 是双连通的，此时它是一个 Herman 环。

情形1.2. 存在一个序列 (n_k)，使得 $f^{\circ n_k} \to \phi$ 且 ϕ 非恒定。由连续性可知，ϕ 的取值属于 U。根据 Hurwitz定理，ϕ 的取值属于 U。取一个子序列后，我们可以假设 $n_{k+1} - n_k \to +\infty$ 且 $f^{\circ(n_{k+1}-n_k)} \to \psi$。于是，$\psi \circ \phi = \phi$，因此 ψ 在ϕ的像上是恒等映射，从而根据解析延拓，它在整个分支 U 上都是恒等映射。换言之，我们处于前一种情形：U 是一个 Siegel圆盘或 Herman 环。

情形 2. 序列 $(f^{\circ n})$ 的每个极限值都是常数。注意，若序列 $(f^{\circ n_k})$ 收敛到 α，那么 α是 f的不动点。事实上，由于对所有 $z \in U$，$f(z) \in U$，我们有

$$\alpha \underset{k\to+\infty}{\longleftarrow} f^{\circ n_k}\big(f(z)\big) = f\big(f^{\circ n_k}(z)\big) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} f(\alpha).$$

另请注意，任意点 $z \in U$ 都可以通过一条完全包含于 U中的路径与其像 $f(z) \in U$ 相连。因此，序列$\big(f^{\circ n}(z)\big)$ 的极限值集合是一个连续统。由于 f 只有有限个不动点，整个序列 $(f^{\circ n})$ 收敛到 f的一个不动点 α。

情形 2.1. 若 $\alpha \in U$，则当 $n \to \infty$时，$f^{\circ n}$在 α处的导数趋于 0。因此，α 是一个（超）吸引不动点，而 U 是一个（超）吸引域。

情形 2.2. 若 $\alpha \in \partial U$，则 α 不可能是（超）吸引的，因为它属于 Julia 集 $\mathcal{J}_f$。它不可能是排斥的，因为序列 $(f^{\circ n})$ 收敛到 α。因此，它是中性的。我们断言 $\mathrm{D}_\alpha f = 1$，因此 U 是一个抛物域。

固定 $z_0 \in U$并令 $z_n = f^{\circ n}(z_0)$。令 $\widetilde{\rho}\colon [0,1] \to U$为一条连续路径，其中 $\widetilde{\rho}(0) = z_0$ 且 $\widetilde{\rho}(1) = z_1$。那么，我们可以通过对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和所有 $t \in [0,1)$ 令 $\rho(n+t) = f^{\circ n} \circ \widetilde{\rho}(t)$，将 $\widetilde{\rho}$ 延拓为连续路径 $\rho : [0,+\infty) \to U$。于是 $\lim_{t\to+\infty} \rho(t) = \alpha$，且 ρ 满足：对所有 $t \in [0,+\infty)$，$\rho(t+1) = f \circ \rho(t)$；由此我们利用下面的引理得出结论。

引理 *6.10*（蜗牛引理）。设 V 是 $\mathbb{C}$ 中原点的一个邻域，并设 $f\colon V \to f(V)$ 是一个全纯函数，满足 $f(\alpha) = \alpha$，且 $f'(\alpha) \neq 0$。若存在一条连续路径 $\rho\colon [0,+\infty) \to V \setminus \{\alpha\}$，使得 $\lim_{t\to+\infty} \rho(t) = \alpha$，并且对所有 $t \in [0,+\infty)$ 都有 $f \circ \rho(t) = \rho(t+1)$，那么或者 $|f'(\alpha)| < 1$，或者 $f'(\alpha) = 1$。

这是我们没有给出详细证明的第二处。关于这一结果的证明，例如参见 [50, 引理 16.2]。□

以下定理归功于 Fatou（1905），可能是开创整个全纯动力系统领域的结果。

定理 6.11。（超）吸引域总是至少包含一个临界点。

证明。如果 U 是超吸引域，那么它包含一个不动临界点，结论显而易见。如果 U 是吸引域，它包含一个乘子为 λ的吸引不动点 α。我们可以证明，存在一个映射 $\phi\colon (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},\alpha)$，它将乘以 λ 共轭为 f。如果 U 不包含任何临界

点，那么 ϕ 可通过关系 $\phi(\lambda z) = f \circ \phi(z)$扩展为一个整映射 $\phi\colon\ \mathbb{C} \to U$。这与刘维尔定理矛盾。
□

注 6.12. 抛物域也有相同的结论，但证明更为困难，需要详细研究乘子为 1 的不动点附近的局部理论。例如， [50, 定理 10.15] 中可以找到一个证明。

Fatou 对不变 Fatou 分支的分类显然也给出了周期的 Fatou 分支的分类，因为它们是不变有理映射某次迭代下的不变分支；甚至也给出了前周期Fatou 分支的分类，也就是说，存在 $m \geq 0$ 和 $p \geq 1$，使得 $f^{\circ(m+p)}(U) = f^{\circ m}(U)$ 的分支 U。下面这个由 Sullivan 得出的基本结果，完成了对次数为 $d \geq 2$ 的有理映射的描述。

定理 6.13 (Sullivan [60])。 设 $f\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个次数为 $d \geq 2$ 的有理映射。那么 f 的每个 *Fatou* 分支都是前周期的。

Sullivan非游荡定理6.13的证明高度依赖于拟共形函数的 Ahlfors-Bers 可测映射定理，相关内容请参见 Sullivan 的原始论文 [60] 。近期的笔记 [19] 给出了 Adam Epstein 的一个证明，该证明基于 Bers 关于二次微分的稠密性结果。这类结果具有鲜明的一维特性，在高维中没有类似结果，因此无法在高维中仿照 Sullivan 的证明。除了这一点之外，直到最近，人们对这个问题仍知之甚少。第 8 节将介绍一些关于二维 Fatou 分支的近期结果。

7. Parabolic implosion in dimension 1

本节回顾 Julia 集$\mathcal{J}_f$ 在复平面 $\mathbb{C}$的紧子集空间的 Hausdorff拓扑下不依赖于 f 连续变化这一结论的证明中所用的主要内容。Lavaurs 证明了以下结果（另见 [27]）。

定理 7.1 (Lavaurs [44])。 设 $f\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个固定0 的多项式，且$f(z) = z + z^2 + O(z^3)$。那么，

$$\mathcal{J}_f \subsetneq \limsup_{\delta \to 0} \mathcal{J}_{f+\delta}.$$

证明基于对 $f + \delta$ 的迭代极限的描述，这些极限是用称为*Fatou* 坐标 的映射来刻画的，该概念将在第 7.2 小节介绍。这些极限称为*Lavaurs* 映射。

7.1. 抛物吸引盆。 本节接下来的内容中，我们假设 $f\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个在 0 附近展开形式如下的多项式

$$f(z) = z + z^2 + az^3 + O(z^4) \quad \text{with} \quad a \in \mathbb{C}.$$

为了理解 f 在 0 附近的局部动力学，考虑坐标变换 $Z := -1/z$会很方便。在 Z坐标下，f 的表达式变为

$$F(Z) = Z + 1 + \frac{b}{Z} + O\left(\frac{1}{Z^2}\right) \quad \text{with} \quad b := 1 - a.$$

特别是，如果 $R > 0$ 足够大， F 会将右半平面 $\{\Re(Z) > R\}$ 映射到自身，因此，如果 $r > 0$ 足够接近 0， f 会将圆盘 $D(-r,\ r)$ 映射到自身。此外，任意点 $z \in D(-r,\ r)$ 在 f 下的轨道都会沿着实轴切向收敛到 0。类似地，如果 $r > 0$ 足够接近 0，则存在 f^{-1} 的一个分支

该分支会将圆盘 $D(r,\ r)$ 映射到自身，并且任意点 $z \in D(r,\ r)$ 在 f^{-1} 的该分支下的轨道都会沿着实轴切向收敛到 0。

定义 7.2。该吸引域 $\mathcal{B}_f$ 是由如下点构成的开集：这些点在 f 下的迭代轨道对所有 $r > 0$ 都与圆盘 $D(-r, r)$ 相交。

7.2. **Fatou 坐标**。为了进一步理解 f 在 0 附近的局部动力学，通常会使用局部吸引和排斥 *Fatou* 坐标。对于多项式，这些 Fatou 坐标具有全局性质。

命题 7.3。存在一个（唯一的）吸引 Fatou 坐标 $\Phi_f : \mathcal{B}_f \to \mathbb{C}$，它将 $f\colon \mathcal{B}_f \to \mathcal{B}_f$ 半共轭到平移 $T_1\colon \mathbb{C} \ni Z \mapsto Z + 1 \in \mathbb{C}$:

$$\Phi_f \circ f = T_1 \circ \Phi_f.$$

并满足归一化条件:

$$\Phi_f(z) = -\frac{1}{z} - b\log\left(-\frac{1}{z}\right) + o(1) \quad as \quad \Re\left(-\frac{1}{z}\right) \to +\infty.$$

证明。对于 $z \in \mathcal{B}_f$，令

$$Z := -\frac{1}{z}, \quad Z_n := -\frac{1}{f^{\circ n}(z)} \quad \text{and} \quad \Phi_n(z) := Z_n - n - b\log Z_n.$$

我们有

$$\Re(Z_n) \to +\infty \quad \text{and} \quad Z_{n+1} = Z_n + 1 + \frac{b}{Z_n} + O\left(\frac{1}{Z_n^2}\right),$$

因此

$$\frac{1}{Z_n} = O\left(\frac{1}{Z+n}\right) \quad \text{as} \quad n \to +\infty.$$

由此可得,

$$\Phi_{n+1}(z) - \Phi_n(z) = Z_{n+1} - Z_n - 1 - b\log\frac{Z_{n+1}}{Z_n} = O\left(\frac{1}{Z_n^2}\right) = O\left(\frac{1}{(Z+n)^2}\right).$$

因此，序列 (Φ_n) 收敛到极限 $\Phi_f : \mathcal{B}_f \to \mathbb{C}$ 其满足

$$\Phi_f(z) = \Phi_0(z) + O\left(\frac{1}{Z}\right) = -\frac{1}{z} - b\log\left(-\frac{1}{z}\right) + o(1) \quad \text{as} \quad \Re\left(-\frac{1}{z}\right) \to +\infty.$$

对关系 $\Phi_n \circ f = T_1 \circ \Phi_{n+1}$ 取极限即可得到所需结果。 □

图 **??** 大致展示了三次多项式 $f(z) := z + z^2 + 0.95z^3$的 Fatou 坐标 Φ_f 的行为。吸引域 $\mathcal{B}_f$ 包含 f的两个临界点。这些点及其迭代原像构成 Φ_f的临界点。记正虚部的临界点为 c^+，记其复共轭为 c^-。令 $v^\pm := \Phi_f(c^\pm)$。点 $z \in \mathcal{B}_f$ 根据 $\Phi_f(z)$的位置着色：当 $\Im\big(\Phi_f(z)\big) < \Im(v^-)$时为深灰色，当 $\Im(v^-) < \Im\big(\Phi_f(z)\big) < \Im(v^+)$时为浅灰色，而当 $\Im(v^+) < \Im\big(\Phi_f(z)\big)$时为中灰色。

命题 7.4。存在一个（唯一的）排斥型法图参数化 $\Psi_f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，它将 $T_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 半共轭到 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$\Psi_f \circ T_1 = f \circ \Psi_f.$$

并满足以下归一化条件:

$$\Psi_f(Z) = -\frac{1}{Z + b\log(-Z) + o(1)} \quad as \quad \Re(Z) \to -\infty.$$

证明。选取充分接近 0 的 $r>0$，使得存在 f^{-1} 的一个分支 g，它将圆盘 $D(r,r)$ 映射到其自身。对于 $z\in D(r,r)$，令

$$Z:=-\frac{1}{z},\quad Z_n:=-\frac{1}{g^{\circ n}(z)}\quad\text{and}\quad \Phi_n(z):=Z_n+n-b\log(-Z_n).$$

注意

$$Z_n=Z_{n+1}+1+\frac{b}{Z_{n+1}}+O\left(\frac{1}{Z_{n+1}^2}\right).$$

因此，与前面的证明一样

$$\Phi_{n+1}(z)-\Phi_n(z)=Z_{n+1}-Z_n+1+b\log\frac{Z_{n+1}}{Z_n}=O\left(\frac{1}{Z_{n+1}^2}\right)=O\left(\frac{1}{(Z-n)^2}\right).$$

序列 Φ_n 在左半平面 $\{\Re(Z)<-1/(2r)\}$ 中收敛到极限 Φ_g，它满足

$$\Phi_g(z)=\Phi_0(z)+O\left(\frac{1}{Z}\right)=Z-b\log(-Z)+o(1)\quad\text{as}\quad\Re\left(-\frac{1}{z}\right)\to-\infty.$$

将等式 $\Phi_{n+1}\circ f=T_1\circ\Phi_n$ 两边取极限可得，Φ_g 将 f 共轭到 T_1。Ψ_f 的逆映射 Φ_g 将 T_1 共轭到 f，并且

$$Z=\Phi_g\circ\Psi_f(Z)=-\frac{1}{\Psi_f(Z)}-b\log\left(-\frac{1}{\Psi_f(Z)}\right)+o(1)=-\frac{1}{\Psi_f(Z)}-b\log(-Z)+o(1)$$

as $\Re(Z)\to-\infty$. □

7.3. **拉瓦尔映射**。

定义 7.5. Lavaurs 映射 $\mathcal{L}_f:\ \mathcal{B}_f\to\mathbb{C}$ 是映射

$$\mathcal{L}_f:=\Psi_f\circ\Phi_f:\mathcal{B}_f\to\mathbb{C}.$$

注意，Lavaurs 映射 $\mathcal{L}_f$ 与 f 可交换。事实上，$\Phi_f\circ f=T_1\circ\Phi_f$ 且 $\Psi_f\circ T_1=f\circ\Psi_f$，因此

$$\mathcal{L}_f\circ f=\Psi_f\circ\Phi_f\circ f=\Psi_f\circ T_1\circ\Phi_f=f\circ\Psi_f\circ\Phi_f=f\circ\mathcal{L}_f.$$

图3粗略展示了三次多项式 $f(z):=z+z^2+0.95z^3$ 对应的 Lavaurs 映射 $\mathcal{L}_f$ 的行为。吸引域 $\mathcal{B}_f$ 中的点根据它们在映射 $\mathcal{L}_f$ 下的像的位置着色：当 $\mathcal{L}_f(z)\in\mathcal{B}_f$ 时为灰色，否则为白色。将 $\mathcal{L}_f$ 限制在每个有界白色区域上，得到一个到 $\mathbb{C}\setminus\mathcal{B}_f$ 的覆盖映射。

7.4. **Julia 集的不连续性**。集合

$$\mathcal{K}(\mathcal{L}_f):=\bigcap_{n\geq0}\mathcal{L}_f^{-n}(\mathcal{K}_f)\quad\text{and}\quad\mathcal{J}(\mathcal{L}_f):=\partial\mathcal{K}(\mathcal{L}_f).$$

图4展示了三次多项式 $f(z)=z+z^2+0.95z^3$ 对应的 $\mathcal{K}(\mathcal{L}_f)$。Lavaurs 映射 $\mathcal{L}_f$ 有两组互为复共轭的吸引不动点。图中标出了 $\mathcal{L}_f$ 的不动点，并为其吸引域着色（其中一个不动点的吸引域为深灰色，其余为浅灰色）。这些吸引域构成 $\mathcal{K}(\mathcal{L}_f)$ 的内部。黑色集合 $\mathcal{J}(\mathcal{L}_f)$ 是 $\mathcal{K}(\mathcal{L}_f)$ 的拓扑边界。

以下结果可视为研究全纯动力学中的拉瓦尔映射的主要原因。

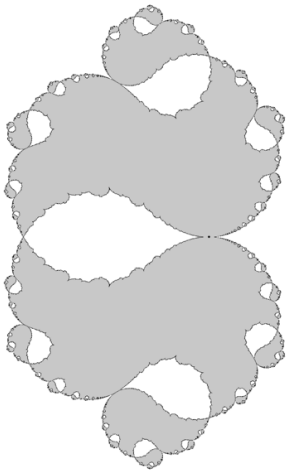

FIGURE 3. $\mathcal{L}_f$ 在 $f(z)$ 下的行为：$= z + z^2 + 0.95z^3$。

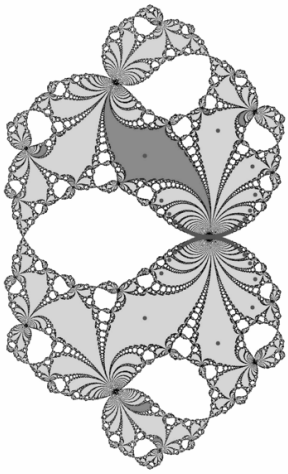

FIGURE 4. 对于 $f(z)$，集合 $\mathcal{K}(\mathcal{L}_f) = z + z^2 + 0.95z^3$。

命题7.6 (Lavaurs [44])。 设 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个多项式，其在0 处的展开为 $f(z) = z + z^2 + O(z^3)$。设(N_n) 是一个趋于 $+\infty$的整数序列，且(ε_n) 是一个趋于0的复数序列，使得

$$N_n - \frac{\pi}{\varepsilon_n} \to 0.$$

那么，

$$(f + \varepsilon_n^2)^{\circ N_n} \to \mathcal{L}_f \quad \textit{locally uniformly on } \mathcal{B}_f.$$

此外，

$$\mathcal{J}_f \subsetneq \mathcal{J}(\mathcal{L}_f) \subseteq \liminf \mathcal{J}_{f+\varepsilon_n^2} \quad \textit{and} \quad \limsup \mathcal{K}_{f+\varepsilon_n^2} \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{L}_f) \subsetneq \mathcal{K}_f.$$

我们不展示这个结果的证明，因为证明过程相当技术性；例如，可参见 [27] 或 [56]。相反，我们将说明该结果对 M¨obius 变换成立

$$g(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + O(z^3).$$

在这种情况下，涉及的所有映射都是 M¨obius 变换，计算也都是显式的。若进行坐标变换 $Z = -1/z$，M¨obius 变换 g 便共轭为 T_1。因此，

$$\Phi_g(z) = -\frac{1}{z} \quad \text{and} \quad \Psi_g(Z) = -\frac{1}{Z}, \quad \text{so that} \quad \mathcal{L}_g = \mathrm{Id}.$$

注意，$g + \varepsilon^2$ 也是一个 M¨obius 变换。它有两个不动点

$$\alpha^{\pm} = \pm i\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad \text{with multipliers} \quad \lambda^{\pm} = \exp\bigl(\pm 2i\varepsilon + O(\varepsilon^3)\bigr).$$

因此，若 $N \to +\infty$ 且

$$N - \frac{\pi}{\varepsilon} \to 0, \quad \text{so that} \quad \varepsilon = \frac{\pi}{N + o(1)} = \frac{\pi}{N} + o\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

那么 $(g+\varepsilon^2)^{\circ N}$ 是一个以 $\alpha^{\pm}$ 为不动点的 M¨obius 变换，其乘子为

$$\mu^{\pm} := (\lambda^{\pm})^N = \exp\left(\pm 2\pi i + o(1/N)\right) = 1 + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

这个莫比乌斯变换是

$$z \mapsto \alpha^+ + \frac{\mu^+ \cdot (z - \alpha^+)}{1 - \dfrac{\mu^+ - 1}{\alpha^+ - \alpha^-}(z - \alpha^+)}.$$

由于

$$\mu^+ - 1 = o\left(\frac{1}{N}\right) = o(\alpha^+ - \alpha^-),$$

我们确实看到，

$$(g + \varepsilon^2)^{\circ N} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}_g.$$

最近，[63], Vivas 研究了维数为 1 时映射 $f(z) = \frac{z}{1-z}$ 的非自治抛物型爆裂。

在高维中，Bedford、Smillie 和 Ueda 最近在 [9] 研究了耗散多项式自同构的（半）抛物型爆裂（另见 [29]）；Bianchi 最近在 [11] 将他们的策略应用于一类与恒等映射相切的全纯自映射的扰动，并为这类映射建立了二维拉瓦尔定理。

8. Fatou components for polynomial maps in dimension 2

我们以介绍关于复二维中周期纤维邻域内多项式斜积的 Fatou 分支的最新研究成果，为这些笔记作结。我们将按照周期纤维可能的不同类型展开讨论。

8.1. 预备知识。 设 $F\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ 是 $\mathbb{C}^2$ 的全纯自映射，并考虑由 F 的迭代所定义的离散全纯动力系统。在研究这类系统的整体行为时，自然会将 F 的 ***Fatou*** 集推广定义为最大的开集 $\mathcal{F}(F)$，在该开集上， F 的迭代族 $(F^{\circ n})_{n\in\mathbb{N}}$ 是正规族。Fatou 集的一个连通分支称为 ***Fatou*** 分支。

我们在前文各节中已经看到，借助定理6.9和定理 6.13，复一维中黎曼球面上次数至少为 2 的有理映射的 Fatou 分支已得到了充分理解。

在复二维中，我们对 Fatou 分支的理解远不够全面。得益于 Bedford 和 Smillie [6] [7] [8], Fornæss 与 Sibony [33],Lyubich 和 Peters [47] 以及 Ueda [61]，周期Fatou分支的分类已取得了显著进展。

自 20 世纪 90 年代以来，多位作者提出了高维中是否存在游荡（即非前周期）Fatou 分 [35]支的问题（例如参见 [35]）。可以通过取直积，将一维例子构造成具有游荡域的高维超越（即非多项式）映射。Fornæss 和 Sibony 在 [34] 中构造了一个具有游荡 Fatou 分支且振荡趋向无穷远的 $\mathbb{C}^2$ 的超越双全纯映射。然而，直到最近，人们对 $\mathbb{P}^2$（$\mathbb{C}$）的全纯自映射或 $\mathbb{C}^2$的多项式自映射是否存在游荡 Fatou 分支仍知之甚少。

首先，一个自然的、值得考虑的 $\mathbb{C}^2$ 上的多项式自映射类是直积，即形如 $F\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ 的映射

$$F(z,w) = (f(z), g(w)),$$

其中 f 和 g 是单变量复多项式。这使我们能够在二维中重现一维动力学行为的推广形式。然而，直积只是一个非常特殊的类，无法让我们完整理解 $\mathbb{C}^2$ 上多项式自映射的所有可能行为。

另一个更有趣的类是 $\mathbb{C}^2$ 上的多项式斜积，即形如 $F\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ 的多项式映射

$$F(z,w) = (f(z,w), g(w)), \tag{1}$$

其中 g 是单变量复多项式， f 是二变量复多项式。由于它们保持纤维化 $\{w = \text{const.}\}$ 不变，斜积使我们能够立足于一维动力学，初步领略我们所处的高维情形有多么丰富。多位作者运用这一思路构造具有特定动力学性质的映射。例如，Dujardin 在 [28] 中利用特定的斜积构造了一个非层状 Green流。Boc-Thaler、Fornæss 和 Peters 在 [17] 中构造了一个具有穿孔极限集的 Fatou 分支的映射。最后但同样重要的是，正如我们将在第 8.2 小节中说明的，斜积是我们最近与 Astorg、Dujardin 和 Peters 在 [4] 中构造具有游荡 Fatou 分支的 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 全纯自映射时所用的关键要素之一。

多项式斜积的全纯动力系统研究由 Heinemann [37] 开启，随后由 Jonsson [40]继续推进。Roeder 在 [54]研究了斜积的 Fatou 分支的拓扑。

给定复平面 $\mathbb{C}^2$中的多项式斜积 F 的一个 Fatou 分支 Ω，其在第二坐标上的投影 $\Omega_2 = \pi_2(\Omega)$ 是复平面 g 的一个 Fatou 分支。因此，根据 Sullivan非游荡定理 6.13，考虑 F的某个迭代后，它必属于定理6.9给出的三种情形之一；此外，由于我们考虑的是多项式，Herman 环不会出现。因此，由于 g 的（前）周期点对应于 F的（前）周期纤维，考虑 F的某个迭代后，我们可以将研究范围限制在形如 $\{w = w_0\}$的不变纤维邻域内发生的情形。一维理论也描述了不变纤维上的动力学，它由一元多项式 $f(z,\ w_0) := f_{w_0}(z)$ 的作用给出，因此 f_c的 Fatou 分支也都将是前周期的；考虑某个迭代后，我们可以假设它们是吸引域、抛物吸引盆或 Siegel 圆盘。这种结构引出了两个直接的问题。

(1) f_c 的所有 Fatou 分支都会隆起为 F的二维 Fatou 分支吗？(2) 在不变纤维的某个邻域内，F 是否可能存在游荡 Fatou 分支?

下文中，我们将根据 w_0 是 g 的吸引、抛物型或椭圆型不动点，分别称不变纤维 $\{w = w_0\}$ 为吸引型、抛物型或椭圆型。隆起Fatou 分支是指 F 的一个 Fatou 分支 Ω，满足 $\Omega \cap \{w = w_0\}$ 是不变纤维$\{w = w_0\}$上的 f_{w_0} 的一维 Fatou 分支。如果存在 F 的一个隆起 Fatou 分支 Ω，使得 $\Omega_{w_0} = \Omega \cap \{w = w_0\}$，我们就称不变纤维$\{w = w_0\}$ 上的 f_{w_0} 的 Fatou 分支 Ω_{w_0} 是隆起的。

8.2. **吸引不变纤维**。考虑一个次数为 $d \geq 2$ 的多项式斜积 $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

$$F(z, w) = (f(z, w), g(w)),$$

具有一个吸引不变纤维。不失一般性，我们可以假设该不变纤维为 $\{w = 0\}$。因此，我们有 $g(0) = 0$ 且 $|g'(0)| < 1$。在这种情况下，我们知道存在一个吸引域，其中包含原点，且其中的点经过迭代后收敛到原点。收敛到不动点的速度取决于该不动点是超吸引，即 $g'(0) = 0$，还是吸引或几何吸引，即 $g'(0) \neq 0$。

8.2.1. 超吸引情形。 这一情形由 Lilov 在 [45] 中进行了研究，他回答了引言中提出的两个问题。他首先证明了以下结果，对问题 1 给出了肯定的回答。

定理 8.1 (Lilov [45])。 设 $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ 是一个具有形式(1) 、次数为 $d \geq 2$的多项式斜积。设 $\{w = w_0\}$ 是 F的一个超吸引不变纤维。那么， f_{w_0} 的所有一维 *Fatou* 分支都会延拓为 F的 *Fatou* 分支。

证明思路。 不失一般性，我们可以假设 $w_0 = 0$ 。根据定理6.9和定理 6.13，限制映射 $f_0(z) = f(z,\ 0)$ 在不变纤维上的所有 Fatou 分支都是（前）周期的，且属于吸引域、抛物吸引盆或 Siegel 域。证明策略是分别针对这些情况，证明相应的分支包含在

F 的二维 Fatou 分支中。众所周知， $f_0(z)$ 的吸引周期点的一维 Fatou 分支会膨胀；例如，Rosay 和 Rudin [55] 的结果便可推出这一点。对于其余情况，根据 [45, 定理 3.17] ，存在一个强稳定流形，它经过 $f_0(z)$ 的抛物型或椭圆型周期点的一维 Fatou 分支中的所有点，因此相应的隆起 Fatou 分支就是这些流形的并集。□

随后，Lilov 证明了以下结果，从而说明在超吸引不变纤维的某个邻域内不存在游荡 Fatou 分支。

定理 8.2 (Lilov [45])。设 $F:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ 是一个次数为 $d\geq 2$、形式如 (1) 的多项式斜积。设 $\{w=w_0\}$ 是 F的一个超吸引不变纤维， $\mathcal{B}$ 是超吸引不动点 w_0的立即吸引域。取 $w\in\mathcal{B}$，并设 D_w 是位于 w上方纤维中的一维开圆盘。那么， D_w 的正向轨道必定与 f_{w_0}的某个隆起*Fatou*分支相交。

证明反复运用了 [45, 引理 3.2.4] ，将其应用于位于吸引域中某点上方纤维内的圆盘的轨道，从而得到像的半径下界。借助 [45, 命题 3.2.8],，通过研究隆起 Fatou 分支的几何性质，还可以得到一个上界：位于吸引域中某点上方纤维内、且包含在某个隆起 Fatou 分支补集中的圆盘，其最大可能半径受该点到不变纤维的距离制约。结合这两个估计即可得出结论。

所有膨胀 Fatou 分支都是（前）周期的，因此，对于 F 在超吸引不变纤维邻域内的所有 Fatou 分支也都是（前）周期的，从而超吸引不变纤维邻域内不存在游荡 Fatou 分支便可立即得到。

推论 8.3 （Lilov [45]）。设 $F:\ \mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ 是形如 （1）、次数为 $d\geq 2$ 的多项式斜积。设 $\{w=w_0\}$ 是 F 的超吸引不变纤维，且 $\mathcal{B}$ 是超吸引不动点 w_0 的立即吸引域。那么 $\mathcal{B}\times\mathbb{C}$ 中不存在游荡 *Fatou* 分支。

8.2.2. 几何吸引情形。 几何吸引情形最早由 Lilov 在 [45] 中进行了部分研究，尽管当时并未明确表述。事实上，只需稍作调整，定理 8.1 的证明即可适用于这一情形，从而得到以下回答问题 1 的结论。

定理 8.4 (Lilov [45])。设 $F:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ 是一个次数为 $d\geq 2$ 的多项式斜积，形式如 (1) 。设 $\{w=w_0\}$ 是 F 的一个吸引不变纤维。那么， f_{w_0} 的所有一维 *Fatou* 分支都会扩张为 F 的 *Fatou* 分支。

另一方面，定理 8.2 的证明无法推广到这种情形，因为这种情形确实比超吸引情形更复杂。事实上，定理 8.2 并非总是成立，Peters 和 Vivas 的以下结果表明了这一点。

定理 8.5 (Peters-Vivas [53])。设 $F:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ 是如下形式的多项式斜积

$$F(z,w)=(p(z)+q(w),\lambda w), \tag{2}$$

其中 $0 < |\lambda| < 1$ 、 p 和 q 是复多项式。那么存在一个三元组(λ, p, q) 以及一个全纯圆盘 $D \subset \{w = w_0\}$，其正向轨道聚集于点$(z_0, 0)$，其中 z_0 是 f_0的 ***Julia*** 集中的一个排斥不动点。

因此， D 的正向轨道不能与 f_0的膨胀 Fatou 分支相交。

族 $(F|_D^{\circ n})_{n\in\mathbb{N}}$ 在圆盘 D 上是正规的，因此这些都是 Fatou 圆盘。然而，这些圆盘完全包含在 F 的 Julia 集中，而该集合是 $\mathbb{C}^2$ 中 Fatou 集的补集（见 [53, 定理 6.1]）。

Peters 和 Smit 在 [52] 中进一步研究了几何吸引情形。他们重点研究了这样一类多项式斜积：其在不变吸引纤维上的作用是次双曲的，也就是说，该多项式没有抛物周期点，且所有位于 Julia 集上的临界点都是前周期的。他们证明了以下结果。

命题 8.6 (Peters-Smit [52])。 设 $F: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ 是形式为(1)的多项式斜积。假设原点是 g 的一个吸引但非超吸引不动点，其对应的吸引域为 B_g，且多项式 $f_0(z) := f(z, 0)$ 是次双曲的。那么存在一个满测度集合 $E \subset \mathbb{C}$，使得对于每个 $\widetilde{w}_0 \in E$，纤维 $\{w = \widetilde{w}_0\}$ 中任意圆盘的正向轨道都必须与 f_0 的一个隆起 ***Fatou***分支相交。

证明思路。注意，只需在吸引纤维 $\{w = 0\}$ 的某个邻域内证明该命题。因此，缩小邻域后，不妨设 $g(w) = \lambda w$，并且

$$f(z, w) = a_0(w) + a_1(w)z + \cdots + a_d(w)z^d$$

其中 $a_0(w), \ldots, a_d(w)$ 是 w 上的全纯函数。多项式 f_0 的次双曲性意味着其 Fatou 集是有限个吸引域的并，且包含在 Fatou 集中的临界点的轨道收敛到这些吸引周期之一。证明可分为 5 个主要步骤。

步骤 *1*。取足够大的 $R > 0$，使得对于所有满足 $|z| > R$ 的 z，都有$|f_0(z)| > 2|z|$，并令

$$W_0 = \{|z| > R\} \cup \bigcup_{y\in \mathrm{Att}(f_0)} W_y$$

其中 Att(f_0) 是 f_0 的所有吸引周期点构成的集合；对于每个 $y \in$Att(f_0)，集合 W_y 是 y 的轨道的一个开邻域，满足 $f_0(W_y) \subset W_y$。取 f_0 的后临界集的一个邻域 U。那么根据 [52, 命题15], ，在原点的某个邻域中存在一个满测度集合 $E \subset \mathbb{C}$，使得对于所有 $\widetilde{w}_0 \in E$，存在常数 $C = C(\widetilde{w}_0, U)$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有

$$\mathrm{Card}\left\{z : \frac{\partial F_1^{\circ n}}{\partial z}(z, \widetilde{w}_0) = 0 \text{ and } F_1^{\circ n}(z, \widetilde{w}_0) \notin W_0 \times U\right\} \leq C\sqrt{n}, \tag{3}$$

其中， $F_1^{\circ n}$ 是 F 的第 n 次迭代的第一个分支。

步骤 *2*. 反设某个纤维 $\{w = \widetilde{w}_0\}$（其中 $\widetilde{w}_0 \in E$）包含一个圆盘 D，其正向轨道避开 f_0 的隆起Fatou分支。那么， $F^{\circ n}$ 在 D 上的限制有界，因此构成一个正规族。因此，经过缩小 D，存在一个子序列 $F^{\circ n_j}$，使得 $F^{\circ n_j}|_D$ 一致地收敛，

在 D 的紧子集上一致地收敛到 f_0 的 Julia 集中的一个点 ζ。此外，存在 $\varepsilon>0$，使得对于所有 $n\in\mathbb{N}$，$F^{\circ n}(D)\cap(W_0\times D(0,\varepsilon))$ 为空。

步骤 *3.* 每个 x 包含在 Julia 集中的临界点最终都会被映射到一个排斥周期点。考虑 F 的某次迭代后，我们可以假设它最终被映射到一个乘子为 μ的排斥不动点，其中 $|\mu|>1$。控制 F 的临界点轨道的主要工具，是利用该排斥不动点的不稳定流形的线性化映射得到的映射 $\Phi:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 满足 $\Phi(\mu t)=f_0^{\circ k}\circ\Phi(t)$，其中 $k\in\mathbb{N}$。由于 [52,~命题 10],，存在 $C>1$ 和 $0<\gamma<1$，使得

$$\mathrm{Area}(F^{\circ n}(D))\le\widetilde{C}\gamma^n. \tag{4}$$

步骤 *4.* 我们可以假设 ζ 不属于后临界集，并且可以选取 U 和 $r>0$，使得 $D(\zeta,r)\cap(U\cup W_0)=\emptyset$。令 $j_1\in\mathbb{N}$ 满足：对所有 $j\ge j_1$，都有 $F_1^{\circ n_j}(D)\subseteq D(\zeta,\frac{r}{2})$；并考虑包含 D的$(\bar{F}^{\circ n_j})^{-1}(D(\zeta,r)\times\{\lambda^{n_j}\widetilde{w}_0\})$的连通分支 O_j。于是 $D\subseteq O_j\subseteq D(0,R)\times\{\widetilde{w}_0\}$，我们可以研究真全纯函数 $F_1^{\circ n_j}:\ O_j\to D(\zeta,r)$。由(3)可知，这样的映射至多有 $d_j=C\sqrt{n_j}$ 个临界点。

步骤 *5*。可以（参见 [52, 命题 28]）找到一个统一常数 $C_1>0$，使得若 $f:\ \mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 是次数为 d的真全纯函数，集合 $R\subset\mathbb{D}$的庞加莱面积等于 A，且 $d\cdot A^{1/2d}<8$，则 $f^{-1}(R)$ 的庞加莱面积至多为 $C_1d^3A^{1/d}$。然后，令 $R_j=F_1^{\circ n_j}(D)$，并将其相对于 $D(\zeta,\ r)$ 的庞加莱面积 $\mathrm{Area}^{D(\zeta,r)}(R_j)$ 记为 A_j，对于 $j\ge j_1$，我们有 $R_j\subseteq D(\zeta,\ r)$，并可应用 (4) 估计 A_j。因此存在 $j_2\ge j_1$，使得对于所有 $j\ge j_2$，都有$d_jA_j^{1/2d_j}<1/8$。这意味着

$$\mathrm{Area}_{D(0,R)}(D)\le\mathrm{Area}_{O_j}(D)\le C_2d_j^3A_j^{1/d_j}\le Mn_j^{3/2}\gamma^{n_j^{3/2}}$$

其中 $M>0$。矛盾来自这样一个事实：当 j 趋于无穷远时，最后一个表达式将趋于零。□

特别是，由于 E 稠密，Peters 和 Smit 得以在不变纤维上的作用为次双曲时，对问题2给出否定的回答。他们还由此推论得出，F 的 Fatou 分支只有隆起的分支，因为 F 的拓扑次数等于 f_0的拓扑次数，这意味着能够映到 f_0 的隆起 Fatou 分支上的 Fatou 分支，恰好就是那些隆起的 Fatou 分支。

定理8.7 (Peters-Smit [52])。设 $F:\ \mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ 是具有(1)形式的多项式斜积。假设原点是 g 的吸引不动点，其对应的吸引域为 $\mathcal{B}_g$，且多项式 $f_0(z):=f(z,\ 0)$ 是次双曲的。那么F 在 $\mathcal{B}_g$上方没有游荡 *Fatou* 分支。

最近，Ji 在 [38] 中成功将 Lilov定理8.2 推广到具有不变几何吸引纤维的多项式斜积，前提是不变纤维的乘子足够小。更准确地说，他证明了以下结果。

定理8.8 (Ji [38])。设 $F:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ 是形式为(1)、次数为 $d\ge2$ 的多项式斜积。设 $\{w=w_0\}$ 是 F 的一个吸引不变纤维，并设$\mathcal{B}_{w_0}$ 是吸引不动点 c 的吸引域。那么存在 $\lambda_0(w_0,f)>0$

它仅取决于 f 和 c，使得若 $|g'(w_0)| < \lambda_0$，那么 $\mathcal{B}_{w_0} \times \mathbb{C}$ 中不存在游荡 *Fatou* 分支。

这一结果的证明沿用了 Lilov 策略。正如我们在本节开头所指出的，主要困难在于 Lilov 论证在几何吸引情形下会失效。Ji 通过在[24] 这一情形下改造 Denker、Przytycki 和 Urbanski 的一维结果，克服了这一困难。该结果用于估计隆起 Fatou 分支的大小，以及游荡 Fatou 圆盘的正向像的大小。

Ji 还在 [39] 中证明，若 $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ 是一个具有吸引不变纤维 L 的多项式斜积，且 F 在 L 上的限制是非一致双曲的，那么吸引域 L 中的 Fatou 集恰好是吸引周期的吸引域之并，而 L 的吸引域中的 Julia 集的勒贝格测度为零。因此，不变吸引纤维的吸引域中不存在游荡 Fatou 分支。

8.3. **抛物不变纤维与游荡域**。Vivas 首先对这一情形展开研究，并证明了一个参数化结果[62, 定理 3.1] ，适用于$\mathbb{C}^2$的特殊抛物斜积的不稳定流形。Vivas 将这一参数化作为主要工具，证明了特殊抛物斜积的定理 8.5 的类似结论。然而，这一构造无法在抛物不变纤维的邻域内构造游荡 Fatou 分支。

在 [4], 中，我们与 Astorg、Dujardin 和 Peters 证明了 $\mathbb{C}^2$的多项式斜积存在游荡 Fatou 分支，并将这一结果推广到$\mathbb{P}^2$的全纯自映射（$\mathbb{C}$）。关键工具是在多项式斜积上使用抛物型爆裂技术，这一想法最初由 Lyubich 提出。主要策略是结合趋近不变抛物纤维的缓慢收敛，以及纤维方向上的抛物过渡，从而产生与所谓的 Lavaurs 映射轨道相伴的轨道；我们在上一节中定义了这一映射。

定理 8.9 ([4])**.** 存在一个全纯自映射 $F\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$，它由多项式斜积映射 $F\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$诱导，并且具有一个游荡 *Fatou* 分支。更确切地说，设 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 和 $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是如下形式的多项式

$$f(z) = z + z^2 + \mathrm{O}(z^3) \text{ and } g(w) = w - w^2 + \mathrm{O}(w^3). \tag{5}$$

若 *Lavaurs* 映射 $\mathcal{L}_f : \mathcal{B}_f \to \mathbb{C}$ 有一个吸引不动点，则由下式定义的斜积$F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

$$F(z, w) := \left(f(z) + \frac{\pi^2}{4} w, g(w) \right) \tag{6}$$

有一个游荡 *Fatou* 分支。

这些游荡 Fatou 分支中的轨道是有界的，证明中采用的方法本质上是局部的。注意，如果 f 和 g 具有相同的次数，F 可扩展为 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 上的全纯自映射。此外，通过简单地考虑形如 (F, Q) 的乘积映射，我们可以得到任意维数 $k \geq 2$ 中的例子，其中 Q 具有一个不变 Fatou 分支。

证明定理 8.9 的第一步，是寻找一个抛物多项式 f，使其 Lavaurs 映射 $\mathcal{L}_f$ 具有一个吸引不动点。

命题 8.10 ([4, 命题 B])。令 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 为如下定义的三次多项式:

$$f(z)=z+z^2+az^3 \quad with \quad a\in\mathbb{C}.$$

若 $r>0$ 充分接近0，且 a 属于圆盘 $D(1-r,r)$，则 *Lavaurs* 映射 $\mathcal{L}_f:\mathcal{B}_f\to\mathbb{C}$ 存在一个吸引不动点。

证明思路。我们考虑

$$\mathcal{U}_f:=\psi_f^{-1}(\mathcal{B}_f) \quad \text{and} \quad \mathcal{E}_f:=\varphi_f\circ\psi_f:\mathcal{U}_f\to\mathbb{C}.$$

开集 $\mathcal{U}_f$ 包含一个上半平面和一个下半平面，并且在 T_1作用下不变。与 Lavaurs 映射一样，映射 $\mathcal{E}_f$ 与 T_1可交换，因此$\mathcal{E}_f$ –Id 的周期为 1，并且在一个上半平面内有傅里叶展开:

$$\mathcal{E}_f(Z)=Z+\sum_{k\geq 0}c_k e^{2\pi i k Z}.$$

利用 φ_f 和 ψ_f 在无穷远附近的展开，我们通过一个初等 y 计算:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_f(Z)=\varphi_f\circ\psi_f(Z)&=Z+(1-a)\log(-Z)+o(1)\\&\quad-(1-a)\log\big(Z+(1-a)\log(-Z)+\mathrm{o}(1)\big)+o(1)\\&=Z+(1-a)\log(Z)-\pi i(1-a)-(1-a)\log(Z)+o(1)\\&=Z-\pi i(1-a)+o(1),\end{aligned}$$

因此 $c_0=-\pi i(1-a)$。

借助一个更精细的论证，可以证明以下结论。该论证基于 Adam Epstein 提出的有限型解析映射这一概念:

$$\mathcal{E}_f(Z)=Z-\pi i(1-a)+c_1e^{2\pi iZ}+o(e^{2\pi iZ}) \quad \text{with} \quad c_1\neq 0.$$

由此可知，当 $a\neq 1$ 充分接近 1 时，$\mathcal{E}_f$ 有一个不动点 Z_f，其乘子 ρ_f 满足

$$c_1e^{2\pi iZ_f}\sim\pi i(1-a) \quad \text{and} \quad \rho_f-1\sim 2\pi i c_1e^{2\pi iZ_f}\sim -2\pi^2(1-a) \quad \text{as} \quad a\to 1.$$

因此，当 $r>0$ 充分接近 0 且 $a\in D(1-r,\ 1)$ 时，乘子 ρ_f 属于单位圆盘，且 Z_f 是 $\mathcal{E}_f$ 的一个吸引不动点。证明至此完成，因为 $\psi_f:\ \mathcal{U}_f\to\mathcal{B}_f$ 将 $\mathcal{E}_f$ 半共轭到 $\mathcal{L}_f$，因此，Z_f 是 $\mathcal{E}_f$ 的一个吸引不动点这一事实，意味着点 $\psi_f(Z_f)$ 是 $\mathcal{L}_f$ 的一个吸引不动点。□

定理8.9证明中的关键结果，依赖于斜积情形下 Lavaurs 估计的非自治类比。

令 $\mathcal{B}_f$ 和 $\mathcal{B}_g$ 分别为 f 和 g 在迭代作用下，0 的抛物吸引盆。关键之一是选择 $(\widetilde{z}_0,\ \widetilde{w}_0)\in\mathcal{B}_f\times\mathcal{B}_g$，使得 $F^{\circ m}(\widetilde{z}_0,\ \widetilde{w}_0)$ 的第一坐标无限多次返回到接近 $\mathcal{L}_f$ 的吸引不动点的位置。证明的设计使得返回时间为整数 n^2，其中 $n\geq n_0$。因此，我们需要分析 n^2 与 $(n+1)^2$, 之间长度为 $2n+1$ 的轨道段。

命题 8.11 ([4])。 当 $n \to +\infty$ 时，映射序列

$$\mathbb{C}^2 \ni (z,w) \mapsto F^{2n+1}\big(z, g^{n^2}(w)\big) \in \mathbb{C}^2$$

在 $\mathcal{B}_f \times \mathcal{B}_g$ 中局部一致地收敛到映射

$$\mathcal{B}_f \times \mathcal{B}_g \ni (z,w) \mapsto \big(\mathcal{L}_f(z), 0\big) \in \mathbb{C} \times \{0\}.$$

证明思路。 令 $\mathcal{B}_g$ 为在 g 的迭代下 0 的抛物吸引盆。对所有 $w \in \mathcal{B}_g$，轨道 $g^{\circ m}(w)$ 以 $1/m$ 的速度趋于 0。我们希望分析从 $\big(z,\ g^{\circ n^2}(w)\big)$ 出发的 F 在经过 $2n+1$ 次迭代后的行为。当 n 很大时，沿此轨道段的 F 的第一坐标近似为

$$f(z) + \varepsilon^2 \text{ with } \frac{\pi}{\varepsilon} \simeq 2n.$$

正如上一节所见，抛物 implosion 中 Lavaurs 定理的粗略表述告诉我们，若 $\frac{\pi}{\varepsilon} = 2n$，则当 n 很大时，$f(z)$ 的第 $(2n)^{\text{th}}$ 次迭代在 $\mathcal{B}_f$ 上近似等于 $\mathcal{L}_f(z) + \varepsilon^2$。

我们的情形有所不同，因为在我们的情形中，ε 沿轨道持续减小。事实上，对于第一坐标，我们取 $2n+1$ 个如下形式的变换的复合

$$f(z) + \varepsilon_k^2 \text{ with } \frac{\pi}{\varepsilon_k} \simeq 2n + \frac{k}{n} \text{ and } 1 \le k \le 2n+1.$$

该命题证明的关键步骤，是对这一非自治情形进行详细分析，证明 ε_k 的衰减可通过对 F恰好多迭代一次来抵消。□

有了这个命题，定理 8.9 的证明便可轻松完成。

定理 *8.9* 的证明。 设 ξ 是 $\mathcal{L}_f$ 的一个吸引不动点，并设 $V \subset \mathcal{B}_f$ 是以 ξ 为中心的圆盘，且 $\mathcal{L}_f(V)$ 紧含于 V中。因此，当 $k \to +\infty$时，$\mathcal{L}_f^{\circ k}(V)$ 收敛到 ξ。设 $W \Subset \mathcal{B}_g$ 是任意一个圆盘。

根据命题 8.11，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对每个 $n \ge n_0$，

$$\pi_1 \circ F^{\circ(2n+1)}(V \times g^{\circ n^2}(W)) \Subset V,$$

其中 $\pi_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ 表示到第一坐标的投影，$\pi_1(z,\ w) := z$。

设 U是开集 $F^{-n_0^2}\big(V \times g^{\circ n_0^2}(W)\big)$的一个连通分支。那么对每个整数 $n \ge n_0$，都有

$$F^{\circ n^2}(U) \subseteq V \times g^{\circ n^2}(W). \tag{7}$$

事实上，根据假设，这对 $n = n_0$ 成立。现在，如果对某个 $n \ge n_0$ 包含关系成立，那么

$$\begin{aligned}\pi_1 \circ F^{\circ(n+1)^2}(U) &= \pi_1 \circ F^{\circ(2n+1)}\left(F^{\circ n^2}(U)\right)\\ &\subset \pi_1 \circ F^{\circ(2n+1)}\left(V \times g^{\circ n^2}(W)\right) \subset V,\end{aligned}$$

由此可得（7）。这说明序列 $(F^{\circ n^2})_{n\ge 0}$ 在 U 上一致有界，因此是正规的。此外，该映射序列的任意聚值都是常值，且具有 $(z,0)$ 的形式，其中 $z \in V$ 可取某个值；$(z,0)$ 是一个极限值（对应子序列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$），当且仅当 $\big(\mathcal{L}_f(z)\ 0\big)$ 是一个极限值（对应子序列 $(1+n_k)_{k\in\mathbb{N}}$）。因此，聚限点集

在 $\mathcal{L}_f$ 下全不变： $V \to V$，因此它必定与 $\mathcal{L}_f$ 的吸引不动点 ξ 重合。因此，序列 $(F^{\circ n^2})_{n\geq 0}$ 在 U 上局部一致收敛到 $(\xi, 0)$。

序列 $(F^{\circ m})_{m\in\mathbb{N}}$ 在 U 上局部有界，当且仅当存在一个子序列 $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $(F^{\circ m_k}|_U)_{k\in\mathbb{N}}$ 具有相同性质。事实上，由于 W 是紧集，存在 $R > 0$，使得若 $|z| > R$，则对每个 $w \in W$，(z, w) 在迭代下局部一致地趋于无穷远。因此，区域 U 包含于 F 的 Fatou 集中。

设 Ω 是 Fatou 集 $\mathcal{F}_F$ 中包含 U 的分支。对任意整数 $j \geq 0$，映射序列 $(F^{\circ n^2+j})_{n\in\mathbb{N}}$ 在 U 上局部一致地收敛于 $F^{\circ j}(\xi, 0) = (f^{\circ j}(\xi), 0)$，因而也在 Ω 上局部一致地收敛。因此，序列 $(F^{\circ n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $F^{\circ j}(\Omega)$ 上局部一致地收敛于 $(f^{\circ j}(\xi), 0)$。若 i, j 是非负整数，且 $F^{\circ i}(\Omega) = F^{\circ j}(\Omega)$，则 $f^{\circ i}(\xi) = f^{\circ j}(\xi)$，因此 $i = j$，因为 ξ 不可能在 f 的迭代下成为前周期点，这是由于它属于抛物吸引盆 $\mathcal{B}_f$。这证明 Ω 在 F 的迭代下不是（前）周期的，因此它是 F 的游荡 Fatou 分支。□

我们以一些满足定理 8.9 假设的具体例子结束本小节。

例 8.12. 例 作为命题 8.10 的推论，我们得到：若$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是三次多项式 $f(z) = z + z^2 + az^3$，且 g 如式 (5) 所示，则式 (6) 中定义的多项式斜积 F 在 $r > 0$ 充分小时且 $a \in D(1 - r,\ r)$时存在一个游荡 Fatou 分支。

寻找具有与 $\mathbb{R}^2$相交的游荡 Fatou 域的实多项式映射也很有意思。我们也有这样的例子。

例 8.13. 例 $[4,$ 命题 C$]$ 设 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为由下式定义的四次多项式

$$f(z) := z + z^2 + bz^4 \text{ with } b \in \mathbb{R}.$$

存在参数 $b \in (-8/27,\ 0)$，使得对于式 (5) 中的 g，式 (6) 中定义的多项式斜积 F 有一个与 $\mathbb{R}^2$相交的游荡 Fatou 分支。

Astorg、Boc-Thaler 和 Peters 运用类似的技术，构造了 [3]第二个斜积多项式映射实例，但其动力学行为截然不同。他们没有构造由具有吸引不动点的 Lavaurs 映射所产生的游荡域，而是构造了一个由具有 Siegel 型不动点的 Lavaurs 映射所产生的域。

在 $[36],$，Hahn 和 Peters 构造了具有游荡 Fatou 分支的 $\mathbb{C}^4$ 多项式自同构。他们构造的四维自同构属于一个单参数族，该族依赖于参数 $\delta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$；当 δ 趋于 0 时，该族退化为定理 8.9 的方程 (5) 中的二维多项式映射。

Berger 和 Biebler 最近在 [10] 证明了：存在一个由实系数复平面多项式自同构组成的局部稠密集合，这些自同构具有一个游荡 Fatou 分支。这些 Fatou 分支具有非空的实迹，其统计行为属于历史型，且涌现率高。证明基于一个针对曲面实映射参数族的几何模型。

8.4. 椭圆不变纤维。 我们与 Peters 在 [51] 研究了 Siegel 圆盘中心处存在不变纤维的情形。更确切地说，我们考察了具有一个椭圆不变纤维的如下形式的多项式斜积 (1)。与前面一样，不失一般性，我们可以假设不变纤维为 $\{w=0\}$，因此有 $g(0)=0$ 和 $g'(0)=e^{2\pi i\theta}$，其中 $\theta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$。我们假设原点属于 g 的一个 Siegel 圆盘，因此 g 在 $w=0$附近局部全纯线性化。因此，经过局部坐标变换，我们可以假设 F具有如下形式

$$F(z,w)=(f(z,w),\lambda\cdot w),$$

其中 $f_w(z):=f(z,w)$ 是一个多项式，其系数全纯地依赖于 w。我们假设多项式 f_w 的次数在$\{w=0\}$附近为常数，且至少为 2。

在这种情况下，我们对问题 1 只能给出部分答案。事实上，虽然我们已经知道，f_0 的吸引 Fatou 分支总会鼓出，但一般情形似乎更为复杂，因为可能存在共振现象。在 [51]中，我们证明了以下局部结果：若旋转数满足 Brjuno 条件，则具有椭圆不变纤维的多项式斜积的所有抛物 Fatou 分支都会鼓出。

命题 8.14 ([51, 命题 2])。 设 F 是具有以下形式的全纯斜积

$$F(z,w)=(f_w(z),g(w)) \tag{8}$$

其中 $g(w)=\lambda w+O(w^2)$，$f_0(0)=0$，且 $f_0'(0)=1$。假设 λ 是一个 *Brjuno* 数。若 $f_0(w)\equiv w$，则 F 在原点处全纯线性化。若$f_0(z)=z+f_{0,k+1}z^{k+1}+O(z^{k+2})$ 满足 $f_{0,k+1}\neq 0$ 对某个 $k\geq 1$成立，则对任意 $h\geq 0$，都存在原点附近的局部全纯坐标变换，将$\sim$ $\sim F$共轭为形如 $F(z,w)=(f(z,w)\ \lambda w)$ 的映射，满足

$$\widetilde{f}(z,w)=z+f_{0,k+1}z^{k+1}+\cdots+f_{0,k+h+1}z^{k+h+1}+\sum_{j\geq h}z^{k+j+2}\alpha_{k+j+2}(w), \tag{9}$$

其中，对于 $j\geq h$, $\alpha_{k+j+2}(w)$ 是定义在 w 上的全纯函数，且满足 $\alpha_{k+j+2}(0)=f_{0,k+j+2}$。

回顾一下，若一个复数称为 *Brjuno* 数（更多详情见 [15] ），则

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\log\frac{1}{\omega(2^{k+1})}<+\infty\,, \tag{10}$$

其中，对于任意 $m\geq 2$，$\omega(m)=\min_{2\leq k\leq m}|\lambda^k-\lambda|$；二次多项式$\lambda w+w^2$在 0 附近可线性化，当且仅当 λ 是 Brjuno 数（见 [15, 16, 64]）。对于高次多项式，Brjuno 条件 (10) 是充分条件，但其必要性仍是一个开放问题。

前一个命题的证明采用了一种受Poincar´e-Dulac归一化过程 [2, Chapter 4] 启发的过程，旨在将给定的多项式斜积共轭为形式更为简单的斜积。在通常的Poincar´e-Dulac归一化过程中，每一步我们都可以使用多项式坐标变换，消去给定次数的所有非共振单项式。这里也采用了类似的思想；得益于芽的斜积结构和Brjuno假设，我们能够消去给定次数的所有非共振项

关于 z 的幂，通过在 z中为多项式且在 w中具有全纯系数的坐标变换来实现。正如 [51, Section 2]中所指出的，前几个次数之间存在一些差异。

在命题 8.14 的证明中，算术 Brjuno 条件至关重要。自然会有人问： f_0 的抛物 Fatou 分支是否总会鼓胀，或者能否刻画它们在何种情况下会鼓胀。我们尚未对此给出完整答案。不过，我们可以证明以下结果。

命题8.15 ([51, 命题 10]). 设 $F(z,w) = (f_z(w)\ g(w))$ 是一个具有椭圆可线性化不变纤维的全纯斜积。若 F 在该不变纤维上没有全纯不变曲线，则 f_0 的抛物 *Fatou* 分支不会鼓胀。

此外，我们还可以构造一些例子，说明 Brjuno 条件不能被完全省略。事实上，取$Cremer$ 数，即满足 $\lambda \in \mathbb{C}$ 且$|\lambda| = 1$，并且使得

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log \frac{1}{\omega(m)} = +\infty,$$

我们可以构造不具有全纯不变曲线的多项式斜积例子，其中该曲线位于不变纤维上。一个初等例子是下面这个多项式斜积

$$F(z,w) = (z + w + zw, \lambda w)$$

其中 λ 是一个Cremer数（详情见 [51, 例 8] ）。更一般地，仿照Cremer的例子 [23] 进行论证，我们可以证明（见 [51, 命题 9]）存在不具有形如$\{w = \varphi(z)\}$的不变全纯曲线的全纯斜积，它们具有一个非逐点不动的椭圆不变纤维。

共振现象也会使一般情形的描述变得复杂。例如，[17] 中利用Siegel圆盘中心处的不变纤维，构造了一个非回归Fatou分支，其极限集同胚于一个穿孔圆盘；在该构造中，不变纤维还包含一个Siegel圆盘，但其旋转数相反。此外，不变纤维上的Fatou分支也可能不会向外鼓起。例如，我们可以考虑斜积

$$F(z,w) = (\lambda z(1 + azw), \lambda^{-1} w),$$

与 $a \in \mathbb{C}^*$, $\lambda = e^{2\pi i\theta}$和 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$。我们有 $F(z,\ 0) = (\lambda z,\ 0)$，但 $\{w = 0\}$ 中原点附近的 Siegel圆盘并不向外凸出；事实上，由 [13] 和[14] 可知，存在一个抛物型 Fatou 分支，其边界上包含 $\mathbb{C}^2$ 的原点，而该原点被 F 固定。

我们还在以下假设下回答了问题2：椭圆不变纤维处的乘子是 Brjuno 数，并且作用于不变纤维上的多项式的所有临界点都位于吸引或抛物周期的吸引域中。

定理 8.16 ([51, 定理 1])。 设 F 是如下形式的多项式斜积

$$F(z,w) = (f_w(z), g(w)), \tag{11}$$

并令 $\{w = w_0\}$ 为乘子为 λ 的椭圆不变纤维。如果 λ 是 *Brjuno* 数，且多项式 f_{w_0} 的所有临界点都位于吸引或抛物周期的吸引域中，那么 f_{w_0} 的所有 *Fatou* 分支都会隆起，并且在不变纤维 $\{w = w_0\}$ 的某个邻域内， F 的 *Fatou* 分支只有隆起的

f_{w_0} 的 *Fatou* 分支。特别是，该邻域内不存在游荡 *Fatou* 分支。

证明思路。 证明依赖于这样一个事实：在 1 维中，如果多项式的每个临界点均满足以下条件之一：（1）位于某个吸引周期循环的吸引域中；（2）位于某个抛物周期循环的吸引域中；或（3）位于 Julia 集中，并且经过有限次迭代后被映射到一个周期点，那么就可以在 Julia 集减去抛物周期轨道的一个逆向不变邻域中构造一个共形度量 μ，使得 f_c 关于该度量是扩张的。由此可知，不存在游荡 Fatou 分支。

证明中的关键步骤是：对于与不变纤维 $\{w = w_0\}$ 足够接近的纤维 $\{w = \widetilde{w}_0\}$，我们可以定义依赖于 $\widetilde{w}_0$ 连续变化的共形度量 $\mu_{\widetilde{w}_0}$，并使得 F 关于这一族度量具有扩张性（详情请参见 [51, 第 3] 节）。也就是说，对于位于度量定义区域内的点 $(\widetilde{z}_0,\ \widetilde{w}_0) \in \mathbb{C}^2$，以及一个非零切向量 $\xi \in T_{\widetilde{z}_0}(\mathbb{C}_{\widetilde{w}_0})$，我们有

$$\mu_{\widetilde{w}_1}(\widetilde{z}_1, df_{\widetilde{w}_0}\xi) > \mu_{\widetilde{w}_0}(\widetilde{z}_0, \xi),$$

其中 $(\widetilde{z}_1, \widetilde{w}_1) = F(\widetilde{z}_0, \widetilde{w}_0)$。因此，若 $(\widetilde{z}_0, \widetilde{w}_0)$ 不属于某个隆起Fatou分支，且其轨道 $(\widetilde{z}_n, \widetilde{w}_n)$ 始终处于扩张度量所定义的邻域内，那么对于任意切向量 $\xi \in T_{\widetilde{z}_0}(\mathbb{C}_{\widetilde{w}_0})$，我们有

$$\mu_{\widetilde{w}_n} df_{\widetilde{z}_{n-1}} \cdots df_{\widetilde{z}_0}\xi \to \infty,$$

由此可知，族 $(F^{\circ n})_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $(\widetilde{z}_0, \widetilde{w}_0)$ 的任何邻域内都不是正规族。这证明了不变纤维 $\{w = w_0\}$ 附近除膨胀 Fatou 分支外，不存在其他 Fatou 分支。□

目前尚不清楚能否使用相同的技巧来处理位于 Julia 集上的预周期临界点。困难在于，临界点最终映射到周期轨道这一性质，在邻近的纤维中并不保持。

Acknowledgements

感谢 John H. Hubbard 允许我们使用他正在编写的书稿 [20] 撰写这篇综述。前七节改编自该书第一章。我们也感谢 Marco Abate 和 Fabrizio Bianchi 对这些笔记的初稿提出宝贵意见。

References

[1] Alexander, D.S.：《复动力学史：从 Schr¨oder 到 Fatou 和 Julia》。数学论题，Friedr. Vieweg & Sohn，不伦瑞克，（1994）[2] Arnold, V.I.：《常微分方程理论中的几何方法》。施普林格出版社，纽约，（1988）[3] Astorg, M., Boc-Thaler, L., Peters, H.：《由具有 Siegel 圆盘的 Lavaurs 映射产生的游荡域》，arXiv:1907.04140，即将在 Analysis&PDE 发表[4] Astorg, M., Buff, X., Dujardin, R., Peters, H., Raissy, J.：《一个具有游荡 Fatou 分支的二维多项式映射》，《数学年刊》（2）184 卷第 1 期，263–313（2016）[5] Beardon, A.F.：《有理函数迭代》。复解析动力系统。数学研究生教材，132。施普林格出版社，纽约（1991）[6] Bedford, E., Smillie, J.：《复平面上的多项式微分同胚：流、平衡测度与双曲性》，Invent. Math. 103（1），69–99（1991）[7] Bedford, E., Smillie, J.：《复平面上的多项式微分同胚：II. 稳定流形与回归》，《美国数学会杂志》4（4），657–679（1991）[8] Bedford, E., Smillie, J.：《复平面多项式自同构动力学中的外射线》，载于《当代数学》，第 222 卷，41–79。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州（1999）[9] Bedford, E., Smillie, J., Ueda, T.：《复二维中的半抛物分岔》。《数学物理通讯》350 卷第 1 期，1–29（2017）[10] Berger, P., Biebler, S.：《游荡稳定分支的出现》，《美国数学会杂志》36（2023），第 2 期，397–482。[11] Bianchi, F.：《复平面自同态的抛物 implosion》，《欧洲数学会杂志》（JEMS）21 卷第 12 期，3709–3737（2019）[12] Blanchard, P.：《黎曼球面上的复解析动力学》，Bull. Amer. Math. Soc.，11，85–141（1984）[13] Bracci, F., Zaitsev, D.：《单共振双全纯映射的动力学》，《欧洲数学会杂志》（JEMS）15 卷第 1 期，179–200（2013）[14] Bracci, F., Raissy, J., Zaitsev, D.：《多重共振双全纯映射的动力学》，Int. Math. Res. Not. IMRN，第 20 期，4772–4797（2013）[15] Brjuno, A.D.：《微分方程的解析正规形 I》，《莫斯科数学会会刊》25，131–288（1971）[16] Brjuno, A.D.：《微分方程的解析正规形 II》，《莫斯科数学会会刊》26，199–239（1972）[17] Boc-Thaler, L., Fornæss, J.E., Peters, H.：《具有去心极限集的 Fatou 分支》，《遍历论与动力系统》35，1380–1393（2015）[18] B¨ottcher, L.E.：《迭代收敛的基本定律及其在分析中的应用》（俄文），《喀山物理数学学会通报》14，155–234，（1904）[19] Buff, X.：《多项式的游荡 Fatou 分支》，图卢兹科学学院年刊，第 6 辑，27 卷第 2 期：KAWA复分析冬季学校与研讨会特别专辑，2014–2016，445–475，（2018）[20] Buff, X., Hubbard, J.H.：《单复变量动力系统》，编写中的书稿。[21] Carleson, L., Gamelin, T.W.：《复动力学》。大学教材：数学论丛。施普林格出版社，纽约（1993）[22] Cremer, H.：《关于 Schr ¨oder 函数方程与 Schwarz 角映射问题》，Ber. Verh. S¨achs. Akad. Wiss. Leipzig，Math.-Phys. Kl. 84（1932）[23] Cremer, H.：《关于非中心点的频率》，《数学年刊》115，573–580（1938）[24] Denker, M., Przytycki, F., Urba´nski, M.：《黎曼球面上有理函数的转移算子》，《遍历论与动力系统》16（02），255–266（1996）[25] Devaney R.：《混沌动力系统导论》，艾迪生-韦斯利（1989）[26] Douady, A：《西格尔圆盘与赫尔曼环》，Bourbaki 研讨会，1986/87 年卷。Ast´erisque 第 152–153 期（1987），4，151–172（1988）[27] Douady, A：《Julia 集是否连续依赖于多项式？》，《复动力系统》（辛辛那提，俄亥俄州，1994），91–138，《应用数学专题讨论会论文集》49，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州（1994）[28] Dujardin, R.：《非层状的动力格林流》，《数学年刊》365 卷第 1–2 期，77–91（2016）[29] Dujardin, R., Lyubich, M.：《复平面上耗散多项式自同构的稳定性与分岔》，Invent. Math. 200 卷第 2 期，439–511（2015）

[30] Fatou, P.：关于某些 ′函数方程的统一解，巴黎科学院报告 143，546–548（1906）[31] Fatou, P.：关于 ′函数方程（第二 `篇回 ′忆），法国数学会通报，48，33–94（1920）[32] Fatou, P.：关于 ′函数方程（第三 `篇回 ′忆），法国数学会通报，48，208–314（1920）[33] Fornæss, J.E., Sibony, N.：某些全纯映射的复现域分类，《数学年刊》301（4），813–820（1995）[34] Fornæss, J.E., Sibony, N.： $\mathbb{C}^k$中的整映射的 Fatou 集与 Julia 集。《数学年刊》311第1期，27–40（1998）[35] Fornæss, J.E., Sibony, N.：高维复分析与复动力系统中的一些公开问题。Publ. Mat. 45第2期，529–547（2001）[36] Hahn, D., Peters, H.：具有游荡 Fatou 分支的多项式自同构。Adv. Math. 382（2021），论文编号107650，共46页。[37] Heinemann, S.-M.： $\mathbb{C}^2$中斜积的 Julia 集，Kyushu J. Math.52（2），299–329（1998）[38] Ji, Z.：强吸引多项式斜积的非游荡Fatou分支，J. Geom. Anal. 30，第1期，124–152（2020）[39] Ji, Z.：多项式斜积中的非一致双曲性，即将在 IMRN 发表，（2022），arXiv:1909.06084[40] Jonsson, M.，*Dynamics of polynomial skew-products on* $\mathbb{C}^2$，《数学年刊》314，403–447（1999）[41] Julia, G.：关于有理函数迭代的回 ′忆，J. Math. Pures Appl. 8，47–245（1918） ′Keen, L.：Julia 集，载于《混沌与分形：计算机图形学背后的数学》，Devaney 与 Keen 编，Proc. Symp. Appl. Math.，39，美国数学会，57–74（1989）[42] Koenigs, G.：关于某些[43] 函数方程积分的研究。Ann. Sci. ′Ecole Norm. Sup. (3) 1，3–41（1884） ′Lavaurs, P.：全纯动力系统、抛物型周期点的爆炸，博士论文，巴黎南大学，奥赛（1989）′Lilov, K.：二维 Fatou 理论，博士论文，密歇根大学（2004）[44] Lyubich, M. Y.：有理变换的动力学：拓扑图景。Uspekhi Mat. Nauk 41，第4期（250），35–95，239（1986）`Lyubich, M. Y., Peters, H.：耗散 Hénon 映射的不变 Fatou 分支的分类，Geom. Funct. Anal. 24，887–915（2014）′McMullen, C.T.：《复动力学与重整化》，《数学年刊研究丛书》第135卷，普林斯顿大学出版社（1994） ′McMullen, C.T.：重整化与纤维化于圆上的三维流形，《数学年刊研究丛书》第142卷，普林斯顿大学出版社（1996）[45] Milnor, J.：《单复变量动力系统》第三版。《数学年刊研究丛书》第160卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿（2006）[46] Peters, H., Raissy, J.：多项式椭圆斜积的 Fatou 分支，《遍历论与动力系统》39，第8期，2235–2247（2019）[47] Peters, H., Smit, I.M.：吸引斜积的 Fatou 分支，J. Geom. Anal. 28，第1期，84–110（2018） ′Peters, H., Vivas, L.：具有游荡Fatou圆盘的多项式斜积，Math. Z. 283第1–2期，349–366（2016）[48] Roeder, R.：多项式斜积的 Fatou 分支的二分性，Conform. Geom. Dyn. 15，7–19（2011）[49] Rosay, J.P., Rudin, W.：从[50] 到[51] 的全纯映射，Trans. Am. Math. Soc. 310（1），47–86（1988）[52] Shishikura, M.：抛物型不动点的分岔。《Mandelbrot集：主题与变奏》，325–363，London Math. Soc. Lecture Note Ser.，274，剑桥大学出版社，剑桥（2000）[53] Schr [54] oder, E.：论迭代函数。《数学年刊》3第2期，296–322（1870）[55] Siegel, C.L.：解析函数的迭代。《数学年刊》（2）43，607–612（1942） $\mathbb{C}^n$ Steinmetz, N.：有理迭代。载于《复解析动力系统》，De Gruyter 数学研究丛书第16卷。Walter de Gruyter & Co.，柏林（1993） $\mathbb{C}^n$Sullivan, D.：拟共形同胚与动力学 I：Fatou-Julia问题中游荡域问题的解，《数学年刊》（2）122第3期，401–418（1985）

[61] Ueda, T.：射影空间上的复动力系统中的 Fatou 集，日本数学会杂志**46**，545 555 1994–（）[62] Vivas, L.：抛物型斜积的不稳定流形与 Fatou 圆盘的参数化。《复分析与协同》4第1期，论文编号1（2018）[63] Vivas, L.：非自治抛物分岔。《美国数学会会刊》148，第6期，2525–2537（2020）[64] Yoccoz, J.-C.：Siegel定理、Brjuno数与二次多项式，Ast´eris-que**231**，3–88（1995）

Email address： xavier.buff@math.univ-toulouse.fr

Institut de Mathématiques de Toulouse, UMR5219, Université de Toulouse, CNRS, UPS, F-31062 Toulouse Cedex 9, France*Email address*: jasmin.raissy@math.u-bordeaux.fr

Univ. Bordeaux, CNRS, Bordeaux INP, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France & Institut Universitaire de France (IUF)