arXiv:2302.02671v1 [math.DS] 6 Feb 2023

求解分数阶汉坦病毒模型：一种新方法

Yogita Mahatekar *†,Amey Deshpande ‡§

2023年2月7日

摘要

文献 [6, 3]提出了一个由三个方程组成的微分生物多样性模型，用以描述在外来竞争性鼠种的影响下，汉坦病毒流行病在啮齿动物物种间的传播与扩散。我们分析了生物多样性模型的 Caputo时间分数阶版本，并加入了如 [5]中所述的最优控制参数。本文提出了一种求解分数阶微分方程的新算法，该算法由 NIM [1] 与隐式 θ方法 [7] 的实现推导而来，其中 $\theta = 1$。随后，利用这一新算法对生物多样性汉坦病毒模型的最优控制 Caputo 时间分数阶版本（OC-CTFBH 模型）进行积分求解。我们绘制所得解，并进一步分析参数变化的影响。

1 引言

2020年1月，当世界卫生组织（WHO）首次提到武汉的一组肺炎病例时，没有人预料到，截至 11th 3月，COVID-19（2019冠状病毒病）已经传播至全球，并被宣布为一场大流行。W. O. Kermack 和 A. G. McKendrick 于1927年发表的关于分舱SIR模型的著名研究，为流行病学家从数学上描述传染病的动力学铺平了道路。这些SIR模型在科学界日益受到欢迎，尤其是在分析当前大流行方面。这些分舱SIR模型由常微分方程／分数阶微分方程组构成，除少数特殊情形外，通常无法得到解析解。为了对分舱模型进行完整的动力学分析与研究，完整求解相应的微分方程／分数阶微分方程十分重要。因此，开发新的数值方法以获得尽可能接近精确解的近似结果是必要的

*浦那工程学院（COEP）数学系，印度浦那 - 411005

†电子邮箱：yogitasukale25@gmail.com

‡数学与统计学院，德鲁维什纳特·卡拉德 MIT 世界和平大学，印度马哈拉施特拉邦浦那 - 411038§2009asdeshpande@gmail.com

。这些数值方法及其所得解能够对流行病的传播进行较为合理的分析，并使我们能够基于过去的观测结果作出更稳健的预测。

[6, 3]提出了一个三方程微分生物多样性模型，用于描述外来竞争性鼠种影响下汉坦病毒流行病在啮齿动物物种间的传播与扩散。在这项研究中，对汉坦病毒流行病易感的啮齿动物物种被置于同一环境中，与外部引入的“外来”鼠种争夺资源。该模型称为生物多样性模型，作者 [6] 进行分析后得出结论：竞争压力的增加可能导致啮齿动物物种间感染流行率降低，甚至完全消失。 [5] 将最优控制引入该模型，并引入了一个新参数 E，用以表示“捕捞努力”，即定期移除啮齿动物；这种情况会因狩猎或捕获等各种因素而自然发生。这个新的最优控制参数提高了系统趋向共存平衡点的可能性，并确实有助于减少啮齿动物间的感染。本文分析生物多样性汉坦病毒模型的最优控制 Caputo 时间分数阶版本（OC-CTFBH 模型）的动力学。为此，我们提出一种新颖的数值方法，该方法结合了 θ–方法的隐式形式，以及由 Daftardar-Gejji 和 H. Jafari 提出的分解技术，即 NIM [1]。我们将该新方法得到的解与其他常用方法所得的精确解和／或数值解进行比较。图中绘出了易感啮齿动物、感染啮齿动物和外来种群的变化情况。可以观察到，易感啮齿动物种群起初急剧增加，随后达到最大值，之后趋近于平衡数量。感染种群和外来种群也呈现类似行为。研究发现，当我们对模型施加最优控制，即采用捕捞努力时，易感和感染啮齿动物种群都会减少。

本文的进一步结构安排如下。第2节介绍本文所用分数阶微积分的基本术语和定义。第3节讨论各种汉坦病毒模型，并据此构建 OC-CTFBH 模型。随后，第4节和第5节分别在简要概述 NIM 和隐式 θ-方法之后，提出一种新的数值方法，并利用该方法对 OC-CTFBH 模型进行数值模拟。第6节总结本文的研究结果和观察结论。

2 预备知识

本节介绍分数阶微积分的一些预备知识。更多细节请参阅 [4, 2]。

定义 1. Grünwald–Letnikov分数阶导数算子 ${}_{GL}D^{\alpha}$ 定义为

定义为

$$ {}_{GL}D^{\alpha}f(t) = \lim_{N\to\infty} h_N^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N} w_j^{(\alpha)} f(t - j_N); \quad \text{where} \quad w_j^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+\alpha)} \tag{1} $$

定义 2. 阶数为 $\alpha > 0$ of$f \in C[0,\infty)$的Riemann-Liouville分数阶积分定义为

$$ I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau. \tag{2} $$

定义 3. [2] 令 $\alpha \in \mathbb{R}^+$ and $m = \lceil \alpha \rceil$. 阶数为 α, ${}_{RL}D^{\alpha}$的Riemann-Liouville分数阶算子定义为

$$ {}_{RL}D^{\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} I^{m-\alpha} f(t). \tag{3} $$

注意，对于满足 $p > \alpha$. 的 $\alpha \in \mathbb{R}^+$ and $p \in \mathbb{N}$ ，有 ${}_{RL}D^{\alpha}f(t) = \frac{d^p}{dt^p} I^{p-\alpha} f(t)$。

定义 4. 阶数为 $\alpha \in (k-1, k]$, $k \in \mathbb{N}$ 的Caputo导数，对 $f \in C^k(0,\infty)$定义为

$$ {}^{c}D^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{k-\alpha-1} f^{(k)}(\tau)\, d\tau, & \alpha \in (k-1, k), \\ f^{(k)}(t), & \alpha = k. \end{cases} \tag{4} $$

RL分数阶导数与Caputo分数阶导数之间的关系如下。

$$ {}^{c}D^{\alpha} f(t) = {}_{RL}\, D^{\alpha}(f(t) - f(t_0)) \tag{5} $$

在适当的正则性假设下,

$$ {}_{RL}D^{\alpha} f(t) = {}_{GL}\, D^{\alpha} f(t) \tag{6} $$

因此，根据方程（5）和（6），我们有

$$ {}^{c}D^{\alpha} f(t) = {}_{RL}\, D^{\alpha}(f(t) - f(t_0)) = {}_{GL}\, D^{\alpha}(f(t) - f(t_0)) \tag{7} $$

因此;

$$ {}^{c}D^{\alpha} f(t) = {}_{GL}\, D^{\alpha}(f(t) - f(t_0)) = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n} w_j^{(\alpha)} (f(t-j) - f(t_0)) \tag{8} $$

下文为简化记号，我们省略左上标 c，并使用记号 $D^{\alpha} f(t)$ 表示 Caputo分数阶导数算子。

3 汉坦病毒模型的构建

Peixoto 和 Abramson 提出了生物多样性模型 [6]。在该模型中，引入了感染汉坦病毒的啮齿动物种群，并允许其与外来未感染啮齿动物物种竞争资源。

设变量 $x(t)$ $y(t)$ $z(t)$ 分别表示时刻 t 对汉坦病毒易感的啮齿动物种群、感染汉坦病毒的种群以及外来啮齿动物种群。 $r(t) = x(t) + y(t)$ 表示引入汉坦病毒的啮齿动物总种群。生物多样性模型如下。

$$\frac{dx}{dt} = br - cx - \frac{xr}{k(t)} - axy \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy - \frac{yr}{k(t)} + axy \tag{10}$$

其中， b：出生率， c：自然死亡率， a：传播率（侵袭参数）， k：环境参数。

Yusof 等人[5] 将表示“捕捞努力”的最优控制参数 E 引入生物多样性模型。该参数对狩猎、捕获等各种自然情形导致的种群周期性减少进行建模，而最优控制有助于系统稳定化。该模型如下。

$$\frac{dx}{dt} = br - cx - \frac{x(r+qz)}{k(t)} - axy - Ex \tag{11}$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy - \frac{y(r+qz)}{k(t)} + axy - Ey \tag{12}$$

$$\frac{dz}{dt} = (\beta - \gamma)z - \frac{z}{k(t)}(z + \epsilon r) \tag{13}$$

其中， E：捕捞努力， q：外来种群的影响， $z(t)$：外来种群， β、 γ、 ϵ：从其他物种获取资源所对应的参数， k：环境参数。

相应模型的分数阶版本为现有模型提供了额外的灵活性和控制参数。这使我们能够更准确地描述现实生活中的动态过程，并更精确地拟合观测到的实验数据。因此，对于分数阶阶数 $0 < \alpha \leq 1$，生物多样性汉坦病毒模型的最优控制 Caputo 时间分数阶版本（ OC-CTFBH 模型）如下所示。

$$D^{\alpha}x = br - cx - \frac{x}{k}(r+qz) - axy - Ex \tag{14}$$

$$D^{\alpha}y = -cy - \frac{y}{k}(r+qz) + axy - Ey \tag{15}$$

$$D^{\alpha}z = (\beta - \gamma)z - \frac{z}{k}(z + \epsilon\, r) \tag{16}$$

其中， $D^{\alpha} f(t)$表示 $f(t)$的 α阶Caputo分数阶导数。OC-CTFBH中的参数和变量如下所示。

- $x \equiv x(t)$：易感啮齿动物种群。
- $y \equiv y(t)$：感染啮齿动物种群。 $r(t) = x(t) + y(t)$。
- $z \equiv z(t)$：外来种群。
- b, c：分别表示啮齿动物的出生率和死亡率。
- β, γ：分别表示外来种群的出生率和死亡率。
- q：外来种群对啮齿动物种群施加的影响。注意， q :0 将使生物多样性模型退化为不含竞争的模型，该竞争由前两个方程表示。
- ϵ：啮齿动物种群对外来物种产生的影响。
- a：汉坦病毒的传播率。
- k：表示环境的环境容纳量。

4 数值算法

本节提出一种新的数值方法，它结合了 NIM 和隐式 θ-方法。

4.1 新迭代方法（NIM）

Daftardar-Gejji 和贾法里 [1] 提出了一种求解如下形式函数方程的新迭代方法:

$$v = h + L(v) + N(v) \tag{17}$$

其中， h 是已知项， L 是线性算子，而 N 是非线性算子。

在此方法中，假设方程（17）有如下形式的解$v = \sum_{i=0}^{\infty} v_i$ ，其中

$$\begin{aligned} &v_0 = h, \\ &v_1 = L(v_0) + N(v_0), \\ &v_i = L(v_{i-1}) + N\left(\sum_{j=0}^{i-1} v_j\right) - N\left(\sum_{j=0}^{i-2} v_j\right), \quad i = 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

由于 L 是线性算子，我们有 $L(v) = L(\sum_{i=0}^{\infty} v_i) = \sum_{i=0}^{\infty} L(v_i)$，且非线性算子 N 可分解为

$$N(v) = N(v_0) + \sum_{i=2}^{\infty} \left[N\left(\sum_{j=0}^{i-1} v_j\right) - N\left(\sum_{j=0}^{i-2} v_j\right) \right]$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} v &= v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \\ &= h + L(v_0) + N(v_0) + L(v_1) + [N(v_0 + v_1) - N(v_0)] + \cdots \\ &= h + L(v) + N(v), \end{aligned}$$

因此 v 满足函数方程 (17)。一般的 k 项 NIM 解为 $v = \sum v_i$.$_{i=0}$

4.2 新型 θ-数值方法

隐式 θ-方法的一般形式如下

$$D^{\alpha} y(t_n) = \theta f(t_n, y_n) + (1-\theta) f(t_{n-1}, y_{n-1}). \tag{18}$$

根据方程 (8)，我们有

$$h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n} w_j^{(\alpha)} (y(t_{n-j}) - y(t_0)) = \theta f(t_n, y_n) + (1-\theta) f(t_{n-1}, y_{n-1}) \tag{19}$$

$$\implies h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n} w_j^{(\alpha)} (y_{n-j} - y_0) = \theta f(t_n, y_n) + (1-\theta) f(t_{n-1}, y_{n-1}) \tag{20}$$

特别地，对于 $\theta = 1$ ，我们得到

$$h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n} w_j^{(\alpha)} (y_{n-j} - y_0) = f(t_n, y_n) \tag{21}$$

将式 (18) 中给出的新型隐式 θ-方法应用于式 (21)，以求解 OC-CTFBH 模型 (14)-(16)，我们得到

$$h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n} w_j^{(\alpha)} (x_{n-j} - x_0) = (b-c)x_n + by_n - \frac{x_n}{k}(x_n + y_n + qz_n) \tag{22}$$
$$- ax_n y_n - Ex_n$$

$$h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n} w_j^{(\alpha)} (y_{n-j} - y_0) = (-c)y_n - \frac{y_n}{k}(x_n + y_n + qz_n) \tag{23}$$
$$+ ax_n y_n - Ey_n$$

$$h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n} w_j^{(\alpha)} (z_{n-j} - z_0) = (\beta - \gamma)z_n - \frac{z_n}{k}(z_n + \epsilon x_n + \epsilon y_n) \tag{24}$$

我们将方程 (22) 表示为 NIM 的形式，即 $u = N(u) + f$，其中 f 是已知部分，N 是非线性算子，u 是未知量。三项

该函数方程的 NIM 解为 $u = u_0 + u_1 + u_2$，其中 $u_0 = f$、$u_1 = N(u_0)$ $u_2 = N(u_0 + u_1) - N(u_0)$。现在将 (22) 表示为 $u = N(u) + f$，如下所示

$$h^{-\alpha}\sum_{j=1}^{n} w_j^{(\alpha)}(x_{n-j} - x_0) + h^{-\alpha}w_0^{(\alpha)}(x_n - x_0) = (b-c)x_n + by_n - \frac{r_{s_n}^2}{k} - \frac{x_n y_n}{k} - \frac{qx_n z_n}{k} - ax_n y_n - Ex_n \tag{25}$$

整理各项后，得到

$$(h^{-\alpha}w_0^{(\alpha)} - b + c + E)x_n = -h^{-\alpha}\sum_{j=1}^{n} w_j^{(\alpha)}(x_{n-j} - x_0) + h^{-\alpha}w_0^{(\alpha)}x_0 + by_n - \frac{r_{s_n}^2}{k} - \frac{x_n y_n}{k} - \frac{qx_n z_n}{k} - ax_n y_n \tag{26}$$

注意到，方程 (26) 的形式为 $x_n = N_1(x_n, y_n, z_n) + f_{1_n}$ 其中

$$f_{1_n} = \frac{-h^{-\alpha}\sum_{j=1}^{n} w_j^{(\alpha)}(x_{n-j} - x_0) + h^{-\alpha}w_0^{(\alpha)}x_0}{h^{-\alpha}w_0^{(\alpha)} - b + c + E} \tag{27}$$

and

$$N_1(x_n, y_n, z_n) = \frac{by_n - \frac{r_{s_n}^2}{k} - \frac{x_n y_n}{k} - \frac{qx_n z_n}{k} - ax_n y_n}{h^{-\alpha}w_0^{(\alpha)} - b + c + E} \tag{28}$$

类似地，我们将方程 (23) 整理成如下形式：$y_n = N_2(x_n, y_n, z_n) + f_{2_n}$

$$h^{-\alpha}\sum_{j=1}^{n} w_j^{(\alpha)}(y_{n-j} - y_0) + h^{-\alpha}w_0^{(\alpha)}(y_n - y_0) = (-c)y_n - \frac{r_{i_n}^2}{k} - \frac{y_n x_n}{k} - \frac{qy_n z_n}{k} + ax_n y_n - Ey_n \tag{29}$$

这意味着:

$$(h^{-\alpha}w_0^{(\alpha)} + c + E)y_n = -h^{-\alpha}\sum_{j=1}^{n} w_j^{(\alpha)}(y_{n-j} - y_0) + h^{-\alpha}w_0^{(\alpha)}y_0 - \frac{r_{i_n}^2}{k} - \frac{x_n y_n}{k} - \frac{qy_n z_n}{k} + ax_n y_n \tag{30}$$

这里我们表示

$$f_{2_n} = \frac{-h^{-\alpha}\sum_{j=1}^{n} w_j^{(\alpha)}(y_{n-j} - y_0) + h^{-\alpha}w_0^{(\alpha)}y_0}{h^{-\alpha}w_0^{(\alpha)} + c + E} \tag{31}$$

and

$$N_2(x_n, y_n, z_n) = \frac{-\frac{r_{i_n}^2}{k} - \frac{x_n y_n}{k} - \frac{qy_n z_n}{k} + ax_n y_n}{h^{-\alpha}w_0^{(\alpha)} + c + E} \tag{32}$$

同理，将方程（24）整理为 $z_n = N_3(x_n, y_n, z_n)+f_{3_n}$ 的形式如下：

$$h^{-\alpha}\sum_{j=1}^{n} w_j^{(\alpha)}(z_{n-j}-z_0)+h^{-\alpha}w_0^{(\alpha)}(z_n-z_0)=(\beta-\gamma)z_n-\frac{z_{a_n}^2}{k} -\frac{\epsilon z_n x_n}{k}-\frac{z_n \epsilon y_n}{k} \tag{33}$$

在此我们记

$$f_{3_n}=\frac{-h^{-\alpha}\sum_{j=1}^{n} w_j^{(\alpha)}(z_{n-j}-z_0)+h^{-\alpha}w_0^{(\alpha)}z_0}{h^{-\alpha}w_0^{(\alpha)}-\beta+\gamma} \tag{34}$$

and

$$N_3(x_n,y_n,z_n)=\frac{-\frac{z_{a_n}^2}{k}-\frac{\epsilon z_n x_n}{k}-\frac{z_n \epsilon y_n}{k}}{h^{-\alpha}w_0^{(\alpha)}-\beta+\gamma} \tag{35}$$

4.3 使用 NIM 求解 $x(t)$ $y(t)$ $z(t)$

$$x_n=x(t_n)=\sum_{k=0}^{2}x_{kn}=x_{0n}+x_{1n}+x_{2n} \tag{36}$$

$$y_n=y(t_n)=\sum_{k=0}^{2}y_{kn}=y_{0n}+y_{1n}+y_{2n} \tag{37}$$

$$z_n=z(t_n)=\sum_{k=0}^{2}z_{kn}=z_{0n}+z_{1n}+z_{2n} \tag{38}$$

注意，当 $n=0$ 时，时间参数为 $t=t_0$ ，此时 $x_0=x(t_0)$ $y_0=y(t_0)$ $z_0=z(t_0)$，它们是模型中给定的初始条件。当 $n=1$ 时，我们求取时间 $t=t_1$. 处的 $x(t)$ $y(t)$ $z(t)$。使用三项 NIM 解，可得到 $x_1=x(t_1)$ $y_1=y(t_1)$ $z_1=z(t_1)$，如下所示：

$$x_1=x(t_1)=\sum_{k=0}^{2}x_{k1}=x_{01}+x_{11}+x_{21} \tag{39}$$

$$y_1=y(t_1)=\sum_{k=0}^{2}y_{k1}=y_{01}+y_{11}+y_{21} \tag{40}$$

$$z_1=z(t_1)=\sum_{k=0}^{2}z_{k1}=z_{01}+z_{11}+z_{21} \tag{41}$$

其中 $x_{01}=f_{11}$； $y_{01}=f_{21}$； $z_{01}=f_{31}$. 进一步有 $x_{11}=N_1(f_{11},f_{21},f_{31})$； $y_{11}=$

$N_2(f_{11}, f_{21}, f_{31})$； $z_{11} = N_3(f_{11}, f_{21}, f_{31})$ 和

$$x_{21} = N_1(x_{01} + x_{11}, y_{01} + y_{11}, z_{01} + z_{11}) - N_1(f_{11}, f_{21}, f_{31}) \tag{42}$$
$$y_{21} = N_2(x_{01} + x_{11}, y_{01} + y_{11}, z_{01} + z_{11}) - N_2(f_{11}, f_{21}, f_{31}) \tag{43}$$
$$z_{21} = N_3(x_{01} + x_{11}, y_{01} + y_{11}, z_{01} + z_{11}) - N_3(f_{11}, f_{21}, f_{31}) \tag{44}$$

5 数值模拟

本节讨论使用新迭代方法和隐式 $\theta-$ 方法（$\theta = 1$）求解汉坦病毒模型所得的数值结果。数值模拟中使用的参数值为： $b = 1, c = 0.6, a = 0.1, q =$0.2, $\beta = 1, \gamma = 0.5, \epsilon = 0.1$. k 为变化量，代表环境因子。这里针对$k = 20$ 和 $k = 250$ ，并采用初始条件 $x(0) = 5, y(0) = 5, z(0) = 5.$，步长为 $h = 0.01.$，求解表示汉坦病毒模型的方程组

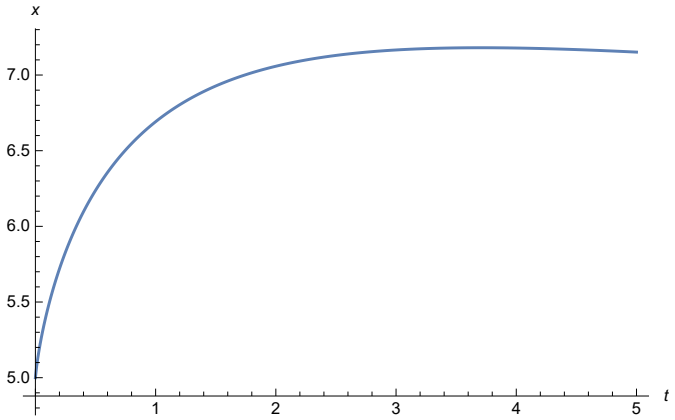

图 1： $k = 20, E = 0$对应的 x(t) 随 t（单位：月）的变化

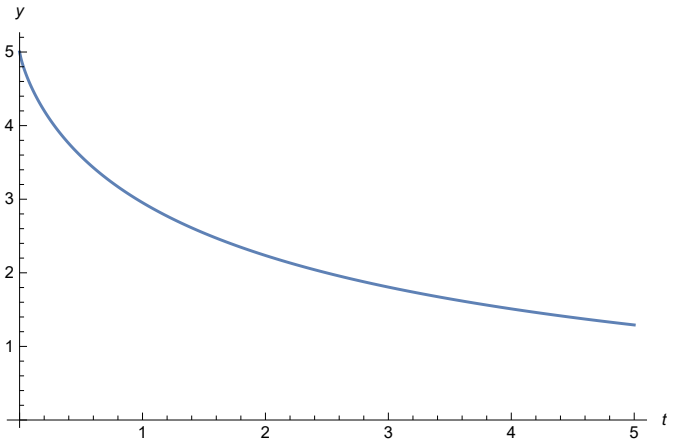

图2： $k = 20, E = 0$的 y(t) 随 t（月）的变化

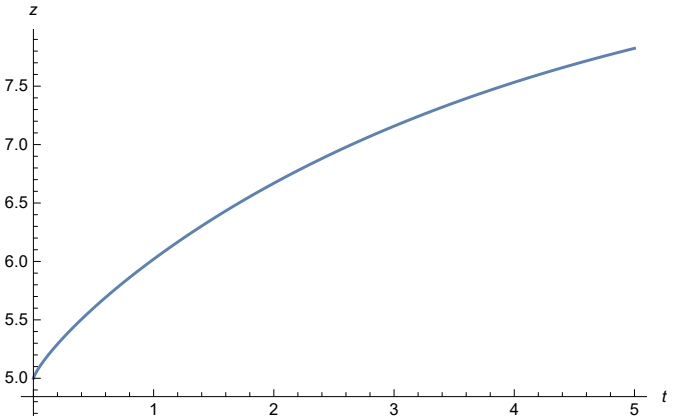

图3： $k = 20, E = 0$的 z(t) 随 t（月）的变化

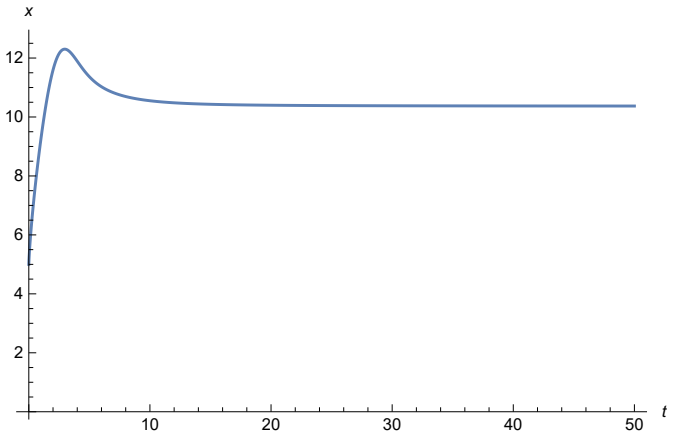

图4： $k = 250, E = 0$对应的x(t)随t（月）的变化

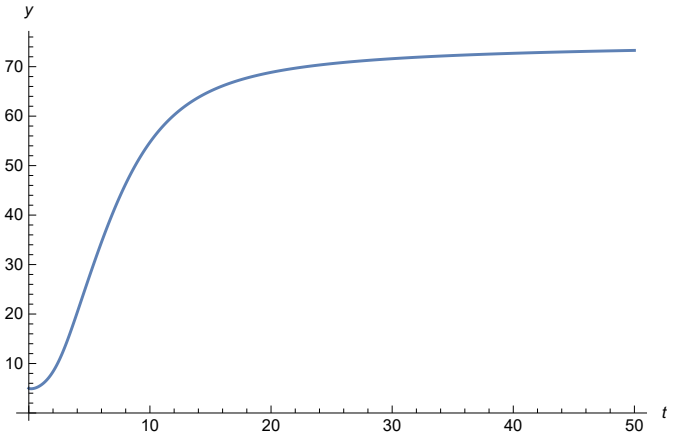

图5： $k = 250, E = 0$对应的y(t)随t（月）的变化

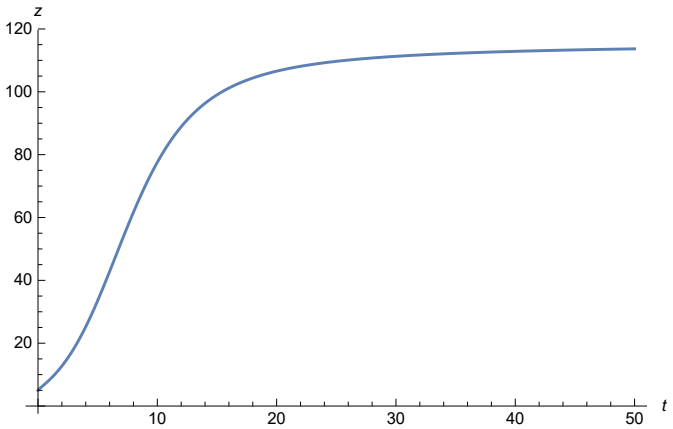

图6： $k = 250$, $E = 0$对应的 z(t) 随 t（单位：月）的变化

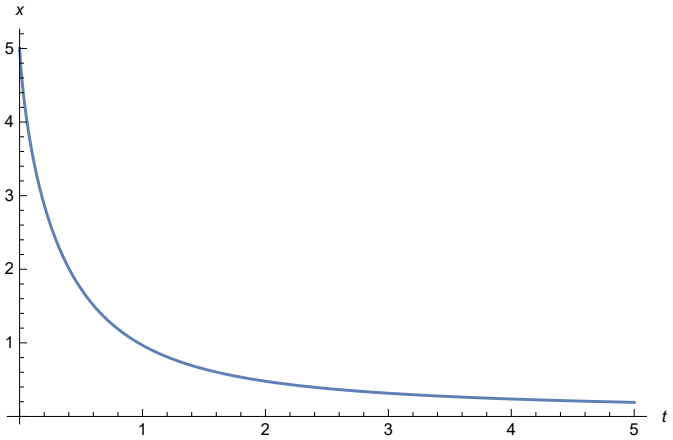

图7： $k = 20$, $E = 0.5$对应的 x(t) 随 t（单位：月）的变化

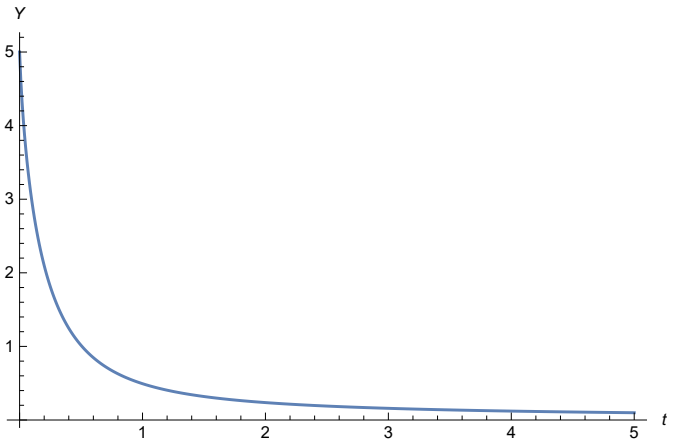

图 8： $k = 20$、 $E = 0.5$的 y(t) 与 t（以月计）的关系

图 1–8 展示了无最优控制（取捕捞努力为 $E = 0$）以及施加最优控制（取捕捞努力为 $E = 0.5$ ）时汉坦病毒模型的动力学行为。在图 1、2、3、4、5、6 中，分别描绘了无最优控制（$E = 0$）且 k. 取不同值时易感啮齿动物种群、感染啮齿动物种群和外来种群的变化情况。而图 7 和图 8 展示了施加最优控制并取捕捞效应参数 $E = 0.5$. 时，易感啮齿动物种群 x（t）和感染啮齿动物种群 y（t）的变化。研究发现，当施加控制参数 E 时，易感啮齿动物种群 x（t）和感染啮齿动物种群 y（t）将消失，并稳定于某一稳态值。在无最优控制的模型中，观察到易感种群与感染种群呈现相反的行为。这些易感种群和感染种群起初迅速增长，随后达到某一最大值，最终趋近于平衡值。

6 结论

本文提出了一种新算法，用于求解有无最优控制的分数阶汉坦病毒模型。该新数值算法准确且高效，适用于求解描述汉坦病毒模型的分数阶微分方程。该算法结合了隐式 $\theta-$ 方法与新迭代方法。我们利用这一新数值技术研究了汉坦病毒模型的丰富动力学特性，并考察了将捕捞效应 $E(t)$ 作为最优控制对汉坦病毒感染传播的影响。本文讨论了该模型的理论研究与数值模拟。研究发现，对模型施加最优控制（即捕捞努力）后，易感啮齿动物种群和感染啮齿动物种群的数量都会减少。这清楚地表明，在捕捞效应的作用下，最优控制能够消除感染啮齿动物种群。

参考文献

[1] V. Daftardar-Gejji 和 H. Jafari。求解非线性函数方程的一种迭代方法。《数学分析与应用杂志》，316(2):753–763，2006。[2]K. Diethelm。《分数阶微分方程分析：采用 Caputo 型微分算子的应用导向论述》。施普林格科学与商业媒体，2010。[3] M. J. Hantavirus、F. YUSOF、A. ISMAIL 和 N. ALI。用于控制汉坦病毒感染的啮齿动物种群捕捞建模。《Sains Malaysiana》，39(6):935–940，2010。[4] J. T. Machado、V. Kiryakova 和 F. Mainardi。分数阶微积分简史。《非线性科学与数值模拟通讯》，16(3):1140–1153，2011。[5] F. Mohamed Yusof、F. A. Abdullah 和 A. I. Md. Ismail。汉坦病毒感染传播的建模与最优控制。《Mathematics》，7(12):1192，2019。[6] I. D. Peixoto 和 G. Abramson。生物多样性对汉坦病毒动物间流行的影响。《Ecology》，87(4):873–879，2006。[7] M. Yakit Ongun 和 D. Arslan。分数阶汉坦病毒模型的显式与隐式格式。《Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization》，8(2):75–94，2018。