支配实代数态射

Wojciech Kucharz

arXiv:2302.02691v1 [math.AG] 6 Feb 2023

摘要。 设 X 和 Y 是非奇异实代数簇，$\dim X \geq \dim Y$。假设代数簇 Y 是可变形、紧且连通的。我们的主要结果表明，从 X 到 Y 的每个正则映射都同伦于一个满射正则映射。可变形簇包括线性实代数群的所有齐性空间。

关键词。 实代数簇、正则映射、支配映射、支配喷流。

数学主题分类（2020）。 14P05,14P99.

1 引言

在本文中，我们使用实代数簇一词，指具有由 $\mathbb{R}$ 值函数构成的 $\mathbb{R}$ 代数结构层的环空间，并且该环空间同构于某个实射影 n 空间 $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ 的扎里斯基局部闭子集（其中 n），且赋予扎里斯基拓扑和正则函数层。这与 [1, 8], 兼容，后者对实代数几何作了详细阐述。回顾一下，本文所用意义下的每个实代数簇实际上都是仿射的，也就是说，同构于某个 $\mathbb{R}^n$ 的代数子集（其中 n），参见 [1, 命题 3.2.10 和定理 3.4.4]。实代数簇之间的态射称为正则映射。每个实代数簇也都配备由 $\mathbb{R}$ 上的通常度量所确定的欧几里得拓扑。除非另有明确说明，所有与实代数簇相关的拓扑概念均指欧几里得拓扑。

定义 1.1. 设 Y 是一个非奇异实代数簇。

(i) 对于 Y，点 $y_0 \in Y$ 处的支配映射是指正则映射 $f\colon \mathbb{R}^n \to Y$，其中 n 是某个非负整数，满足 $f(0) = y_0$，且导数 $d_0 f\colon T_0\mathbb{R}^n \to T_{y_0}Y$ 是满射；若存在这样的映射 f，则称 Y 在 y_0 处是可支配的。(ii) 对于 Y，支配喷流是指正则映射 $s\colon Y \times \mathbb{R}^n \to Y$，其中 n 是某个非负整数，满足对每个点 $y \in Y$，等式 $s(y,0) = y$ 成立，并且映射 $s(y,\cdot)\colon \mathbb{R}^n \to Y, v \mapsto s(y,v)$ 对于 Y 在 y 处是支配的。(iii) 若代数簇 Y 存在支配喷流，则称其可变形。

显然，若 Y 在 $y_0 \in Y$ 处可支配，则存在一个支配映射 $\mathbb{R}^n \to Y$，使 Y 在 y_0 处成立，其中 n 是包含 y_0 的 Y 的不可约分支的维数。正如命题 1.4 中所指出的，定义 1.1(i) 与单有理簇的经典概念密切相关。

每个可变形簇在其每一点处都是可支配的，但尚不清楚反过来是否也成立。

在 [2, 定义 2.1(ii)] 中引入的支配喷流概念比定义 1.1(ii) 中的概念更一般。然而，根据 [2, 引理 2.2], , [2, 定义 2.1(iii)] 中的可变形簇概念与定义 1.1(iii) 中的概念相同。[2, 命题 2.7 和 2.8], 确定了一大类可变形实代数簇；这些结果的概要另见例 1.3。此外，关于取值于可变形簇的映射的 [2, 定理 4.2] 在 [2] 的所有主要结果中都发挥着关键作用。

本文旨在证明以下可支配性结果。

定理 1.2. 设 Y 是一个非奇异实代数簇。假设 Y 可变形、紧且连通。那么，对于每个非奇异实代数簇 X，满足维数 $X \geq$ 维数 Y，以及每个正则映射 $f\colon\ X \to Y$，都存在一个满射正则映射 $g\colon\ X \to Y$，具有以下两个性质：

(1.2.1) 存在一个正则映射 $F\colon X \times \mathbb{R} \to Y$，使得对于所有 $x \in X$，$F(x, 0) = f(x)$ 且 $F(x, 1) = g(x)$（特别地，f 与 g 同伦），并且

(1.2.2) 对于每个点 $y \in Y$，都存在一点 $x \in X$，使得 $g(x) = y$，且导数 $d_x g\colon T_x X \to T_y Y$ 是满射。

定理 1.2 的证明推迟到第 2 节。假设是否最优尚不明确。Y 的可塑性是否必要？如果 X 不紧，Y 的紧致性是否必要？

如果存在一个满射正则映射 $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to Y$，那么 Y 是连通的。此外，对于某个点 $u \in \mathbb{R}^n$，导数 $d_u\varphi\colon T_u\mathbb{R}^n \to T_{\varphi(u)}Y$ 是满射，因此映射 $\mathbb{R}^n \to Y, x \mapsto \varphi(u + x)$ 在 $\varphi(u)$ 处对 Y 是支配的，而代数簇 Y 在 $\varphi(u)$ 处是可支配的。

下面的例子说明了定理 1.2 的适用范围。

例 1.3。 设 G 是一个线性实代数群，也就是说，它是一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的 Zariski 闭子群，其中 n。A G-空间 是一个实代数簇 Y，其上有 G 的作用；该作用 $G \times Y \to Y$，$(a, y) \mapsto a \cdot y$ 是一个正则映射。若 G-空间 Y 满足 Y 非奇异，且对于每个点 $y \in Y$，映射 $G \to Y, a \mapsto a \cdot y$ 在 G 的单位元处的导数满射，则称其为良好的。显然，如果 Y 对 G 是齐性的（也就是说，G 在 Y 上传递地作用），那么 Y 就是一个良好的 G-空间。根据 [2, 命题 2.8], , 每个良好的 G-空间都是可变形的。

特别地，单位 n-球面

$$\mathbb{S}^n := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

以及实射影 n-空间 $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ 都是可变形簇，因为它们是正交群 $\mathrm{O}(n+1) \subset \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ 的齐性空间。

回顾一下，若存在正则映射 $\varphi\colon U \to Y$，其定义在 $\mathbb{R}^n$ 的一个 Zariski 开子集 U 上（其中 n 是某个非负整数），并且 $\varphi(U)$ 在 Y 中 Zariski 稠密，则称不可约实代数簇 Y 单有理 。

命题 1.4。 若 Y 是不可约非奇异实代数簇，则以下条件等价：

(a) Y 在某一点 $y_0 \in Y$ 处可支配。

(b) Y 是单有理的。

证明。 (a)⇒(b)。设 $f\colon \mathbb{R}^n \to Y$ 是 Y 在 y_0 处的支配映射。由于导数 $d_0 f\colon T_0\mathbb{R}^n \to T_{y_0}Y$ 是满射，存在 N 的一个欧氏开邻域 $0 \in \mathbb{R}^n$，使得 $f(N)$ 是 $y_0 \in Y$ 的一个欧氏开邻域。因此，集合 $f(N)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中 Zariski 稠密，所以集合 $f(\mathbb{R}^n)$ 在 Y 中也 Zariski 稠密。

(b)⇒(a)。设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 Zariski 开子集，且 $\varphi\colon U \to Y$ 是一个正则映射，其 $\varphi(U)$ 在 Y 中 Zariski 稠密。我们可以选取一点 $u \in U$，使得导数 $d_u\varphi\colon T_uU \to T_{\varphi(u)}Y$ 是满射。利用 $\mathbb{R}^n$ 中的一个平移，我们不妨假设 $u = 0 \in U$。如果常数 $c > 0$ 足够小，那么正则映射

$$h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \frac{cx}{1 + \|x\|^2}$$

满足 $h(\mathbb{R}^n) \subset U$。由于导数 $d_0 h$ 是同构，正则映射

$$g\colon \mathbb{R}^n \to Y, \quad x \mapsto \varphi(h(x))$$

在点 $\varphi(0)$ 处对 Y 是支配的。 □

本注记基于我们与 Bochnak 合作撰写的论文 [2]，并受到复几何领域成果的启发，主要是 Forstnerič 的论文 [3],，广义而言，还包括 Gromov 的著名文章 [5] 以及 Forstnerič 的专著 [4]。

2 映入可变形代数簇的映射的一些性质 S

以下这个 [2, 引理3.8] 的变体将起到关键作用。

引理2.1。 设 X 为非奇异实代数簇， Y 为可变形的非奇异实代数簇， U 为 X 的开子集，且 $\Phi\colon U \times [0,1] \to Y$ 为连续映射，使得对每个 $t \in [0,1]$，映射 $\Phi_t\colon U \to Y$, $\Phi_t(x) = \Phi(x,t)$ 属于 C^∞ 类。设 U_0 为 X 的一个开子集，其闭包 U_0 是紧的且包含于 U 中。则存在一个支配喷流 $s\colon Y \times \mathbb{R}^n \to Y$（对应于 Y）以及一个连续映射 η：$U_0 \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$，使得

(2.1.1) $\eta(x, 0) = 0$ 对所有 $x \in U_0$,

(2.1.2) $s(\Phi(x,0), \eta(x,t)) = \Phi(x,t)$ *for all* $(x,t) \in U_0 \times [0,1]$,

(2.1.3) 对于每个 $t \in [0,1]$，映射 $\eta_t\colon U_0 \to \mathbb{R}^n$, $\eta_t(x) = \eta(x,t)$ 属于 C^∞ 类。

证明。 按照定义 1.1(ii)，取一个支配喷流 $s\colon Y \times \mathbb{R}^n \to Y$ 对于 Y。令 $\tilde{p}\colon E := (X \times Y) \times \mathbb{R}^n \to X \times Y$ 为乘积向量丛，并令 $\tilde{s}\colon E \to X \times Y$ 由 $\tilde{s}((x,y), v) = s(y,v)$ 定义。根据 [2, 引理 4.1 及其证明],，三元组 $(E, \tilde{p}, \tilde{s})$ 是典范投影 $h\colon X \times Y \to X$ 的支配喷流，如 [2,定义 3.2(ii)]所述。

注意，连续映射

$$F\colon U\times[0,1]\to X\times Y,\quad F(x,t)=(x,(\Phi(x,t))$$

是 h 的 $\mathcal{C}^\infty$ 截面的同伦： $X\times Y\to X$，也就是说，对于每个 $t\in[0,1]$，$\mathcal{C}^\infty$ 映射F_t： $U\to X\times Y$，$F_t(x)=F(x,t)$ 满足 $h(F_t(x))=x$。因此，根据 [2, 引理 3.8]，上文的支配喷流 s： $Y\times\mathbb{R}^n\to Y$ 可以作如下选择：存在连续映射 η： $U_0\times[0,1]\to\mathbb{R}^n$，满足 (2.1.1) 和 (2.1.3)，并且

$$\tilde{s}(F(x,0),\eta(x,t))=F(x,t)\quad\text{for all }(x,t)\in U_0\times[0,1].$$

最后一个等式直接推出 (2.1.2) 成立。 □

现在我们可以着手完成主要任务了。

定理 *1.2* 的证明。 代数簇 Y 是纯维的，因为它非奇异且连通。不失一般性，我们可以假设代数簇 X 是纯维的。令 $n:=$维数 X，且 $p:=$维数 Y。

由于 Y 是紧的，存在 Y 的有限开覆盖 $\{W_1,\dots,W_r\}$，其中每个 W_i 都与 $\mathbb{R}^p$ 中的开立方体 $(0,1)^p$ 通过 $\mathcal{C}^\infty$ 微分同胚。此外，存在 Y 的两个紧子集族 $\{L_1,\dots,L_r\}$ 和 $\{L'_1,\dots,L'_r\}$，使得

$$Y=L'_1\cup\cdots\cup L'_r\quad\text{and}\quad L'_i\subset\operatorname{interior}(L_i)\subset W_i\quad\text{for }1\le i\le r.$$

设 $\{V_1,\dots,V_r\}$ 是 X 的一族两两不交的开子集，其中每个 V_i 都与 $\mathbb{R}^n$ 中的开立方体 $(0,1)^n$ 通过 $\mathcal{C}^\infty$ 微分同胚。我们可以选取一个满射 $\mathcal{C}^\infty$ 次浸入 $\varphi_i\colon V_i\to W_i$，以及 V_i 的一个紧子集 K_i，使得 $\varphi_i(K_i)=L_i$, $1\le i\le r$。注意，该映射

$$\varphi\colon U:=V_1\cup\cdots\cup V_r\to Y,\quad\varphi(x)=\varphi_i(x)\quad\text{for }x\in V_i,\ 1\le i\le r$$

是一个 $\mathcal{C}^\infty$ 次浸入，满足 $\varphi(K)=Y$，其中 $K:=K_1\cup\cdots\cup K_r$。

附带说明，考虑一个连续映射 $h\colon U\to Y$。由于每个集合 V_i 都是可缩的，限制映射 $h|_{V_i}\colon V_i\to Y$是零伦的。因此，映射 $h\colon U\to Y$是零伦的，因为 Y 是道路连通的。

由上述附带说明可知，$\mathcal{C}^\infty$映射 $f|_U,\varphi\colon U\to Y$同伦。因此，存在一个$\mathcal{C}^\infty$映射 $\Phi\colon U\times[0,1]\to Y$，使得对于所有 $x\in U$，都有 $\Phi(x,0)=f(x)$ 且 $\Phi(x,1)=\varphi(x)$；例如参见 [7, 命题10.22]。选取 X的一个开子集 U_0，使得 $K\subset U_0$，且其闭包 U_0是 U 的紧子集。令 $s\colon Y\times\mathbb{R}^n\to Y$为 Y的一个支配喷流，并令 $\eta\colon U_0\times[0,1]\to\mathbb{R}^n$为满足引理2.1中条件（2.1.1）–（2.1.3）的连续映射。特别地，

$$s(f(x),\eta_1(x))=s(\Phi(x,0),\eta_1(x,0))=\Phi(x,1)=\varphi(x)\quad\text{for all }x\in U_0.$$

根据斯通–魏尔施特拉斯定理，我们可以选取一个正则映射 $\beta\colon X\to\mathbb{R}^n$，使其限制 $\beta|_{U_0}$ 在弱$\mathcal{C}^\infty$ 拓扑（定义见 [6, 第 36]页）下任意接近 η_1。该映射

$$g\colon X\to Y,\quad g(x)=s(f(x),\beta(x))$$

是正则的；只要 $\beta|_{U_0}$ 充分接近 η_1，其限制 $g|_{U_0}$ 在弱$\mathcal{C}^\infty$ 拓扑下就能任意接近 $\varphi|_{U_0}$。我们可以假设，对于 $1\le i\le r$，$g(K_i)\supseteq L'_i$，因此$g(K)=Y$，并且对每个点 $x\in K$，导数 $d_xg\colon T_xX\to T_{g(x)}Y$都是满射。总之，$g\colon X\to Y$是满足条件 (1.2.2) 的满射正则映射。此外，

$$F\colon X\times\mathbb{R}\to Y,\quad F(x,t)=s(f(x),t\beta(x))$$

是满足条件 (1.2.1) 的正则映射。 □

致谢。作者得到国家科学中心（波兰）资助项目 2018/31/B/ST1/01059 的部分资助。

参考文献

[1] J. Bochnak、M. Coste 和 M.-F. Roy，《实代数几何》，Ergeb. Math. Grenzgeb. 3，第 36 卷，Springer，柏林（1998）。[2] J. Bochnak 和 W. Kucharz，关于映入实代数齐性空间的映射逼近，J. Math. Pures Appl. 161（2022），111–134。[3] F. Forstnerič，映到 Oka流形上的满射全纯映射，载于：《复几何与辛几何》，Springer INdAM Ser. 第 21 卷，73–84，Springer，查姆（2017）。[4] F. Forstnerič，《Stein流形与全纯映射：复分析中的同伦原理》，第二版，Ergeb. Math. Grenzgeb. 3，第 56 卷，Springer，查姆（2017）。[5] M. Gromov，椭圆丛全纯截面的 Oka原理，J. Amer. Math. Soc. 2（1989），851–897。[6] M. W. Hirsch，《微分拓扑》，GTM，第 33 卷，Springer，纽约（1997）。[7] J. M. Lee，《光滑流形导论》，Springer，纽约（2003）。[8]F. Mangolte，《实代数簇》，Springer 数学专著，Springer International Publishing（2020）。

Wojciech Kucharz 数学研究所 数学与计算机科学学院 雅盖隆大学 Łojasiewicza 6 30-348 克拉科夫 波兰 电子邮箱地址：
Wojciech.Kucharz@im.uj.edu.pl