arXiv:2302.02701v2 [math.CO] 7 Feb 2023

合作无嫉妒分割

ˇ ˇ DUSKO JOJIC、GAIANE PANINA 和 RADE ZIVALJEVIC

ABSTRACT. 借助构形空间和等变拓扑，我们研究一种一般性的“合作无嫉妒分割问题”。与 Stromquist-Woodall-Gale 定理的经典设定相比，在这种问题中，参与者表达偏好的自由度更大。

一群参与者想要切割一块“蛋糕” $I = [0, 1]$ ，并以无嫉妒方式将各块分给自己。蛋糕切好后，放在圆桌上的盘子里供大家取用（每个盘子至多放一块），每位参与者通过指向一个或多个自己偏好的盘子来做出选择。新颖之处在于，她的选择可能取决于整个分配配置。具体而言，参与者可以选择一个空盘子（也可能偏爱某个空盘子而非其他空盘子），并且不仅考虑自己偏好的盘子里有什么，也考虑相邻盘子里的内容。

我们证明，在参与者人数为素数幂时，即使在这种设定下，只要偏好满足闭性这一标准假设，仍然存在无嫉妒分割。

1. OVERVIEW AND AN INFORMAL INTRODUCTION

在延伸并进一步发展我们早期论文 [8, 13,14], 中的思想基础上，我们提出一个新框架，将等变拓扑的方法应用于与公平分割和无嫉妒分割相关的数理经济学问题。

在以 Stromquist-Woodall-Gale 定理[17, 21, 4] 为代表的经典方法中，“蛋糕” $I = [0, 1]$ 被切割成 r 块，每位参与者通过指向一块（或几块）来作出选择。标准假设是：(1) 偏好是闭的；(2) 没有人偏好退化瓦片。于是，无论参与者人数是多少，都存在无嫉妒分割。

为了从全新视角审视这个问题，我们构建了一套新的论述框架：参与者拥有更复杂的偏好，可以选择退化瓦片（更准确地说，他们可以选择空盘子），而证明则依赖于新的构形空间和等变拓扑。

1.1. 圆桌旁的参与者与蛋糕。假设生日聚会上有 r 位宾客，他们想要分割一块生日蛋糕，让每个人都对自己分到的那块蛋糕感到满意。（更一般地说，一群由r 位参与者组成的群体分割一种商品，也称为“蛋糕”，并将其建模为区间 $I = [0, 1]$。）

关键词和短语：无嫉妒分割、构形空间/测试映射方案。1

在这个叙述的基础上，我们进一步丰富该模型，假设有一张圆桌，桌上放着 r 个无法区分的盘子，因此圆桌和盘子集合Π 都具有循环群 $\mathbb{Z}_r$的对称性。

蛋糕最多被切成 r 块（也就是说，最多切成 r 条非退化线段，称为“区块”），然后将这些区块分配到盘子上，每个盘子最多放一块。有些情况下，可能会有空盘子。我们也不排除只有一块（即整个蛋糕）的情况，此时除一个盘子外，其余盘子都为空。

切割和分配方案确定后，每位玩家通过指向自己偏好的一个盘子来作出选择（如果多个盘子的价值相同且都想要，也可以指向多个盘子）。新颖之处在于，选择现在可能取决于整体的分配配置（分配函数）。请回想，在通常的模型中，玩家会专注于单个（最想要的）区块，而完全不考虑其余（较不想要的）区块的位置。

下面的“巧克力示例”展示了一种偏好取决于桌面上区块循环次序的情形。

参与者人数为素数时的一个“巧克力示例”， $r = p$。假设蛋糕 $I = [0, 1]$ 上不均匀地装饰着杏仁糖、巧克力、奶油和其他美味食材。

设想一位参与者希望最大化他所选蛋糕块与两块相邻蛋糕块中的巧克力总量。

因此，可能会出现所选盘子实际上是空的情况（例 1.1）。此外，一位参与者可能更偏好一个空盘子而非另一个；也就是说，空盘子不一定都相同！

请注意，如果通过循环置换桌上的盘子来重新排列蛋糕块，偏好不会改变。

选择空盘子的理由可能是，参与者预想到将来会与桌旁紧邻的邻座合作或交易。其他一些参与者也可能有类似的打算，关注蛋糕中的其他食材，比如奶油或杏仁糖。

定理 3.1 的一个特例指出，在这种情况下，只要对偏好作出一些相当自然且温和的假设，无嫉妒分割总是可行的。

素数平方 $r = p^2$ 的“巧克力示例”。定理 3.1 的推论之一是以下结果，它讨论参与者人数为素数平方的情况。

与前一个例子一样，我们假设蛋糕 I 上（不均匀地）装饰着杏仁糖、巧克力、奶油等。这次有 p 张圆桌，每张桌子上有 p 个盘子（因此所有盘子组成的集合 Π的基数为$r = p^2$）。蛋糕的区块被分配到各个盘子上，玩家也可能希望让自己分得的蛋糕块以及

相邻的两块蛋糕合起来所含的巧克力总量最大化。结论是，无论其他参与者偏好什么，无嫉妒分割总是存在的。

一般情况下，从外部视角来看，参与者可能有相当复杂、未知甚至“非理性”的目标和偏好。真正重要的是，如果我们通过循环置换桌子来重新排列蛋糕块，并在每张桌子上（再次循环地）置换盘子，这些偏好不会改变。

这是对“巧克力示例”主题的一种变体。设每位玩家 $j \in [r]$ 都有一个连续评价函数 f^j，定义在所有线段 $[a,b] \subseteq [0,1]$的集合上，用来指定从该玩家的视角来看每条线段的价值。唯一的条件是， f^j 在所有退化线段上都必须保持常数（也就是在 $a = b$的情况下）。

假设盘子按圆周顺序摆放在桌上。玩家 j 选择编号为 i 的盘子，条件是

$$3f^j(\text{位于盘子 } i\text{中的线段}) - f^j(\text{位于盘子 } i+1\text{中的线段}) + f^j(\text{segment lying in the plate } i-1))$$

达到其最大值。（如果在两个或更多位置达到最大值，他会选择其中每一个位置。）因此，根据定理 3.1，如果 $r = p$ 是素数，则无嫉妒分割总是存在。

1.2. 模型的新颖性。“巧克力示例”阐释了所提出的“合作式无嫉妒分割”新方法的一些主要特征。为便于普通读者或非专业读者理解，本文所采用的方法和思想的新颖性可以概括如下。

(1) 玩家的偏好取决于整个分配配置。换言之，玩家会考虑完整的分配函数 $\alpha : [k] \to \Pi$ （其中 $k \leq r$），该函数描述了各个部分在盘子中的放置情况。回想一下，在标准模型中，玩家通常只关注单个（最想要的）区块，而完全忽略其余（较不想要的）区块的位置。(2) 如果提供了空盘子——当蛋糕的区块数量严格小于 r 时就会出现这种情况——则参与者可以选择其中一个空盘子。此外，一个重要的新颖之处在于，空盘子不一定相同，即一个空盘子可能比另一个更受偏好。

例 1.1。很容易构造一个有两个空盘子的“巧克力示例”，用来说明（2）。例如，当巧克力按以下方式分配到七个盘子中时，就会出现这种情况

$$(100, 0, 100, 1, 1, 0, 1)$$

其中一位玩家偏好其中一个空盘子，但不偏好另一个。

相比之下，在经典的 Stromquist-Woodall-Gale 定理中， [17, 21,4], 参与者在任何情况下都不得选择空盘子。

在 Avvakumov 和 Karasev 最近提出的方法中， [2], 允许参与者选择空盘子。不过，在他们的方法中，所有空盘子都被视为相同，且同样受欢迎（或同样不受欢迎）。

(3) 一项技术上的创新是采用新的构形空间 $\mathcal{C}_r$ （第2节），将其作为合作无嫉妒分割的自然数学模型。回顾拓扑方法的常见应用，例如 [17, 21, 4, 2, 5, 12, 15], ，将蛋糕切成 r 块的切割空间模型是$r-1$维单纯形 Δ^{r-1}。

1.3. 新结果概要。我们所有“巧克力示例”以及其他类似“合作无嫉妒分割结果”的自然环境（生态位）是什么？“当我们循环重排蛋糕块时不会改变”的偏好对称性起什么作用？素数的作用是本质性的（内在的），还是它们只是人为产物，反映了所用方法的局限性？

我们的主要新成果（定理 3.1，第 3 节）回答了所有这些问题。在以下条件下，它保证合作无嫉妒分割的存在：参与者的数量 r 是素数幂，偏好是闭的，并且偏好尊重 p-环面群在 Π 盘子集合上的作用。

定理 3.1 的表述和证明都表明，偏好的对称性确实是“问题的核心”。

特别是，已知在密切相关的问题中，见 [2, 第 4 节3] 和 [13, 定理 4.4], ，对称群的阶必须是素数幂。通过类似的论证，这一条件对于“合作无嫉妒分割问题”也是不可避免的。

定理 3.1 的证明推迟到第 4 节，在介绍相关拓扑工具和思想之后；另请参见附录（第 5 节），其中包含一些辅助材料和文献指南。

定理 3.1 为合作偏好下的其他无嫉妒分割结果铺平了道路。特别是在有“龙” [14], 存在的情况下，无嫉妒分割也适用；在这种情况下，我们区分两种基本情形：

(1) 有 $r-1$ 位参与者和一条龙。将“蛋糕”分成 r块后，龙不理会其他参与者，先做出选择并拿走其中一块。之后，参与者希望以无嫉妒的方式分割剩余的部分。

（2）有 $r+1$ 名参与者将蛋糕分成 r 块。一条凶猛的龙出现并吞掉其中一名参与者。参与者希望预先切割蛋糕，使得无论哪名倒霉的参与者被龙吞掉，其余参与者都能以无嫉妒方式分享这些区块。

我们证明（见第 3 节中的定理 3.2 和定理 3.3），在这两种情形下，基于合作偏好，在与定理 3.1 类似的条件下，都能保证无嫉妒分割的存在。

2. Mathematical formalization of the problem via configuration spaces and cooperative preferences

对于 $r \in \mathbb{N}$，我们将描述一个拓扑空间 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_r$，其中的点对应于蛋糕的切割以及将区块分配给 r 个盘子的方式。对于合作无嫉妒分割问题，这个空间称为自然构形空间，或简称“构形空间”。

我们称之为“自然”，是为了强调它以最简洁的数学术语，记录了切割蛋糕并将各块分配（分派）到盘子上的所有可能情形（每个盘子至多一块）。

- 长度（瓦片数）为 k 的正规切割 x （简称切割）是一个序列
$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k = 1,$$
其中 $k \leq r$。每个正规切割将 I 划分为 k 条非退化线段 I_i（x）$= [x_{i-1}, x_i]$，这些线段称为区块，并按从左到右的递增顺序编号。（我们不排除“空切割”的可能性，即只有一块的情形，对应于 $k = 1$。）

- 对于固定的切割 x 及瓦片数 k，分配函数是一个单射函数
$$\alpha : [k] \to \Pi$$
其中 Π 是围坐在圆桌旁的“盘子”集合。例如，可以设想有 r 个盘子，编号为 1, ..., r，瓦片 $I_i = I_i$（x）放在盘子 α（i）中。注意，有些盘子可能是空的。单射性意味着将区块分配给盘子，并满足“每个盘子至多一个区块”的条件。

我们将构形空间 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_r$ 定义为由所有可能的配对组成的集合

$$(x, \alpha) = (\text{a proper cut, an allocation function}).$$

2.1. 构形空间 $\mathcal{C}$ 上的拓扑。$\mathcal{C}$ 上的拓扑有两种自然且等价的定义方式。

（A）（通过收敛序列定义的拓扑）

序列（x^n, α_n）$_{n=1}^{\infty}$ 收敛到（x, α）当且仅当：

(1) 正规切分 $x^n = (x_0^n, \ldots, x_{k_n}^n)$ 序列在豪斯多夫度量意义下收敛到正规切割 $x = (x_0, \ldots, x_k)$，参见附录（第 5.2 节）。根据“稳定性”（命题 5.1），这意味着对于每个 n，都存在一个子集 $\mathcal{T}_n = \{J_i^n\}_{i=1}^k \subseteq \mathcal{T}_{x^n}$（由 x^n 的“本质瓦片”构成），使得相应的

区间收敛 $J_i^n \longrightarrow I_i$ 到 $\mathcal{T}_x$ 中对应的区块，而 $\mathcal{T}_{x^n} \setminus \mathcal{T}_n$ 中所有其他块的长度在 $n \to +\infty$ 时趋于零。

(2) 在本质瓦片上的 α_n "稳定" $\mathcal{T}_n = \{J_i^n\}_{i=1}^k$，并与分配函数 α 的相应取值一致。更确切地说，存在 n_0，使得对于每个 $n \geqslant n_0$ 和每个 $i = 1, \ldots\ldots, k$

$$\alpha_n(i) =: \alpha_n(J_i^n) = \alpha(I_i) := \alpha(i)\,.$$

注意，在 (1) 中，"瓦片数"序列 $(k_n)_{n=1}^{+\infty}$ 不一定收敛（更不用说收敛到 k 了）。还要注意，在 (2) 中，分配函数 α_n 在非本质区块 $\mathcal{T}_{x^n} \setminus \mathcal{T}_n$ 上的取值与 $(x^n, \alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 (x, α) 毫无关系。

(B)（通过邻域描述拓扑）

给定一个正规切割和一个分配函数 (x, α)，我们来描述构形空间 $\mathcal{C}_r$ 中该点的一个邻域 $O_\varepsilon(x, \alpha)$。令 ε 远小于最小块的长度。

那么 $(y, \beta) \in O_\varepsilon(x, \alpha)$ 当且仅当

(1) x 与 y 之间的豪斯多夫距离小于 ε；(2) 如果 $J \in \mathcal{T}_y$，使得存在一个（必然唯一的）块 $I \in \mathcal{T}_x$，且 $I \cap J$ 的长度远大于 ϵ，那么 $\beta(J) = \alpha(I)$。

2.2. 对 $\mathcal{C}_r$ 的群作用。从这里开始，我们假设一个群 G（作为置换群）在盘子集合 Π 上（从左侧）作用。默认情况下，这个作用是自由且传递的。这会在构形空间 $\mathcal{C}_r$ 上诱导出一个自由作用，其中 $(x, \alpha) \in \mathcal{C}_r$，

$$\sigma(x, \alpha) := (x, \sigma \circ \alpha)\,.$$

此时我们通常假设 $\Pi = [r] = \{1, \ldots, r\}$，其中 $r = p^\nu$ 是一个素数幂，且 $G = (\mathbb{Z}_p)^\nu$ 是一个 p- 环面群。特别地，对于第一个巧克力示例，$G = \mathbb{Z}_p$ 是循环群，它循环置换圆桌上的盘子。

2.3. 偏好。自然构形空间 $\mathcal{C}_r$ 是合作偏好 A_i^j 的环境空间，其中 $j \in [r]$ 是玩家的标签，$i \in \Pi$ 是盘子的标签。（在具体应用中，通常 $\Pi = [r] = [p^\nu]$。）

定义 2.1. r 个参与者的偏好是一个由配置空间 $\mathcal{C}_r$的子集 $(A_i^j)_{i\in\Pi}^{j\in[r]}$ 构成的集合（矩阵），这些子集按 $(i,\ j) \in \Pi \times [r]$索引。对子集的解释如下：

$$f = (x, \alpha) \in A_i^j \quad \Leftrightarrow \text{ in the cut } x \text{ and the allocation } \alpha \text{ the player } j \text{ prefers } \alpha^{-1}(i), \text{ the content of the plate } i \in \Pi\,. \tag{1}$$

定义 2.2. 默认情况下，所有偏好都是闭的、覆盖的且等变的。

(a) 如果 A_i^j 是 $\mathcal{C}_r$ 的闭子集，则这些偏好是闭的。(b) 如果 $\bigcup_{i\in\Pi} A_i^j = \mathcal{C}_r$ 对每个 $j \in [r]$ 都成立，则这些偏好具有覆盖性质。

(c) 如果对每个 $\sigma \in G$，这些偏好都是等变的，

$$(x, \alpha) \in A_i^j \Leftrightarrow \sigma(x, \alpha) \in A_{\sigma(i)}^j . \tag{2}$$

让我们仔细看看条件 (2)。根据 (1)，$(x, \sigma \circ \alpha) \in A_{\sigma(i)}^j$ 当且仅当在切割 x 和分配 $\sigma \circ \alpha$ 中，玩家 j 更偏好盒子 $\sigma(i)$里的内容。由于 $(\sigma \circ \alpha)^{-1}(\sigma(i)) = \alpha^{-1}(i)$，条件 (2) 表达了相对于群作用的 “ 偏好不变性 ” 这一思想。简而言之，参与者依据整个分配函数的“内在结构”作出决定，而等变条件保证这一内在结构在群作用下保持不变。

示例 2.3。在引言中回顾的“巧克力示例”里，集合 Π 被解释为分布在圆桌周围的一组盘子。偏好相对于群 G在 Π 上的循环作用保持不变，这具有明确的几何意义，阐明了在此情形下分配函数的“内在结构”指的是什么。更一般的解释会涉及一个抽象的“桌子” Π ，其上带有一个与之关联的、在 Π上的 G-不变图（超图），用来编码参与者之间可能的合作模式。

下面的定义用偏好矩阵的语言，形式化地阐明合作无嫉妒分割的确切含义。

定义 2.4. 设 $(A_i^j)_{i\in\Pi}^{j\in[r]}$ 为一个偏好矩阵。点 $(x, \alpha) \in \mathcal{C}$为偏好 $(A_i^j)_{i\in\Pi}^{j\in[r]}$ 提供一个合作无嫉妒分割，如果存在一个双射 $\sigma : [r] \to \Pi$ ，使得

$$(x, \alpha) \in \bigcap_{j=1}^{r} A_{\sigma(j)}^j . \tag{3}$$

3. Statements of the main results

我们的主要结果如下，称为“合作无嫉妒分割定理”。

定理 3.1. 假设 $r = p^\nu$ 是一个素数幂。设 $G = (\mathbb{Z}_p)^\nu$ 为一个p-环面群，它通过自由且传递的作用作用于“盘子”集合 $\Pi \cong [r]$ 。设 $(A_i^j)_{i\in\Pi}^{j\in[r]}$ 为自然构形空间$\mathcal{C}_r$的一个子集矩阵，用以定义参与者的偏好。假设这些偏好按照定义 2.2 的意义是闭的、覆盖的且等变的。那么存在一个满足所有参与者偏好（定义 2.4）的蛋糕合作无嫉妒分割。

以下两个定理将定理 3.1 推广到这样的情形：其中一名参与者（称为龙）是贪婪且非合作的，这使得无嫉妒分割更加困难。

有两种基本情形。第一种情形是，蛋糕被分成至多 r 块，并放在 r 个盘子里分配 Π （每个盘子至多一块），龙不顾其他参与者，拿走其中一个盘子。之后

应将剩余的盘子分给其他参与者，使他们之间不存在嫉妒（包括龙！）。

定理 3.2。（龙拿走一块蛋糕）设 r 是一个素数幂。设

$$(A_i^j)_{i\in\Pi}^{j\in[r-1]},\quad A_i^j \subseteq \mathcal{C}_r$$

是一个 $\Pi\times(r-1)$-偏好矩阵，且偏好是闭的、覆盖的并且等变的。那么可以为每个 $j\in[r-1]$ 选择两个不同的元素 u_j 和 v_j，它们属于 Π，使得

(a) 两元素集合 $e_j=\{u_j,v_j\}$ 构成的集合 $E=\{e_j\}_{j\in[r-1]}$ 是树 $T=(V,E)$ 在 $V=[r]$上的边集。
(b)

$$\bigcap_{v \text{ incident to } e} A_v^e = \bigcap_{j\in[r-1]} (A_{u_j}^j \cap A_{v_j}^j) \neq \emptyset\,. \tag{4}$$

在第二种情形中，有 $r+1$ 位参与者将蛋糕分成 r块。凶猛的龙来了，吞下了其中一位参与者。参与者想提前切割蛋糕，并将蛋糕块放在盘子里，使得无论哪位倒霉的参与者被龙吞下，剩下的参与者都能以无嫉妒方式分享这些蛋糕块。以下定理指出，在偏好满足与定理 3.1 相同的假设时，这总是可行的。

定理 3.3。（龙夺走一名玩家）设 r 是素数幂。令 t

$$(A_i^j)_{i\in\Pi}^{j\in[r+1]},\quad A_i^j \subseteq \mathcal{C}_r$$

为一个 $\Pi\times(r+1)$-偏好矩阵，且该矩阵是闭的、覆盖的并且等变的。

那么可以为每个 $i\in\Pi$ 选取 $[r+1]$ 中两个不同的元素 u_i 和 v_i，使得

(1) 由两个元素组成的集合 $e_i=\{u_i,v_i\}$ 所构成的集合 $E=\{e_i\}_{i\in\pi}$ 是一棵树 $T=(V,E)$ 的边集，其顶点为 $V=[r+1]$。
(2)

$$\bigcap_{v \text{ incident to } e} A_e^v = \bigcap_{i\in[r]} (A_i^{u_i} \cap A_i^{v_i}) \neq \emptyset\,. \tag{5}$$

4. Proofs via new configuration spaces, equivariant topology, chessboard complexes and the Birkhoff polytope

沿用 [13] 的主要思路（该思路最初源自 [8]），我们改变基本设定并调整叙述方式，允许出现更多切点；这些切点可以重合并形成退化瓦片。

更明确地说，将线段 $I=[0,1]$用 $n-1$个切点进行非正常切分，记作 $x=($ $0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_{n-1}\leqslant 1)$。区块 $I_i=I_i(x)=[x_{i-1},x_i]$从左到右自动标记为 $i\in[n]$。这一新意，

与第2节相比，在切割中的不等式不再是严格不等式，因此某些区块 I_i 可能会退化。

引入退化瓦片（尽管从切分真实蛋糕的角度来看并不自然）的好处是，所有非正规切分的构形空间都是标准的（$n-1$）维单纯形 Δ^{n-1}。

请回想，在更贴近现实的模型中，我们使用了由瓦片数至多为 r 的所有正规切分构成的空间 $I(r)$（第2节和第5.2节），其中不允许出现退化瓦片。然而，众所周知 $[1, 18]$ ，对称幂 $I(r)$的拓扑结构通常比单纯形的简单几何结构复杂得多，也更难以直观理解。

这一观察促使我们在第2节引入的自然构形空间 $\mathcal{C}_r$的定义中，以非正规切分取代正规切分，希望新的“辅助构形空间” $\mathcal{C}'_r$ 更简单、更易处理。

4.1 辅助构形空间 $\mathcal{C}'_r$。

定义4.1. 给定将线段切分为 n 个区块 $\{I_i(x)\}_{i=1}^n$的非正规切分 $x=($
$0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_{n-1} \leqslant 1)$，将这些区块分配到一组 Π盘子的分配函数是一个“本质单射”映射

$$\alpha : [n] \to \Pi\,.$$

α 的本质单射性意味着，分配给同一个盘子的非退化区块至多有一个。特别地，如果 $n > r := |\Pi|$，并非每种切割都允许存在分配函数。

有序对 (x, α) 称为“蛋糕” $[0, 1]$ 的一个（非正常）划分/分配。若两个有序对 (x, α) 和 (x, α') 具有相同的非正常切分 x，且它们的差异仅在于退化瓦片的分配，则称它们等价。对于相应的等价类，我们记作 $[(x, \alpha)]$。

注4.2. 定义的最后一部分将“所有退化瓦片都具有‘零值’”这一性质形式化（在配置空间层面上）。

例4.3. 设 $n = 6$ ，并假设切点（允许重复）为 $(1/4, 1/3, 1/3, 2/3, 2/3)$。总共有六块 $\{I_i\}_{i=1}^6$ ，其中两块，即 I_3 和 I_5，是退化的。设 $\Pi = \{\Pi_i\}_{i=1}^6$ 是一个包含六个盘子的集合。

那么，以下三种分配等价：$\Pi_1 = \{1\}, \Pi_2 = \{6\}, \Pi_3 = \{5\}, \Pi_4 = \{4\},$
$\Pi_5 = \{3\}, \Pi_6 = \{2\}\Pi_1 = \{1\}, \Pi_2 = \{6\}, \Pi_3 = \{3\}, \Pi_4 = \{4\}, \Pi_5 = \{5\},$
$\Pi_6 = \{2\}\Pi_1 = \{1, 3, 5\}, \Pi_2 = \{6\}, \Pi_3 = \emptyset, \Pi_4 = \{4\}, \Pi_5 = \emptyset, \Pi_6 = \{2\}$。

可以这样理解：对于等价类 $[(x, \alpha)]$ ，只有非退化的区块会被分配，而退化的区块则会被忽略（并放入“垃圾箱”）。因此，上述划分/分配的等价类记录为

$$\Pi_1 = \{1\}, \Pi_2 = \{6\}, \Pi_3 = \emptyset, \Pi_4 = \{4\}, \Pi_5 = \emptyset, \Pi_6 = \{2\}.$$

定义 4.4。假设盘子集合为 $\Pi = \{\Pi_i\}_{i=1}^r \cong [r]$，并选择$n = 2r-1$。将辅助构形空间 $\mathcal{C}' = \mathcal{C}'_r = \{[(x,\alpha)]\}$ 定义为所有划分/分配（的等价类）(x,α)构成的集合，其中 $x \in \Delta^{n-1}$ 是 $[0,1]$ 的非正规划分（切割），而 α 是相应的分配函数：$[n] \to \Pi$。

$\mathcal{C}'_r$ 根据定义 4.4，它只是一个集合。然而，不难看出它具有自然拓扑。事实上，对于固定的分配函数α：$[n] \to [r]$ 所有满足 $\beta = \alpha$ 的等价类 $[(x,\beta)] \in \mathcal{C}'_r$ 所组成的集合 $\Delta_\alpha \subset \mathcal{C}'_r$，自然同构于单纯形 Δ^{n-1}。

因此，$\mathcal{C}'_r = \cup_\alpha \Delta_\alpha$ 只是这些单纯形粘合在一起形成的并集。为了更清楚地观察这种粘合，我们将划分/分配 (x,α) 与一个实数项的 $(r \times n)$-矩阵 $M_{(x,\alpha)}$ 相关联

$$M_{(x,\alpha)} = (x_1 - x_0)E_{1,\alpha(1)} + (x_2 - x_1)E_{2,\alpha(2)} + \cdots + (x_n - x_{n-1})E_{n,\alpha(n)} \tag{6}$$

其中 $E_{i,\ j}$ 是一个 $(r \times n)$ 矩阵，除位置 (i,j) 上的对应元素为 1 外，其余位置的元素均为零。

不难看出，$M_{(x,\alpha)}$ 仅取决于 (x,α) 的等价类，并且 $M_{(x,\alpha)} = M_{(y,\beta)}$ 当且仅当 $y = x$ 且 (x,α) 与 (x,β) 等价时成立。

由表示 (6) 的忠实性可知，$\mathcal{C}'_r$ 同胚于一个单纯复形（的几何实现），该复形分片线性地嵌入由所有 $(r \times n)$ 矩阵组成的线性空间 $Mat^{\mathbb{R}}_{r\times n}$ 中。事实证明，这个单纯复形是拓扑组合学中一个研究颇多的对象，称为“棋盘复形” [3, 22], ；简要概述另见第 5.4 节。

以下命题在棋盘复形理论中具有根本重要性。

命题 4.5。构形空间 $\mathcal{C}'_r$ 与棋盘复形 $\Delta_{r,2r-1}$ 的几何实现同构。

证明。事实上，棋盘复形 $\Delta_{r,n}$ 描述为一个 $(r \times n)$ 棋盘上所有互不攻击的车配置构成的复形。每个分配函数 $\alpha: [n] \to [r]$ 的图$\Gamma(\alpha) \subset [n] \times [r]$ 描述了这样一种车配置。反过来，$\Delta_{r,n}$ 中的每个极大单纯形（车的排列）都唯一地由这样一个分配函数确定。□

置换群 G 在盘子集合 $\Pi \cong [r]$ 上作用，并在自然构形空间 $\mathcal{C}_r$ 上作用。辅助构形空间 $\mathcal{C}'_r$ 上也存在类似的作用，其中对于每个 $\sigma \in G$，$\sigma(x,\alpha) = (x, \sigma \circ \alpha)$。从复形 $\Delta_{r,2r-1}$ 的角度来看，这一作用源于对棋盘 $[r] \times [n]$ 的行进行置换。

引入辅助构形空间 $\mathcal{C}'_r \cong \Delta_{r,\ 2r-1}$ 是为了在技术层面模拟自然构形空间 $\mathcal{C}_r$。出于同样的原因

我们引入特殊集合（“幽灵偏好”） $B_i^j \subseteq \mathcal{C}_r'$，以模拟实际偏好 $A_i^j \subseteq \mathcal{C}_r$的作用；这些集合是 $\mathcal{C}_r'$ 的任意子集，并且按照定义 2.2 的含义是闭的、覆盖的且等变的。

引入辅助构形空间$\mathcal{C}_r'$ 的最终依据是以下结果，该结果最初证明于 [13]。

定理 4.6. 设 $r = p^\nu$ 为素数幂。设

$$(B_i^j)_{i,j=1}^r, \quad B_i^j \subseteq \mathcal{C}_r'$$

是一个由闭覆盖集组成的矩阵，且关于群 $G = (\mathbb{Z}_p)^\nu$等变。那么存在一个双射 $\sigma : [r] \to [r] \cong \Pi$，使得

$$\bigcap_{j\in[r]} B_{\sigma(j)}^j \neq \emptyset\,. \tag{7}$$

证明。尽管 [13] 中给出了详细证明，为求完整起见，我们仍重述其中一些关键步骤。此外，细心的读者会发现（在证明末尾）辅助构形空间 $\mathcal{C}_r' \cong \Delta_{r,\ 2r-1}$ 究竟在哪一处发挥了重要作用。

反设交集 (7) 为空。构造一个（等变）测试映射 $F\colon \mathcal{C}' \to \mathbb{R}^r$，以记录偏好 B_i^j 所提供的信息。

首先，我们将集合族 B_i^j 替换为稍大的开集族 O_i^j，并为每个 $j \in [r]$ 选取一个从属于覆盖 $\{O_i^j\}_{i=1}^r$ 的等变单位分解$\{f_i^j\}_{i=1}^r$。由于偏好是等变的——

的，我们可以使这些函数也具有等变性：

$$f_{\sigma(i)}^j(\sigma(x,\alpha)) = f_i^j(x,\alpha)\,. \tag{8}$$

By 对 $F_i = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^r f_i^j$ 取平均后，我们得到一个取值于向量空间的 S_r-等变函数n

$$F = (F_1, F_2, \ldots, F_r) : \mathcal{C}' \to \mathbb{R}^r.$$

^设 $F\colon \mathcal{C}' \to \mathbb{R}^r/D$ 为将映射F与投影 $\mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r/D$复合后得到的（等变）映射，其中 $D = \{(y,\ldots,y)\}_{y\in\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^r$ 是 $\mathbb{R}^r$ 的对角子集。此映射必有一个零点。

事实上，若不然，就会产生一个等变映射 $\mathcal{C}' \to S^{r-2}$；鉴于棋盘复形 $\Delta_{r,\ 2r-1}$ 是 $(r-2)$-连通的，这与 Volovikov 定理 [19]，相矛盾。

通过应用 D. Gale 的原始思想，并利用双随机矩阵的 Birkhoff 多面体的顶点是置换矩阵这一事实，证明即告完成。□

4.2. 定理 3.1 的证明。存在一个自然映射

$$\pi : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$$

定义如下。将一个切割与其非退化瓦片的分配结合起来，会诱导出一个具有相同分配函数的正规切割（通过舍弃退化瓦片）。

引理 4.7。映射 π 定义良好。此外，它是一个非单射的满态射，并且既连续又等变。

证明相当直接，例如，连续性可通过检验以下性质得出：对于每个在 $\mathcal{C}'$ 中收敛到 $z_n \to z$ 的序列 $z_n \to z$，序列 $\pi(z_n)$ 在第 2.1 节所述的意义下收敛到 $\pi(z)$。

假设该引理成立，定理 3.1 的证明可如下完成。给定偏好矩阵（A_i^j），其中 $A_i^j \subseteq \mathcal{C}$，令 $B_i^j = (\pi)^{-1}(A_i^j)$ 表示辅助构形空间 $\mathcal{C}'$ 的相应子集族。

根据定理 4.6，存在一个针对 (B_i^j) 的无嫉妒分割，即一个双射$\sigma : [r] \to \Pi$ 以及一个元素

$$(x, \alpha) \in \bigcap_{j \in [r]} B^j_{\sigma(j)} .$$

像 $\pi((x, \alpha)) \in \mathcal{C}$ 显然是针对 (A_i^j) 的一个无嫉妒分割。 □

鉴于 [14]，龙版本的证明是例行的。

5. Appendix: Spaces of finite sets

5.1. 豪斯多夫度量。豪斯多夫度量 $d_H(A, B)$ 用于衡量度量空间 (X, d) 中两个（非空）闭集 A 和 B 之间的距离。如果 $A = \{a\}$ 是一个点，则（根据定义）

$$d_H(a, A) := d_H(\{a\}, A) := \inf_{x \in A}\{d(a, x)\}$$

由对称性可得，$d_H(A, a) = d_H(a, A)$。一般而言，

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(A, b)\} .$$

如果 A 和 B 是 X 的有限（更一般地说，紧的）子集，那么在这些公式中，我们可以用 max 代替 sup，用 min 代替 inf。

如果 (X, d) 是区间 $[0, 1]$，且采用通常距离函数 $d(a, b) = |a - b|$，那么 $d_H(a, B)$（分别地，$d_H(A, b)$）表示 a 到其在 B 中最近的左邻或右邻的距离（同理，b 在 A 中的最近邻），而 $d_H(A, B)$ 则是所有这些距离中的最大值。

另一种定义将豪斯多夫距离 $d_H(A, B)$（对于紧致的 A 和 B）描述为满足以下条件的最小 $\epsilon \geqslant 0$： $B \subseteq O_\epsilon(A)$ 和 $A \subseteq O_\epsilon(B)$，其中 $O_\epsilon(A) = \{x \in X \mid (\exists a \in A)\ d(x, a) \leqslant \epsilon\}$ 是 X 中 A 的闭 ϵ-邻域。

5.2. 对称幂。度量空间 X [1,18], 的 n^{th} 对称幂记作 $[X]^{\leqslant n}$，是由 X 中基数不超过 n 的所有非空子集构成的空间。我们假设 $[X]^{\leqslant n}$ 配备了豪斯多夫度量。下面这个与之密切相关的空间

$$I(r) := \{A \subset [0,1] \mid \{0,1\} \subseteq A \text{ and } |A| \leq r+1\},$$

其中 $I = [0,1]$ 和 $r \geq 1$也称为（阶数为r的）对称幂。

$I(r)$中的元素也可以描述为严格递增序列

$$x: \quad 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = 1 \tag{9}$$

其长度（瓦片数）为 k，其中 $1 \leq k \leq r$。这样的序列通常称为瓦片数为 k的正规切割，其中 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_x = \{I_j(x)\}_{j=1}^k$ 是关联的 x-块集合， $I_j(x) := (x_{j-1}, x_j)$。

下面的初等命题记录了切割的豪斯多夫收敛的一项重要性质（供后文参考），这项性质称为相应区块集合的“稳定性”。

命题 5.1. 设 $x^n = (x_i^n)_{i=0}^{k_n}$是一列正规切割（$n = 1, 2, \ldots$），其关联的瓦片数序列为 (k_n)，区块集合为 $(\mathcal{T}_{x^n})$。假设 $x^n \longrightarrow x$ 在豪斯多夫拓扑下收敛到切割 $x = (x_i)_{i=0}^k$，其瓦片数为 k，区块集合为 $\mathcal{T}_x = \{I_i(x)\}_{i=1}^k$。那么 $\mathcal{T}_{x^n}$ 本质上收敛到 $\mathcal{T}_x$

$$\mathcal{T}_{x^n} \xrightarrow{ess} \mathcal{T}_x$$

按以下意义理解。对于每个 n，都存在一个子集 $\mathcal{T}_n = \{J_i^n\}_{i=1}^k \subseteq \mathcal{T}_{x^n}$（由“本质瓦片”组成），使得相应的区间序列收敛$J_i^n \longrightarrow I_i(x)$到 $\mathcal{T}_x$ 中对应的瓦片。因此，当 $n \to +\infty$ 时，来自 $\mathcal{T}_{x^n} \setminus \mathcal{T}_n$ 的所有其他瓦片的长度都趋于零。

5.3. 拓扑构形空间 $\mathcal{C}_r$。

5.4. 棋盘复形。棋盘复形 $\Delta_{m,\,n}$ 是定义在一个 $m \times n$ 含有 m 行和 n 列的棋盘上的抽象单纯复形。更准确地说，$\Delta_{m,\,n}$ 的顶点是棋盘上的方格，而 $\Delta_{m,\,n}$ 的（$k-1$）维面是所有由 k 个互不攻击（不相互攻击）的车构成的布局，也就是说，不允许两辆车位于同一行或同一列。

棋盘复形出现在数学的不同领域，并有多种形式（例如，作为对称群的陪集复形、完全二分图中的匹配复形、所有单射函数构成的复形等）。它的拓扑性质（高度连通性和可定向伪流形的结构）在证明拓扑组合学和离散几何中的一些深刻结果（彩色 Tverberg 定理）时发挥了根本性作用，综述请见 [22]。

命题 5.2. ([3, 22, 23]) 棋盘复形 $\Delta_{m,\ n}$ 是一个 $(m-2)$-连通的、$(m-1)$ 维单纯复形，其中 $n \geq 2m-1$。

ˇ 致谢。R. Zivaljevi´c 获塞尔维亚共和国科学基金资助，资助项目编号为 7744592，项目名称为《力学、几何与组合学中的可积性和极值问题》（MEGIC）。第 2 节和第 4 节由俄罗斯科学基金会通过项目编号 21-11-00040 资助。

References

[1] R.N. Anderson, M.M. Marjanovi´c, R.M. Schori. 对称积与高维“笨拙帽”。Topology Proceedings, 18, 1993, 7–17。[2] S. Avvakumov, R. Karasev. 利用映射度进行无嫉妒分割。Mathematika, Vol. 67, Issue 1, 36–53 (2021)。[3] Bj¨orner, Anders, L´aszl´o Lov´asz, Siniˇsa T. Vre´cica, and Rade T. ˇZivaljevi´c. 棋盘复形与匹配复形。J. London Math. Soc. (2), 49:25–39, 1994。[4] D. Gale. 货币参与的离散交换经济中的均衡。International Journal of Game Theory, 13(1):61–64, 1984。[5] F. Frick, K. Houston-Edwards, F. Meunier. 与秘密室友实现租房和谐。《美国数学月刊》126(1)。[6] M.D. Hirsch, M. Magill and A. Mas-Colell. 一类均衡存在定理的几何方法，J. Math. Econom., vol. 19, 1990, 95–106。[7] S.Y. Husseini, J.-M. Lasry, M.J.P. Magill. 不完全市场中均衡的存在性，J. Math. Econom., vol. 19, 1990, 39–67。[8]D. Joji´c, G. Panina, R.T. ˇZivaljevi´c. 带约束的项链分割。arXiv:1907.09740v4 [math.CO[9] D. Joji´c, G. Panina, R.T. ˇZivaljevi´c. 素数幂情形下的最优彩色 Tverberg 定理，arXiv:2005.11913 [math.MG[10] D.N. Kozlov. 扰乱单纯形的拓扑。Journal of Homotopy and Related Structures. (2019) 14:371–391。[11] J. Matouˇsek. Borsuk-Ulam 定理的应用。《组合学与几何中的拓扑方法讲义》。Universitext, Springer-Verlag, Heidelberg, 2003（2008 年修订后的第二次印刷）。[12] F. Meunier, S. Zerbib. 无须假定参与者偏好非空份额的蛋糕无嫉妒分割。Israel J. Math.（即将出版），2019。arXiv:1804.00449v2。[13] G. Panina, R. T. ˇZivaljevi´c. 通过构形空间实现无嫉妒分割。Topol. Methods Nonlinear Anal. (2022)。[14] G. Panina, R. ˇZivaljevi´c. 有龙在场时的无嫉妒分割。J. Fixed Point Theory Appl. 24, 81 (2022)。https://doi.org/10.1007/s11784-022-00997-y[15] E. Segal-Halevi. 烤箱烧掉部分蛋糕后如何公平分割蛋糕。第17届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集（AAMAS 2018），1276–1284，2018。[16]P. Sober´on. 参与者多于分配份额时的公平分配。arXiv:2110.03600[17] W. Stromquist. 如何公平地切分蛋糕。《美国数学月刊》，87(8):640–644, 1980。[18] S. Todorˇcevi´c.《拓扑学专题》，《数学讲义》1652，Springer-Verlag Berlin Heidelberg，1997。

[19] A.Y. Volovikov. Tverberg 定理的一个拓扑推广。《数学札记》, 59:324–32, 1996。[20] S. Vre´cica, R. ˇZivaljevi´c. 不可征服的棋盘复形。Journal of Combinatorial Theory, Series A 118 (2011) 2157–2166。[21] D.R. Woodall. 公平地分割蛋糕。Journal of Mathematical Analysis and Applications, 78(1):233–247, 1980。[22] R.T. ˇZivaljevi´c. 离散几何中的拓扑方法，载于《离散与计算几何手册》第21章（第三版）, CRC出版社有限责任公司, (2017) 551–580。J.E. Goodman, J. O'Rourke, and C. D. T´oth（编）。[23] R.T. ˇZivaljevi´c and S.T. Vre´cica. 彩色 Tverberg 问题与单射函数复形。J. Combin. Theory Ser. A 61 (1992), 309–318。

(D. Joji´c) Faculty of Science, University of Banja Luka

（G. PANINA） St. Petersburg State University; St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute

（R. ˇZivaljevi´c） Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts (SASA), Belgrade