arXiv:2302.02719v3 [math.CV] 2 Apr 2023

关于某些区域中映射在边界处的 H¨older 对数连续性

OLEKSANDR DOVHOPIATYI, EVGENY SEVOST'YANOV

2023年4月4日

摘要

我们研究满足路径族模畸变某种估计的映射。在对定义域和映射后的区域作出某些条件假设后，我们证明了这些映射在边界点处具有对数 H¨older 连续性。

2010年数学主题分类：主要分类 30C65；次要分类 31A15、31B25

1 引言

本文致力于研究所谓的逆泊列茨基不等式，该不等式已在许多类映射中得到确立（例如，见 [4, 定理 3.2], [2, 定理 6.7.II] 和 [3, 定理 8.5]）。回顾一下，具有有界畸变的映射以及拟共形映射都满足以下不等式

$$M(\Gamma) \leqslant N(f, D)K_O(f)M(f(\Gamma)) \tag{1.1}$$

对于任意路径族 Γ in D，其中 M 表示路径族模，$1 \leqslant K_O(f) < \infty$ 且 $N(f, D)$ 是 f 在 D 中的最大重数（见 [4]）。对于更一般的映射类，这种不等式具有更一般的形式（见下文）。请注意，不等式 $M(f(\Gamma)) \leqslant K \cdot M(\Gamma)$ $1 \leqslant K < \infty$ 与 (1.1) 非常相似，且 Poletsky 已在其关于拟正则映射的 [1, 定理 1, § 4] 中证明了该不等式。正因如此，我们将满足逆泊列茨基不等式 (1.1) 的映射称为满足逆泊列茨基不等式的映射。不过，我们将把这一说法用于更广泛类别中的映射。

若对路径族 Γ 中的任意路径 γ，在 $\mathbb{R}^n$ 中的博雷尔函数 $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ 满足关系式，则称其为可容许的。

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\,|dx| \geqslant 1 \tag{1.2}$$

该关系式对任意局部可求长曲线 $\gamma \in \Gamma$. 均成立。 Γ 的模定义如下:

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)\, dm(x)\,. \tag{1.3}$$

设 $Q\colon\ \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ 是一个勒贝格可测函数。如果 f 满足逆泊列茨基不等式，则称其满足关系式

$$M(\Gamma) \leqslant \int_{f(D)} Q(y)\cdot \rho_*^n(y)\, dm(y) \tag{1.4}$$

对 D 中的任意路径族 Γ 以及任意 $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$，该关系式均成立。注意到，估计式 (1.4) 在许多类的映射中成立（参见例如 [4, 定理 3.2], [2, 定理 6.7.II]和 [3,定理 8.5]）。

最近，我们证明了式 (1.4) 中的映射在单位球边界处具有对数 H¨older 连续性（见 [5]）。本文研究另一类区域之间的类似映射。特别地，我们讨论所谓的拟极值距离域与凸域之间的映射。注意，拟极值距离域（简称QED-域）由 Gehring 和 Martio 在 [6] 中引入，是一类结构，在其中路径族的模与集合的直径具有度量上的联系。至于作用于这些域之间的映射，我们在此获得了相应边界点处的对数 H¨older 连续性。在本文接下来的部分中，我们还研究具有局部拟共形边界（带 collar 的域）的区域到凸区域上的映射。此外，我们还考虑了一些正则区域之间的映射；这些正则区域被定义为具有局部拟共形边界的域的拟共形像。对于这些映射类，我们同样证明了相应边界点处的 H¨older 对数连续性。应当指出，对于正则区域的情形，这一性质是用素端而非欧几里得意义来表述的。

映射 $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ 若对任意$y \in \mathbb{R}^n$， $\{f^{-1}(y)\}$ 由孤立点构成，则称为离散的；若任意开集 $U \subset D$ 在 $\mathbb{R}^n$. 中的像都是开集，则称为开映射，。若映射f定义在区域 D与 D' 之间，且对任意闭集$E \subset D$， $f(E)$在 D'中是闭集，则称其为闭映射 （例如参见 [7, 第 3] 节）。

根据 [6], ，若区域 D 在 $\mathbb{R}^n$ 中满足

$$M(\Gamma(E,F,\mathbb{R}^n)) \leqslant A\cdot M(\Gamma(E,F,D)) \tag{1.5}$$

对某个有限数 $A \geqslant 1$ 以及 D中的所有连续统 E 和 F 均成立。注意，半空间或球都是拟极值距离域，见 [8,引理 4.3]。

随后，在扩充欧几里得空间 $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ 中，我们使用球面（弦）度量 $h(x,y) = |\pi(x) - \pi(y)|$，其中 π 是将 $\overline{\mathbb{R}^n}$ 立体投影到球面上的映射

$S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, 12)$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中，并且

$$h(x,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}},$$

$$h(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y \tag{1.6}$$

（例如，参见 [9, 定义 12.1]）。下文中，给定 $A,B \subset \overline{\mathbb{R}^n}$，我们令

$$h(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B} h(x,y), \quad h(A) = \sup_{x,y\in A} h(x,y),$$

其中， h 是式 (1.6) 中的弦度量。同样，我们用以下公式定义集合之间的欧几里得距离和欧几里得直径

$$d(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B} |x-y|, \quad d(A) = \sup_{x,y\in A} |x-y|.$$

有时我们也将 dist (A, B) 写作 $d(A, B)$，并将 diam E 写作 $d(E)$。通常，我们令

$$B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| < r\}, \qquad \mathbb{B}^n = B(0,1),$$

$$S(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| = r\}.$$

给定 $\delta > 0$、域 $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$、非退化连续统 $A \subset D'$ 以及勒贝格可测函数 $Q\colon D' \to [0,\infty]$，我们用 $\mathfrak{S}_{\delta,\ A,\ Q}(D, D')$ 表示所有从 D 到 D' 的开离散闭映射 f 所组成的族，这些映射满足关系 (1.4)，且 $h(f^{-1}(A)\ \partial D) \geqslant \delta.$。下面的结论成立。

定理 1.1. 设 $Q \in L^1(D')$， D 是一个准极值距离域，且 D' 是一个有界凸域。那么，任意 $f \in \mathfrak{S}_{\delta,\ A,\ Q}(D, D')$ 都有连续延拓 $f : \overline{D} \to \overline{D'}$；此外，对于任意 $x_0 \in \partial D$，存在其邻域 U 以及常数 $C_n = C(n, A, D, D') > 0$ 和 $r_0 = r_0(x_0) > 0$，使得

$$|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)| \leqslant \frac{C_n \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1+\frac{r_0}{|x-y|}\right)} \tag{1.7}$$

对于任意 $x,y \in U \cap \overline{D}$，其中 $\|Q\|_1$ 是函数 Q 在 $L^1(D)$ 中的范数。

考虑 N¨akki 提出的如下定义 [13], 参见 [14]。区域 D 的边界称为局部拟共形，如果每个点 $x_0 \in \partial D$ 都有一个邻域 U，使得存在一个拟共形映射 φ，将 U 映到单位球 $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ 上，并且$\varphi(\partial D \cap U)$ 是单位球面 $\mathbb{B}^n$ 与坐标超平面 $x_n = 0$的交，其中 $x = (x_1, \ldots, x_n)$。请注意，定义略有不同，但具有此类边界的域也称为带 collar 的域。

定理 1.2。设 $Q \in L^1(D')$，设 D 是一个具有局部拟共形边界的区域，且 D'是一个有界凸区域。那么任意 $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D,D')$ 都有连续延拓 $f: \overline{D} \to \overline{D'}$；而对于任意 $x_0 \in \partial D$，存在 x_0 的一个邻域 V以及一些数 $C_n = C(n,A,D,D',x_0) > 0$, $r_0 = r_0(n,A,x_0,D) > 0$和 $0 < \alpha = \alpha(x_0) \geqslant 1$，使得

$$|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)| \leqslant \frac{C_n \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1 + \frac{r_0}{|x-y|^\alpha}\right)} \tag{1.8}$$

对于任意 $x, y \in V \cap \overline{D}$，其中 $\|Q\|_1$ 是 $L^1(D)$ 中 Q 的范数。

利用前一个定理的结果，还可以通过素端的方式，得到关于不良边界上 H¨older 对数连续性的一个结论。

下文所用的素端定义见 [15], ，参见 [14]。如果有界区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 能够拟共形地映射到一个具有局部拟共形边界、且其闭包在 $\mathbb{R}^n$ 中为紧集的区域，并且 D 中的每个素端都是正则的，则称 D 为正则。注意，空间 $\overline{D}_P = D \cup E_D$ 是度量空间，这可如下证明。若 $g: D_0 \to D$ 是一个拟共形映射，将具有局部拟共形边界的区域 D_0 映射到某个区域 D 上，则对于 $x, y \in \overline{D}_P$，定义：

$$\rho(x,y) := |g^{-1}(x) - g^{-1}(y)|, \tag{1.9}$$

其中，元素 $g^{-1}(x)$ $x \in E_D$ 应理解为区域 D_0. 的某个（单一）边界点。所指定的边界点唯一且定义明确，参见例如 [16,定理 2.1，注 2.1], ；另见 [13, 定理 4.1]。

以下结论成立。

定理 1.3. 设 $Q \in L^1(D')$， D 是正则区域，且 D' 是有界凸区域。那么，任意 $f \in \mathfrak{S}_{\delta,\ A,\ Q}(D,D')$ 都存在连续延拓 $f: \overline{D}_P \to \overline{D'}$。此外，对于任意 $P_0 \in E_D$，存在该点在 $(\overline{D}_P, \rho)$ 中的一个邻域 V，以及数值$C_n = C(n,A,D,D',x_0) > 0$, $r_0 = r_0(n,A,x_0,D) > 0$ 和 $0 < \alpha = \alpha(x_0) \geqslant 1$，使得

$$|\overline{f}(P_1) - \overline{f}(P_2)| \leqslant \frac{C_n \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1 + \frac{r_0}{\rho^\alpha(P_1,P_2)}\right)} \tag{1.10}$$

对于任意 $P_1, P_2 \in V$，其中 $\|Q\|_1$ 是 $L^1(D)$中 Q 的范数。

2 辅助引理

在证明主要结论之前，我们先证明以下重要引理；对于单位球的情形，该引理已在 [5,引理 2.1] 中证明。

引理 2.1。设 D 和 D' 是满足定理 1.1 条件的域，且 E 是 D'中的一个连续统，$Q \in L^1(D')$。则存在 $\delta_1 > 0$ 使得 $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q} \subset \mathfrak{S}_{\delta_1,E,Q}$.

换言之，如果 f 是从 D 到 D' 的满足条件（1.4）的开离散闭映射，使得 $h(f^{-1}(A)\ \partial D) \geqslant \delta$，那么存在 $\delta_1 > 0$，其与 f 无关，使得 $h(f^{-1}(E)\ \partial D) \geqslant \delta_1$.

证明。我们通常采用引理 2.1]的证明思路 [5, 。反设引理 2.1 的结论不成立。那么，存在数列 $y_m \in E$, $f_m \subset \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ 和 $x_m \in D$，使得 $f_m(x_m) = y_m$ 且 $h(x_m, \partial D) \to 0$, 当 $m \to \infty$. 时。不失一般性，可设当 $m \to \infty$时，$x_m \to x_0$，其中x_0 在 D 无界时可以等于 ∞ 。由 [10], 中的定理 3.1 可知，f_m 可连续延拓至 x_0，而且，族 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ 在 x_0 处等度连续（例如参见[10, 定理 1.2]）。于是，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $m_0 \in \mathbb{N}$，使得当$m \geqslant m_0$. 时，$h(f_m(x_m)\ f_m(x_0)) < \varepsilon$ 。另一方面，由于 f_m 是闭的，$f_m(x_0) \in \partial D'$. 。由于空间 $\overline{\mathbb{R}^n}$及 $\partial D'$的闭包具有紧致性，我们可以假设当 $m \to \infty$. 时，$f_m(x_0)$ 收敛到某个 $B \in \partial D'$。因此，根据三角不等式，

$$h(f_m(x_m), f_m(x_0)) \geqslant h(f_m(x_m), B) - h(B, f_m(x_0)) \geqslant \frac{1}{2} \cdot h(E, \partial D')$$

当 $m \in \mathbb{N}$. 充分大时，最终得到矛盾：$h(f_m(x_m)\ f_m(x_0)) \geqslant \delta_0$,$\delta_0 := \frac{1}{2} \cdot h(E, \partial D')$，同时，$h(f_m(x_m)\ f_m(x_0)) < \varepsilon$ 当 $m \geqslant m_0$. 因此，所得矛盾否定了原先的假设。引理得证。 □

下述引理已在区域 D' 为单位球的情形下得到证明（见 [5] 中定理 1.1 的证明）。对于任意凸区域，其证明要困难得多，因为先前的方法在很大程度上依赖于球的几何性质。

引理 2.2。设 D' 是 $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ 中的一个有界凸区域，并设 $B(y_*, \delta_*/2)$ 是一个以点 $y_* \in D'$ 为中心的球，其中 $\delta_* := d(y_*, \partial D')$。设 $z_0 \in \partial D'$. 那么，对于任意点 $A, B \in B(z_0, \delta_*/8)$，$\cap D'$ 存在点 $C, D \in B(y_*, \delta_*/2)$，使得线段$[A, C]$ 和 $[B, D]$ 满足

$$\operatorname{dist}([A, C], [B, D]) \geqslant C_0 \cdot |A - C|, \tag{2.1}$$

其中，$C_0 > 0$ 是一个仅取决于 δ_* 和 d（D'）的常数。

证明。令

$$\varepsilon_0 := |A - B| < \delta_0 := \delta_*/4 .$$

用线段 I. 连接点 A 和 y_*。由于 D'的凸性，线段I 完全包含于 D'. 。点 A、y_* 和 B 构成平面 P（若 A、y_* 和 B 在同一直线上，则我们将由 A和 B构成的任意平面定义为 P）。考虑此平面上的圆

$$S = \{z \in P : |z - A| = \varepsilon_0\} .$$

点 $z = B$ 在圆 S 上的位置完全由角 φ,$\varphi \in [-\pi, \pi)$ 确定，该角位于向量 $y_* - A$ 与点 z. 的半径向量 $B - A$ 之间。圆上的点

进一步用极坐标表示圆上的点，即有序对 $z = (\varepsilon_0, \varphi)$。我们的进一步目标是研究该角变化区间的三种主要情形。

情形 1. "大角度"： $\varphi \in [\pi/4, 3\pi/4]$，或 $\varphi \in [-\pi/4, -3\pi/4]$，示意图见图 1。设 $C := y_*$. 我们只考虑情形 $\varphi \in [\pi/4, 3\pi/4]$ （一种情形

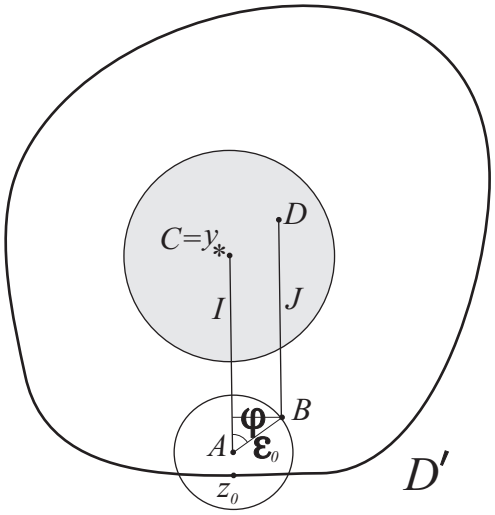


图 1：定理 **1** 的证明，情形 **1**

$\varphi \in [-\pi/4, -3\pi/4]$ （也可以类似地考虑）。考虑射线

$$r = r(t) = B + te\,, \quad e = (y_* - A)/|y_* - A|\,, \quad t > 0.$$

根据构造，射线 r 平行于线段 $I.$。当 $t = |y_* - A|$ 时，我们有 $r\,(|y_* - A|) = B + y_* - A$ 且 $|r\,(|y_* - A|) - y_*| = |B - A| = \varepsilon_0 < \delta_0$，也就是说，点 $r\,(|y_* - A|)$ 属于 $E.$。设 J 为射线 r 上的一条线段，它位于点 B 和 D 之间：$= r\,(|y_* - A|)$ （由于凸性，该线段完全包含于 D'）。 I 与 J 之间的距离计算如下：

$$\operatorname{dist}(I, J) = \varepsilon_0 \sin\varphi \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_0\,. \tag{2.2}$$

第一种情形的讨论已经完成，因为我们将 I 和 J 取为线段 $[A, C]$ 和 $[B, D]$；此外，我们在（2.1）中令 $C_0 := \frac{\sqrt{2}}{2}$。

情形 2. "小角"： $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4)$。考虑情形 $\varphi \in [0, \pi/4)$ （情形$\varphi \in [-\pi/4, 0)$ 也可以类似地讨论）。我们作一条经过点 y_* 的直线，该点属于平面 P，且该直线垂直于向量 $y_* - A$，见图 2。这条直线与圆 $B\,(y_*,\ \delta_*/2)$ 的边界恰有两个交点 $\cap P.$。我们将这两个点分别记为 x_{**} 和 $z_{**}.$。设 x_{**} 为一点，使向量 $y_* - \overline{A}$ 与 $x_{**} - A$ 所成的角为负。令

$$x_* = \frac{x_{**} + y_*}{2}\,, \qquad z_* = \frac{z_{**} + y_*}{2}\,.$$

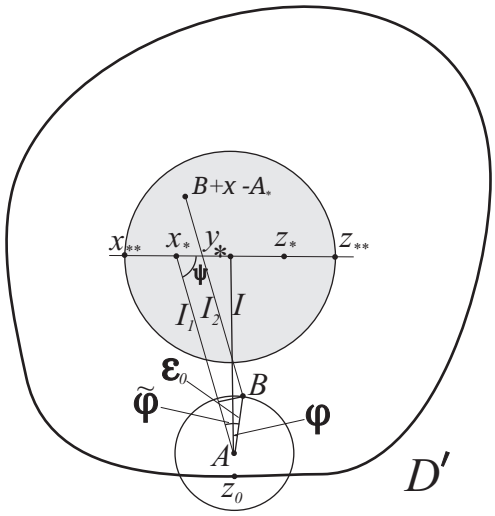


图 2：定理 1 的证明，情形 2

此外，令 ψ 表示角 $\angle Ax_*y_*$. 。于是

$$\tan\psi = \frac{|A-y_*|}{\frac{\delta_*}{4}} < \frac{4d(D')}{\delta_*}\,. \tag{2.3}$$

此外，

$$\tan\psi = \frac{|A-y_*|}{\frac{\delta_*}{4}} \geqslant \frac{\frac{\delta_*}{2}}{\frac{\delta_*}{4}} = 2\,,$$

从这里

$$\psi \geqslant \arctan 2 > \frac{\pi}{4}\,, \qquad \frac{\pi}{2} - \psi \leqslant \frac{\pi}{2} - \arctan 2 < \frac{\pi}{4}\,. \tag{2.4}$$

因此，角 $\angle y_*Ax_*$ 等于 $\frac{\pi}{2}-\psi$. 设

$$\widetilde{\varphi} := \varphi + \frac{\pi}{2} - \psi\,,$$

其中 ψ 如上所定义。由 (2.4)，由于 $\varphi \in [0, \pi/4)$,

$$0 < \widetilde{\varphi} \leqslant \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \arctan 2 = \frac{3\pi}{4} - \arctan 2 < \frac{\pi}{2}\,. \tag{2.5}$$

考虑射线 $r(t) = B + t\frac{x_*-A}{|x_*-A|}$, $t>0$. 若 $t = |x_*-A|$，则

$$r(|x_*-A|) = B + x_* - A\,.$$

注意， $r(|x_*-A|) \in B\left(\overline{y_*, \frac{\delta_*}{2}}\right)$. 事实上，由三角不等式,

$$|r(|x_*-A|) - y_*| =$$

$$= \left|B + x_* - A - y_*\right| \leqslant |x_*-y_*| + |B-A| \leqslant \frac{\delta_*}{4} + \frac{\delta_*}{4} = \frac{\delta_*}{2}\,. \tag{2.6}$$

现在令 I_1 为连接点 A 和 $C := x_*$的线段，并令 I_2 为连接点 B 和 $D := r(|x_*-A|) = B + x_* - A$. 根据构造及 (2.6),

$$I_1 \cap \overline{B\left(y_*, \frac{\delta_*}{2}\right)} \neq \varnothing \neq I_2 \cap \overline{B\left(y_*, \frac{\delta_*}{2}\right)}\,. \tag{2.7}$$

注意,

$$\operatorname{dist}(I_1, I_2) = \varepsilon_0 \sin\widetilde{\varphi}\,. \tag{2.8}$$

根据公式 (2.3) 和 (2.5)，我们得到

$$\tan\widetilde{\varphi} = \tan\left(\varphi + \frac{\pi}{2} - \psi\right) \geqslant$$

$$\geqslant \tan\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \cot\psi \geqslant \frac{\delta_*}{4d(D')}\,. \tag{2.9}$$

由 (2.9)，并结合 (2.5)，我们得到

$$\sin\widetilde{\varphi} = \tan\widetilde{\varphi}\cdot\cos\widetilde{\varphi} \geqslant \frac{\delta_*}{4d(D')}\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \arctan 2\right) > 0\,. \tag{2.10}$$

现在，由 (2.8) 和 (2.10)，我们得到

$$\operatorname{dist}(I_1, I_2) \geqslant \varepsilon_0\cdot\frac{\delta_*}{4d(D')}\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \arctan 2\right) > 0\,. \tag{2.11}$$

正如我们已经指出的，情形 $\varphi\in[-\pi/4, 0)$ 也可以类似地考虑，即证明的构造相对于连接点 A 和 y_*. 的线段具有相同的“对称性”。特别地，点 x_* 的作用将由点 z_* 承担；连接点 A 和 x_* 的线段的作用由连接点 A 和 z_* 的线段承担，等等。

不等式 (2.11) 完成了对情形 **2** 的讨论，因为我们可以在不等式 (2.1) 中令 $[A, C] := I_1$ 和 $[B, D] := I_2$，此外，令 $C_0 := \frac{\delta_*}{4d(D')}\cdot$ 余弦 $\left(\frac{3\pi}{4}\right.$ − 反正切 $\left.2\right)$。

情形 3. “非常大的角”：或 $\varphi\in(3\pi/4, \pi]$, 或 $\varphi\in(-\pi, -3\pi/4)$。此情形与情形 **2** 非常相似。只需考虑情形 $\varphi\in(3\pi/4, \pi]$，因为第二种情形 $\varphi\in(-\pi, -3\pi/4)$ 可用类似方法处理，且与第一种情形的区别仅在于关于经过点 A 和 y_*. 的直线的某种“对称性”。设点 z_* 和 z_{**} 与情形 **2**中的定义完全相同。考虑连接点 A 和 C 的线段 $J_1 := z_*$（由于其凸性，该线段完全包含在 D' 中）。考虑一条射线

$$l(t) = B + t\cdot\frac{z_* - A}{|z_* - A|}, \qquad t > 0\,. \tag{2.12}$$

对于 $t = |z_* - A|$，我们得到点 $D := l(|z_* - A|) = B + z_* - A$，见图 3。下面证明该点属于球 $B\left(y_*, \frac{\delta_*}{2}\right)$.。事实上，根据三角不等式

$$|l(|z_* - A|) - y_*| =$$

$$= \left|B + z_* - A - y_*\right| \leqslant |z_* - y_*| + |B - A| \leqslant \frac{\delta_*}{4} + \frac{\delta_*}{4} = \frac{\delta_*}{2}\,. \tag{2.13}$$

令 J_2 为连接点 B 和 D 的线段：$= B + z_* - A$. 根据构造及（2.13），

$$J_1\cap\overline{B\left(y_*, \frac{\delta_*}{2}\right)} \neq\varnothing\neq J_2\cap\overline{B\left(y_*, \frac{\delta_*}{2}\right)}\,. \tag{2.14}$$

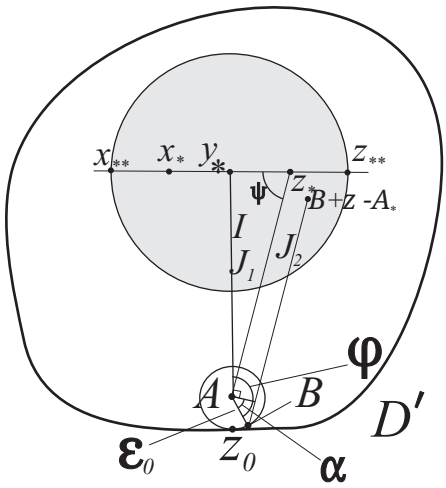


图 3：定理 1 的证明，情形 3

注意,

$$\operatorname{dist}(J_1, J_2) = \varepsilon_0 \cos\alpha\,, \tag{2.15}$$

其中

$$\alpha = \varphi - \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \varphi + \psi - \pi$$

且 $\psi = \angle y_* z_* A$. 现在我们需要求 $\cos\alpha$. 的下界

由三角形 $\triangle\, y_* z_* A$ 可得

$$1 \leqslant \tan\psi = \frac{|A - y_*|}{|y_* - z_*|} \leqslant \frac{d(D')}{\frac{\delta_*}{4}} = \frac{4d(D')}{\delta_*}\,,$$

由此 $\frac{\pi}{4} \leqslant \psi \leqslant$ 反正切 $\frac{4d(D')}{\delta_*} < \frac{\pi}{2}$. 于是

$$0 = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \pi \leqslant \alpha := \varphi + \psi - \pi \leqslant \pi + \arctan\frac{4d(D')}{\delta_*} - \pi = \arctan\frac{4d(D')}{\delta_*} < \frac{\pi}{2}\,. \tag{2.16}$$

由 (2.15) 和 (2.16)，我们得到

$$\operatorname{dist}(J_1, J_2) = \varepsilon_0 \cos\operatorname{arctan}\frac{4d(D')}{\delta_*}\,. \tag{2.17}$$

事实上，不等式 (2.17) 完成了对情形 3 的讨论，因为我们可以令 $[A, C] := J_1$ 以及 $[B, D] := J_2$，此外，在 (2.1) 中令 $C_0 :=$ 余弦反正切 $\frac{4d(D')}{\delta_*}$。

最后，对于（2.1）中的所有情形1、2 和3 ，我们可以写成

$$C_0 = \min\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\delta_*}{4d(D')} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \arctan 2\right), \cos\operatorname{arctan}\frac{4d(D')}{\delta_*}\right\}\,.$$

3 定理 1.1 的证明

根据 [10]中的定理 3.1，映射 f 可以连续延拓到区域 D的边界。特别地， ∂D 的弱平坦性是由于 D 是一个 QED 区域这一事实的结果（参见例如 [11, 引理 2]）；此外，任意凸区域在其边界处都是局部连通的，因为它与以边界点为球心的球的交集也是一个凸集。

下面证明对数 H¨older 连续性 (1.7)。令 $x_0 \in \partial D$，并设 $y_* \in D'$ 是区域 D'. 中的任意一点。我们可以假设 $x_0 \neq \infty$.。令 $\delta_* := d(y_*, \partial D')$。设$E = B(y_*, \delta_*/2) \subset D'$.。根据引理 2.1，存在 $\delta_1 > 0$，使得 $h(f^{-1}(E)\ \partial D) \geqslant \delta_1$ 对所有 $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$. 均成立。此外，由于 [10] 中的定理 1.2，族 $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ 在 $\overline{D}$中等度连续，因此对某个数 $\delta_*/8$，存在 $U \subset B(x_0, \delta_1/2)$，它是 x_0的一个邻域，使得 $|f(x)\ -f(x_0)| < \delta_*/8$ 对所有 $x, x_0 \in U \cap D$ 以及所有 $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$. 均成立。令 $x, y \in U \cap D$，并

$$\varepsilon_0 := |f(x) - f(y)| < \delta_0 := \delta_*/4\,.$$

让我们对点 $A = f(x)$ $B = f(y)$ 和 $z_0 = f(x_0)$ 应用引理 2.2。根据该引理，存在 D' 中的线段 $I \supset A$ 和 $J \supset B$，使得 $I \cap E \neq \varnothing \neq J \cap E$，此外

$$\operatorname{dist}(I, J) \geqslant C_0 \cdot |f(x) - f(y)|\,, \tag{3.1}$$

其中常数 C_0 仅取决于连续统 E 和区域 D'.

设 α_1, β_1 分别为从点 x 和 y 出发的路径 I 和 J 的全 f-提升（由 [7, 引理 3.7], 可知它们存在，见图 4）。根据定义， $|\alpha_1| \cap f^{-1}(E) \neq \varnothing \neq$

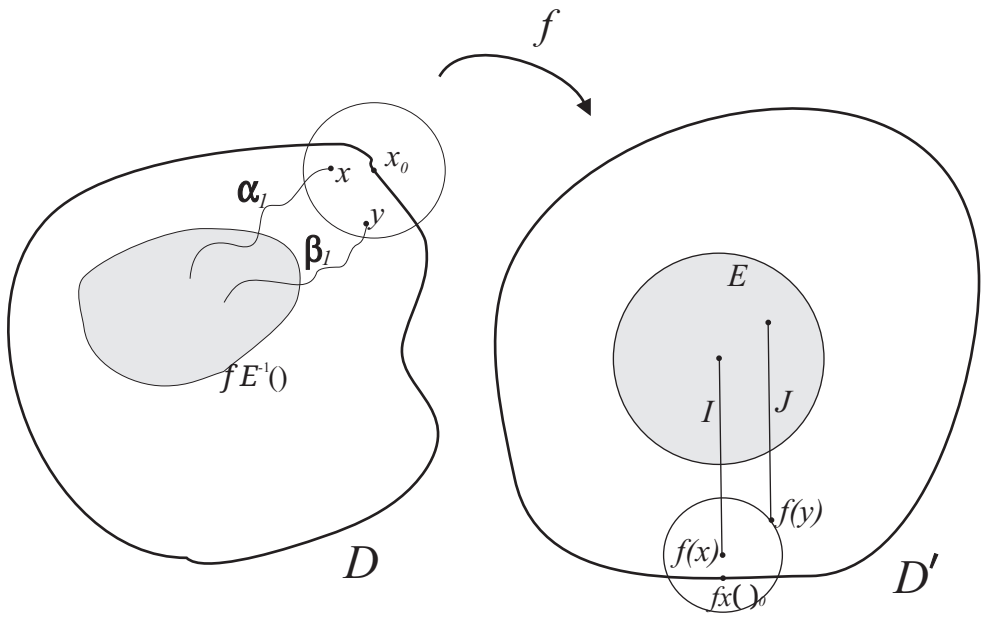


图 4：证明定理 1.1

$|\beta_1|\cap f^{-1}(E)$。由于 $h(f^{-1}(E)\ \partial D)\ \geqslant \delta_1$ 且 $x,y\in B(x_0,\delta_1/2)$，因此

$$d(\alpha_1)\geqslant \delta_1/2\,,\quad d(\beta_1)\geqslant \delta_1/2\,. \tag{3.2}$$

Let

$$\Gamma:=\Gamma(\alpha_1,\beta_1,D)\,.$$

那么，一方面，由不等式 (1.5)

$$M(\Gamma)\geqslant (1/A_0)\cdot M(\Gamma(\alpha_1,\beta_1,\mathbb{R}^n))\,, \tag{3.3}$$

另一方面，由 [12, 引理 7.38]

$$M(\Gamma(\alpha_1,\beta_1,\mathbb{R}^n))\geqslant c_n\cdot\log\left(1+\frac{1}{m}\right)\,, \tag{3.4}$$

其中 $c_n>0$ 是一个仅依赖于 n的常数,

$$m=\frac{\operatorname{dist}(\alpha_1,\beta_1)}{\min\{\operatorname{diam}(\alpha_1),\operatorname{diam}(\beta_1)\}}\,.$$

然后结合 (3.2)、(3.3) 和 (3.4)，并已知 dist $(\alpha_1,\beta_1)\ \leqslant|x-y|$，我们得到 tha t

$$M(\Gamma)\geqslant \widetilde{c_n}\cdot\log\left(1+\frac{\delta_1}{2\operatorname{dist}(\alpha_1,\beta_1)}\right)\geqslant \widetilde{c_n}\cdot\log\left(1+\frac{\delta_1}{2|x-y|}\right)\,, \tag{3.5}$$

其中，$\widetilde{c_n}>0$ 是仅依赖于 n 和 A_0 的某个常数，它们来自 QED-区域的定义。

现在，我们来求 $M(\Gamma)$的一个上界估计。令

$$\rho(y)=\begin{cases}\frac{1}{C_0\varepsilon_0}, & y\in D'\,,\\ 0, & y\notin D'\,.\end{cases}$$

注意，由（2.1）可知，ρ 满足关于 $f(\Gamma)$的关系式（1.2）。根据族$\mathfrak{S}_{\delta,\ A,\ Q}$的定义，我们得到

$$M(\Gamma)\leqslant\frac{1}{C_0^n\varepsilon_0^n}\int\limits_{D'}Q(y)\,dm(y)=C_0^{-n}\cdot\frac{\|Q\|_1}{|f(x)-f(y)|^n}\,. \tag{3.6}$$

由（3.5）和（3.6）可得

$$\widetilde{c_n}\cdot\log\left(1+\frac{\delta_1}{2|x-y|}\right)\leqslant C_0^{-n}\cdot\frac{\|Q\|_1}{|f(x)-f(y)|^n}\,.$$

由最后一个关系式可得所需的不等式（1.7），其中 $C_n:=C_0^{-n}\cdot\widetilde{c_n}^{-1/n}$ 和 $r_0=\delta_1/2.$

我们已经证明了内点 $x,y\in U\cap D.$ 处的定理 1.1。对于点 $x,y\in U\cap\overline{D}$，该结论可通过取极限 $\overline{x}\to x$ 以及 $\overline{y}\to y$, $\overline{x},\overline{y}\in D.$ □ 得出。

对于在 $D.$ 处有不动点的映射，定理 1.1 的类似结论也成立。为了表述并证明相应的结论，我们引入以下定义。对于 $a,b\in D$ 以及勒贝格可测函数 $Q\colon D'\to[0,\infty]$，我们用$\mathfrak{F}_{a,\ b,\ Q}$ 表示所有从区域 D 映到 D' 的开离散闭映射 f 所组成的族，其中 $f(a)=b.$。以下结论成立。

定理 3.1. 设 $Q\in L^1(D')$。那么，任意映射 $f\in\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ 都可连续延拓为映射 $f\colon\overline{D}\to\overline{D'}$；同时，对于任意点 $x_0\in\partial D$，存在该点的一个邻域 U 和数 $C_n=C(n,A,D,D')>0$ 及 $r_0=r_0(x_0)>0$，使得关系式 (1.7) 成立。

证明. 由定理 3.1] 可知， f 可连续延拓至 ∂D。下面证明相应的延拓映射族具有对数 H¨older 连续性。

令 $E=B\overline{(b,\varepsilon_*),}$ 其中 $\varepsilon_*=$dist $(b,\partial D')$。有两种情况：

1) 存在 $\delta>0$，使得对于所有 $f\in\mathfrak{S}_{\delta,A,Q\cdot}$，都有 dist $(f^{-1}(E)\ \partial D)\geqslant\delta$。在这种情况下，所需结论由定理 1.1 得出；

2) 存在序列 $f_m\in\mathfrak{S}_{\delta,\ A,\ Q}$ 以及 $x_m\in D,y_m\in D'$, $m=1,2,\ldots,$ 使得$f_m(x_m)=y_m$, $y_m\in E$ 且 dist $(x_m,\partial D)\to0$ 当 $m\to\infty.$。按照引理 2.1 的证明中的同样方法推理，我们得出结论：族 $\mathfrak{S}_{\delta,\ A,\ Q}$ 至少在一点 $x_0\in\partial D$处不是等度连续的；然而，这与 [10]中的定理 7.1 相矛盾。

因此，情形 2) 不可能，而在情形 1) 中，我们得到了定理所需的结论。 □

4 定理 1.2 的证明

根据 [10]中的定理 3.1，映射 f 可以连续延拓至 D 的边界。特别地，域的局部拟共形边界是弱平坦的（参见 [15, 命题 2.2], ，另见 [9, 定理 17.10]），而凸域在其边界处显然是局部连通的。

取 $x_0\in\partial D.$ 设 $y_*\in D'$ 为 D' 中的任意一点， $\delta_*:=d(y_*,\partial D')$ 且 $E=B(y_*,\delta_*/2)\subset D'.$ 根据引理 2.1, 存在 $\delta_1>0$ 使得 $h(f^{-1}(E)\ \partial D)\geqslant\delta_1$ 对所有$f\in\mathfrak{S}_{\delta,A,Q\cdot}$ 均成立。于是 $d(f^{-1}(E)\ \partial D)\geqslant\delta_1$ 对任意 $f\in\mathfrak{S}_{\delta,A,Q\cdot}$ 均成立。此外，由于根据 [10] 中的定理 1.2，族 $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ 在 $\overline{D}$处等度连续，因此对 $\delta_*/8$，存在 $U\subset B(x_0,\delta_1/4)$ 这一 x_0 的邻域，使得 $|f(x)-f(x_0)|<\delta_*/8$ 对任意 $x,y\in U\cap D$ 及所有 $f\in\mathfrak{S}_{\delta,A,Q\cdot}$ 均成立

根据局部拟共形边界的定义，存在点 x_0 的一个邻域 U^* 以及一个拟共形映射 $\varphi\colon U^*\to\mathbb{B}^n$, $\varphi(U^*)=\mathbb{B}^n$，使得

$\varphi(D\cap U^*) = \mathbb{B}^n_+$，其中 $\mathbb{B}^n_+ = \{x \in \mathbb{B}^n\colon\ x = (x_1, \ldots, x_n)\ x_n > 0\}$ 是一个半球，见图 5。我们可以假设 $x_0 \neq \infty$ 和 $\varphi(x_0) = 0$，以及 $\overline{U^*} \subset U$（见定理 17.10 的证明

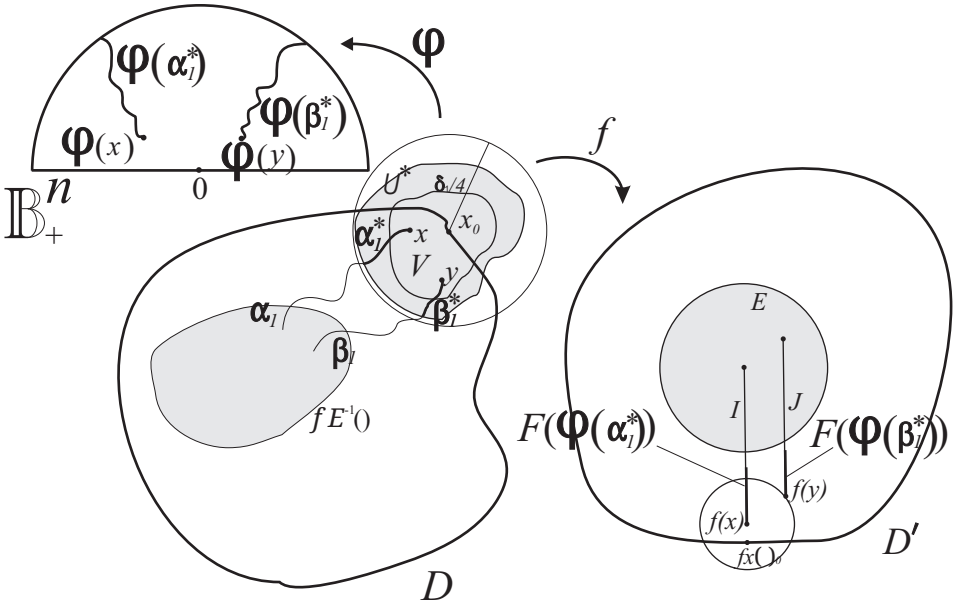


图 5：定理 1.2 的证明

在 [9] 中。设 V 是 U^* 中任意一个满足 $\overline{V} \subset U^*$. 的邻域。令

$$\delta_2 := \operatorname{dist}(\partial V, \partial U^*)\,. \tag{4.1}$$

考虑辅助映射

$$F(w) := f(\varphi^{-1}(w))\,, \qquad F : \mathbb{B}^n_+ \to U^*\,. \tag{4.2}$$

令 x、$y \in V \cap D$ 和

$$\varepsilon_0 := |f(x) - f(y)| < \delta_0 := \delta_*/4\,.$$

对点 $A = f(x)$ $B = f(y)$ 和 $z_0 = f(x_0)$ 应用引理 2.2。根据该引理，存在属于 D' 的线段 $I \supset A$ 和 $J \supset B$，使得 $I \cap E \neq \varnothing \neq J \cap E$，此外

$$\operatorname{dist}(I, J) \geqslant C_0 \cdot |f(x) - f(y)|\,, \tag{4.3}$$

其中常数 C_0 仅取决于连续统 E 和区域 D'.

设 α_1, β_1 分别为路径 I 和 J 的整体 f-提升，其起点分别为点 x 和 y（由 [7, 引理 3.7] 可知它们存在）。那么，根据定义，$|\alpha_1| \cap f^{-1}(E) \neq \varnothing \neq |\beta_1| \cap f^{-1}(E)$。于是

$$|\alpha_1| \cap U \neq \varnothing \neq |\alpha_1| \cap (\mathbb{R}^n \setminus U)$$

and

$$|\beta_1| \cap U \neq \varnothing \neq |\beta_1| \cap (\mathbb{R}^n \setminus U)\,.$$

于是，根据 [17, 定理 1.I.5.46]

$$|\alpha_1| \cap \partial U \neq \varnothing\,, |\beta_1| \cap \partial U \neq \varnothing\,. \tag{4.4}$$

同样,

$$|\alpha_1| \cap \partial V \neq \varnothing\,, |\beta_1| \cap \partial V \neq \varnothing\,. \tag{4.5}$$

由 (4.4) 可知， α_1 和 β_1 包含子路径 α_1^*和 β_1^*，它们分别以点 x 和 y 为起点，完全位于 U^* 内，并以 ∂U^*. 为端点。由 (4.1)、(4.4) 和 (4.5) 可知

$$d(\alpha_1^*) \geqslant \delta_2\,, \quad d(\beta_1^*) \geqslant \delta_2\,. \tag{4.6}$$

考虑路径 $\varphi(\alpha_1^*)$ 和 $\varphi(\beta_1^*)$。由于 φ 是拟共形映射，因此 φ^{-1} 也是~拟共形的。因此, φ^{-1} 是 H¨older 连续的，具有某个常数 $C > 0$ 和某个指数 $0 < \alpha \leqslant 1$ （见 [2, 定理 1.11.III]）。令 $\overline{x}$、$\overline{y} \in U^*$ 满足 $d(\alpha_1^*) = |\overline{x} - \overline{y}|$。我们定义 $x^* = \varphi(\overline{x})$ 和 $y^* = \varphi(\overline{y})$。于是

$$|x^* - y^*|^\alpha \geqslant \frac{1}{\widetilde{C}} \cdot |\overline{x} - \overline{y}| = d(\alpha_1^*) \geqslant \frac{1}{\widetilde{C}}\delta_2\,,$$

or

$$|x^* - y^*| \geqslant \left(\frac{1}{\widetilde{C}}\delta_2\right)^{1/\alpha}. \tag{4.7}$$

由 (4.7)，我们得到 $d(\varphi(\alpha_1^*)) \geqslant \left(\frac{1}{\widetilde{C}}\delta_2\right)^{1/\alpha}$. 类似地， $d(\varphi(\beta_1^*)) \geqslant \left(\frac{1}{\widetilde{C}}\delta_2\right)^{1/\alpha}$. 令

$$\Gamma := \Gamma(\varphi(\alpha_1^*), \varphi(\beta_1^*), \mathbb{B}^n_+)\,.$$

注意， $\mathbb{B}^n_+$ 是一个有界凸区域，因此它是一个 John 域（见 [18, 注 2.4]），进而是一致域（见 [18, 注 2.13(c)]），所以它也是一个 QED-区域，其中 (1.5) 中的某个 $A_0^* < \infty$ 属于 (1.5)（见 [6, 引理 2.18]）。于是，一方面，由 (1.5)

$$M(\Gamma) \geqslant (1/A_0^*) \cdot M(\Gamma(\varphi(\alpha_1^*), \varphi(\beta_1^*), \mathbb{R}^n))\,, \tag{4.8}$$

另一方面，由 [12, 引理 7.38]

$$M(\Gamma(\varphi(\alpha_1^*), \varphi(\beta_1^*), \mathbb{R}^n)) \geqslant c_n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)\,, \tag{4.9}$$

其中 $c_n > 0$ 是一个仅依赖于 n的常数,

$$m = \frac{\operatorname{dist}(\varphi(\alpha_1^*), \varphi(\beta_1^*))}{\min\{\operatorname{diam}(\varphi(\alpha_1^*)), \operatorname{diam}(\varphi(\beta_1^*))\}}\,.$$

然后，结合 (4.8) 和 (4.9)，并注意到 $\operatorname{dist}(\varphi(\alpha_1^*)\ \varphi(\beta_1^*)) \leqslant |\varphi(x)\ -\varphi(y)|$，我们得到

$$M(\Gamma) \geqslant \widetilde{c_n} \cdot \log\left(1 + \frac{\delta_2^{1/\alpha}}{(\widetilde{C})^{1/\alpha}\operatorname{dist}(\alpha_1, \beta_1)}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \widetilde{c_n} \cdot \log\left(1 + \frac{\delta_2^{1/\alpha}}{(\widetilde{C})^{1/\alpha}|\varphi(x) - \varphi(y)|}\right), \tag{4.10}$$

其中，$\widetilde{c_n} > 0$ 是一个常数，仅取决于 QED-区域的定义中的 n 和 A_0^*。

现在我们来建立 $M(\Gamma)$ 的上界。注意，(4.2) 中的 F 满足关系 (1.4)，其中函数 $Q(x) = K_0 \cdot Q(x)$ 替代了 Q，而 $K_0 \geqslant 1$ 是 φ^{-1}. 的拟共形性常数。令

$$\rho(y) = \begin{cases} \frac{1}{C_0\varepsilon_0}, & y \in D', \\ 0, & y \notin D', \end{cases}$$

其中 C_0 是不等式 (2.1) 中的普适常数。注意，由于关系 (2.1)，ρ 对于 $F(\Gamma)$ 满足关系 (1.2)。然后，根据 $\mathfrak{S}_{\delta\text{ 的定义, }A,\ Q}$，以及 (4.2) 中 F 的定义，我们得到

$$M(\Gamma) \leqslant \frac{1}{C_0^n \varepsilon_0^n} \int\limits_{D'} K_0 Q(y)\, dm(y) = C_0^{-n} K_0 \cdot \frac{\|Q\|_1}{|f(x) - f(y)|^n}. \tag{4.11}$$

由 (4.10) 和 (4.11) 可得

$$\widetilde{c_n} \cdot \log\left(1 + \frac{\delta_2^{1/\alpha}}{(\widetilde{C})^{1/\alpha}|\varphi(x) - \varphi(y)|}\right) \leqslant C_0^{-n} K_0 \cdot \frac{\|Q\|_1}{|f(x) - f(y)|^n}.$$

由最后一个关系以及映射 φ 的 H¨older 连续性，可得

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C_0^{-n} \widetilde{c_n}^{-\frac{1}{n}} K_0 \cdot \frac{(\|Q\|_1)^{\frac{1}{n}}}{\log^{\frac{1}{n}}\left(1 + \frac{\delta_2^{1/\alpha}}{(\widetilde{C})^{1/\alpha}|\varphi(x)-\varphi(y)|}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant C_0^{-n} \widetilde{c_n}^{-\frac{1}{n}} K_0 \cdot \frac{(\|Q\|_1)^{\frac{1}{n}}}{\log^{\frac{1}{n}}\left(1 + \frac{\delta_2^{1/\alpha}}{(\widetilde{C})^{(1/\alpha)+1}|x-y|^{\alpha}}\right)},$$

这就是所需的不等式 (1.8)，其中 $C_n := C_0^{-n} \cdot \widetilde{c_n}^{-1/n} \cdot K_0$ 且 $r_0 = \delta_2^{1/\alpha}(\widetilde{C})^{1/\alpha+1}$.

我们已证明内点 $x, y \in V \cap D$. 上的定理 1.2。对于 $x, y \in V \cap \overline{D}$，该结论可通过取极限得到 $\overline{x} \to x$ 以及 $\overline{y} \to y$, $\overline{x}, \overline{y} \in D$. □

5 定理 1.3 的证明

令 $f \in \mathfrak{S}_{\delta,\ A,\ Q}(D, D')$。只需将讨论限制在 $P_1, P_2 \in V \cap D$. 的情形。由于 D 是正则区域，存在一个拟共形映射 g^{-1}，将区域 D 映到具有局部拟共形边界的区域 D_0，并且根据式 (1.9) 中度量 ρ 的定义，

$$\rho(P_1, P_2) := |g^{-1}(P_1) - g^{-1}(P_2)|. \tag{5.1}$$

考虑辅助映射

$$F(x) = (f \circ g)(x)\,, \quad x \in D_0\,. \tag{5.2}$$

由于 g^{-1} 是拟共形的，因此存在一个常数 $1 \leqslant K_1 < \infty$，使得

$$\frac{1}{K_1} \cdot M(\Gamma) \leqslant M(g^{-1}(\Gamma)) \leqslant K_1 \cdot M(\Gamma) \tag{5.3}$$

对于 $D_0.$ 中的任意路径族 Γ，考虑不等式 (5.3)，并注意到 f 满足关系式 (1.4)，我们得到 F 也满足关系式 (1.4)，其中~是一个新函数 $Q(x) := K_1 \cdot Q(x)$。此外，由于 g 是一个固定的同胚，因此 $h(F^{-1}(A)\ \partial D) \geqslant \delta_0 > 0$，其中 $\delta_0 > 0$ 是某个固定数。于是可以将定理 3.1 应用于映射 F。应用该定理，我们得到，对于任意点 $x_0 \in D_0$，存在该点的V邻域以及数值 $C_n^* = C(n, A, D_0, D') > 0, r_0 = r_0(n, A, x_0, D_0) >$0 和 $0 < \alpha = \alpha(x_0) \geqslant 1$，使得

$$|F(x) - F(y)| \leqslant \frac{C_n^* K_1^{\frac{1}{n}} \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1 + \frac{r_0}{|x-y|^\alpha}\right)} \tag{5.4}$$

对所有 x、$y \in V \cap D_0$，其中 $\|Q\|_1$ 是函数 Q 在 $L^1(D)$ 中的范数。设 $U := g(V)$，$P_0 := g(x_0)$。于是，根据定义，U 是素端 $P_0 \in E_D.$ 的一个邻域。若 P_1、$P_2 \in D_P \cap U$，则对某些 x、$y \in V \cap D_0.$，有 $P_1 = g(x)$ 和 $P_2 = g(y)$。考虑关系式 (5.4)，并利用关系式 $|x - y| = |g^{-1}(P_1) - g^{-1}(P_2)| = \rho(P_1, P_2)$，可得

$$|F(g^{-1}(P_1)) - F(g^{-1}(P_2))| \leqslant \frac{C_n^* K_1^{\frac{1}{n}} \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1 + \frac{r_0}{\rho^\alpha(P_1,P_2)}\right)}\,,$$

或者，由 (5.2) 得，

$$|f(P_1) - f(P_2)| \leqslant \frac{C_n^* K_1^{\frac{1}{n}} \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1 + \frac{r_0}{\rho^\alpha(P_1,P_2)}\right)}\,.$$

[1]若令 $C_n := C_n^* K_1^{\frac{1}{n}}$. □，则最后一个比值即为所需结果

参考文献

[1] *PoleckiiE.A.* 非同胚拟共形映射的模方法 //Math. USSR-Sb. – 1970年。 – **12**，第2期。 – 第 260—270 页。

[2] *Rickman S.* 拟正则映射。– 柏林：施普林格出版社，1993年。

[3] ***Martio O.***、***Ryazanov V.***、***Srebro U.*** 和 ***Yakubov E.***现代映射理论中的模。—纽约：Springer Science + Business Media, LLC，2009年。

[4] *Martio O.*、*Rickman S.*、*V¨ais¨al¨a J.*拟正则映射的定义 // Ann. Acad.

芬兰数学年刊 A 辑 I. 数学 – 1969年. – 448. – 第 1–40 页。[5] Sevost'yanov E.A. 关于映射边界上的对数 H¨older 连续性 // 芬兰数学年刊. – 2022年. – 47. – 第 251–259 页。[6] Gehring F.W., Martio O. 拟极值距离域与拟共形映射的延拓 // 数学分析杂志. – 1985年. – 45. – 第 181–206 页。[7] Vuorinen M. - 空间中拟正则映射的例外集与边界行为 // 芬兰科学院年刊 A 辑 I. 数学，论文集. – 1976年. – 第 11 卷. – 第 1–44 页。[8] Vuorinen M. 关于 n 维拟共形映射角极限的存在性 // Ark. Math. – 1980年. – 18. – 第 157–180 页。[9] V ¨ais ¨al ¨a J. n 维拟共形映射讲义. – 数学讲义 229，柏林等：施普林格出版社，1971年。[10] Sevost'yanov E.A., Skvortsov S.O., Dovhopiatyi O.P. 关于满足逆泊列茨基不等式的非同胚映射 // 数学科学杂志. – 2021年. – 252，第 4 期. – 第 541–557 页。[11] Sevost'yanov E.A., Skvortsov S.A. 关于度量空间中满足正向与逆向模条件的映射的收敛性 // 乌克兰数学杂志. – 2018年. – 第 70 卷，第 7 期. – 第 1097–1114 页。[12] Vuorinen M. 保形几何与拟正则映射. 数学讲义 1319. – 柏林等：施普林格出版社，1988年。[13] N ¨akki R. 素端与拟共形映射 // 数学分析杂志. – 1979年. – 第 35 卷. – 第 13–40 页。[14] Kovtonyuk D.A. 和 Ryazanov V.I. 关于空间映射的素端理论 // 乌克兰数学杂志. – 2015年. – 67，第 4 期. – 第 528—541 页。[15] Ilkevych N.S., Sevost'yanov E.A., Skvortsov S.A. 以素端为视角研究逆映射的整体行为 // 芬兰数学年刊. – 2021年. – 46. – 第 371–388 页。[16] Ilyutko D.P., Sevost'yanov E.A. 关于黎曼流形上的素端 // 数学科学杂志. – 2019年. – 241，第 1 期. – 第 47–63 页。[17] Kuratowski K. 拓扑学，第 2 卷. – 纽约—伦敦：学术出版社，1968年。[18] Martio O., Sarvas J. 平面与空间中的单射性定理 // 芬兰科学院年刊 A 辑 I 数学. – 1978/1979年. – 4. – 第 384–401 页。

OLEKSANDR DOVHOPIATYI

1. 日托米尔伊万·弗兰科国立大学，大别尔季切夫斯卡娅街 40 号，日托米尔 10 008，乌克兰
alexdov1111111@gmail.com

EVGENY SEVOST'YANOV

1. 日托米尔伊万·弗兰科国立大学，乌克兰日托米尔市大别尔季切夫斯卡娅街40号，邮编100082. 乌克兰国家科学院应用数学与力学研究所，乌克兰斯拉维扬斯克市多布罗沃利斯基街1号，邮编84100 esevostyanov2009@gmail.com