arXiv:2302.02726v1 [math.AP] 6 Feb 2023

声学系统的统一稳定化

KAÏS AMMARI、FATHI HASSINE 和 LUC ROBBIANO

摘要。我们研究具有空间分布阻尼的声学系统的稳定化问题。通过对阻尼项的结构性质施加假设，我们确定了解随时间增长而指数衰减。

目录

1. 引言 2 2. 预备知识与主要结果 3 3. 工具 5 3.1. 黎曼几何工具 6 3.2. 伪微分工具 7 3.3. 一致稳定性 8 3.4. 声学系统的不变形式 8 4. 半经典测度的引入 9 4.1. 半经典测度 9 4.2. 测度不恒为零 20 4.3. 半经典测度在阻尼支集上为零 20 5. 支集的传播 21 附录 A. 几何控制条件与传播 26 A.1. 几何 26 A.2. 几何控制条件（GCC）28 A.3. 测度的性质 29 A.4. 命题 5.1 的证明 32 附录 B. 边界迹的估计：严格衍射情形 34 B.1. OIF 与艾里函数回顾 34 B.2. 边界处的估计：掠射点 36 参考文献 41

2010 数学主题分类。35L04,37L15。关键词和短语。指数稳定性、预解估计、耗散双曲系统、声学方程。

1. 引言

声波因介质的可压缩性而传播。事实上，流体的可压缩性与惯性之间的平衡决定了声波在其中的传播。声波方程所作的假设包括：忽略引力和耗散效应；介质（流体）是均匀、各向同性且完全弹性的。除此之外，我们还假设粒子速度较小，且平衡压力和密度仅有极小的扰动（波动）。

我们考虑以下声学阻尼系统方程：

$$\begin{cases} u_t + \nabla r + b\,u = 0, \ \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ r_t + \operatorname{div} u = 0, \ \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u \cdot n = 0, \ \text{on } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(0,x) = u^0(x),\, r(0,x) = r^0(x),\, x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个有界区域，其边界 Γ 光滑；$\operatorname{div} = \nabla\cdot$ 是散度算子，且 $b \in L^\infty(\Omega)$，其中 $b \geq 0$ 在 Ω 上。通常，n 表示沿着 Γ 的单位外法向量。

方程组 (1.1) 是声学方程 的线性化形式，该方程描述可压缩介质中声波的传播，参见 Lighthill [33, 34, 35], ，其中 $b\,u$ 表示 Brinkman 型阻尼项。这种阻尼也出现在均匀化过程中（参见 Allaire [1]），并常被用作流体力学模型中的一种合适惩罚 项，参见 Angot、Bruneau 和 Fabrie [5]。我们的主要目标是证明 (1.1) 的解随时间增长呈指数衰减。

令 $L^2(\Omega)$ 表示 Ω 上平方可积函数的标准希尔伯特空间，其闭子空间为 $L^2_m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \int_\Omega f(x)\,dx = 0\}$。为避免记号滥用，我们将 $\|\cdot\|$ 记为 $L^2(\Omega)$-范数或 $L^2(\Omega)^d$-范数。

记 $H = (L^2(\Omega))^d \times L^2_m(\Omega)$，我们引入算子

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \operatorname{div} & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \big\{(u,r) \in H,\, (\nabla r, \operatorname{div} u) \in H,\, u \cdot n_{|\Gamma} = 0\big\} \subset H \to H,$$

and

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \sqrt{b} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}((L^2(\Omega))^d, H),\, \mathcal{B}^* = \begin{pmatrix} \sqrt{b} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(H, (L^2(\Omega))^d).$$

回顾一下，对于 $u \in (L^2(\Omega))^d$，若 $\operatorname{div} u \in L^2(\Omega)$，则 $u \cdot n_{|\Gamma}$ 在 $H^{-1/2}(\Gamma)$ 中有意义（参见 Girault-Raviart [21, 第 1 章，定理 2.5]）。

因此，问题 (1.1) 可以改写为抽象形式：

$$\begin{cases} Z_t(t) + \mathcal{A}Z(t) + \mathcal{B}\mathcal{B}^* Z(t) = 0,\, t > 0, \\ Z(0) = Z^0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $Z = (u, r)$，或者等价地，

$$\begin{cases} Z_t(t) = \mathcal{A}_d Z(t),\, t > 0, \\ Z(0) = Z^0, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $\mathcal{A}_d = -\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{B}^*$ 与 $\mathcal{D}(\mathcal{A}_d) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$。

可以证明（见 [2]），对于任意初始数据 $(u^0, r^0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$，问题 (1.1) 存在唯一解

$$(u,r) \in C([0,\infty); \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1([0,\infty); H).$$

此外，解 (u, r) 满足能量恒等式

$$E(0) - E(t) = \int_0^t \left\| \sqrt{b}\, u(s) \right\|^2_{(L^2(\Omega))^d} \mathrm{d}s, \text{ for all } t \geq 0 \tag{1.4}$$

with

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\| (u(t), r(t)) \right\|^2_H, \forall\, t \geq 0, \tag{1.5}$$

其中我们记

$$\langle (u, r), (v, p) \rangle_H = \int_\Omega \left(u(x).v(x) + r(x)p(x) \right) \mathrm{d}x, \left\| (u, r) \right\|_H = \sqrt{\int_\Omega \left(|u(x)|^2 + r^2(x) \right) \mathrm{d}x}.$$

利用 (1.4) 和标准的稠密性论证，我们可以将初始数据 (u^0, r^0) 对应的解算子延拓至 $\in H$。因此，我们为问题 (1.1)（或抽象柯西问题 (1.2) 或 (1.3)）关联一个在 H 中全局有界的半群。

由于能量 E 沿轨道单调不增，我们希望确定满足下式的初始数据 (u^0, r^0) 的集合

$$E(t) \to 0 \text{ as } t \to \infty. \tag{1.6}$$

这类问题显然与函数 b的结构性质密切相关，尤其与阻尼有效的集合 ω 的几何性质有关。事实上，当阻尼项在全局范围内分布时，Ammari、Feireisl 和 Nicaise [2] 通过与问题 (1.1) 的保守问题相关联的可观测性不等式，证明了能量的指数衰减率。此外，研究还表明，如果阻尼系数不是一致正定的（即 $\inf_{x \in \Omega} b(x) = 0$），那么系统 (1.1) 可能不是指数稳定的。本文考虑

阻尼在区域 Ω 上局部分布，并满足几何控制条件。本文证明了与 [2] 中相同的统一衰减结论，但对阻尼系数施加了更严格的几何条件。更准确地说，我们证明了能量的指数衰减率。

本文结构安排如下。第 2 节概述声学系统 (1.1) 的一些众所周知的事实。第 3 节介绍一些工具和记号，包括黎曼几何、伪微分算子以及 Gearhart-Huang-Prüss 定理，这些内容使我们能够从预解算子的估计推出指数衰减。第 4 节引入半经典测度并证明其一些性质：首先，该测度支集于特征集上，且不恒为零。第 5 节证明边界邻域内的局部性质。根据这些结果，我们在第 A 节证明测度支集的全局传播。第 B 节证明衍射点邻域内的一个估计。第 5、A 和 B 节共同推出：如果 $\{x, b(x) > 0\}$ 满足几何条件 (GCC)（更精确的定义见定义 2.1、第 A.1 节和第 A.2 节），那么该测度为零。

2. 预备知识与主要结果

我们首先指出一个简单的事实：问题 (1.1) 可视为保守系统的有界（关于 H）扰动

$$\begin{cases} u_t + \nabla r = 0, \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ r_t + \operatorname{div} u = 0, \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{2.7}$$

它可以改写为标准的波动方程

$$r_{tt} - \Delta r = 0.$$

因此，方程 (1.1) 的基本存在性理论源自方程 (2.7) 的存在性理论。由此， $\mathcal{A}_d$ 在 H 中生成一个 C_0-半群 $(S(t))_{t\geq 0}$ ，而且该半群还是压缩半群，因为 $\mathcal{A}_d$ 是耗散的（见 (1.4)）。

第一个主要困难在于，算子 $\mathcal{A}_d$ 具有一个非平凡（且很大的）核，该核在演化过程中保持不变。事实上，如果 (u, r) 属于 $\ker \mathcal{A}_d$，那么它就是“定常”问题的解

$$\nabla r + bu = 0,\ \operatorname{div} u = 0,\ \text{in } \Omega. \tag{2.8}$$

因此，将 (2.8) 的第一个恒等式乘以 $\overline{u}$ ，并在 Ω 上积分，得到

$$\int_\Omega (\nabla r \cdot \overline{u} + b|u|^2)\,\mathrm{d}x = 0.$$

通过分部积分，并利用 u 是无散的这一事实，以及 Γ 上的边界条件$u \cdot n = 0$ ，我们得到

$$\int_\Omega \nabla r \cdot \overline{u}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega r \operatorname{div} \overline{u}\,\mathrm{d}x = 0,$$

因此我们得到

$$\int_\Omega b|u|^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

换言之，我们有

$$u = 0 \text{ on } \operatorname{supp} b,$$

回到 (2.8)，我们得到

$$\nabla r = 0.$$

因此，我们已经证明

$$\ker \mathcal{A}_d = \{(u, 0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \mid \operatorname{div} u = 0,\ u|_{\operatorname{supp} b} = 0,\ u \cdot n|_\Gamma = 0\}.$$

为简洁起见，令 $E = \ker \mathcal{A}_d$ ，并引入其在 H 中的正交补 H_0 。

容易验证

$$\langle \mathcal{A}_d(w, s), (u, r)\rangle_H = 0 \text{ for any } (w, s) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),\ (u, r) \in E;$$

特别地，与 (1.1) 相关的半群保持 E 和 H_0 不变。因此，衰减性质 (1.6) 可能仅对源自集合 H_0 的初始数据成立。

以下结论可通过一个简单的稠密性论证证明:

引理 2.1. 方程 (u, r) (1.1) 的解，其初始数据属于 $\mathcal{D}(\mathcal{A}_d)$ ，满足

$$E'(t) = -\int_\Omega b\,|u|^2\,dx \leq 0. \tag{2.9}$$

因此，能量不增，且对于所有属于 H 的初始数据，(1.4) 均成立。

如上所示，只有当我们取初始数据

$$(u^0, r^0) \in H_0 = \ker[\mathcal{A}_d]^\perp.$$

证明 (1.6) 有多种方法，这里我们采用 Arendt 和 Batty 的以下结果 [6]:

定理 2.1. 设 $(T(t))_{t\geq 0}$ 是自反 *Banach* 空间 X 上的有界 C_0-半群。记 A 为 $(T(t))$ 的生成元，并以 $\sigma(A)$ 表示 A 的谱。若 $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ 是可数的，且 A 没有特征值位于虚轴上，则对于所有 $x \in X$，$\lim_{t\to+\infty} T(t)x = 0$ 。

鉴于此定理，我们需要确定 $\mathcal{A}_d$ 位于虚轴上的谱，根据 [2]可得:

- 假设 $|\omega| > 0$。如果 λ 是一个非零实数，那么 $i\lambda$ 不是 $\mathcal{A}_d$的特征值。 .

- 假设 $|\omega| > 0$。如果 λ 是一个非零实数，那么 $i\lambda$ 属于 $\mathcal{A}_d$的预解集 $\rho(\mathcal{A}_d)$。

现在，定理 2.1 导出

推论 2.1 ([2])。 设 (u, r) 为问题 ***(1.1)*** 中由初始数据 $(u^0, r^0) \in H$产生的唯一半群解。设 P_E 为到空间 $E = \ker[\mathcal{A}_d]$在 H中的正交投影，并设

$$(w, s) = P_E(u^0, r^0).$$

Then

$$\|(u, r)(t, \cdot) - (w, s)\|_H \to 0 \ as \ t \to \infty$$

接下来，我们给出几何控制条件（GCC）下的统一衰减结果。定义 A.2 给出了精确定义，而这需要对几何结构进行描述。相关内容将在附录 A 中说明。下面给出平直拉普拉斯算子的定义。

定义 2.1。 设 Ω 为 $\mathbb{R}^d$中的光滑开域。令 ω 为Ω的一个开子集。假设与 Δ 相关的测地线与边界不具有无穷阶相切。若从Ω 出发的每条广义双特征线都与 ω相交，则称 ω 满足几何控制条件（***GCC***）。

注 2.1. 我们在附录 ***A.1*** 中对广义双特征线作出精确描述。这里以平直拉普拉斯算子为例，简要说明这一概念。在 Ω中，广义双特征线是 H_p的一条积分曲线；对于 $p(\xi) = |\xi|^2$，它是一条直线。当这条曲线碰到边界时，若曲线与边界横截相交，则按照几何光学中的反射定律延拓广义双特征线。若曲线与边界相切，基本上有两种情况：曲线除与边界的交点外始终留在 Ω 内，此时广义双特征线就是该曲线；或者曲线离开 Ω，此时广义双特征线沿边界滑行。

现在我们陈述本文的主要结果。

定理 2.2. 设 (u, r) 是问题 ***(1.1)*** 从初始数据 $(u^0, r^0) \in H$出发的唯一半群解。设 P_E 是到空间 E =核$[\mathcal{A}_d]$ 在 H中的正交投影，并设 $(w, s) = P_E(u^0, r^0)$。我们假设， b,$\omega = \{x \in \Omega; b(x) > 0\}$的支集内部满足几何控制条件（***GCC***）。那么，

$$\|(u, r)(t, \cdot) - (w, s)\|_H \leq C\, e^{-ct}\, \|(u^0, r^0)\|_H, \forall\, t \geq 0, \tag{2.10}$$

对于某个 C， $c > 0$ 且独立于 (u^0, r^0)。

在证明前一个定理之前，我们需要一些黎曼几何和伪微分演算方面的工具。我们的目标是通过虚轴上预解算子的估计来应用指数衰减的刻画。为了证明这样的估计，我们使用半经典测度。下一节将介绍证明主体部分所用的所有工具。

3. 工具

本节介绍黎曼几何、伪微分演算、声学系统的稳定化及其不变形式方面的一些工具。尽管这些工具都是经典的，但本引言有助于我们明确本文所用的记号。

3.1. 黎曼几何工具。本节介绍本文所用的记号。设 M 为一个流形， g 为 M上的度量， g 为作用于向量场上的内积。在局部坐标中， $g=(g_{jk})_{1\le j,\ k\le d}$，其中 g 是对称的，即 $g_{jk}=g_{kj}$，且 g 依赖于$x\in M$。若 $v=(v^j)_{1\le j\le d}$和 $w=(w^j)_{1\le j\le d}$是向量场，则对每个 $x\in M$，内积由 $g_{jk}(x)v^j(x)w^k(x)$给出。此处以及下文中，我们采用爱因斯坦记号，即$g_{jk}v^jw^k=\sum g_{jk}v^jw^k$。我们用$(.,.)_g$表示 $L^2(M)$上的 L^2 内积。局部$_{1\le j,\ k\le d}$

形式取决于所用的对象；下文中，内积定义在函数或向量场上。在局部坐标中，若 f 和 q 是 M 上的函数，

$$(f,q)_g=\int_M f(x)\overline{q(x)}|g|^{1/2}dx, \tag{3.11}$$

其中 $|g|=|\det g|$。事实上， $|g|^{1/2}dx$ 是与度量 g 相关联的黎曼密度的局部形式。它是一个几何对象，在变量变换下保持不变。

若 v 和 w 是向量场，则在局部坐标中有

$$(v,w)_g=\sum_{1\le j,k\le d}\int_M g_{jk}v^j(x)\overline{w^k(x)}|g|^{1/2}dx. \tag{3.12}$$

下文中，有时我们用 $(v^j,v^k)_g$ 代替 $(v,w)_g$，尤其是在例如 v^j 对每个 j 都由一个公式给出时。记号 $(v^j,v^k)_g$ 应解释为 (3.12) 右端的表达式。

我们用 $(g^{jk})_{1\le j,\ k\le d}$ 表示 g 的逆矩阵，并且有 $g^{jk}g_{k\ell}=\delta^j_\ell$，其中 δ^j_ℓ 是克罗内克符号。

对于函数 f，我们可以用以下公式在局部坐标中定义其协变导数

$$(\nabla_g f)^j=g^{jk}\partial_k f, \tag{3.13}$$

且 $\nabla_g f$ 是一个向量场。

对于向量场 v，我们可以用以下公式在局部坐标中定义其散度

$$\operatorname{div}_g v=|g|^{-1/2}\partial_k(|g|^{1/2}v^k). \tag{3.14}$$

算子 ∇_g 和 div_g 互为对偶。若 f 是一个函数， v 是一个向量场，且两者之一的支集包含于 M 的内部，则有公式

$$(f,\operatorname{div}_g v)_g=-(\nabla_g f,v)_g. \tag{3.15}$$

为了研究边界邻域中的问题，我们可以使用测地坐标。在这些坐标中，边界由 $x_d=0$ 局部定义，区域由 $x_d>0$ 局部定义，而度量具有以下特殊形式： $g_{jd}=0$，其中 $1\le j\le d-1$，且 $g_{dd}=1$。我们将 $\tilde g_{jk}=g_{jk}$ 记为 $1\le j$、$k\le d-1$，并将 $(\tilde g^{jk})_{1\le j,\ k\le d-1}$ 记为 $(\tilde g_{jk})_{1\le j,\ k\le d-1}$ 的逆矩阵。它是度量 g 在超曲面 $x_d=constant$ 上的限制。例如，若我们写作 $\tilde g^{jk}\xi_k$，则表示对 k 从 1 到 $d-1$ 求和。

如果 f（一个函数）和 v（一个向量场）的支集位于边界的某个邻域内，则分部积分公式为

$$(f,\operatorname{div}_g v)_g=-(\nabla_g f,v)_g-(f_{|x_d=0},v^d_{|x_d=0})_\partial, \tag{3.16}$$

其中 $(q,r)_\partial=\int_{\mathbb{R}^{d-1}} q\,(x')\,\overline{r}\,(x')\,|g|^{1/2}_{|x_d=0}dx'$。注意，在测地坐标中，边界处的外单位法向量为向量 $\nu=(0,\dots,0,-1)$，而 $-v^d$ 是 ν 与 v的内积。事实上，我们可以将上述积分公式写成不变形式

但本文不采用这种不变形式。我们还将在局部坐标中使用以下分部积分公式。

$$(w_1, hD_d w_2) = (hD_d w_1, w_2) - ih((w_1)_{|x_d=0}, (w_2)_{|x_d=0})_\partial. \tag{3.17}$$

事实上，我们可以将上述积分公式写成不变形式，但本文不使用这一不变形式。

3.2. 伪微分工具。 本节回顾伪微分算子和半经典演算中的记号及主要定义。设 $a(x,\xi') \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d-1})$，如果对于所有 $\alpha \in \mathbb{N}^d$ 和 $\beta \in \mathbb{N}^{d-1}$，存在 $C_{\alpha,\beta}$，使得，我们称 $a \in S^m$

$$|\partial_x^\alpha \partial_{\xi'}^\beta a(x,\xi')| \leq C_{\alpha,\beta} \langle \xi' \rangle^{m-|\beta|}, \text{ for all } x \in \mathbb{R}^d, \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}, \tag{3.18}$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$、$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$、$\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$ 和 $\langle \xi' \rangle = (1 + |\xi'|^2)^{1/2}$。

算子通过以下公式与一个符号相关联

$$\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)u = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{ix'\xi'} a(x, h\xi') \hat{u}(\xi', x_d) d\xi', \tag{3.19}$$

其中 u 属于施瓦茨空间，并且

$$\hat{u}(\xi', x_d) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-ix'\xi'} u(x', x_d) dx'.$$

符号演算由以下结果给出。设 $a \in S^m$ 和 $b \in S^q$。

3.2.1. 复合。 存在 $c \in S^{m+q}$ 使得 $\mathrm{op_{sc}}(a)\,\mathrm{op_{sc}}(b) = \mathrm{op_{sc}}(c)$，并且存在 $c_{m+q-1} \in S^{m+q-1}$ 使得 $c = ab + hc_{m+q-1}$.

3.2.2. 交换子。 存在 $d \in S^{m+q-1}$ 使得 $[\mathrm{op_{sc}}(a), \mathrm{op_{sc}}(b)] = h\,\mathrm{op_{sc}}(d)$，并且存在 $d_{m+q-2} \in S^{m+q-2}$ 使得 $d = -i\{a,b\} + hd_{m+q-2}$。

如果 a 是微分算子，我们还有一个精确公式，并且将使用以下公式 $[-ih\partial_d, \mathrm{op_{sc}}(b)] = -ih\,\mathrm{op_{sc}}(\{\xi_d, b\})$。注意 $\{\xi_d, b\} = \partial_d b$，它是一个切向符号。

3.2.3. 伴随算子。 存在 $\tilde{c} \in S^m$，使得算子$_{\mathrm{sc}}(a)^* =$ 算子$_{\mathrm{sc}}(\tilde{c})$，并且存在 $\tilde{c}_{m-1} \in S^{m-1}$，使得 $\tilde{c} = \bar{a} + hc_{m-1}$。

3.2.4. 在 上有界的算子 L^2。 若 $a \in S^0$，则存在 $C > 0$，使得 $\|$算子$_{\mathrm{sc}}(a)u\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}$，对所有属于施瓦茨空间的 u 均成立。由此公式可见，我们可以通过密度将算子$_{\mathrm{sc}}(a)$延拓为 L^2 上的有界算子。如果算子 $_{\mathrm{sc}}(a)$ 作用于仅依赖于 x' 的函数，我们仍使用相同的记号。此时，估计具有如下形式：$|$算子$_{\mathrm{sc}}(a)u|_{L^2} \leq C|u|_{L^2}$。若不会引起混淆，我们将用 $\|.\|$ 代替 $\|.\|_{L^2} = \|.\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$，并用 $|.|$ 代替$|.|_{L^2} = |.|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}$。

估计 C 中的常数取决于符号 a 的有限个半范数。对于 h 足够小的情形，我们有一个精确的结果。

设 $a \in S^0$，则存在 $C > 0$，它取决于符号 a 的有限个半范数，使得

$$\| \mathrm{op_{sc}}(a)u\| \leq 2\|a\|_\infty \|u\| + C\|u\|h, \text{ for all } h \in (0,1), \tag{3.20}$$

其中 $\|a\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d,\ \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}} |a(x,\xi')|$。注意，估计中的 2 是任意的，对于所有 $\delta > 0$，都可以将其替换为 $1 + \delta$；但在这种情况下，C 也取决于 δ。

对于 $s \in \mathbb{R}$，令 $\Lambda^s =$ 算子$_{\mathrm{sc}}(\langle \xi' \rangle^s)$。由 L^2 界，我们可以推导出符号为 $a \in S^m$ 的算子的一个估计，即

$$\| \mathrm{op_{sc}}(a)u\| \lesssim \|\Lambda^m u\|.$$

我们可以通过 $\|u\|_{H^s_{sc}} = \|\Lambda^s u\|$ 定义 H^s_{sc}-范数。

3.2.5. *Gårding*不等式。 我们陈述适用于本研究目的的 Gårding 不等式。我们假设存在 $K \subset \mathbb{R}^d$，它是紧的，$W \subset \mathbb{R}^{d-1}$，对于固定的 $R_0 > 0$ 满足：若 $|\xi| \geq R_0$，则对所有 $\lambda \geq 1$、$\lambda\xi \in W$ 均成立。令 $m \in \mathbb{R}$ 和 $a \in S^m$，我们假设存在 $C_0 > 0$，使得 a 满足 $a(x, \xi') \geq C_0|\xi'|^m$，对所有 $x \in K$、$\xi' \in W \cap \{\xi', |\xi'| \geq R_0\}$ 均成立。令 $\chi \in S^0$ 支集于 $K \times W$，则存在 $C_1 > 0$ 和 $C_2 > 0$，使得

$$\mathrm{Re}(\mathrm{op_{sc}}(a)\,\mathrm{op_{sc}}(\chi)u, \mathrm{op_{sc}}(\chi)u) \geq C\|\Lambda^{m/2}\,\mathrm{op_{sc}}(\chi)u\|^2 - C_2h\|\Lambda^{(m-1)/2}u\|^2, \tag{3.21}$$

对施瓦茨空间中的所有 u。

3.3. **一致稳定性**。 定理 2.2 第一部分的证明基于 Gearhart-Huang-Prüss 结果，我们在下文回顾该结果。

定理 3.1。 设 A 是 H 上半群 e^{tA} 的生成元。我们假设满足以下条件

$$\begin{aligned}&(1)\ \ \exists M > 0, \quad \|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M \text{ 对所有 } t \geq 0,\\ &(2)\ \ A - i\mu I \text{ 对所有 } \mu \in \mathbb{R} \text{ 在 } H \text{ 上可逆},\\ &\exists M > 0, \quad \|(A - i\mu I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M。\end{aligned} \tag{3.}$$

那么存在 $\lambda > 0$ 和 $C > 0$，使得对所有 $t \geq 0$，$\|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Ce^{-\lambda t}$。

这个结果是经典的，我们引用 [18], [39], [25, 定理 3], [16] 作为证明。在我们的情形中，第一个条件成立，因为能量是非增的。第一项由能量衰减得出。第二项对 $\mu = 0$ 并不成立，因为 $\mathcal{A}_d$ 有非平凡的核。为避免~这一困难，我们只需将 $\mathcal{A}_d$ 视为作用在 $H = H/\ker \mathcal{A}_d$上的算子。在这个空间上，$A - i\mu I$ 对所有 $\mu \in \mathbb{R}$均可逆，证明见 [3]。在 [3] 中，我们证明以下估计$\|(\mathcal{A}_d - i\mu I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\tilde{H})} \leq Me^{C|\mu|}$，其中常数为 $M > 0$ 和 $C > 0$。特别地，对于所有 $C > 0$，都存在 $M > 0$，使得对于每个 $\mu \in [-C, C]$，都有 $\|(A - i\mu I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M$。这意味着，证明定理 3.1 的第三项时，只需考虑足够大的 $|\mu|$。

3.4. **声学系统的不变形式**。声学系统的半群生成元已在上文定义（见（1.2）和（1.3））。引入下面的系统将十分有用

$$\begin{cases} -\nabla_g r - i\mu u - bu = f, & \text{in } \Omega,\\ -\mathrm{div}_g\, u - i\mu r = q, & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{3.22}$$

其中（f，q）$\in H = (L^2(\Omega))^d \times L^2_m(\Omega)$，且（$u$，$r$）$\in \mathcal{D}(\mathcal{A})$。从几何角度看，$u$ 是一个向量场，或等价地说，是一个1阶逆变张量，而 g 是欧几里得度量。形式（3.22）允许我们进行变量变换，并追踪不同的几何量，即 g 和u。采用上述记号，这等价于估计（$\mathcal{A}_d - i\mu$）$^{-1}$，并通过（f，q）估计（u，r）。注意，空间 H分解为直和 $\ker\ \mathcal{A}_d \oplus (H/\ker \mathcal{A}_d)$，并且容易看出，对于 $\mu \neq 0$，在 H 上对（$\mathcal{A}_d - i\mu$）$^{-1}$ 的估计，会推出将（$\mathcal{A}_d - i\mu$）$^{-1}$限制在（$H/\ker \mathcal{A}_d$）上的估计。下文中，我们不考虑空间（$H/\ker\ \mathcal{A}_d$），因为引入该空间只是为了避免 $\mathcal{A}_d$ 具有非平凡零空间这一事实所带来的问题。在测地坐标下，系统保持相同的形式，其中度量 g 满足第 3.1 节中所述的性质。

为使用半经典工具，我们设定 $h = 1/|\mu|$，并将系统 (3.22) 乘以 ih，得到

$$\begin{cases} -ih\nabla_g r + \varpi u - ihbu = ihf, & \text{in } \Omega,\\ -ih\,\mathrm{div}_g\, u + \varpi r = ihq, & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{3.23}$$

其中 $\varpi = \mu/|\mu| = \pm 1$。下文中我们仅考虑情形 $\varpi = +1$。事实上，在系统 (3.23) 中将 u 替换为$-u$，并将 q 替换为 $-q$，且取 $\varpi = +1$，得到的系统中 $\varpi = -1$ 和 b 变为 $-b$。注意，b 的符号对于能量衰减至关重要，但在预解算子估计的证明中不起作用。不过，b 应为非负或非正；此处属于这种情形。

4. 半经典测度的引入

目标是证明以下估计：存在 $C>0$ 使得

$$\|u\|_{(L^2(\Omega))^d}+\|r\|_{L^2(\Omega)}\leq C(\|f\|_{(L^2(\Omega))^d}+\|q\|_{L^2(\Omega)}), \tag{4.24}$$

对于所有的 $(f,q)\in(L^2(\Omega))^d\times L^2(\Omega)$，以及 $(u,r)\in(L^2(\Omega))^d\times L^2(\Omega)$，它们都是方程 (3.22) 或等价的方程 (3.23) 的解。

我们用反证法证明估计 (4.24)。若估计 (4.24) 不成立，则存在一个序列 $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 以及 (f_{h_j},q_{h_j}) 和 (u_{h_j},r_{h_j})，它们满足估计 (4.24) 和方程 (3.23)，其中用 h_j 代替 h，使得

$$\begin{aligned}&h_j\to 0 \text{ as } j\to+\infty,\\&\|u_{h_j}\|_{(L^2(\Omega))^d}+\|r_{h_j}\|_{L^2(\Omega)}=1,\\&\|f_{h_j}\|_{(L^2(\Omega))^d}+\|q_{h_j}\|_{L^2(\Omega)}\to 0 \text{ as } j\to+\infty.\end{aligned} \tag{4.25}$$

如上所见，当 $|\mu|$ 有界时，估计 (4.24) 成立，因此只有当 $|\mu|$ 趋于 $+\infty$ 时，才可能产生这样的序列。由齐次性，我们总可以将 (u_{h_j},r_{h_j}) 归一化。下文中，我们省略下标 j，并用 h 代替 h_j。读者应注意，h 实际上是一个序列。最后，经过这些化简并采用上述记号，我们得到序列 h、(u_h,r_h) 和 (f_h,q_h)，使得

$$\begin{cases}-ih\nabla_g r_h+u_h-ihbu_h=ihf_h, & \text{in } \Omega,\\ -ih\,\mathrm{div}_g\,u_h+r_h=ihq_h, & \text{in } \Omega,\\ u_h.n=0 \text{ on } \partial\Omega\end{cases} \tag{4.26}$$

and

$$\begin{aligned}&\|u_h\|_{(L^2(\Omega))^d}+\|r_h\|_{L^2(\Omega)}=1,\\&\|f_h\|_{(L^2(\Omega))^d}+\|q_h\|_{L^2(\Omega)}\to 0 \text{ as } h\to 0.\end{aligned} \tag{4.27}$$

4.1. 半经典测度。 为了定义与 $\gamma_h=(u_h,r_h)$ 相关的半经典测度，我们必须证明 γ_h 弱收敛到 0。为此，我们将 γ_h 分解为 Littlewood-Paley 型级数。

下面我们将使用泛函演算，具体陈述请参见 [40]，尤其是定理 VIII.6。

设 ψ 是一个 $C^\infty(\mathbb{R})$ 截断函数，使得 ψ 的支集包含于 $|s|\leq 2$ 中，并且对 $|s|\leq 1$ 有 $\psi(s)=1$。我们有

$$1=\lim_{N\to\infty}\psi(2^{-N}s)=\psi(s)+\sum_{k=1}^{\infty}(\psi(2^{-k}s)-\psi(2^{-k+1}s))=\psi(s)+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(2^{-k}s),$$

其中 $\varphi(s)=\psi(s)-\psi(2s)$。

这里我们使用引言中为 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 引入的记号。由于 $i\mathcal{A}$ 是自伴的，我们有

$$\begin{aligned}Id&=\psi(iB^{-1}h\mathcal{A})+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(2^{-k}iB^{-1}h\mathcal{A})\\&=\psi(iBh\mathcal{A})+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(2^{-k}iB^{-1}h\mathcal{A})+\psi(iB^{-1}h\mathcal{A})-\psi(iBh\mathcal{A}),\end{aligned} \tag{4.28}$$

其中 $B>0$ 将取为充分大。

引理 4.1. 设 (u_h, r_h) 满足 (4.26)，设 $B > 0$ 充分大，设 $\gamma_h = (u_h, r_h)^T$，则有

$$\|\psi(iBh\mathcal{A})\gamma_h\| \leq Ch(\|f_h\| + \|q_h\| + \|\gamma_h\|)$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi(2^{-k}iB^{-1}h\mathcal{A})\gamma_h\| \leq Ch(\|f_h\| + \|q_h\| + \|\gamma_h\|).$$

证明。我们可以将 (4.26) 写为，

$$\begin{cases} -ih\mathcal{A}\gamma_h + \gamma_h - ih\mathcal{B}\mathcal{B}^*\gamma_h = hF_h \\ \end{cases}$$

采用前述记号 $\mathcal{B}^* = (\sqrt{b}, 0)$ 和 $F_h = i\begin{pmatrix} f_h \\ q_h \end{pmatrix}$。在两边应用 $\psi(iBh\mathcal{A})$，得到

$$-iB^{-1}\tilde{\psi}(iBh\mathcal{A})\gamma_h + \psi(iBh\mathcal{A})\gamma_h - ih\psi(iBh\mathcal{A})\mathcal{B}\mathcal{B}^*\gamma_h = h\psi(iBh\mathcal{A})F_h,$$

其中 $\tilde{\psi}(s) = s\psi(s)$。我们得到

$$\|\psi(iBh\mathcal{A})\gamma_h\| \lesssim h\|\gamma_h\| + h\|F_h\| + B^{-1}\|\tilde{\psi}(iBh\mathcal{A})\gamma_h\|.$$

由于 $\psi(s) = s\chi(s)\psi(s)$，其中 χ 是一个光滑截断函数，满足 $\chi(s) = 1$，对任意 $|s| \leq 2$。我们有

$$\|\tilde{\psi}(iBh\mathcal{A})\gamma_h\| \lesssim \|\psi(iBh\mathcal{A})\gamma_h\|.$$

取 B 充分大，使得该项可由左端吸收，即可证明第一个估计。

现在我们在 γ_h 上对方程两边应用 $\varphi(2^{-k}iB^{-1}h\mathcal{A})$，得到

$$-i2^kB\tilde{\varphi}(2^{-k}iB^{-1}h\mathcal{A})\gamma_h + \varphi(2^{-k}iB^{-1}h\mathcal{A})\gamma_h - ih\varphi(2^{-k}iB^{-1}h\mathcal{A})\mathcal{B}\mathcal{B}^*\gamma_h = h\varphi(2^{-k}iB^{-1}h\mathcal{A})F_h,$$

其中 $\tilde{\varphi}(s) = s\varphi(s)$，并得到估计

$$2^kB\|\tilde{\varphi}(2^{-k}iB^{-1}h\mathcal{A})\gamma_h\| \lesssim \|\varphi(2^{-k}iB^{-1}h\mathcal{A})\gamma_h\| + h\|F_h\| + h\|\gamma_h\|. \tag{4.29}$$

在 φ 的支集上，我们有 $1/2 \leq |s| \leq 2$，因此 $\varphi(s) \leq 2|s|\varphi(s)$。由泛函演算$\|\tilde{\varphi}(\alpha ih\mathcal{A})\| = \||\alpha ih\mathcal{A}|\varphi(\alpha ih\mathcal{A})\|$ 对所有 $\alpha > 0$ 成立。由 (4.29) 和泛函演算可得。

$$2^kB\|\varphi(2^{-k}iB^{-1}h\mathcal{A})\gamma_h\| \lesssim \|\varphi(2^{-k}iB^{-1}h\mathcal{A})\gamma_h\| + h\|F_h\| + h\|\gamma_h\|.$$

若 B 足够大，我们便可将项 $\|\varphi(2^{-k}iB^{-1}h\mathcal{A})\gamma_h\|$ 吸收到左端，对 k 求和后即可得到引理的第二个估计。□

引理 4.2. 序列 (u_h, r_h) 弱收敛到 0。

证明. 设 χ 由 $\chi(s) = \psi(B^{-1}s) - \psi(Bs)$ 定义。由 (4.28) 和引理 4.1，我们有

$$\gamma_h = \chi(ih\mathcal{A})\gamma_h + O(h). \tag{4.30}$$

对于 $v \in L^2(\Omega)^{d+1}$，我们有

$$(\chi(ih\mathcal{A})\gamma_h, v) = (\gamma_h, \chi(ih\mathcal{A})v).$$

序列 $(\gamma_h)_h$ 有界，且 $(\chi(ih\mathcal{A})v)_h$ 收敛于 0。事实上，根据泛函演算

$$\|\chi(ih\mathcal{A})v\|^2 = \int \chi^2(h\lambda)(dE_\lambda v, v),$$

其中 $(E_\lambda)_\lambda$ 是与 $i\mathcal{A}$ 相关的投影算子族。特别地，$(dE_\lambda v, v)$ 是有界测度。由于 $\chi^2(h\lambda)$ 处处收敛到 0，且 $\chi^2 \leq 1$，控制收敛定理推出 $\int \chi^2(h\lambda)(dE_\lambda v, v)$ 收敛到 0。这证明了结果 □

由于 u_h 和 r_h 是 $L^2(\Omega)$ 中的有界函数，我们将这些函数在 Ω 外延拓为 0，并分别将这些延拓记为 $\underline{u}_h$ 和 $\underline{r}_h$。显然，$(\underline{u}_h, \underline{r}_h)$ 在 $(L^2(\mathbb{R}^d))^d \times L^2(\mathbb{R}^d)$ 中弱收敛到 0。

令 $a_j^k(x,\xi)$、$b^\ell(x,\xi)$、$c(x,\xi)$ 为零阶符号。我们将 $b=(b^\ell)$ 视为一个向量场（或逆变向量场），并将 $a=(a_j^k)$ 视为一个一阶协变、一阶逆变张量。我们假设 a 具有如下对称性：$g^{\ell j}a_j^k = g^{kj}a_j^\ell$，且这一关系等价于 $g_{\ell j}a_k^j = g_{kj}a_\ell^j$。这两个公式都很有用。

由于 $(\underline{u}_h, \underline{r}_h)$ 弱收敛到 0，在 h 的一个子列意义下，可以通过以下关系定义半经典测度：

$$\begin{aligned}&((\mathrm{op_{sc}}(a_j^k)\underline{u}_h^j),(\underline{u}_h^\ell))_g + ((\mathrm{op_{sc}}(b^\ell)\underline{r}_h),(\underline{u}_h^j))_g + (g_{jk}\,\mathrm{op_{sc}}(b^j)\underline{u}_h^k,\underline{r}_h)_g + (\mathrm{op_{sc}}(c)\underline{r}_h,\underline{r}_h)_g\\ &\text{收敛到}\\ &\langle \mu_j^k, a_k^j\rangle + 2\langle \nu_j, b^j\rangle + \langle m, c\rangle \text{ as } h \text{ goes to } 0,\end{aligned} \tag{4.31}$$

其中，测度 $(\mu_j^k)_{1\le j,k\le d}$ 在如下意义下具有对称性：$g^{\ell j}\mu_j^k = g^{kj}\mu_j^\ell$，该性质与 $(a_j^k)_{1\le j,k\le d}$ 上的对称性有关。由（4.26）可知，函数 $\underline{u}_h$ 和 $\underline{r}_h$ 满足以下系统

$$\begin{cases} \underline{u}_h - ih\nabla_g \underline{r}_h = hf_h - ih(r_h)_{|\partial\Omega}\nabla_g(\chi_\Omega),\\ -ih\,\mathrm{div}_g\,\underline{u}_h + \underline{r}_h = hq_h, \end{cases} \tag{4.32}$$

其中 $\nabla_g(\chi_\Omega)$ 是 $\partial\Omega$ 上的测度。下文将给出适配局部坐标下 $\nabla_g(\chi_\Omega)$ 的一种形式。由于 $u_h.n = 0$ 边界处，第二个方程右端没有测度项。

命题 4.1. 测度 μ_j^k, ν_k 和 m 的支集均包含于特征集

$$\{(x,\xi)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d,\ (g^{jp}(x)\xi_p\xi_j - 1) = 0 \text{ and } x\in\overline{\Omega}\},$$

并满足以下方程

$$\begin{aligned}&\nu_k = -\xi_k m,\\ &\mu_k^j = g^{jp}\xi_p\xi_k m \text{ for all } 1\le j,k\le d.\end{aligned}$$

显然，若 $x\in\mathbb{R}^d\setminus\Omega$ 中的 (x,ξ) 在 x 的某个邻域内为零，则测度在 (x,ξ) 的某个邻域内也为零，因为 $(\underline{u}_h, \underline{r}_h)$ 在该邻域内为零。我们先描述 Ω 中的半经典测度。边界邻域内的描述将在下文给出。对于在 Ω 中紧支撑的符号 a_j^k，我们考虑

$$I_1(h) = \big((\mathrm{op_{sc}}(a_j^k)(\underline{u}_h^j - ih(\nabla_g\underline{r}_h)^j)),(\underline{u}_h^\ell)\big)_g + \big((\mathrm{op_{sc}}(a_j^k)\underline{u}_h^j),(\underline{u}_h^\ell - ih(\nabla_g\underline{r}_h)^\ell)\big)_g. \tag{4.33}$$

由系统 (4.32)，当 h 时，$I_1(h)$ 趋于 0。注意，$-ih(\nabla_g)^j\underline{r}_h = 算子_{sc}(g^{jk})\xi_k)\underline{r}_h + hV\underline{r}_h$，其中 V 有界；并且 $-ih\,\mathrm{div}_g\,w = 算子_{sc}(\xi_k)w^k + hWw$，其中 W 有界。下文中，我们用 $O(h)$ 表示所有在 L^2-范数下由 h 控制的项。由分部积分公式和符号演算可得

$$\begin{aligned}&\big((\mathrm{op_{sc}}(a_j^k)(-ih(\nabla_g\underline{r}_h)^j)),(\underline{u}_h^\ell)\big)_g = \big((\mathrm{op_{sc}}(a_j^k g^{jp}\xi_p)\underline{r}_h),(\underline{u}_h^\ell)\big)_g + O(h)\\ &\big((\mathrm{op_{sc}}(a_j^k)\underline{u}_h^j),(-ih(\nabla_g\underline{r}_h)^\ell)\big)_g = \big(-ih\,\mathrm{div}_g(\mathrm{op_{sc}}(a_j^k)\underline{u}_h^j),\underline{r}_h\big)_g = (\mathrm{op_{sc}}(a_j^k\xi_k)\underline{u}_h^j,\underline{r}_h)_g + O(h).\end{aligned}$$

Then

$$I_1(h) = 2\big((\mathrm{op_{sc}}(a_j^k)\underline{u}_h^j),(\underline{u}_h^\ell)\big)_g + \big((\mathrm{op_{sc}}(a_j^k g^{jp}\xi_p)\underline{r}_h),(\underline{u}_h^\ell)\big)_g + \big(\mathrm{op_{sc}}(a_j^k\xi_k)\underline{u}_h^j,\underline{r}_h\big)_g + O(h).$$

我们可以应用 (4.31)，因为根据 a 上的对称性，我们有

$g_{qk}a_j^k g^{jp}\xi_p = g_{jk}a_q^k g^{jp}\xi_p = \delta_k^p a_q^k\xi_p = a_q^p\xi_p$因此，关于 b^j 的条件得到满足。我们得到

$$2\langle\mu_k^j, a_j^k\rangle + 2\langle\nu_k, a_j^k g^{jp}\xi_p\rangle = 0,$$

对所有在 Ω 中紧支撑的符号 a_j^k，都有

$$\mu_k^j + g^{jp}\xi_p\nu_k = 0 \text{ for all } 1 \le j,k \le d. \tag{4.34}$$

对于在 Ω 中紧支撑的符号 b^k，我们考虑

$$\begin{aligned} I_2(h) = {} & \big((\mathrm{op_{sc}}(b^k)(-ih\,\mathrm{div}_g\,\underline{u}_h + \underline{r}_h)), (\underline{u}_h^\ell)\big)_g + \big(\mathrm{op_{sc}}(g_{jk}b^j)(\underline{u}_h^k - ih(\nabla_g \underline{r}_h)^k), \underline{r}_h\big)_g \\ & + \big((\mathrm{op_{sc}}(b^q)\underline{r}_h), (\underline{u}_h^k - ih(\nabla_g \underline{r}_h)^k)\big)_g + \big(\mathrm{op_{sc}}(g_{jk}b^j)\underline{u}_h^k, -ih\,\mathrm{div}_g\,\underline{u}_h + \underline{r}_h\big)_g. \end{aligned} \tag{4.35}$$

由系统 (4.32)，我们有 $I_2(h)$ 当 h 时趋于 0。由分部积分公式和符号演算，我们有

$$\begin{aligned} I_2(h) = {} & \big((\mathrm{op_{sc}}(b^k\xi_j)\underline{u}_h^j), (\underline{u}_h^\ell)\big)_g + \big((\mathrm{op_{sc}}(b^k)\underline{r}_h), (\underline{u}_h^\ell)\big)_g + \big(\mathrm{op_{sc}}(g_{jk}b^j)\underline{u}_h^k, \underline{r}_h\big)_g \\ & + \big(\mathrm{op_{sc}}(g_{jk}g^{kq}b^j\xi_q)\underline{r}_h, \underline{r}_h\big)_g + \big((\mathrm{op_{sc}}(b^q)\underline{r}_h), (\underline{u}_h^k)\big)_g + \big(\mathrm{op_{sc}}(b^q\xi_q)\underline{r}_h, \underline{r}_h\big)_g \\ & + \big((\mathrm{op_{sc}}(g_{jk}b^j g^{pq}\xi_p)\underline{u}_h^k), (\underline{u}_h^\ell)\big)_g + \big(\mathrm{op_{sc}}(g_{jk}b^j)\underline{u}_h^k, \underline{r}_h\big)_g + O(h) \\ = {} & \big((\mathrm{op_{sc}}(b^k\xi_j + g_{jq}b^q g^{pk}\xi_p)\underline{u}_h^j), (\underline{u}_h^\ell)\big)_g + 2\big((\mathrm{op_{sc}}(b^k)\underline{r}_h), (\underline{u}_h^\ell)\big)_g + 2\big(\mathrm{op_{sc}}(g_{jk}b^j)\underline{u}_h^k, \underline{r}_h\big)_g \\ & + 2\big(\mathrm{op_{sc}}(b^j\xi_j)\underline{r}_h, \underline{r}_h\big)_g + O(h). \end{aligned}$$

为了应用 (4.31)，我们必须满足某些对称性。我们有

$$g_{k\ell}(b^k\xi_j + g_{jq}b^q g^{pk}\xi_p) = g_{k\ell}b^k\xi_j + g_{jq}b^q\xi_\ell,$$

它关于 j 和 ℓ 对称。于是，当

$$\langle \mu_k^j、\ b^k\xi_j + g_{jq}b^q g^{pk}\xi_p\rangle + 4\langle \nu_k, b^k\rangle + 2\langle m, b^k\xi_k\rangle = \langle \xi_j\mu_k^j, b^k\rangle + \langle g_{jq}g^{pk}\xi_p\mu_k^j, b^q\rangle + 4\langle \nu_k, b^k\rangle + 2\langle \xi_k m, b^k\rangle$$

以下方程

$$\xi_j\mu_k^j + g_{jk}g^{pq}\xi_p\mu_q^j + 4\nu_k + 2\xi_k m = 0 \text{ for all } 1 \le k \le d. \tag{4.36}$$

对于在 Ω 中紧支撑的符号 c，我们考虑

$$I_3(h) = \big(\mathrm{op_{sc}}(c)(-ih\,\mathrm{div}_g\,\underline{u}_h + \underline{r}_h), \underline{r}_h\big)_g + \big(\mathrm{op_{sc}}(c)\underline{r}_h, -ih\,\mathrm{div}_g\,\underline{u}_h + \underline{r}_h\big)_g. \tag{4.37}$$

由系统 (4.32)，当 h 时，$I_3(h)$ 趋于 0；分部积分后得到

$$I_3(h) = 2\big(\mathrm{op_{sc}}(c)\underline{r}_h, \underline{r}_h\big)_g + \big(\mathrm{op_{sc}}(c\xi_j)\underline{u}_h^j, \underline{r}_h\big)_g + \big(\mathrm{op_{sc}}(cg^{kj}\xi_j)\underline{r}_h, \underline{u}_h^j\big)_g + O(h). \tag{4.38}$$

注意到 $g_{pk}g^{kj}c\xi_j = c\xi_p$，我们可以应用 (4.31)，得到

$$m + g^{kj}\xi_j\nu_k = 0. \tag{4.39}$$

由 (4.34)、(4.36) 和 (4.39)，我们得到关于测度 μ_k^j、ν_k 和 m 的以下系统。

$$\begin{cases} \mu_k^j + g^{jp}\xi_p\nu_k = 0 \text{ for all } 1 \le j,k \le d, \\ \xi_j\mu_k^j + g_{jk}g^{pq}\xi_p\mu_q^j + 4\nu_k + 2\xi_k m = 0 \text{ for all } 1 \le k \le d, \\ m + g^{kj}\xi_j\nu_k = 0. \end{cases} \tag{4.40}$$

由 $(\mu_j^k)_{1\le j,\ k\le d}$ 上的对称性，我们可以写出第二个方程

$$\xi_j\mu_k^j + g_{jk}g^{jq}\xi_p\mu_q^p + 4\nu_k + 2\xi_k m = 0 \text{ for all } 1 \le k \le d,$$

因此我们有

$$2\xi_j\mu_k^j + 4\nu_k + 2\xi_k m = 0 \text{ for all } 1 \le k \le d.$$

将 (4.40) 的第一个方程代入此方程中的 μ_k^j，我们得到

$$-g^{jp}\xi_p\xi_j\nu_k + 2\nu_k + \xi_k m = 0 \text{ for all } 1 \le k \le d. \tag{4.41}$$

将该方程乘以 $g^{kq}\xi_q$，并利用 (4.40) 的第三个方程 $g^{jp}\xi_p\nu_k = -m$，可得

$$g^{jp}\xi_p\xi_j m - 2m + g^{kq}\xi_q\xi_k m = 0.$$

Then

$$(g^{jp}\xi_p\xi_j - 1)m = 0, \tag{4.42}$$

这意味着 m 的支集包含于 $(g^{jp}\xi_p\xi_j - 1) = 0$。若 $(g^{jp}\xi_p\xi_j - 1) \neq 0$，由 (4.40) 且由于 $m = 0$，我们得到以下系统

$$\begin{cases} \mu_k^j + g^{jp}\xi_p\nu_k = 0 \text{ for all } 1 \le j,k \le d, \\ \xi_j\mu_k^j + 2\nu_k = 0 \text{ for all } 1 \le k \le d, \\ g^{kj}\xi_j\nu_k = 0. \end{cases} \tag{4.43}$$

将第一个方程乘以 $g^{k\ell}\xi_\ell$，我们得到

$$g^{k\ell}\xi_\ell\mu_k^j + g^{k\ell}\xi_\ell g^{jp}\xi_p\nu_k = 0 \text{ for all } 1 \le j \le d.$$

由 (4.43) 的第三个方程和对称性 $g^{k\ell}\mu_k^j = g^{kj}\mu_k^\ell$，我们有

$$g^{kj}\xi_\ell\mu_k^\ell = 0 \text{ for all } 1 \le j \le d,$$

并且由于 $(g^{kj})_{1\le j,\ k\le d}$ 可逆，我们得到 $\xi_\ell\mu_j^\ell = 0$，对所有 $1 \le j \le d$ 均成立；由 (4.43) 的第二个方程可知，对于 $1 \le k \le d$，有 $\nu_k = 0$；而第一个方程则给出 $\mu_k^j = 0$，其中 $1 \le k$、$j \le d$。因此，所有测度μ_k^j、ν_k 和 m 的支集都包含于 $(g^{jp}\xi_p\xi_j - 1) = 0$。

现在，由 (4.41)，由于在测度 $g^{jp}\xi_p\xi_j = 1$ 的支集上，我们有

$$\nu_k = -\xi_k m,$$

并且由 (4.40) 的第一个方程，我们有

$$\mu_k^j = g^{jp}\xi_p\xi_k m \text{ for all } 1 \le j,k \le d.$$

这就完成了在 Ω 中命题 4.1 的证明。

现在我们必须证明边界处也有相同的结果。该证明是以下两个引理的推论。

引理 4.3。设 a 是一个紧支撑符号，则存在 $C > 0$，使得

$$\| \operatorname{op}_{\mathrm{sc}}(a)(w \otimes \delta_{x_d=0})\| \le Ch^{-1/2}|w|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})},$$

对所有属于 $\mathbb{R}^{d-1}_{x'}$ 的施瓦茨空间的 w 均成立。

引理 4.4。设 $\underline{u}_h$ 和 $\underline{r}_h$ 是系统 (4.32) 的解，则极限 $\lim_{h\to 0} h|\Lambda^{1/2}(r_h)_{|x_d=0}|^2 = 0$。

利用这些引理，我们可以证明命题 4.1。将系统 (4.32) 写成测地坐标。我们有

$$\begin{cases} \underline{u}_h - ih\nabla_g\underline{r}_h = hf_h - ih(r_h)_{|x_d=0} \otimes \delta_{x_d=0}, \\ -ih\operatorname{div}_g \underline{u}_h + \underline{r}_h = hq_h. \end{cases} \tag{4.44}$$

沿用上文给出的证明，在 $I_1(h)$（见 (4.33)）中，我们还需要控制两个额外项，

$$(\operatorname{op}_{\mathrm{sc}}(a)(h(r_h)_{|x_d=0} \otimes \delta_{x_d=0}), \underline{u}_h^j) \text{ and}$$

$$(\operatorname{op}_{\mathrm{sc}}(a)(\underline{u}_h^j), h(r_h)_{|x_d=0} \otimes \delta_{x_d=0}) = (\underline{u}_h^j, \operatorname{op}_{\mathrm{sc}}(a)^*(h(r_h)_{|x_d=0} \otimes \delta_{x_d=0})).$$

对于 $I_2(h)$（见 (4.35)），我们需要控制同类型的项，只需将 $\underline{u}_h^j$ 替换为 $\underline{r}_h$。项$I_3(h)$（见 (4.37)）没有额外的边界项。由于这些项的形式类似，我们只处理其中一项。应用引理 4.3，得到

$$|(\operatorname{op}_{\mathrm{sc}}(a)(h(r_h)_{|x_d=0} \otimes \delta_{x_d=0}), \underline{u}_h^j)| \lesssim h^{1/2}\|\underline{u}_h^j\||(r_h)_{|x_d=0}| \to 0 \text{ as } h,$$

根据引理 4.4。

引理 *4.3* 的证明。我们可以假设 $a(x,\xi) = a_1(x',\xi')\chi(x_d)\ell(\xi_d)$，其中 a_1、χ 和 ℓ 均为紧支撑，因为所有符号都可以用此类符号的和来逼近。根据与符号相关的算子的定义，我们有

$$\mathrm{op_{sc}}(a)(w\otimes\delta_{x_d=0}) = \chi(\mathrm{op_{sc}}(a_1)w)\otimes \mathrm{op_{sc}}(\ell)\delta_{x_d=0}.$$

对傅里叶变量进行直接计算可得 $\|\mathrm{op_{sc}}(\ell)\delta_{x_d=0}\|_{L^2(\mathbb{R})} \lesssim h^{-1/2}$，并且对于所有 $N\in\mathbb{N}$，$|\mathrm{op_{sc}}(a_1)w| \lesssim |w|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}$，因此可得该引理。□

引理 *4.4* 的证明。我们在测地坐标下的一个边界点邻域内工作，可以写成 $x_0=(x_0',0)$。我们使用第 3.1 节中定义的记号 $\tilde g$。在内部写出的系统为

$$\left\{\begin{array}{l} u_h^k + \mathrm{op_{sc}}(\tilde g^{jk}\xi_j)r_h = h\tilde f_h^k, \text{ for } k=1,...,d-1,\\ u_h^d + hD_d r_h = h\tilde f_h^d\\ hD_d u_h^d + \displaystyle\sum_{j=1}^{d-1}\mathrm{op_{sc}}(\xi_j)u_h^j + r_h = h\tilde q_h, \end{array}\right. \tag{4.45}$$

其中 $\tilde f_h$ 和 $\tilde q_h$ 在 L^2 中有界。事实上，系统 (4.45) 来自系统（4.26）和伪微分演算。由 (3.13) 和 (3.14)，我们有 $-ih\nabla_{\tilde g}r_h = \mathrm{op_{sc}}(\tilde g^{jk})r_h + O(h)$，$_{d-1}hbu_h = O(h)$，以及 $-hi\,\mathrm{div}_g u_h = hD_d u_h^d + \sum \mathrm{op_{sc}}(\xi_j)u_h^j + O(h)$，其中我们用 $O(h)_{j=1}$ 表示

在 L^2-范数下由 Ch 控制的项。

利用前面的方程，我们可以在（4.45）的最后一个方程中将 u_h^j 替换掉。于是得到 2×2 系统

$$\left\{\begin{array}{l} u_h^d + hD_d r_h = h\tilde f_h^d\\ hD_d u_h^d - \displaystyle\sum_{j=1}^{d-1}\mathrm{op_{sc}}(\xi_j)\,\mathrm{op_{sc}}(\tilde g^{jk}\xi_k)r_h + r_h = hq_h + h\sum_{j=1}^{d-1}\mathrm{op_{sc}}(\xi_j)\tilde f_h^j. \end{array}\right. \tag{4.46}$$

根据符号演算，$\sum_{j=1}^{d-1}$ 算子$_{\mathrm{sc}}(\xi_j)$ 算子$_{\mathrm{sc}}(\tilde g^{jk}\xi_k)$ = 算子$_{\mathrm{sc}}(R(x,\xi'))$ + h 算子$_{\mathrm{sc}}(r_1)$，其中 r_1 的阶为 1，且 $R(x,\xi') = \tilde g^{jk}\xi_k\xi_j$。系统（4.46）可改写为

$$\left\{\begin{array}{l} u_h^d + \mathrm{op_{sc}}(\xi_d)r_h = h\tilde f_h^d\\ \mathrm{op_{sc}}(\xi_d)u_h^d - \mathrm{op_{sc}}(R(x,\xi')-1)r_h = hG, \end{array}\right. \tag{4.47}$$

where $G = q_h + \displaystyle\sum_{j=1}^{d-1}\mathrm{op_{sc}}(\xi_j)\tilde f_h^j + \mathrm{op_{sc}}(r_1)r_h$.

我们定义三类点：双曲点，即 $R(x,\xi') - 1 < 0$ 的集合；掠射点，即 $R(x,\xi') - 1 = 0$ 的集合；以及椭圆点，即 $R(x,\xi')-1>0$ 的集合。注意，在双曲和掠射这两种情况下，ξ' 有界。接下来，我们进行一些对双曲情形或掠射情形有用的计算。

令 $\chi(x,\xi')$ 在 (x_0,ξ_0') 的一个邻域上紧支撑。特别地，对于所有 $N\in\mathbb{N}$，$\chi\in S^{-N}$。我们记 $w_h =$ 算子$_{\mathrm{sc}}(\chi)r_h$ 和 $v_h =$ 算子$_{\mathrm{sc}}(\chi)u_h^d$，特别是 $(v_h)_{|x_d=0} = 0$ 来自边界条件。根据符号演算，我们有 hD_d算子$_{\mathrm{sc}}(\chi)z =$ 算子$_{\mathrm{sc}}(\chi)hD_d z + A$，其中 $\|A\| \lesssim h\|z\|$。我们还有

$$\mathrm{op_{sc}}(\chi)\,\mathrm{op_{sc}}(R(x,\xi')-1) = \mathrm{op_{sc}}(R(x,\xi')-1)\,\mathrm{op_{sc}}(\chi) + [\mathrm{op_{sc}}(\chi),\mathrm{op_{sc}}(R(x,\xi')-1)],$$

and [算子$_{\mathrm{sc}}(\chi)$ 的符号，算子$_{\mathrm{sc}}(R(x,\xi')-1)$] 对所有 $N\in\mathbb{N}$ 都属于 hS^{-N}。于是我们有

$$\|[\mathrm{op_{sc}}(\chi),\mathrm{op_{sc}}(R(x,\xi')-1)]z\| \lesssim h\|z\|.$$

令 $\tilde\chi$ 紧支撑，并令 $\tilde\chi = 1$ 位于 χ的支集上。由 $\mathrm{op_{sc}}(R(x,\xi')-1)\mathrm{op_{sc}}(\chi)$ 定义的算子的符号为 $(R(x,\xi')-1)\chi + ha_0$，其中对所有 $N\in\mathbb{N}$均有 $a_0\in hS^{-N}$。并且

$\mathrm{op_{sc}}(\tilde\chi^2(R(x,\xi')-1))\,\mathrm{op_{sc}}(\chi)$ 的符号为 $(R(x,\xi')-1)\chi+ha_1$，其中对所有 $N\in\mathbb{N}$均有 $a_1\in hS^{-N}$。于是我们有

$$\|(\mathrm{op_{sc}}(R(x,\xi')-1)\,\mathrm{op_{sc}}(\chi)-\mathrm{op_{sc}}(\tilde\chi^2(R(x,\xi')-1))\,\mathrm{op_{sc}}(\chi))z\|\lesssim h\|z\|.$$

应用 算子$_{\mathrm{sc}}(\chi)$到系统（4.47），利用先前分析，我们得到以下系统 ：

$$\begin{cases} hD_dw_h+v_h=h\tilde f_h\\ hD_dv_h-\mathrm{op_{sc}}(\tilde\chi^2(R(x,\xi')-1))w_h=h\tilde G_h\\ (v_h)_{|x_d=0}=0, \end{cases}\tag{4.48}$$

其中
$$\|\tilde G_h\|\lesssim\|q_h\|+\sum_{j=1}^{d-1}\|\tilde f_h^j\|+\|r_h\|+\|u_h^d\|.$$

4.1.1. 双曲区域。 现在我们处理双曲点

$$\mathcal{H}=\{(x,\xi')\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d-1},R(x,\xi')-1<0\}.$$

设 χ 在 $\mathcal{H}$ 中紧支撑，且 $\tilde\chi$ 如上所定义。设 $\lambda(x,\xi')=\tilde\chi(x,\xi')\sqrt{1-R(x,\xi')}$。根据符号演算，我们有 算子$_{\mathrm{sc}}(\lambda^2)$ 算子(χ) $=-$ 算子$_{\mathrm{sc}}(\tilde\chi^2(R-1))$ $+h$ 算子$_{\mathrm{sc}}(a_0)$，其中 a_0 为 0 阶。系统（4.48）写作

$$\begin{cases} hD_dw_h+v_h=h\tilde f_h\\ hD_dv_h+\mathrm{op_{sc}}(\lambda^2)w_h=h\tilde G_h\\ (v_h)_{|x_d=0}=0, \end{cases}\tag{4.49}$$

其中，$(\tilde f_h,\tilde G_h)$ 已作修改，但关于 h，它们在 L^2 中仍一致有界。下文中，我们始终用 $(\tilde f_h,\tilde G_h)$ 表示 L^2 有界项。

令 $z_k=v_h+(-1)^k$ 算子$_{\mathrm{sc}}(\lambda)w_h$，其中 $k=1$，2。由 (4.49) 可得

$$\begin{aligned} hD_dz_k&=-\mathrm{op_{sc}}(\lambda^2)w_h-(-1)^k\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)v_h+h\tilde G_h+(-1)^k\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)h\tilde f_h+h\,\mathrm{op_{sc}}(r_0)w_h\\ &=-(-1)^k\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)z_k+h\tilde G_h+(-1)^k\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)h\tilde f_h+h\,\mathrm{op_{sc}}(r_0')w_h, \end{aligned}$$

其中 r_0 和 r_0' 均为 0 阶，并分别来自 $[hD_d,$算子$_{\mathrm{sc}}(\lambda)]$ 以及公式 算子$_{\mathrm{sc}}(\lambda)$ 算子$_{\mathrm{sc}}(\lambda)$ $=$算子$_{\mathrm{sc}}(\lambda^2)$ $+h$ 算子$_{\mathrm{sc}}(r_0'')$，其中 r_0'' 为 0 阶。于是我们得到 $hD_dz_k+(-1)^k$ 算子$_{\mathrm{sc}}(\lambda)z_k=hH_k$，其中 H_k 关于 h 在 L^2 中一致有界。为了得到 z_k 的估计，我们应用以下引理。

引理 4.5。 设 $a\in S^1$。假设 a 的支集包含于 $x_d=0$ 的一个邻域中。存在$C>0$，使得对于所有满足 hD_dw+ 的 w，若算子$_{\mathrm{sc}}(a)w=hf$，则有 $|w_{|x_d=0}|\le C(\|f\|+\|w\|)$。

证明。 一方面，我们有

$$|\operatorname{Im}(hf,w)|\le h\|f\|\|w\|.\tag{4.50}$$

另一方面，我们有

$$2i\operatorname{Im}(hD_d+\mathrm{op_{sc}}(a)w,w)=(hD_dw,w)-(w,hD_dw)+(\mathrm{op_{sc}}(a)w,w)-(w,\mathrm{op_{sc}}(a)w).$$

现在我们应用分部积分公式 (3.17)，并且由于 a 是实值的，$\mathrm{op_{sc}}(a)^*=\mathrm{op_{sc}}(a)+h\mathrm{op_{sc}}(r_0)$，其中符号 r_0 是 0 阶的，我们得到

$$2i\operatorname{Im}(hD_d+\mathrm{op_{sc}}(a)w,w)=ih|w_{|x_d=0}|^2+h(\mathrm{op_{sc}}(r_0)w,w),$$

由上文的 (4.50)，我们推出引理 4.5。 □

将引理 4.5 应用于 z_k，我们得到：

$$|(z_k)_{|x_d=0}| \lesssim \|z_k\| + \|H_k\| \tag{4.51}$$

根据边界条件 $(v_h)_{|x_d=0} = 0$，并且由于 $\|z_k\| \lesssim \|v_h\| + \|w_h\|$，我们得到

$$|(\mathrm{op_{sc}}(\lambda)w_h)_{|x_d=0}| \lesssim \|v_h\| + \|w_h\| + \|H_k\|. \tag{4.52}$$

Let χ_2 在 $\mathcal{H}$ 中紧支撑，且满足 $\chi_2\tilde{\chi} = \tilde{\chi}$。根据符号演算，我们有

$$\mathrm{op_{sc}}(\chi_2(1 - R(x,\xi'))^{-1/2})\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda) = \mathrm{op_{sc}}(\tilde{\chi}) + h\,\mathrm{op_{sc}}(a_0),$$

其中 $a_0 \in S^0$。我们可以推出

$$|(\mathrm{op_{sc}}(\tilde{\chi})w_h)_{|x_d=0}| \lesssim \|v_h\| + \|w_h\| + \|H_k\| + h|(w_h)_{|x_d=0}|.$$

由于 $\tilde{\chi} = 1$ 在 χ 的支集上成立，我们有 $\mathrm{op_{sc}}(\tilde{\chi})w_h = w_h + h\,\mathrm{op_{sc}}(a_0)r_h$，其中 $a_0 \in S^0$。因此我们得到

$$|(w_h)_{|x_d=0}| \lesssim \|v_h\| + \|w_h\| + \|H_k\| + h|(r_h)_{|x_d=0}|. \tag{4.53}$$

上述估计在双曲区域中优于引理 4.4 的表述。注意，在双曲区域中我们不需要边界条件，因为通过对 z_1 和 z_2 作线性组合，我们可以同时估计 $(w_h)_{|x_d=0}$ 和 $(v_h)_{|x_d=0}$。

4.1.2. 掠射区域。现在我们处理掠射区域。令 $\varepsilon > 0$，我们定义

$$\mathcal{G}_\varepsilon = \{(x,\xi') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d-1}, |R(x,\xi') - 1| < \varepsilon\}.$$

令 χ 在 $\mathcal{G}_\varepsilon$ 中紧支撑。我们沿用双曲区域中的相同记号，即 w_h =算子$_{\mathrm{sc}}(\chi)r_h$ 和 v_h =算子$_{\mathrm{sc}}(\chi)u_h^d$，满足系统（4.48）。对于 $0 \le x_d \le \varepsilon^{-1/2}h$，我们有

$$|v_h(x',x_d)|^2 \le \left(\int_0^{\varepsilon^{-1/2}h} |\partial_{x_d} v_h(x',\sigma)|d\sigma\right)^2.$$

对 x_d 积分，得到

$$\int_0^{\varepsilon^{-1/2}h} |v_h(x',x_d)|^2 dx_d \le \varepsilon^{-1/2}h\left(\int_0^{\varepsilon^{-1/2}h} |\partial_{x_d} v_h(x',\sigma)|d\sigma\right)^2 \le \varepsilon^{-1}h^2 \int_0^{\varepsilon^{-1/2}h} |\partial_{x_d} v_h(x',\sigma)|^2 d\sigma.$$

由系统（4.48），并对 x' 积分，得到

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_0^{\varepsilon^{-1/2}h} |v_h(x',x_d)|^2 dx_d dx' \le \varepsilon^{-1}\|\mathrm{op_{sc}}(R-1)w_h\|^2 + h^2\|h\tilde{G}_h\|^2. \tag{4.54}$$

由 $w_h(x',0) = w_h(x',x_d) - \int_0^{x_d} \partial_{x_d} w_h(x',\sigma)d\sigma$，对于 $x_d \in (0,\varepsilon^{-1/2}h)$，我们有

$$|w_h(x',0)|^2 \lesssim |w_h(x',x_d)|^2 + \left(\int_0^{\varepsilon^{-1/2}h} |\partial_{x_d} w_h(x',\sigma)|d\sigma\right)^2.$$

对其进行关于 x_d 的积分，并应用柯西–施瓦茨不等式，可得

$$\varepsilon^{-1/2}h|w_h(x',0)|^2 \lesssim \int_0^{\varepsilon^{-1/2}h} |w_h(x',x_d)|^2 dx_d + \varepsilon^{-1}\int_0^{\varepsilon^{-1/2}h} |h\partial_{x_d} w_h(x',x_d)|^2 dx_d.$$

对其进行关于 x' 的积分，并由系统（4.48）可得

$$\varepsilon^{-1/2}h|(w_h)_{|x_d=0}|^2 \lesssim \|w_h\|^2 + \varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_0^{\varepsilon^{-1/2}h} |v_h(x',x_d)|^2 dx_d dx' + \varepsilon^{-1}h^2\|\tilde{f}_h^d\|^2.$$

应用 (4.54)，我们得到

$$\varepsilon^{-1/2}h|(w_h)_{|x_d=0}|^2 \lesssim \|w_h\|^2 + \varepsilon^{-2}\|\mathrm{op_{sc}}(R-1)w_h\|^2 + \varepsilon^{-1}h^2\|\tilde{G}_h^d\|^2 + \varepsilon^{-1}h^2\|\tilde{f}_h^d\|^2. \tag{4.55}$$

根据符号演算，$\mathrm{op_{sc}}(R-1)w_h = \mathrm{op_{sc}}((R-1)\chi)r_h + h\mathrm{op_{sc}}(a_0)r_h$ 其中 $a_0 \in S^0$。根据假设 $|(R-1)\chi| \le \varepsilon$，对所有 $\varepsilon > 0$，由 (3.20) 可知存在 $C_\varepsilon > 0$，使得

$$\|\operatorname{op_{sc}}(R-1)w_h\|^2 \le 4\varepsilon^2\|r_h\|^2 + C_\varepsilon h^2\|r_h\|^2.$$

于是，由（4.55）可得

$$\limsup_{h\to 0} h|(w_h)_{|x_d=0}|^2 \lesssim \varepsilon^{1/2}. \tag{4.56}$$

4.1.3. 椭圆区域。最后需要考虑的区域是椭圆区域。设 $\mathcal{E} = \{(x,\xi') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d-1}, R(x,\xi') - 1 > 0\}$。由于 $\mathcal{E}$ 在 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d-1}$ 中不紧，我们必须处理较大的 $|\xi'|$。设 χ 是从 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d-1}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个光滑函数，满足，$\chi(x,\xi') = 1$，对于满足 $R(x,\xi') \ge 1+\varepsilon$ 的 (x,ξ')，并且 $|x| \le \delta$, $\chi(x,\xi') = 0$，对于 $|x| \ge 2\delta$。我们假设满足 0 次齐次性条件，即对于满足 $R(x,\xi') \ge 1+\varepsilon$ 且 $\lambda \ge 1$ 的 (x,ξ')，有 $\chi(x,\lambda\xi') = \chi(x,\xi')$。以下论证与双曲区域中所用的论证相近，但我们会注意处理较大的 $|\xi'|$。

我们记 $w_h = \mathrm{op_{sc}}(\chi)r_h$ 和 $v_h = \mathrm{op_{sc}}(\chi)u_h^d$。由符号演算可得$hD_d\,\mathrm{op_{sc}}(\chi)z = \mathrm{op_{sc}}(\chi)hD_dz + A$，其中 $\|A\| \lesssim h\|z\|$。事实上，$[hD_d,\mathrm{op_{sc}}(\chi)]$的符号为 $hD_d\chi \in hS^0$。

我们还有

$$\operatorname{op_{sc}}(\chi)\operatorname{op_{sc}}(R(x,\xi')-1) = \operatorname{op_{sc}}(R(x,\xi')-1)\operatorname{op_{sc}}(\chi) + [\operatorname{op_{sc}}(\chi), \operatorname{op_{sc}}(R(x,\xi')-1)],$$

且 $[\mathrm{op_{sc}}(\chi), \mathrm{op_{sc}}(R(x,\xi') - 1)]$ 的符号属于 hS^1。

于是我们有 $\|[\mathrm{op_{sc}}(\chi), \mathrm{op_{sc}}(R(x,\xi') - 1)]z\| \lesssim h\|\Lambda^1 z\|$。设 $\tilde\chi$ 为一个光滑函数，支集包含于 $\mathcal{E}$，且 $\tilde\chi = 1$ 在 χ的支集上。我们假设，对于满足$R(x,\xi') \ge 1+\varepsilon/2$ 的 (x,ξ')，有 $\tilde\chi(x,\xi') = 1$；并且对于 $|x| \ge 3\delta$，有 $|x| \le 2\delta$, $\tilde\chi(x,\xi') = 0$，同时满足如下0次齐次性条件：对于满足 $R(x,\xi') \ge 1+\varepsilon/2$ 且 $\lambda \ge 1$的 (x,ξ')，有$\tilde\chi(x,\lambda\xi') = \chi(x,\xi')$。于是我们有 $\chi\tilde\chi = \chi$。

$\mathrm{op_{sc}}(R(x,\xi')-1)\,\mathrm{op_{sc}}(\chi)$ 的符号为 $(R(x,\xi')-1)\chi + ha_1$，其中 a_1 属于 S^1。$\mathrm{op_{sc}}(\tilde\chi(R(x,\xi') - 1))\,\mathrm{op_{sc}}(\chi)$ 的符号为 $(R(x,\xi') - 1)\chi + h\tilde a_1$，其中 $\tilde a_1$ 属于 S^1。因此，模去一项 ha_1（其中 a_1 属于 S^1）后，我们可以用 $\mathrm{op_{sc}}(\tilde\chi^2(R(x,\xi') - 1))\,\mathrm{op_{sc}}(\chi)$ 替换 $\mathrm{op_{sc}}(R(x,\xi') - 1)\,\mathrm{op_{sc}}(\chi)$。

将 $\mathrm{op_{sc}}(\chi)$ 应用于系统（4.47），利用先前分析，我们得到如下结果:

$$\begin{cases} hD_dw_h + v_h = h\tilde f_h \\ hD_dv_h - \operatorname{op_{sc}}(\tilde\chi^2(R(x,\xi')-1))w_h = h\tilde G_h \\ (v_h)_{|x_d=0} = 0, \end{cases} \tag{4.57}$$

其中 $\|\Lambda^{-1}\tilde G_h\| \lesssim \|\Lambda^{-1}G\| + \|r_h\| + \|u_h^d\|$，记号见（4.47）。

令 $\lambda(x,\xi') = \tilde\chi(x,\xi')\sqrt{R(x,\xi') - 1}$。$\mathrm{op_{sc}}((1-\tilde\chi^2)(R-1))\,\mathrm{op_{sc}}(\chi)$ 的符号属于 $h^N S^{-N}_{1\,0}$，对所有 $N > 0$，当 $(1-\tilde\chi^2)\chi = 0$ 时，该符号的渐近展开为零。我们可以写成系统（4.57）

$$\begin{cases} hD_dw_h + v_h = h\tilde f_h \\ hD_dv_h - \operatorname{op_{sc}}(\lambda^2)w_h = h\tilde G_h \\ (v_h)_{|x_d=0} = 0, \end{cases} \tag{4.58}$$

其中 $\tilde G_h$ 满足上述 $\|\Lambda^{-1}\tilde G_h\| \lesssim \|\Lambda^{-1}G\| + \|r_h\| + \|u_h^d\|$ 估计。

我们令 $z_k = v_h + (-1)^k i\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)w_h$ 对于 $k = 1,\ 2$。我们有

$$\begin{aligned} hD_dz_k &= hD_dv_h + (-1)^k ihD_d\operatorname{op_{sc}}(\lambda)w_h \\ &= \operatorname{op_{sc}}(\lambda^2)w_h + h\tilde G_h + (-1)^k i\operatorname{op_{sc}}(\lambda)hD_dw_h + h\operatorname{op_{sc}}(a_1)w_h \\ &= (-1)^{k+1}i(\operatorname{op_{sc}}(\lambda)v_h + (-1)^k i\operatorname{op_{sc}}(\lambda^2)w_h) + h\tilde G_h + (-1)^k i\operatorname{op_{sc}}(\lambda)h\tilde f_h + h\operatorname{op_{sc}}(a_1)w_h \\ &= (-1)^{k+1}i\operatorname{op_{sc}}(\lambda)(v_h + (-1)^k i\operatorname{op_{sc}}(\lambda)w_h) + h\tilde G_h + (-1)^k i\operatorname{op_{sc}}(\lambda)h\tilde f_h + h\operatorname{op_{sc}}(a_1)w_h, \end{aligned}$$

作为 $[D_d,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)]$ 的符号，它属于 S^1，而 $\mathrm{op_{sc}}(\lambda)^2=\mathrm{op_{sc}}(\lambda^2)$ 模掉一个符号属于 hS^1 的算子。在前一个公式中，a_1 是 S^1 中的一个符号，最终逐行变化。于是 z_k 满足以下方程

$$hD_dz_k+(-1)^k i\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)z_k=h\tilde{G}_h+(-1)^k i\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)h\tilde{f}_h+h\,\mathrm{op_{sc}}(a_1)w_h=hH_h, \tag{4.59}$$

其中我们有 $\|\Lambda^{-1}H_h\|\lesssim\|\tilde{f}_h\|+\|\Lambda^{-1}G\|+\|r_h\|+\|u_h^d\|_\circ$

我们设

$$I=\mathrm{Re}(\Lambda^{-1}(hD_dz_k+(-1)^k i\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)z_k),\Lambda^{-1}(-1)^k i\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)z_k),$$

一方面，我们有

$$|I|\lesssim h\|\Lambda^{-1}H_h\|\|z_k\|, \tag{4.60}$$

另一方面

$$\begin{aligned}2I&=2\|\Lambda^{-1}\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)z_k\|^2\\&\quad+\mathrm{Re}(hD_d\Lambda^{-1}z_k,\Lambda^{-1}(-1)^k i\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)z_k)+(\Lambda^{-1}(-1)^k i\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)z_k,hD_d\Lambda^{-1}z_k)\\&=I_1+\mathrm{Re}\,I_2+\mathrm{Re}\,I_3.\end{aligned} \tag{4.61}$$

为计算 I_2+I_3，我们应用 (3.17) 进行分部积分，并利用符号演算得到 $\mathrm{op_{sc}}(\lambda)^*=\mathrm{op_{sc}}(\lambda)+h\,\mathrm{op_{sc}}(a_0)$，由此得到以下交换子，$[\Lambda^{-1},\mathrm{op_{sc}}(\lambda)]=h\,\mathrm{op_{sc}}(a_{-1})$，$[hD_d,\Lambda^{-1}]=0$ 以及 $[hD_d,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)]=h\,\mathrm{op_{sc}}(a_1)$，其中 $a_j\in S^j_{1,\,0}$。于是我们有

$$\begin{aligned}&(\Lambda^{-1}(-1)^k i\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)z_k,hD_d\Lambda^{-1}z_k)\\&=(hD_d\Lambda^{-1}(-1)^k i\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)z_k,\Lambda^{-1}z_k)-ih(\Lambda^{-1}(-1)^k i\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)(z_k)_{|x_d=0},\Lambda^{-1}(z_k)_{|x_d=0})_\partial,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(hD_d\Lambda^{-1}(-1)^k i\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)z_k,\Lambda^{-1}z_k)&=(\Lambda^{-1}(-1)^k i\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)hD_dz_k,\Lambda^{-1}z_k)+h(\mathrm{op_{sc}}(a_0)z_k,\Lambda^{-1}z_k)\\&=(\Lambda^{-1}(-1)^k ihD_dz_k,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)^*\Lambda^{-1}z_k)\\&\quad+((-1)^k i[\Lambda^{-1},\mathrm{op_{sc}}(\lambda)]hD_dz_k,\Lambda^{-1}z_k)\\&\quad+h(\mathrm{op_{sc}}(a_0)z_k,\Lambda^{-1}z_k)\\&=(\Lambda^{-1}(-1)^k ihD_dz_k,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)\Lambda^{-1}z_k)\\&\quad+h(\Lambda^{-1}hD_dz_k,\mathrm{op_{sc}}(a_{-1})z_k)+h(\mathrm{op_{sc}}(a_0)z_k,\Lambda^{-1}z_k)\\&=-I_2+h(\Lambda^{-1}hD_dz_k,\mathrm{op_{sc}}(a_{-1})z_k)+h(\mathrm{op_{sc}}(a_0)z_k,\Lambda^{-1}z_k).\end{aligned}$$

由前面的两次计算可得

$$\begin{aligned}I_2+I_3&=-ih(\Lambda^{-1}(-1)^k i\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)(z_k)_{|x_d=0},\Lambda^{-1}(z_k)_{|x_d=0})_\partial\\&\quad+h(\Lambda^{-1}hD_dz_k,\mathrm{op_{sc}}(a_{-1})z_k)+h(\mathrm{op_{sc}}(a_0)z_k,\Lambda^{-1}z_k).\end{aligned}$$

由前面的计算和（4.61）可得

$$\begin{aligned}&2I=2\|\Lambda^{-1}\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)z_k\|^2+h\,\mathrm{Re}(\Lambda^{-1}(-1)^k\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)(z_k)_{|x_d=0},\Lambda^{-1}(z_k)_{|x_d=0})_\partial+R\\&\text{where }|R|\lesssim h\|\Lambda^{-1}hD_dz_k\|\|\Lambda^{-1}z_k\|+h\|\Lambda^{-1}z_k\|\|z_k\|.\end{aligned} \tag{4.62}$$

由方程（4.59）可得

$$\|\Lambda^{-1}hD_dz_k\|\lesssim\|\Lambda^{-1}H_h\|+\|z_k\|.$$

由前面的估计 (4.61)、(4.62)，并利用 $(z_1)_{|x_d=0}=-(z_2)_{|x_d=0}$，我们得到：

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1,2}\|\Lambda^{-1}\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)z_k\|^2+h\,\mathrm{Re}(\Lambda^{-1}\,\mathrm{op_{sc}}(\lambda)(z_2)_{|x_d=0},\Lambda^{-1}(z_2)_{|x_d=0})_\partial\\&\qquad\lesssim h\sum_{k=1,2}(\|\Lambda^{-1}z_k\|\|z_k\|+\|\Lambda^{-1}z_k\|\|\Lambda^{-1}H_h\|).\end{aligned} \tag{4.63}$$

由于 $v_h=(z_1+z_2)/2$ 且算子 $\mathrm{op_{sc}}(\lambda)w_h=(z_2-z_1)/2i$，我们得到

$$\begin{aligned}&\|\Lambda^{-1}\text{算子}_{\mathrm{sc}}(\lambda)v_h\|^2+\|\Lambda^{-1}\text{算子}_{\mathrm{sc}}(\lambda)^2w_h\|^2+h\,\mathrm{Re}(\Lambda^{-1}\text{算子}_{\mathrm{sc}}(\lambda)(z_2)_{|x_d=0},\Lambda^{-1}(z_2)_{|x_d=0})_\partial \quad (4.64)\\ &\lesssim h\sum_{k=1,2}(\|\Lambda^{-1}z_k\|\|z_k\|+\|\Lambda^{-1}z_k\|\|\Lambda^{-1}H_h\|).\\ &\lesssim h(\|z_k\|^2+\|\Lambda^{-1}H_h\|^2).\end{aligned}$$

由 Gårding不等式 (3.21)，存在 $C_0>0$ 和 $C_1>0$，使得

$$\|\Lambda^{-1}\operatorname{op_{sc}}(\lambda)v_h\|^2\geq C_0\|v_h\|^2-C_1h\|u_h^d\|^2,$$

当 $v_h=\mathrm{op_{sc}}(\chi)u_h^d$ 时，$\mathrm{op_{sc}}(\lambda)^*\Lambda^{-2}\operatorname{op_{sc}}(\lambda)$ 的符号在 χ 的支集上为 $(1+|\xi'|)^{-2}(R(x,\xi')-1)+ha_0$ 和 $(1+|\xi'|)^{-2}(R(x,\xi')-1)\geq C>0$。

通过类似的论证，我们得到

$$\|\Lambda^{-1}\operatorname{op_{sc}}(\lambda)^2w_h\|^2\geq C_0\|\Lambda^1w_h\|^2-C_1h\|\Lambda^{1/2}r_h\|^2.$$

由于 $r_h=w_h+\mathrm{op_{sc}}(1-\chi)r_h$ 和 $\Lambda^s\operatorname{op_{sc}}(1-\chi)$ 在 L^2 上对所有 $s\in\mathbb{R}$ 都有界，且 χ 是紧支撑的，我们有

$$\|\Lambda^{-1}\operatorname{op_{sc}}(\lambda)^2w_h\|^2\geq C_0'\|\Lambda^1w_h\|^2-C_1h\|r_h\|^2,$$

and

$$\|z_k\|\lesssim\|u_h^d\|+\|\Lambda r_h\|\lesssim\|u_h^d\|+\|\Lambda^1w_h\|+\|r_h\|.$$

对于（4.64）中的迹项，由于 $(z_2)_{|x_d=0}=$ 算子$_{\mathrm{sc}}(\lambda)$ 算子$_{\mathrm{sc}}(\chi)r_h$，我们可以对其应用 Gårding不等式得到

$$\mathrm{Re}(\Lambda^{-1}\operatorname{op_{sc}}(\lambda)(z_2)_{|x_d=0},\Lambda^{-1}(z_2)_{|x_d=0})_\partial\geq C_0|\Lambda^{1/2}(w_h)_{|x_d=0}|^2-C_1h|(r_h)_{|x_d=0}|^2.$$

应用前面的估计和（4.64），我们得到

(4.65)

$$\|\Lambda^1w_h\|^2+\|v_h\|^2+h|\Lambda^{1/2}(w_h)_{|x_d=0}|^2\lesssim h(\|u_h^d\|^2+\|r_h\|^2+\|\Lambda^{-1}H_h\|^2+h|(r_h)_{|x_d=0}|^2).$$

4.1.4. 证明结束。分别在双曲区、掠射区和椭圆区取三个截断函数，即 χ_H、χ_G 和 χ_E，我们得到

$$\begin{aligned}&h|\Lambda^{1/2}(r_h)_{|x_d=0}|^2\\ &\lesssim h|\Lambda^{1/2}(\operatorname{op_{sc}}(\chi_H)r_h)_{|x_d=0}|^2+h|\Lambda^{1/2}(\operatorname{op_{sc}}(\chi_G)r_h)_{|x_d=0}|^2+h|\Lambda^{1/2}(\operatorname{op_{sc}}(\chi_E)r_h)_{|x_d=0}|^2.\end{aligned}$$

由（4.53），由于 χ_H 是紧支撑的，我们有

$$|\Lambda^{1/2}(\operatorname{op_{sc}}(\chi_H)r_h)_{|x_d=0}|^2\lesssim C+h|(r_h)_{|x_d=0}|^2\lesssim C+h|\Lambda^{1/2}(r_h)_{|x_d=0}|^2.$$

由（4.65），我们有

$$|\Lambda^{1/2}(\operatorname{op_{sc}}(\chi_E)r_h)_{|x_d=0}|^2\lesssim C+h|\Lambda^{1/2}(r_h)_{|x_d=0}|^2,$$

因为由 (4.59) 可知 $\|\Lambda^{-1}H_h\|$ 有界。

我们得到

$$h|\Lambda^{1/2}(r_h)_{|x_d=0}|^2\lesssim Ch+h|\Lambda^{1/2}(\operatorname{op_{sc}}(\chi_G)r_h)_{|x_d=0}|^2+h^2|\Lambda^{1/2}(r_h)_{|x_d=0}|^2,$$

那么对所有足够小的 h，都有

$$h|\Lambda^{1/2}(r_h)_{|x_d=0}|^2\lesssim Ch+h|\Lambda^{1/2}(\operatorname{op_{sc}}(\chi_G)r_h)_{|x_d=0}|^2.$$

由 (4.56) 可得

$$\limsup_{h\to0}h|\Lambda^{1/2}(r_h)_{|x_d=0}|^2\lesssim\varepsilon^{1/2},$$

对所有 $\varepsilon>0$ 均成立，这就证明了引理 4.4。 □

下面我们证明，所定义的测度非零，并且在集合$\{x,\ b(x)>0\}$上为零。

4.2. **该测度不恒为零**。

命题 4.2. 测度 m并非恒为零。

证明。 由 (4.26)，将第一个方程乘以 u_h，进行分部积分（见 (3.16)），并考虑边界条件 $(u_h^d)_{|x_d=0} = 0$，可得

$$O(h) = (-ih\nabla_g r_h + u_h, u_h)_g = \|u_h\|_g^2 + (r_h, -ih\,\mathrm{div}_g\, u_h)_g.$$

由 (4.26) 的第二个方程，将 $-ih\mathrm{div}_g\, u_h$ 替换为 r_h，得到

$$O(h) = \|u_h\|_g^2 - \|r_h\|_g^2.$$

由 (4.25)，有 $\|u_h\| + \|r_h\| = 1$，有 $\|r_h\| = 1/2 + O(h)$ 和 $\|u_h\| = 1/2 + O(h)$。由 (4.26) 的第一个方程，得到 $\|h\nabla_g r_h\| \lesssim 1$。

现在证明 m 不为零。设 ϕ 为一个光滑函数，使得 $\phi(s) = 1$ 对于 $|s| \le 1$ 成立，且其支集包含于 $|s| \le 2$。对于 $R > 0$，令 $\phi_R(\xi) = \phi(|\xi|/R)$。对于 $\alpha \in (0, 1/2)$，有

$$\|\,\mathrm{op_{sc}}(1-\phi_R)\underline{r}_h\| \lesssim R^{-\alpha}\|\,\mathrm{op_{sc}}(\langle\xi\rangle^{\alpha})\underline{r}_h\| \lesssim R^{-\alpha}(\|r_h\|_{L^2(\Omega)} + \|h\nabla_g r_h\|_{L^2(\Omega)}) \lesssim R^{-\alpha}. \tag{4.66}$$

（例如，参见 [13, 引理 4.3]。）

那么，当 h 充分小时且 R 充分大时，

$$(\mathrm{op_{sc}}(\phi_R)\underline{r}_h, \underline{r}_h) \ge 1/4,$$

根据 m 的定义（见（4.31））， m 非零。由此即可得出结论。 □

4.3. **阻尼支集上的半经典测度为零**。本节证明以下命题。

命题 4.3。设 m 为命题 *4.1* 中定义的半经典测度，则有$b(x)m = 0$。

证明。由系统（4.26）可得

$$(ihf_h, u_h)_g + (ihq_h, r_h)_g = (-ih\nabla_g r_h + u_h - ihbu_h, u_h)_g + (-ih\,\mathrm{div}_g\, u_h + r_h, r_h)_g. \tag{4.67}$$

分部积分，利用（3.16），并考虑边界条件 $(u_h^d)_{|x_d=0} = 0$，我们得到

$$(-ih\nabla_g r_h, u_h)_g + (-ih\,\mathrm{div}_g\, u_h, r_h)_g = 2\,\mathrm{Re}(-ih\nabla_g r_h, u_h)_g. \tag{4.68}$$

由前两个公式，我们得到

$$\mathrm{Im}\left((ihf_h, u_h)_g + (ihq_h, r_h)_g\right) = ih(bu_h, u_h)_g. \tag{4.69}$$

由于左边是一个 $o(h)$，我们得到 $(bu_h,\ u_h)_g \to 0$，其中 $h \to 0$。于是由下面的命题 4.1 和命题 5.3，我们有 $\langle m\sum_{k=1}^d g^{kk}\xi_k^2,\ b\rangle = 0$。

d d由于 b 和 m 均为非负数，在 m的支集上有$\sum g^{kk}\xi_k^2 \gtrsim \sum g^{kj}\xi_k\xi_j = 1$，因此得到$k=1$ $j,\ k=1$该结论。

□

5. 支集的传播

目标是证明以下命题。

命题 5.1. 假设 ω 满足几何控制条件。令 m 为由$(u_h, r_h)_h$ 构造并满足(4.26)的半经典测度，则有 $m = 0$。

本节首先给出一些公式，以导出传播结果。以下命题对此作出陈述。

命题 5.2. 我们用 $p(x,\xi) = g^{jk}\xi_j\xi_k$ 和 $R(x,\xi') = \tilde{g}^{jk}\xi_k\xi_j$表示。

我们在$\Omega \times \mathbb{R}^d$中有 $\{p, m\} = 0$。

在 $\partial\Omega$ 的邻域中，即在测地坐标下，令 $a(x,\xi')$ 为一个在边界邻域内紧支撑的切向符号，则有，

$$\langle \{p, m\}, a\rangle = 0, \tag{5.70}$$

$$\langle \{p, m\}, a\xi_d\rangle = -\lim_{h\to 0} (\mathrm{op_{sc}}(a(R-1))(r_h)_{|x_d=0}, (r_h)_{|x_d=0})_\partial. \tag{5.71}$$

注意，我们不知道 $(r_h)_{|x_d=0}$ 是否在 L^2 中有界，引理 4.4 的结论太弱。但量 $(\mathrm{op_{sc}}(a(R-1))(r_h)_{|x_d=0}, (r_h)_{|x_d=0})_{\tilde{g}}$ 有极限。先验地，测度 m 并未定义在 (x,ξ') 中的函数上；但是，由于 m 支集于 $g^{jp}\xi_j\xi_p - 1 = 0$，而 $g^{jp}\xi_j\xi_p - 1 = 0$ 是 ξ 上的有界集，因此很容易将 m 延拓到 (x,ξ') 中的函数上。在边界处，我们假设度量写成测地坐标形式（见第 3.1 节）。

5.0.1. 内部的计算。 我们引入以下量，其中 a 是一个在 $\Omega \times \mathbb{R}^d$ 中紧支撑的符号。下文中，我们将选择依赖于 a 的 b_k^j，但在完成下面的计算后， b_k^j 的选择会更加自然。注意， b_k^j 也在 $\Omega \times \mathbb{R}^d$ 中紧支撑。在内部， $\underline{u_h}$ 和 $\underline{r_h}$ 是 u_h 和 r_h。严格来说，我们需要引入一个截断函数来完成这一点，但这会引入阶为 $O(h^\infty)$ 的误差项。

$$\begin{aligned} A = {} & (\mathrm{op_{sc}}(a)(u_h - ih\nabla_g r_h), u_h)_g + (\mathrm{op_{sc}}(a)(r_h - ih\,\mathrm{div}_g\, u_h), r_h)_g \\ & - (\mathrm{op_{sc}}(a)u_h, u_h - ih\nabla_g r_h)_g - (\mathrm{op_{sc}}(a)r_h, r_h - ih\,\mathrm{div}_g\, u_h)_g \\ & + (ih\,\mathrm{op_{sc}}(b_k^j)(u_h^k - ih(\nabla_g r_h)^k), u_h^\ell)_g. \end{aligned} \tag{5.72}$$

这里及下文中，我们采用爱因斯坦记号，参见第 3.1 节。

显然，关于系统 (5.76) 的假设意味着 $h^{-1}A \to 0$ as $h \to 0$。

我们可以简化 A，并得到:

$$\begin{aligned} A = {} & -(ih\,\mathrm{op_{sc}}(a)\nabla_g r_h, u_h)_g - (ih\,\mathrm{op_{sc}}(a)\,\mathrm{div}_g\, u_h, r_h)_g \\ & + (\mathrm{op_{sc}}(a)u_h, ih\nabla_g r_h)_g + (\mathrm{op_{sc}}(a)r_h, ih\,\mathrm{div}_g\, u_h)_g \\ & + (ih\,\mathrm{op_{sc}}(b_k^j)u_h^k, u_h^\ell)_g + (h\,\mathrm{op_{sc}}(b_k^j)(h\nabla_g r_h)^k, u_h^\ell)_g. \end{aligned} \tag{5.73}$$

我们进行分部积分（见（3.15））， 并将由 h 估计的项记作 $R(\|u_h\|^2 + \|r_h\|^2)$，这些项在分析中不起作用。注意，由于 a 的支集远离边界，因此不会出现边界项，并且我们有

$$\begin{aligned} h^{-1}A &= (i([\nabla_g, \mathrm{op_{sc}}(a)]r_h, u_h)_g + (i[\mathrm{div}_g, \mathrm{op_{sc}}(a)]u_h, r_h)_g \\ &\quad + (i\,\mathrm{op_{sc}}(b_k^j)u_h^k, u_h^\ell)_g + (h\,\mathrm{op_{sc}}(b_k^j)(\nabla_g r_h)^k), u_h^\ell)_g \\ &= (i\,\mathrm{op_{sc}}\{g^{jk}\xi_k, a\}r_h, (u_h)^\ell)_g + (i\,\mathrm{op_{sc}}\{\xi_k, a\}u_h^k, r_h)_g \\ &\quad + (i\,\mathrm{op_{sc}}(b_k^j)u_h^k, u_h^\ell)_g + (i\,\mathrm{op_{sc}}(b_k^j g^{k\mu}\xi_\mu)r_h, u_h^\ell)_g + R. \end{aligned} \tag{5.74}$$

为了使用定义半经典测度的公式（4.31），我们需要一个对称性性质。令 $b^j = \{g^{jk}\xi_k, a\} + b^j_k g^{k\ell}\xi_\ell$。所需的对称性为 $g_{pj}b^j = \{\xi_p, a\}$。于是我们有

$$g_{pj}b^j = g_{pj}\{g^{jk}\xi_k, a\} + g_{pj}b^j_k g^{k\ell}\xi_\ell,$$

and

$$\{\xi_p, a\} = \{g_{pj}g^{jk}\xi_k, a\} = g_{pj}\{g^{jk}\xi_k, a\} + g^{jk}\xi_k\{g_{pj}, a\}.$$

Then

$$g_{pj}b^j = \{\xi_p, a\} - g^{jk}\xi_k\{g_{pj}, a\} + g_{pj}b^j_k g^{k\ell}\xi_\ell.$$

令 $b^j_k = g^{jq}\{g_{qk}, a\}$，我们有

$$g_{pj}b^j_k g^{k\ell}\xi_\ell = g_{pj}g^{jq}\{g_{qk}, a\}g^{k\ell}\xi_\ell = \{g_{pk}, a\}g^{k\ell}\xi_\ell = g^{jk}\xi_k\{g_{pj}, a\},$$

改变求和指标。这样选择 b^j_k 即可应用（4.31）。

采用 b^j_k 的先前定义，公式（5.74）可写为

$$\begin{aligned} h^{-1}A = {} & (i\,\mathrm{op_{sc}}\{g^{jk}\xi_k, a\}r_h, (u_h)^\ell)_g + (i\,\mathrm{op_{sc}}\{\xi_k, a\}u^k_h, r_h)_g \\ & + (i\,\mathrm{op_{sc}}(g^{jq}\{g_{qk}, a\})u^k_h, u^\ell_h)_g + (i\,\mathrm{op_{sc}}(g^{jq}\{g_{qk}, a\}g^{k\mu}\xi_\mu)r_h, u^\ell_h)_g + R. \end{aligned}$$

于是，$ih^{-1}A$ 收敛到 $-\langle \mu^k_j、\ g^{jq}\{g_{qk}, a\}\rangle - 2\langle \nu_j、\ \{g^{jk}\xi_k, a\} + g^{jq}\{g_{qk}, a\}g^{k\mu}\xi_\mu\rangle = 0$。由命题 4.1、$\mu^k_j = g^{kp}\xi_p\xi_j m$ 和 $\nu_j = -m\xi_j$，我们因此得到

$$-\langle g^{kp}\xi_p\xi_j m, g^{jq}\{g_{qk}, a\}\rangle + 2\langle m\xi_j, \{g^{jk}\xi_k, a\} + g^{jq}\{g_{qk}, a\}g^{k\mu}\xi_\mu\rangle = \langle m, F\rangle = 0, \tag{5.75}$$

其中

$$F = -g^{kp}\xi_p\xi_j g^{jq}\{g_{qk}, a\} + 2\xi_j\{g^{jk}\xi_k, a\} + 2\xi_j g^{jq}\{g_{qk}, a\}g^{k\mu}\xi_\mu.$$

注意到 $0 = \{g^{jq}g_{qk}, a\} = g^{jq}\{g_{qk}, a\} + g_{qk}\{g^{jq}, a\}$，我们有

$$\begin{aligned} F &= g^{kp}g_{qk}\xi_p\xi_j\{g^{jq}, a\} + 2\xi_j\{g^{jk}\xi_k, a\} - 2g_{qk}\xi_j\{g^{jq}, a\}g^{k\mu}\xi_\mu \\ &= \xi_q\xi_j\{g^{jq}, a\} + 2\xi_j\{g^{jk}\xi_k, a\} - 2\xi_j\xi_q\{g^{jq}, a\} \\ &= \xi_q\xi_j\{g^{jq}, a\} + 2g^{jq}\xi_j\{\xi_q, a\}. \end{aligned}$$

As

$$\{g^{jq}\xi_j\xi_q, a\} = g^{jq}\xi_j\{\xi_q, a\} + g^{jq}\xi_q\{\xi_j, a\} + \xi_j\xi_q\{g^{jq}, a\} = 2g^{jq}\xi_j\{\xi_q, a\} + \xi_j\xi_q\{g^{jq}, a\},$$

根据 g^{jq} 的对称性。于是 $F = \{g^{jq}\xi_j\xi_q, a\}$。然后由 (5.75) 可得 $\langle m, \{g^{jq}\xi_j\xi_q, a\}\rangle = 0$ or $\langle\{g^{jq}\xi_j\xi_q, m\}, a\rangle = 0$。这就证明了 $\Omega \times \mathbb{R}^d$ 中的命题 5.2。

为了在边界处证明命题 5.2，我们必须使用切向算子。我们考虑系统（4.26），而非系统 (4.32)；为了得出结论，我们必须证明一个与公式（4.31）类似的结果，其中积分区域是 Ω，而不是 $\mathbb{R}^d$。

回顾一下系统（4.26）。该系统由 u_h 和 r_h 满足，如下所示。

$$\begin{cases} u_h - ih\nabla_g r_h = hf_h, \text{ in } \Omega \\ -ih\,\mathrm{div}_g\, u_h + r_h = hq_h, \text{ in } \Omega \\ u_h.n = 0 \text{ on } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.76}$$

其中 $\|f_h\| + \|q_h\| \to 0$ 当 $h \to 0$ 时，且 $\|u_h\| + \|r_h\|$ 关于 h一致有界 .

5.0.2. Ω 上的量的极限Ω。在下面的结果中，我们证明，为 $(\underline{u_h}, \underline{r_h})$ 定义的测度也出现在对 $x_d > 0$ 进行计算的一些量的极限中。

命题 5.3. 我们假设 $a_j^k, b^j, c \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^{d-1}_{\xi'})$ 紧支撑，满足 $g^{\ell j} a_j^k = g^{kj} a_j^\ell$，并且其支集（在 x 中）包含于边界上一点的某个邻域内。我们假设度量g 用测地坐标表示。于是

(1) $(\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a_j^k) u_h^j, u_h^k)_g$ 收敛到 $\langle \mu_j^k, a_k^j \rangle = \langle g^{kp} \xi_p \xi_j m, a_k^j \rangle$，当 h 趋于 *0* 时。*(2)* $((\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(b^j) r_h), (u_h^k))_g + (g_{jk}\, \mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(b^j) u_h^k, r_h)_g$ 收敛到 $2\langle \nu_j, b^j \rangle = -2\langle \xi_j m, b^j \rangle$，当 h 趋于 *0* 时。*(3)* $(\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(c) r_h, r_h)_g$ 收敛到 $\langle m, c \rangle$，当 h 趋于 *0* 时。*(4)* $(\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(c)(-ih\partial_d) u_h^d, u_h^d)_g$ 收敛到 $\langle \mu_d^d, c\xi_d \rangle = \langle \xi_d^2 m, c\xi_d \rangle$，当 h 趋于 *0* 时。*(5)* $(\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(c)(-ih\partial_d) r_h, u_h^d)_g + (\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(c)(-ih\partial_d) u_h^d, r_h)_g$ 收敛到 $2\langle \nu_d, c \rangle = -2\langle \xi_d m, c \rangle$，当$h$趋于 *0* 时。*(6)* $(\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(c)(-ih\partial_d) r_h, r_h)_g$ 收敛到 $\langle m, c\xi_d \rangle$，当 h 趋于 *0* 时。

在前面的公式中，内积里的积分是在Ω 上进行的，也就是说，是在局部坐标上，对 $x_d > 0$ 进行积分。

证明。 根据命题 4.1， m 支撑在 $(g^{jp}(x)\xi_p\xi_j - 1) = 0$ 上。 m 是紧支撑的，并且在极限处给出的表达式有意义。

由于 r_h 和 $h\nabla_g r_h$ 属于 $L^2(x_d > 0)$，延拓 $\underline{r_h}$ 对于 $s < 1/2$ 属于 H^s_{sc}，并且

$$\|\underline{r_h}\|_{H^s_{sc}} \lesssim \|r_h\|_{L^2(x_d>0)} + \|h\nabla_g r_h\|_{L^2(x_d>0)}.$$

为了证明前三项，我们注意到可以用延拓替换 u_h 和 r_h。接着引入算子 $\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(\phi(\xi_d/R))$，命题 4.1 给出结果，例如 $\langle \mu_j^k, a_k^j \phi(\xi_d/R) \rangle = \langle \mu_j^k, a_k^j \rangle$，其中 R 足够大。我们必须估计算子 $\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(1-\phi(\xi_d/R))$ 的余项。为此，我们需要区分不同的情况。为了证明第一项，若 $j \le d-1$ 或 $k \le d-1$，在第一种情况下，我们需要估计 (算子 $\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a_j^k)\, \mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(1-\phi(\xi_d/R))\underline{u_h^j}, \underline{u_h^k})_g$。由于 $u^j = ih(\nabla_g r_h)^j + h f_h^j$，我们有

$$(\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a_j^k)\, \mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(1-\phi(\xi_d/R))\underline{u_h^j}, \underline{u_h^k})_g = (\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a_j^k)\, \mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(1-\phi(\xi_d/R))(ih(\nabla_g \underline{r_h})^j + h\underline{f_h^j}), \underline{u_h^k})_g.$$

由度量 g 的形式可知，$(\nabla_g r_h)^j$ 不包含项 $\partial_d r_h$；又由于 a_j^k 是紧支撑的，利用符号演算可得 $\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a_j^k)(-ih\partial_\ell) = \mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a_j^k \xi_\ell)$，其中 $\ell \le d-1$ 是模去 h 倍的作用于 L^2 上的有界算子。显然，$\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a_j^k \xi_\ell)$ 在 L^2 上有界，而项 $\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(1-\phi(\xi_d/R)\underline{r_h}$ 可由估计 (4.66) 得到估计

由于当 R 趋于 ∞ 时，该项趋于 0，且 $(\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a_j^k)u_h^j, u_h^k)_g$ 不依赖于 R，因此我们得到所需结果。

若 $j = d$ 且 $k = d$，则有 $u_h^d = ih\partial_d r_h + h f_h^d$。于是，由 (5.76)，利用 $(u_h^d)_{|x_d=0}$、符号演算和分部积分，可得

$$\begin{aligned}
2(\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)u_h^d, u_h^d) &= (\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)(-ih\partial_d)r_h, u_h^d) + (\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)u_h^d, (-ih\partial_d)r_h) + O(h) \\
&= (\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)r_h, (-ih\partial_d)u_h^d) + (\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)(-ih\partial_d)u_h^d, r_h) + O(h) \\
&= (\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)r_h, (ih\,\mathrm{div}_{\tilde{g}})\tilde{u}_h - r_h) + (\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)\big((ih\,\mathrm{div}_{\tilde{g}})\tilde{u}_h - r_h\big), r_h) + O(h) \\
&= (r_h, \mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)^*\big((ih\,\mathrm{div}_{\tilde{g}})\tilde{u}_h - r_h\big)) + (\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)\big((ih\,\mathrm{div}_{\tilde{g}})\tilde{u}_h - r_h\big), r_h) + O(h).
\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)(ih\mathrm{div}_{\tilde{g}})$ 和 $\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)^*(ih\mathrm{div}_{\tilde{g}})$ 是切向有界算子，我们可以像处理前面的项一样，将 L^2 函数在 $x_d < 0$ 中延拓为 $\mathbb{R}^d$ 上的零函数，并引入截断函数 $\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(\phi(\xi_d/R))$。项 $(\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)r_h, r_h)$ 和 $((\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(b^j)r_h), (u_h^k))_g + (g_{jk}\, \mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(b^j)u_h^k, r_h)_g$ 可以用同样的方法处理，因为我们可以在项r_h 上引入截断函数 $\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(1-\phi(\xi_d/R))$。

要处理第二项和第三项，我们可以参照第一项的证明，其中我们已经计算了形如 $(\mathrm{op_{sc}}(a)r_h, u_h^j)$ 的项（对于 $j \le d-1$），或 $(\mathrm{op_{sc}}(a)r_h, u_h^d)$ 的项。

对于第四项，我们可以将 $-ih\partial_d u_h^d$ 替换为 $ih\mathrm{div}_{\tilde g}\,\tilde u_h - r_h$，从而得到与第一项中处理过的类似项。

对于第五项，我们可以将 $ih\partial_d r_h$ 替换为 u_h^d，并将 $-ih\partial_d u_h^d$ 替换为 $ih\mathrm{div}_{\tilde g}\,\tilde u_h - r_h$。所得各项可按与前面各项相同的方式处理。

对于第六项，我们将 $ih\partial_d r_h$ 替换为 u_h^d，便可得到已经处理过的项。 □

5.0.3. 边界处的计算，切向符号。设 $a(x,\xi')$ 是一个支集紧包含于边界上一点邻域内的切向符号。我们引入与公式（5.72）中相同的 A，其中 a 现在是一个切向符号。经过相同的化简，我们得到公式（5.73）。分部积分后，有两项需要考虑：$(\mathrm{op_{sc}}(a)r_h, ih\,\mathrm{div}_g\,u_h)_g$ 和 $(\mathrm{op_{sc}}(a)u_h, ih\nabla_g r_h)_g$，因为其他项不会产生边界项。应用（3.16），第一项给出

$$(\mathrm{op_{sc}}(a)r_h, ih\,\mathrm{div}_g\,u_h)_g = (ih\nabla_g\,\mathrm{op_{sc}}(a)r_h, u_h)_g - (\mathrm{op_{sc}}(a)(r_h)_{|x_d=0}, ih(u_h^d)_{|x_d=0})_\partial,$$

而第二个给出

$$(\mathrm{op_{sc}}(a)u_h, ih\nabla_g r_h)_g = (ih\,\mathrm{div}_g\,\mathrm{op_{sc}}(a)u_h, r_h)_g - (\mathrm{op_{sc}}(a)(u_h^d)_{|x_d=0}, ih(r_h)_{|x_d=0})_\partial,$$

并且在两种情况下，由于 $(u_h^d)_{|x_d=0} = 0$，边界项消失。由此，证明的其余部分不变，我们得到相同的结论，其中 a 为切向符号，$\langle\{g^{jq}\xi_j\xi_q, m\},\ a\rangle = 0$。

5.0.4. 边界处的计算，含法向导数的切向符号。我们需要对符号 $a(x,\xi')\xi_d$ 进行计算，但考虑到前面的公式，我们无法直接计算。例如，在 (5.72) 的第一项中，如果我们用 $a\xi_d$ 替换 a，就应有一项 $\partial_d f_h$；而如果我们将 ∂_d 放在内积的右侧，就会得到一项 $\partial_d u_h$，且该项的切向部分不属于 L^2。我们必须引入另一个量。

由系统（4.26），我们得到以下 2×2 系统，将 u_h^j 表示为 r_h 和 f_h^j 的函数，就像我们推导系统（4.46）时所做的那样，可得

$$\begin{cases} -ih\partial_d r_h + u_h^d - ihbu_h^d = h\tilde f_h^d \\ -ih|g|^{-1/2}\partial_d(|g|^{1/2}u_h^d) - ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g}r_h) + r_h = h\tilde q_h, \end{cases} \tag{5.77}$$

其中 $\tilde f_h^d = if_h^d$，$\tilde q_h = iq_h + ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}\,\tilde f_h + ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(b\tilde u)$，$\tilde f_h = (f_h^j)_{j=1,\dots,d-1}$，以及 $\tilde u_h = (u_h^j)_{j=1,\dots,d-1}$。

对于一个紧支撑符号 $a(x,\xi')$，我们引入以下量

$$\begin{aligned} A = {} & (\mathrm{op_{sc}}(a)(u_h^d - ih\partial_d r_h), ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g}r_h) - r_h)_g \\ & - (\mathrm{op_{sc}}(a)(ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g}r_h) - r_h), u_h^d - ih\partial_d r_h)_g \\ & - (\mathrm{op_{sc}}(a)(-ih|g|^{-1/2}\partial_d(|g|^{1/2}u_h^d)) - ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g}r_h) + r_h, u_h^d)_g \\ & + (\mathrm{op_{sc}}(a)u_h^d, -ih|g|^{-1/2}\partial_d(|g|^{1/2}u_h^d) - ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g}r_h) + r_h)_g. \end{aligned} \tag{5.78}$$

利用 u_h^d，我们可以简化一些项，从而得到

$$\begin{aligned} A = {} & (\mathrm{op_{sc}}(a)(-ih\partial_d r_h), ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g}r_h) - r_h)_g \\ & - (\mathrm{op_{sc}}(a)(ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g}r_h) - r_h), -ih\partial_d r_h)_g \\ & - (\mathrm{op_{sc}}(a)(-ih|g|^{-1/2}\partial_d(|g|^{1/2}u_h^d)), u_h^d)_g \\ & + (\mathrm{op_{sc}}(a)u_h^d, -ih|g|^{-1/2}\partial_d(|g|^{1/2}u_h^d))_g. \end{aligned} \tag{5.79}$$

我们需要通过两种不同的方式计算 A。首先，应用（3.16）进行分部积分，得到

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{op_{sc}}(a)(-ih\partial_d r_h), ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g} r_h) - r_h)_g = ((ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g}) - 1)\,\mathrm{op_{sc}}(a)(-ih\partial_d) r_h, r_h)_g,\\
&-(\mathrm{op_{sc}}(a)(ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g} r_h) - r_h), -ih\partial_d r_h)_g = (ih\partial_d(\mathrm{op_{sc}}(a)(ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g} r_h) - r_h)), r_h)_g\\
&\quad + ih(\mathrm{op_{sc}}(a)(ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g} r_h) - r_h)_{|x_d=0}, (r_h)_{|x_d=0})_\partial,\\
&(\mathrm{op_{sc}}(a)u_h^d, -ih|g|^{-1/2}\partial_d(|g|^{1/2}u_h^d))_g = (-ih|g|^{-1/2}\partial_d(|g|^{1/2}\,\mathrm{op_{sc}}(a)u_h^d), u_h^d)_g,
\end{aligned}
$$

正如上次计算中所示，边界项为零。

由（5.79）及之前的计算，我们得到

$$
\begin{aligned}
A &= ((ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g}) - 1)\,\mathrm{op_{sc}}(a)(-ih\partial_d) r_h, r_h)_g\\
&\quad - (-ih\partial_d(\mathrm{op_{sc}}(a)(ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g} r_h) - r_h)), r_h)_g\\
&\quad + ih(\mathrm{op_{sc}}(a)(ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g} r_h) - r_h)_{|x_d=0}, (r_h)_{|x_d=0})_\partial\\
&\quad - (\mathrm{op_{sc}}(a)(-ih|g|^{-1/2}\partial_d(|g|^{1/2}u_h^d)), u_h^d)_g\\
&\quad + (-ih|g|^{-1/2}\partial_d(|g|^{1/2}\,\mathrm{op_{sc}}(a)u_h^d), u_h^d)_g\\
&= (K_1 r_h, r_h)_g + (K_2 u_h^d, u_h^d)_g + ih(\mathrm{op_{sc}}(a)(ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g} r_h) - r_h)_{|x_d=0}, (r_h)_{|x_d=0})_\partial,
\end{aligned}
\tag{5.80}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
K_1 &= (ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g}) - 1)\,\mathrm{op_{sc}}(a)(-ih\partial_d) - ih\partial_d(\mathrm{op_{sc}}(a)(ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g}) - 1))\\
K_2 &= -ih|g|^{-1/2}\partial_d|g|^{1/2}\,\mathrm{op_{sc}}(a) - \mathrm{op_{sc}}(a)(-ih|g|^{-1/2})\partial_d|g|^{1/2} = [-ih|g|^{-1/2}\partial_d|g|^{1/2}, \mathrm{op_{sc}}(a)].
\end{aligned}
$$

K_2 的主符号为 $-ih\{\xi_d, a\}$，这是一个切向符号。记作

$$
\begin{aligned}
K_1 &= [ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g}) - 1, \mathrm{op_{sc}}(a)](-ih\partial_d)\\
&\quad + \mathrm{op_{sc}}(a)[ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g}) - 1, -ih\partial_d] + [\mathrm{op_{sc}}(a), -ih\partial_d](ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g}) - 1).
\end{aligned}
$$

K_1 的主符号于是为

$$
\begin{aligned}
&-ih\{R(x,\xi') - 1, a(x,\xi')\}\xi_d - iha(x,\xi')\{R(x,\xi') - 1, \xi_d\} - ih\{a(x,\xi'), \xi_d\}(R(x,\xi') - 1)\\
&= -ih\{R(x,\xi'), a(x,\xi')\}\xi_d - iha(x,\xi')\{R(x,\xi'), \xi_d\} - ih\{a(x,\xi'), \xi_d\}(R(x,\xi') - 1).
\end{aligned}
$$

于是由命题 5.3 可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} h^{-1}\big((K_1 r_h, r_h)_g + (K_2 u_h^d, u_h^d)_g\big)\\
&= \langle m, -i\{R(x,\xi'), a(x,\xi')\}\xi_d - ia(x,\xi')\{R(x,\xi'), \xi_d\} - i\{a(x,\xi'), \xi_d\}(R(x,\xi') - 1) - i\xi_d^2\{\xi_d, a(x,\xi')\}\rangle\\
&= \langle m, -i\{R(x,\xi'), \xi_d a(x,\xi')\} - 2i\xi_d^2\{\xi_d, a(x,\xi')\}\rangle,
\end{aligned}
$$

因为 m 在 $\xi_d^2 + R(x,\xi') - 1$上为零。注意到

$$
\{\xi_d^2 + R(x,\xi'), \xi_d a(x,\xi')\} = 2\xi_d^2\{\xi_d, a(x,\xi')\} + \{R(x,\xi'), \xi_d a(x,\xi')\},
$$

我们得到

$$
\lim_{h\to 0} h^{-1}\big((K_1 r_h, r_h)_g + (K_2 u_h^d, u_h^d)_g\big) = \langle m, -i\{\xi_d^2 + R(x,\xi'), \xi_d a(x,\xi')\}\rangle.
\tag{5.81}
$$

其次，我们利用 2×2 系统计算 $h^{-1}A$的极限。由 (5.77) 和 (5.78) 可得

$$
\begin{aligned}
A &= (\mathrm{op_{sc}}(a)(h\tilde f_h^d + ihbu_h^d), ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g} r_h) - r_h)_g\\
&\quad - (\mathrm{op_{sc}}(a)(ih\,\mathrm{div}_{\tilde g}(ih\nabla_{\tilde g} r_h) - r_h), ihbu_h^d + h\tilde f_h^d)_g - (h\,\mathrm{op_{sc}}(a)\tilde q_h, u_h^d)_g + (\mathrm{op_{sc}}(a)u_h^d, h\tilde q_h)_g.
\end{aligned}
$$

注意到，由于 $a(x,\xi')$ 是紧支撑的，$\partial_j\,\mathrm{op_{sc}}(a)$ 和 $\mathrm{op_{sc}}(a)\partial_j$ 对于 $j = 1,\dots d-1$ 是定义在 L^2 上的有界切向算子。$\tilde q_h$ 中的一些项可以写成 $\mathrm{op_{sc}}(a)\mathrm{div}_{\tilde g}\tilde f_h$，或者

$\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)^{*}\mathrm{div}_{\tilde{g}}\,\tilde{f}_h$，这些项在 L^2 上有界，并且在取极限时消失。因此我们有

$$\begin{aligned}A = {} & (ih\,\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)(bu_h^d), ih\,\mathrm{div}_{\tilde{g}}(ih\nabla_{\tilde{g}} r_h) - r_h)_g - (\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)(ih\,\mathrm{div}_{\tilde{g}}(ih\nabla_{\tilde{g}} r_h) - r_h), ihbu_h^d)_g \\ & - (h\,\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a) ih\,\mathrm{div}_{\tilde{g}}(b\tilde{u}_h), u_h^d)_g + (\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)u_h^d, ih^2\,\mathrm{div}_{\tilde{g}}(b\tilde{u}_h))_g + o(h).\end{aligned}$$

对最后两项进行分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}& - (h\,\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a) ih\,\mathrm{div}_{\tilde{g}}(b\tilde{u}_h), u_h^d)_g + (\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)u_h^d, ih^2\,\mathrm{div}_{\tilde{g}}(b\tilde{u}_h))_g \\ & \quad = -(h\,\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a) ih\,\mathrm{div}_{\tilde{g}}(b\tilde{u}_h), u_h^d)_g + (ih^2 b\nabla_{\tilde{g}}\,\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)u_h^d, \tilde{u}_h)_g \\ & = h(\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(M)u_h, u_h)_g,\end{aligned}$$

其中，M 是一个符号支集包含在 b的支集上的矩阵。当 $bm = 0$ 趋于 h 时，根据命题 4.3，这一项取极限为 0。

根据命题 5.3 的第 (2) 项，取 $b^d = iab(R-1)$和 $b^j = 0$ 作为 $j = 1$、$\ldots d-1$，我们得到

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}A = \langle m, -2i\xi_d a(x,\xi')b(x)(R(x,\xi')-1)\rangle = 0, \tag{5.82}$$

根据命题 4.3 以及 (5.80)、(5.81) 和 (5.82)，我们得到

$$(\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)(ih\,\mathrm{div}_{\tilde{g}}(ih\nabla_{\tilde{g}} r_h) - r_h)_{|x_d=0}, (r_h)_{|x_d=0})_{\partial},$$

当 h 趋于 0 时存在极限，并且我们有

$$\langle\{\xi_d + R(x,\xi'), m\}, \xi_d a(x,\xi')\rangle = \lim_{h\to 0}(-\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)(ih\,\mathrm{div}_{\tilde{g}}(ih\nabla_{\tilde{g}} r_h) - r_h)_{|x_d=0}, (r_h)_{|x_d=0})_{\partial}.$$

由于 $\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a)(ih\,\mathrm{div}_{\tilde{g}}(ih\nabla_{\tilde{g}}) - 1)$ 的主符号为 $a(x,\xi')(R(x,\xi')-1)(x,\xi')$，我们得到命题 5.2 的最后一个结论。

命题 5.1 是命题 5.2 的推论。证明方法如下：[19, 20,28, 29, 7, 9, 38]。为完整起见，我们在附录 A 中给出证明。此证明沿用了 [13] 中的方法。

附录A. 几何控制条件与传播

A.1. 几何。 这里给出本文所用的几何概念。这一框架源自 Melrose 和 Sjöstrand [36, 37]，读者也可在 Hörmander [24,第 24] 章中找到更多相关信息和证明。辛子流形的刻画或许是经典结果，更多细节可参见 Grigis [22]。

关于符号的假设。 我们回顾命题 5.2 中给出的 P 的符号定义，

$$p(x,\xi) = \sum_{1\le j,k\le d} g^{jk}(x)\xi_j\xi_k - 1, \tag{1.83}$$

其中 g^{jk} 是 $\mathscr{C}^{\infty}(\Omega)$。$\overline{\ }$在边界的某个邻域内，我们可以通过 $\varphi > 0$ 且满足 $d\varphi \neq 0$ 来定义 Ω。我们还可以选择坐标（即 法测地坐标），使得 $\varphi(x) = x_d$，并且 $p(x,\xi) = \xi_d^2 + R(x,\xi') - 1$，其中 $x = (x', x_d)$ 和 $\xi = (\xi', \xi_d)$。

辛子流形 Σ。我们可以定义一个辛流形 Σ，它包含于$T^*\mathbb{R}^d \cap \{\varphi = 0\}$中。令 $\Sigma = \{(x,\xi)$ $\varphi(x) = 0$ 以及 $\{\varphi, p\}(x,\xi) = 0\}$。集合 Σ是一个辛流形，因为 $\{\varphi, \{\varphi, p\}\} \neq 0$。在坐标 $(x',$ $x_d)$ 下，我们有 $\Sigma = \{x_d = 0, \xi_d = 0\}$，该流形与 $T^*\partial\Omega$ 同构，并由坐标 (x', ξ') 描述。

哈密顿向量场 H_p 不是定义在 Σ 上的向量场，但对于所有 X，给定一个定义在$T^*\mathbb{R}^d$上的向量场，我们都能找到唯一的函数 α 和 β，使得 $X+\alpha H_\varphi+\beta H_{\{\varphi,p\}}$ 是定义在 Σ上的向量场。对于 H_p，我们将其关联向量记为 H_p'，经过初等计算可得

$$H_p'=H_p+\frac{\{p,\{p,\varphi\}}{\{\varphi,\{\varphi,p\}}H_\varphi.$$

在坐标 (x',x_d) 下，H_p' 仅依赖于 R，且我们有

$$H_p'=H_R'=\sum_{j=1}^{d-1}(\partial_{\xi_j}R(x',0,\xi')\partial_{x_j}-\partial_{x_j}R(x',0,\xi')\partial_{\xi_j}).$$

特别地，从点出发、进入 Σ 的与 H_p' 相关的积分曲线始终处于 Σ中。在坐标 (x',x_d) 下，我们将从 (x',ξ') 出发的积分曲线记为 $\gamma_g(s;\,x',\xi')$；若 s 是隐式的，则也记为$\gamma_g(x',\xi')$；若 (x',ξ') 是隐式的，则记为 $\gamma_g(s)$。

对 $T_b^*\Omega$ 的描述与拓扑。设 $T_b^*\Omega=T^*\partial\Omega\cup T^*\Omega$，该集合赋有如下拓扑。

首先，若 $\rho\in T^*\Omega$，则集合 V 是 ρ 的邻域，当且仅当 V 包含 $T^*\Omega$ 中的一个开集 W，使得 $\rho\in W$。

其次，若 $\rho=(x_0',\xi_0')\in T^*\partial\Omega$，则集合 V 是 ρ 的邻域，当且仅当 V 包含一个集合

$$\{(x',\xi')\in T^*\partial\Omega,\ |x_0'-x'|+|\xi_0'-\xi'|\le\varepsilon\}$$
$$\cup\{(x,\xi)\in T^*\Omega,\ |x_0'-x'|+|\xi_0'-\xi'|\le\varepsilon\text{ and }(x_d,\xi_d)\in U\cap\{x_d>0\}\},$$

其中，$\varepsilon>0$ 和 U 是 $\{(x_d,\xi_d)\in\mathbb{R}^2$在 $\mathbb{R}^2$中的一个邻域，$x_d=0\}$。

在由 $x_d>0$定义Ω的局部坐标中，我们定义 j：$T^*\Omega\to T_b^*\Omega$，使得当 $x\in\overline{\Omega}$时，$j(x,\xi)=(x,\xi)$；当 $x_d=0$ 时，$j(x,\xi)=(x',\xi')$。对于上述拓扑，该映射 j是连续的。利用前面的记号，当Ω由 $\varphi(x)>0$给出时，我们可以更内在地定义 j。对于$(x,\xi)\in T^*\Omega$，若 $x\in\Omega$，则 $j(x,\xi)=(x,\xi)$；若 $\varphi(x)=0$，则 $j(x,\xi)=(x,\xi dx-(\{p,\varphi\}/H_\varphi^2p)d\varphi)$。在后一种情况下，我们验证 $j(x,\xi)\in\{\varphi=\{p,\varphi\}=0\}$，因为 $\{p,\varphi\}(x,d\varphi)=\{\varphi,\{\varphi,p\}\}$。

通常我们在局部坐标中将映射 π：$T_b^*\Omega\to\overline{\Omega}$ 定义为：若 $(x,\xi)\in T^*\Omega$，则 $\pi(x,\xi)=x$；若 $(x',\xi')\in T^*\partial\Omega$，则 $\pi(x',\xi')=(x',0)$。

双特征线与广义流。

对于 $(x,\xi)\in T^*\mathbb{R}^d$，我们用 $\gamma(s;\,x,\xi)$ 表示从 (x,ξ) 出发的 H_p积分曲线。我们沿用上文的简写记号 $\gamma(s)$ 和 $\gamma(x,\xi)$。

现在，对于 $\rho\in T_b^*\Omega$，我们定义广义双特征曲线，并记为 $\Gamma(s,\rho)$。为了在边界邻域内描述这条曲线，我们使用坐标 (x',x_d,ξ',ξ_d)，并将 Σ' 和 $T^*\partial\Omega$ 等同起来，且局部地有 $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^d,\ x_d>0\}$。此外，我们假设 $\rho\in\mathrm{char}(P)=\{(x,\xi)\in T^*\Omega\ \ p(x,\xi)=0\}\cup\{(x',\xi')\in T^*\partial\Omega\ \ R(x',0,\xi')-1\le0\}$。

现在，我们对每个（s_0,ρ）在局部定义曲线 $\Gamma(s,\rho)$，并利用流的群性质，即 $\Gamma(s+t,\rho)=\Gamma(s,\Gamma(t,\rho))$，将此函数扩展到每个 $s\in\mathbb{R}$。

对于 $\Gamma(s_0,\rho)\in T^*\Omega$，若当 $s-s_0$ 属于包含 0 的某个区间时，$\gamma(s-s_0;\,\Gamma(s_0,\rho))\in T^*\Omega$，则有 $\Gamma(s,\rho)=\gamma(s-s_0;\,\Gamma(s_0,\rho))$。特别地，只要 $\gamma(s-s_0;\,\Gamma(s_0,\rho))$ 在 $T^*\Omega$ 内保持足够小的 $|s-s_0|$，此处定义的 $\Gamma(s,\rho)$ 至少在 s_0 的某个邻域内对 s 有定义。注意，$p(\gamma(s-s_0;\,\Gamma(s_0,\rho)))=0$。

对于 $\rho=(x_0',\xi_0')\in T^*\partial\Omega$，我们必须区分不同情形：首先，如果 $R(x_0',0,\xi_0')<1$；其次，如果 $R(x_0',0,\xi_0')=1$。其中，$\Gamma(s,\rho)$ 取决于 $\gamma(s;\,x_0',0,\xi_0',0)$ 的性质。下文中，我们只定义 $s=0$ 的邻域内的流。我们可以利用群性质延拓该流。

我们先讨论双曲点，并回顾 $\mathcal{H}=\{(x_0',\xi_0')\in T^*\partial\Omega \quad R(x_0',0,\xi_0')<1\}$。如果 $R(x_0',0,\xi_0')<1$，令 $\xi^{\pm}=\pm\sqrt{1-R(x_0',0,\xi_0')}$。令 $\gamma(s;x_0,\xi_0)=(x(s;x_0,\xi_0)\ \xi(s;x_0,\xi_0))$。由于 $\dot{x}_d=2\xi_d$，对于充分小的 $s>0$，有 $x_d(s;x_0',0,\xi_0',\xi^+)>0$；对于充分小的 $s<0$，有 $x_d(s;x_0',0,\xi_0',\xi^-)>0$。于是我们令 $\Gamma(0,\rho)=\rho$，并令 $\Gamma(s,\rho)=\gamma(s;x_0',0,\xi_0',\xi^+)$，其中 $s>0$ 充分小；另令 $\Gamma(s,\rho)=\gamma(s;x_0',0,\xi_0',\xi^-)$，其中 $s<0$ 充分小。注意，当 $s\neq 0$ 充分小时，$\Gamma(s,\rho)\in T^*\Omega$，且 $p(\Gamma(s,\rho))=0$。

定义 *A.1*（与边界的有限接触）。设 (x_0',ξ_0') 满足 $R(x_0',0,\xi_0')=1$。若存在 $k\in\mathbb{N},\ k\geq 2$，$\alpha\neq 0$，使得在 $s=0$ 的某个邻域内，双特征线 $\gamma(s;x_0',0,\xi_0',0)=\gamma(s)=\alpha s^k+\mathcal{O}(s^{k+1})$，则称双特征线 $\gamma(s;x_0',0,\xi_0',0)=\gamma(s)$ 与边界不存在无限接触。我们用 $\mathcal{G}^k$ 表示这类点的集合。

对于 $k=2$，我们区分两种情况。

- 衍射点，并记为
$$\mathcal{G}_d=\{(x',\xi')\in T^*\partial\Omega,\ R(x',0,\xi')=1,\ \partial_{x_d}R(x',0,\xi')<0\}.$$
在这种情况下，上文定义的 α 为正。
- 掠射点，并记为
$$\mathcal{G}_g=\{(x',\xi')\in T^*\partial\Omega,\ R(x',0,\xi')=1,\ \partial_{x_d}R(x',0,\xi')>0\}.$$
在这种情况下，上文定义的 α 为负。

注 A.1. 根据泰勒定理，并且由于 $x_d(0)=0$ 和 $\dot{x}_d(0)=2\xi_d(0)=0$，我们总有$x_d(s)=\mathcal{O}(s^2)$。

我们需要处理四种情况。

- k 为偶数，$\alpha>0$。在这种情况下，当 $s\neq 0$ 足够小时，$x_d(s)>0$。我们定义 $\Gamma(0,\rho)=\rho$，并且当 $s\neq 0$ 足够小时，$\Gamma(s,\rho)=\gamma(s;x_0',0,\xi_0',0)\in T^*\Omega$。- k 为偶数，$\alpha<0$。在这种情况下，当 $s\neq 0$ 足够小时，$x_d(s)<0$。我们定义 $\Gamma(s)=\gamma_g(s,\rho)\in T^*\partial\Omega$，当 s 足够小时。- k 为奇数，$\alpha>0$。在这种情况下，当 $s>0$ 足够小时，$x_d(s)>0$；当 $s<0$ 足够小时，$x_d(s)<0$。我们定义 $\Gamma(s,\rho)=\gamma_g(s,\rho)\in T^*\partial\Omega$，当 $s\leq 0$ 足够小时；并且当 $s>0$ 足够小时，$\Gamma(s,\rho)=\gamma(s;x_0',0,\xi_0',0)\in T^*\Omega$。- k 为奇数，$\alpha<0$。在这种情况下，当 $s>0$ 足够小时，$x_d(s)<0$；当 $s<0$ 足够小时，$x_d(s)>0$。我们定义 $\Gamma(s,\rho)=\gamma(s;x_0',0,\xi_0',0)\in T^*\Omega$，当 $s<0$ 足够小时；并且当 $s\geq 0$ 足够小时，$\Gamma(s,\rho)=\gamma_g(s,\rho)\in T^*\partial\Omega$。

$\Gamma(s)$ 的这一局部描述使得可以对每个 $s\in\mathbb{R}$ 延拓 $\Gamma(s)$。定义在 $\mathbb{R}\times\mathrm{char}(P)$ 上的函数 $\Gamma(s,\rho)$ 关于 $\mathbb{R}\times T_b^*\Omega$ 的拓扑是连续的，其中 $T_b^*\Omega$ 的拓扑已在上文定义。

A.2. G **几何控制条件（GCC）**。我们在此给出（GCC）的精确定义).

定义 A.2。令Ω 为 $\mathbb{R}^d$ 中的光滑开域。令 ω 为Ω 的一个开子集。我们假设双特征线与边界不存在无穷阶接触（见定义 *A.1*）。如果对每个 $\rho\in T_b^*\Omega$ 都存在 $s>0$ 使得$\pi(\Gamma(s,\rho))\in\omega$，则称 ω 满足（*GCC*）。

注 A.2。由于对称性，假设 $s>0$ 并不重要，因为如果 $\rho=(x,\xi)$ 和 $\tilde{\rho}=(x,-\xi)$，则有 $\Gamma(s,\rho)=\Gamma(-s,\tilde{\rho})$。

根据紧性论证，若满足（几何控制条件），则存在 s_0，使得对每个 $\rho\in T_b^*\Omega$，都存在 $s\in[0,s_0]$，使得 $\pi(\Gamma(s,\ \rho))\in\omega$。$s_0$ 的取值对控制问题起着重要作用，因为它与最小控制时间相关，但与稳定化问题无关。

A.3. **测度的性质**。本节将介绍测度 m 的若干性质，尤其是在边界邻域中的性质。这一描述与 $T^*(\partial\Omega)$ 中点的性质有关。

在下一个引理中，我们将测度分解为一个内部测度和一个支集位于边界上的测度。此外，后一测度的支集位于 $\xi_d = 0$。

引理 A.1. 存在一个非负拉东测度 m^∂，定义在 $x_d = \xi_d = 0$ 上，使得 $m = 1_{x_d>0}m + m^\partial \otimes \delta_{x_d=0} \otimes \delta_{\xi_d=0}$。此外，$m^\partial$ 的支集位于 $R(x', 0, \xi') - 1 = 0$。

证明。我们应用公式 (5.71)。注意到 $H_p = 2\xi_d\partial_{x_d} - (\partial_{x_d}R)\partial_{\xi_d} + H'_R$，其中 $_{d-1}H'_R = \sum \big((\partial_{\xi_j}R)\partial_{x_j} - (\partial_{x_j}R)\partial_{\xi_j}\big)$。我们有 $H_p(a\xi_d) = 2\xi_d^2(\partial_{x_d}a) - (\partial_{x_d}R)a + \xi_d H'_R a$。令 $a = {}_{j=1}a^\varepsilon = \varepsilon\chi(x_d/\varepsilon)\ell(x,\xi')$，其中 $\chi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$，使得 $\chi(0) = 0$ 且 $\chi'(0) = 1$，$\ell \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d-1})$。我们有

$$H_p(\xi_d a^\varepsilon) = 2\xi_d^2\chi'(x_d/\varepsilon)\ell(x,\xi') + 2\varepsilon\chi(x_d/\varepsilon)\xi_d^2\partial_{x_d}\ell - (\partial_{x_d}R)\varepsilon\chi(x_d/\varepsilon)\ell(x,\xi') + \xi_d\varepsilon\chi(x_d/\varepsilon)H'_R\ell.$$

显然，$H_p(\xi_d a^\varepsilon)$ 在 m 的支集上有一致界，并且当 $\varepsilon \to 0$ 时，$H_p(\xi_d a^\varepsilon) \to 2\xi_d^2\chi'(0)\ell 1_{x_d=0}$ 在各处成立。于是，由勒贝格控制收敛定理可得 $\langle m, H_p(\xi_d a^\varepsilon)\rangle \to \langle m, 2\xi_d^2\ell 1_{x_d=0}\rangle$，当 $\varepsilon \to 0$ 时。由于 $\chi(0) = 0$，(5.71) 右端对每个 h 都为 0。因此，$\langle m, 2\xi_d^2\ell 1_{x_d=0}\rangle = 0$。这意味着 $1_{x_d=0}m$ 的支集包含于 $\xi_d = 0$。我们将测度 $1_{\xi_d=0}1_{x_d=0}m$ 记为 m^∂。由于 $m = 1_{x_d>0}m + 1_{x_d=0}m$，我们有 $m = 1_{x_d>0}m + m^\partial \otimes \delta_{x_d=0} \otimes \delta_{\xi_d=0}$。由命题 4.1，$(\xi_d^2 + R(x,\xi') - 1)1_{x_d=0}m = 0$，于是 $(R(x', 0, \xi') - 1)m^\partial = 0$。这就得到了引理的结论。□

内部测度的哈密顿量先验上是一个支集位于$x_d = 0$上的一阶分布。下面的引理说明，若哈密顿向量场横截边界，则该量是一个测度。

引理 A.2. 我们有 $H_p(m1_{x_d>0}) = \delta_{x_d=0} \otimes m_0$，其中 m_0 是定义在 $x_d = 0$上的一阶分布。此外，在满足 $H_p x_d > 0$的邻域中，m_0 是一个非负拉东测度；在满足 $H_p x_d < 0$的邻域中，m_0 是一个非正拉东测度。

证明。作为分布，$H_p(m1_{x_d>0})$的支集若 $x_d \geq 0$ 且 $H_p(m) = 0$ 于 $x_d > 0$，则$H_p(m1_{x_d>0})$的支集位于 $x_d = 0$。这意味着存在 $n \geq 0$ 和 m_j，它们是定义在 $x_d = 0$上的分布n，使得 $H_p(m1_{x_d>0}) = \sum \delta^{(j)}_{x_d=0} \otimes m_k$。设 $n \geq 1$，并令 $\chi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$,$_{j=0}$满足 $\chi^{(k)}(0) = 0$，其中 $k = 0, \dots n-1$，且 $\chi^{(n)}(0) = 1$。令 $b \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d-1})$，我们有

$$\begin{aligned} -\langle m1_{x_d>0}, H_p\big(\varepsilon^n\chi(x_d/\varepsilon)b(x,\xi')\big)\rangle &= \langle H_p m, \varepsilon^n\chi(x_d/\varepsilon)b(x,\xi')\rangle \\ &= \langle \sum_{j=0}^{n} \delta^{(j)}_{x_d=0} \otimes m_k, \varepsilon^n\chi(x_d/\varepsilon)b(x,\xi')\rangle \\ &= (-1)^n\langle m_n, b(x', 0, \xi')\rangle. \end{aligned} \tag{1.84}$$

我们还有

$$H_p\big(\varepsilon^n\chi(x_d/\varepsilon)b(x,\xi')\big) = 2\xi_d\varepsilon^{n-1}\chi'(x_d/\varepsilon)b(x,\xi') + \varepsilon^n\chi(x_d/\varepsilon)H_p b(x,\xi'),$$

关于 ε 一致有界，并且支集包含在一个固定的紧集中。于是，若 $n \geq 2$,$H_p\big(\varepsilon^n\chi(x_d/\varepsilon)b(x,\xi')\big) \to 0$ 处处成立，且当 $\varepsilon \to 0$ 时成立 (1.84)，则由勒贝格控制收敛定理可得，对于 $n \geq 2$，$m_n = 0$。若 $n = 1$，$H_p\big(\varepsilon\chi(x_d/\varepsilon)b(x,\xi')\big) \to 2\xi_d 1_{x_d=0}b(x,\xi')$当 $\varepsilon \to 0$时处处成立，则由勒贝格控制收敛定理和 (1.84) 可得

$$\langle m1_{x_d>0}, 2\xi_d 1_{x_d=0}b(x,\xi')\rangle = \langle m_1, b(x', 0, \xi')\rangle,$$

当 $\langle m1_{x_d>0}$时， $2\xi_d 1_{x_d=0} b(x,\xi')\rangle = 0$，我们得到 $m_1 = 0$。于是有 $H_p(m1_{x_d>0}) = \delta_{x_d=0}\otimes m_0$，其中 m_0 是一个一阶分布。

若 $H_p x_d \neq 0$，令 $\gamma(s;\, x,\xi) = (x(s;\, x',\xi)\ \xi(s;\, x',\xi))$ 为与 H_p 相关的流。我们验证映射 $(s,x',\xi) \to (x(s;\, x',\xi)\ \xi(s;\, x',\xi))$ 在局部是一一映射，并将 ∂_s 变换为 H_p。此外， $s=0$ 被变换为 $x_d = 0$；若 $H_p x_d > 0$，则 $s > 0$ 被变换为 $x_d > 0$；若 $H_p x_d < 0$，则 $s < 0$ 被变换为 $x_d > 0$。在坐标 (s,x',ξ) 下，方程 $H_p(m1_{x_d>0}) = \delta_{x_d=0}\otimes m_0$ 被变换为：若 $H_p x_d > 0$，则为 $\partial_s(m1_{s>0}) = \delta_{s=0}\otimes m_0$；若 $H_p x_d < 0$，则为 $\partial_s(m1_{s<0}) = \delta_{s=0}\otimes m_0$。对于变量 (s,x',ξ)，我们沿用记号 m, m_0，分别表示 m, m_0 的像。若 $H_p x_d > 0$，则有 $m1_{s>0} = (1_{s>0}ds)\otimes m_0$；若 $H_p x_d < 0$，则有 $m1_{s<0} = -(1_{s<0}ds)\otimes m_0$。由于 m 非负，我们得到，在第一种情况下， m_0 是非负测度；在第二种情况下，它是非正测度。□

At 双曲区域中，测度 m_0 具有如下引理所给出的特殊结构 .

引理 A.3。设 $(x_0',\ \xi_0')$ 是一个双曲点（即 $R(x_0',\ 0,\ \xi_0') < 1$）。在 $(x_0',\ \xi_0')$ 的某个邻域内，存在 m^+ 一个定义在 $\mathbb{R}^{d-1}_{x'}\times\mathbb{R}^{d-1}_{\xi'}$ 上的非负测度，使得

$$m_0 = m^+\otimes\delta_{\xi_d=\sqrt{1-R(x',0,\xi')}} - m^+\otimes\delta_{\xi_d=-\sqrt{1-R(x',0,\xi')}}.$$

证明。由于 m 支集在 $\xi_d^2 + R(x,\xi') - 1 = 0$上，我们在双曲点的某个邻域内有 $m = m1_{x_d>0}$，且 $\delta_{x_d=0}\otimes m_0$的支集在 $\xi_d^2 + R(x,\xi') - 1 = 0$上。因此， m_0的支集在$\xi_d = \pm\sqrt{1-R(x',0,\xi')}$上。此外， $H_p = 2\xi_d\partial_{x_d} + X$，其中 X是一个与 $x_d = 0$相切的向量场，特别地，~~$H_p x_d = 2\xi_d$~~在 $x_d = 0$上。这意味着，~~当 $\xi_d = \sqrt{1-R(x',0,\xi')}$ 时~~ $H_p x_d > 0$，而当 $\xi_d = -\sqrt{1-R(x',0,\xi')}$ 时$H_p x_d < 0$。由引理 A.2，我们得到 $m_0 = m^+\otimes\delta_{\xi_d=\sqrt{1-R(x',0,\xi')}} - m^-\otimes\delta_{\xi_d=-\sqrt{1-R(x',0,\xi')}}$。由（5.70）可得 $\langle H_p m, a\rangle = 0$，这意味着 $\langle m^+ - m^-, a_{|x_d=0}\rangle = 0$，因为 $a_{|x_d=0}$ 描述了支集包含在(x_0',ξ_0')邻域内的每个 $\mathscr{C}_0^\infty$函数，因此这意味着$m^+ = m^-$ 在 (x_0',ξ_0')的某个邻域内。□

我们回顾一下

$$\mathcal{G}_d = \{(x',\xi'),\ R(x',0,\xi') = 1 \text{ and } \partial_{x_d}R(x',0,\xi') < 0\}$$

是衍射点的集合。

引理 A.4. 我们有 $1_{\mathcal{G}_d} m^\partial = 0$。

证明。我们应用命题 5.2 和公式 (5.71)。我们需要选择一个适应函数 a。令 $\chi\in\mathscr{C}^\infty$ 满足：若 $|s|\geq 2$，则 $\chi(\sigma) = 0$；若 $|\sigma|\leq 1$，则 $\chi(\sigma) = 1$。我们将 (5.71) 应用于 $a(x,\xi') = \chi((1-R(x,\xi'))/\varepsilon)\ell(x,\xi')\chi(x_d/\varepsilon)$，其中 $\varepsilon > 0$ 将在下文中选取，而 ℓ 的支集包含在 $\partial\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}$ 中某一点的邻域内。我们回顾一下 $H_p = 2\xi_d\partial_{x_d} - (\partial_{x_d}R)\partial_{\xi_d} + H'_R$（见引理 A.1 的证明）。我们有

$$\begin{aligned}(1.85)\qquad H_p(\xi_d a) = 2\xi_d^2\Big(&- (\partial_{x_d}R)\chi'((1-R(x,\xi'))/\varepsilon)\ell(x,\xi')\chi(x_d/\varepsilon)/\varepsilon\\ &+ \chi((1-R(x,\xi'))/\varepsilon)(\partial_{x_d}\ell(x,\xi'))\chi(x_d/\varepsilon)\\ &+ \chi((1-R(x,\xi'))/\varepsilon)\ell(x,\xi')\chi'(x_d/\varepsilon)/\varepsilon\Big)\\ &- (\partial_{x_d}R)\chi((1-R(x,\xi'))/\varepsilon)\ell(x,\xi')\chi(x_d/\varepsilon)\\ &+ \chi((1-R(x,\xi'))/\varepsilon)\chi(x_d/\varepsilon)\xi_d H'_R\ell(x,\xi').\end{aligned}$$

我们断言

$$\begin{aligned}(1.86)\qquad &H_p(a\xi_d) \text{ is uniformly bounded on } \xi_d^2 + R(x,\xi') = 1,\\ &H_p(a\xi_d)\to -(\partial_{x_d}R(x',0,\xi'))1_{R(x',0,\xi')=1}1_{x_d=0}\ell(x',0,\xi') \text{ as } \varepsilon\to 0\\ &\text{for all } (x,\xi),\ \text{such that } \xi_d^2 + R(x,\xi') = 1.\end{aligned}$$

由于 m 的支集包含于 $\xi_d^2 + R(x,\xi') - 1 = 0$，因此 $\xi_d^2/\varepsilon = (1 - R(x,\xi'))/\varepsilon$ 位于m的支集上，这表明 (1.85) 中前三项有界。容易证明，当 ε 趋于 0 时，它们也趋于 0。第四项有界，并且趋于

$$-(\partial_{x_d} R(x',0,\xi'))1_{R(x',0,\xi')=1}1_{x_d=0}\ell(x',0,\xi').$$

在最后一项中，由于 $|R(x,\xi') - 1|/\varepsilon$ 有界，因此 $|\xi_d|$ 被 $C\sqrt{\varepsilon}$ 控制，进而当 $\varepsilon \to 0$时该项趋于 0。这证明了 (1.86)。由此我们可以得出，$\langle m, H_p(\ell\xi_d)\rangle$收敛到

$$\begin{aligned}(1.87)\quad &\langle m, -(\partial_{x_d} R(x',0,\xi'))1_{R(x',0,\xi')=1}1_{x_d=0}\ell(x',0,\xi')\rangle \\ &\qquad = \langle m^\partial, -(\partial_{x_d} R(x',0,\xi'))1_{R(x',0,\xi')=1}\ell(x',0,\xi')\rangle,\end{aligned}$$

当 $\varepsilon \to 0$时。

Let

$$\begin{aligned}A_\varepsilon &= -\lim_{h\to 0}(\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a(R-1))(r_h)_{|x_d=0}, (r_h)_{|x_d=0})_\partial \\ &= -\lim_{h\to 0}(\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(\chi((1-R(x,\xi'))/\varepsilon)\ell(x,\xi')(R(x,\xi')-1))(r_h)_{|x_d=0}, (r_h)_{|x_d=0})_\partial.\end{aligned}$$

由命题 B.3，A_ε 当 $\varepsilon \to 0$时趋于 0。于是由 (1.87)，由于 ℓ 可以任意选取，$1_{\mathcal{G}_d} m^\partial = 0$ 当 ℓ 时。□

该引理描述了边界测度的支集如何沿边界传播。

引理 *A.5*。设 $(x_0', \xi_0') \in T^*\partial\Omega$。设 $(x,\xi) \in T^*\Omega$，记 $\gamma(x,\xi)$ 为从 (x,ξ) 出发的 H_p 的积分曲线。假设 m 在 $(x_0', 0, \xi_0', 0)$ 的某个邻域内局部支集于集合 $\{(x,\xi)\ \ \xi_d^2 + R(x,\xi') = 1$，使得 $\gamma(x,\xi)$ 与 $x_d = 0$，$\xi_d = 0\}$ 相交。特别地，m_0 支集于 $\xi_d = 0$ 和 $m_0 = \tilde{m}_0 \otimes \delta_{\xi_d=0} + \tilde{m}_1 \otimes \delta'_{\xi_d=0}$ 上，其中 $\tilde{m}_0$ 是一个分布，$\tilde{m}_1$ 是一个拉东测度。则在 $(x_0', 0, \xi_0', 0)$ 的某个邻域内，$H'_R m^\partial + \tilde{m}_0 = 0$, $\tilde{m}_1 = 0$ 以及 $H_p m = -\partial_{x_d} R(x', 0, \xi') m^\partial \otimes \delta_{x_d=0} \otimes \delta'_{\xi_d=0}$。

证明。我们有 $m = 1_{x_d>0} m + m^\partial \otimes \delta_{x_d=0} \otimes \delta_{\xi_d=0}$。于是我们有

$$\begin{aligned}(1.88)\quad H_p m &= m_0 \otimes \delta_{x_d=0} + 2\xi_d m^\partial \otimes \delta'_{x_d=0} \otimes \delta_{\xi_d=0} - (\partial_{x_d} R(x',0,\xi')) m^\partial \otimes \delta_{x_d=0} \otimes \delta'_{\xi_d=0} \\ &\quad + H'_R m^\partial \otimes \delta_{x_d=0} \otimes \delta_{\xi_d=0} \\ &= m_0 \otimes \delta_{x_d=0} - (\partial_{x_d} R(x',0,\xi')) m^\partial \otimes \delta_{x_d=0} \otimes \delta'_{\xi_d=0} + H'_R m^\partial \otimes \delta_{x_d=0} \otimes \delta_{\xi_d=0},\end{aligned}$$

如同 $\xi_d m^\partial \delta'_{x_d=0} \otimes \delta_{\xi_d=0} = 0$。由于 m_0 是一阶的，且支集包含于 $\xi_d = 0$，我们有 $m_0 = \tilde{m}_0 \otimes \delta_{\xi_d=0} + \tilde{m}_1 \otimes \delta'_{\xi_d=0}$，其中 $\tilde{m}_j$ 是分布。

为了证明 $\tilde{m}_1$ 是拉东测度，我们在 $\varphi = \xi_d \psi(x',\xi')\chi(\xi_d/\varepsilon)$ 上检验 m_0，其中 χ 在引理 A.4 的证明中定义。φ 的上确界随 ε 趋于 0。φ 的一阶导数可由 $\psi(x',\xi')\chi(\xi_d/\varepsilon)$、$\psi(x',\xi')\chi'(\xi_d/\varepsilon)\xi_d/\varepsilon$ 以及 $\xi_d \partial\psi(x',\xi')\chi(\xi_d/\varepsilon)$ 的上确界估计。当 $\varepsilon \to 0$ 时，φ 上的上确界可由 $\psi(x',\xi')$ 的上确界估计。我们还有 $\langle m_0, \varphi\rangle$ 收敛到 $\langle \tilde{m}_1, \psi(x',\xi')\rangle$，当 $\varepsilon \to 0$ 时。由此可推得，$\langle \tilde{m}_1, \psi(x',\xi')\rangle$ 可由 $\psi(x',\xi')$ 的上确界估计，这意味着 $\tilde{m}_1$ 是拉东测度。

根据命题 5.2、公式 (5.70)，若 $a \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d-1})$ 的支集包含于 $\partial\Omega$，且位于 $(x_0', 0, \xi_0', 0)$ 的某个邻域内，则有 $\langle H_p m, a(x,\xi')\rangle = 0$。

设 $a \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d-1})$ 满足上述条件 $a_{|x_d=0} = \ell \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1})$ 和 $\chi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$。由 (1.88) 可得

$$0 = \langle H_p m, a\chi(x_d/\varepsilon)\rangle = \langle \tilde{m}_0 + H'_R m^\partial, \ell\rangle.$$

我们推得 $H'_R m^\partial + \tilde{m}_0 = 0$，这给出了引理的第一个结论。由 (1.88) 可推得

$$H_p m = (\tilde{m}_1 - (\partial_{x_d} R(x', 0, \xi'))m^\partial) \otimes \delta_{x_d=0} \otimes \delta'_{\xi_d=0}. \tag{1.89}$$

于是我们可以写成

$$\langle m, H_p a(x,\xi)\rangle = \langle \tilde{m}_1 - (\partial_{x_d} R(x', 0, \xi'))m^\partial, \partial_{\xi_d} a(x', 0, \xi', 0)\rangle, \tag{1.90}$$

对于 $a \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$。

现在我们选取一个适配的 a 来应用 (1.90)。令 $\chi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ 如上。令 $\ell \in \mathscr{C}_0^\infty(x', \xi')$ 的支集位于 (x'_0, ξ'_0) 的一个邻域内。我们设 $a(x,\xi) = \xi_d \ell(x', \xi')\chi(\xi_d/\varepsilon)\chi(x_d/\varepsilon)$，其中$\varepsilon > 0$。我们有

$$\begin{aligned} H_p a(x,\xi) = {} & 2\ell(x', \xi')\chi(\xi_d/\varepsilon)\chi'(x_d/\varepsilon)\xi_d^2/\varepsilon \\ & - \ell(x', \xi')(\partial_{x_d} R(x, \xi'))\chi(x_d/\varepsilon)\big(\chi(\xi_d/\varepsilon) + \chi'(\xi_d/\varepsilon)\xi_d/\varepsilon\big) \\ & + \xi_d H'_R(\ell(x', \xi'))\chi(\xi_d/\varepsilon)\chi(x_d/\varepsilon). \end{aligned}$$

由于 $\chi'(x_d/\varepsilon)\chi(\xi_d/\varepsilon)\xi_d^2/\varepsilon$、$\chi(x_d/\varepsilon)\chi(\xi_d/\varepsilon)\xi_d/\varepsilon$ 和 $\xi_d\chi(\xi_d/\varepsilon)\chi(x_d/\varepsilon)$ 一致有界，并且当 ε 趋于 0 时趋于 0，而 $\chi(\xi_d/\varepsilon)\chi(x_d/\varepsilon)$ 趋于 $1_{x_d=0,\ \xi_d=0}$ 且一致有界。我们有 $\langle m, H_p a\rangle$ 趋于 $\langle m, -1_{x_d=0,\ \xi_d=0}(\partial_{x_d} R(x', 0, \xi'))\ell(x', \xi')\rangle$ 当 ε 趋于 0 时，并且我们有

$$\langle m, -1_{x_d=0,\xi_d=0}\partial_{x_d} R(x', 0, \xi')\ell(x', \xi')\rangle = -\langle m^\partial, (\partial_{x_d} R(x', 0, \xi'))\ell(x', \xi')\rangle. \tag{1.91}$$

现在我们计算 $\varepsilon \to 0$ $\langle \tilde{m}_1, \partial_{\xi_d} a(x', 0, \xi', 0)\rangle$ 的极限。我们有

$$\partial_{\xi_d} a(x', x_d, \xi', \xi_d) = \ell(x', \xi')\chi(\xi_d/\varepsilon)\chi(x_d/\varepsilon) + \ell(x', \xi')\chi'(\xi_d/\varepsilon)\chi(x_d/\varepsilon)\xi_d/\varepsilon.$$

于是 $\partial_{\xi_d} a(x', 0, \xi', 0) = \ell(x', \xi')$，并且

$$\begin{aligned} \langle \tilde{m}_1 - (\partial_{x_d} R(x', 0, \xi'))m^\partial, \partial_{\xi_d} a(x', 0, \xi', 0)\rangle &= \langle \tilde{m}_1 - (\partial_{x_d} R(x', 0, \xi'))m^\partial, \ell(x', \xi')\rangle \\ &= -\langle m^\partial, (\partial_{x_d} R(x', 0, \xi'))\ell(x', \xi')\rangle \end{aligned}$$

from (1.90) 和 (1.91)。由此根据 (1.89) 我们推得 $\tilde{m}_1 = 0$ 以及引理的最后一个结果。 □

A.4. **命题 5.1 的证明**。 我们证明传播结果：首先是在内部区域中的传播，这是一个经典结果；其次是在边界上一点的邻域中的传播。根据前面的引理，这是一个经典结果。为完整起见，我们在此给出主要论证。证明是引理 A.1—A.5 的推论。

A.4.1. 内部区域 Ω 中的传播 Ω。 由命题 5.2，我们有 $H_p m = 0$。因此，经典结论是，m 在 H_p 的流下保持不变。更确切地说，令 $\rho_0 \in T^*\Omega$，并假设对于 $s \in [0,t]$，$\gamma(s, \rho_0) \in T^*\Omega$。令 $a \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ 使得对于 $s \in [0,t]$，$a(\gamma(-s, .))$ 的支集包含于$T^*\Omega$ 中，则我们有 $\langle \gamma_*(t, .)m, a\rangle = \langle m, a(\gamma(-t, .))\rangle = \langle m, a\rangle$。

A.4.2. 边界传播：双曲点。我们使用 A.1 节中定义的几何背景，尤其是函数 j 以及不同流的定义。

我们证明，若过去的测度支集局部为空，则未来的测度支集也局部为空；反过来，根据对称性，若未来的测度支集局部为空，则可以推出过去的测度支集局部为空。

回想一下，我们选择坐标使得 $p(x,\xi) = \xi_d^2 + R(x, \xi') - 1$，并且局部有 $\Omega = \{x_d > 0\}$。

我们回顾一下，点 $(x'_0, \xi'_0) \in T^*\partial\Omega$ 属于 $\mathcal{H}$，当且仅当 $R(x'_0, 0, \xi'_0) - 1 < 0$。我们应用引理 A.1 和 A.3。我们有 $m = 1_{x_d>0} m$ and $H_p m = m^+ \otimes \delta_{\xi_d=\sqrt{1-R(x',0,\xi')}} - m^+ \otimes \delta_{\xi_d=-\sqrt{1-R(x',0,\xi')}}$。

我们称 $\gamma^{\pm}$ 为从 $(x_0', x_d, \xi_0', \pm\sqrt{1-R(x',0,\xi')})$ 出发的 H_p 的积分曲线。若假设 $m = 1_{x_d>0}m$ 的支集在 $\gamma^-(s)$ 的某个邻域内为空，其中 $s<0$ 且 $|s|$ 足够小，则 $-m^+ \otimes \delta_{\xi_d=-\sqrt{1-R(x',0,\xi')}} = 0$。这意味着 $m^+ = 0$ 且 $H_p m = 0$。由于 $m_{|x_d<0} = 0$ 且当 $s<0$ 和 $|s|$ 足够小时，(s) 属于 $x_d<0$，这意味着 $m=0$ 在 $\gamma^+(0)$ 的某个邻域内。

A.4.3. 掠射点处的传播。我们回顾一下，点 $(x_0', \xi_0') \in T^*\partial\Omega$ 是掠射点或属于 $\mathcal{G}_g$，如果 $R(x_0', 0, \xi_0') - 1 = 0$ 且 $\partial_{x_d} R(x_0', 0, \xi_0') > 0$。令 γ 为从 $(x_0', 0, \xi_0', 0)$ 出发的 H_p 的积分曲线。那么，对于 $s \neq 0$，且 $|s|$ 充分小时，$\gamma(s)$ 进入 $\{x_d<0\}$。在 $T^*\partial\Omega$ 中 (x_0', ξ_0') 的某个邻域内，所有点要么是双曲点，要么是掠射点。我们假设，对于 $s_0<0$，$j^{-1}\big(\gamma_g(s_0; x_0', \xi_0')\big) \cap$ 支集 $m = \emptyset$，其中 $|s_0|$ 充分小。这里，$\gamma_g(s; x_0', \xi_0') = \Gamma(s; x_0', \xi_0')$，于是邻近 $j^{-1}\big(\gamma_g(s_0; x_0', \xi_0')\big)$ 的所有点 ρ 都不在 m 的支集中。由 Γ 的连续性，曲线 $\Gamma(s;\rho)$ 会在 (x_0', ξ_0') 的某个邻域内于 ρ' 处碰到边界。如果 ρ' 是双曲点，根据前面的结果，点 $j^{-1}\big(\Gamma(s;\rho)\big)$ 不在 m 的支集中。如果 ρ' 是掠射点，则所有点 $\Gamma(s;\rho)$ 都是严格掠射点。特别地，这意味着 m 的支集包含于 $x_d = 0$，因此 $1_{x_d>0}m = 0$ 和 $m_0 = 0$。我们可以应用引理 A.5，且 m^∂ 满足 $H_R' m^\partial = 0$。令 γ_g 为从 (x_0', ξ_0') 出发的 H_R' 的积分曲线。由于根据假设，$m^\partial \otimes \delta_{x_d=0} \otimes \delta_{\xi_d=0} = m$ 在 $j^{-1}\big(\gamma_g(s_0; x_0', \xi_0')\big)$ 的某个邻域内为 0，因此在 $\gamma_g(s_0)$ 和 $H_R' m^\partial = 0$ 的某个邻域内有 $m^\partial = 0$；这意味着 $\gamma_g(s)$ 在 $s=0$ 的某个邻域内不在 m^∂ 的支集中。由于 $m = m^\partial \otimes \delta_{x_d=0} \otimes \delta_{\xi_d=0}$，我们在 $j^{-1}(x_0', \xi_0')$ 的某个邻域内有 $m = 0$。

A.4.4. 衍射点处的传播。我们回顾一下，点 $(x_0', \xi_0') \in T^*\partial\Omega$ 属于 $\mathcal{G}_d$，当且仅当 $R(x_0', 0, \xi_0') - 1 = 0$ 且 $\partial_{x_d} R(x_0', 0, \xi_0') < 0$。我们沿用先前对 γ 的记号。对于邻域 $(x_0', \xi_0') \in T^*\partial\Omega \cup T^*\Omega$ 内的点 ρ，有三种情形：首先，经过 ρ 的积分曲线在双曲点处与 $x_d = 0$ 相交，根据先前的结果，该积分曲线不在 m的支集中；其次，该曲线不与 $x_d = 0$ 相交，根据内部传播结果，该积分曲线不在 m 的支集中；第三，该积分曲线在衍射点处与 $x_d = 0$相交。此时 m^∂ 的支集包含于 $\mathcal{G}_d$，而 $1_{x_d>0}m$ 的支集包含于$\{(x,\xi)\ \ \xi_d^2 + R(x,\xi') = 1$，使得 $\gamma(.; x, \xi)$ 与 $x_d = 0,\ \xi_d = 0\}$相交。

我们可以应用引理 A.4，于是 $m^\partial = 0$ 在 $(x_0', 0, \xi_0')$ 的一个邻域内。由于击中双曲点 $x_d = 0$ 的积分曲线不在 $1_{x_d>0}m$ 的支集中，因此 m_0 支持在 $\xi_d = 0$ 上。我们可以应用引理 A.5 得到 $m_0 = 0$。于是 $H_p m = H_p(1_{x_d>0}m) = 0$，并且由于根据假设，当 $s<0, |s|$ 足够小时，$\gamma(s)$ 不在 m 的支集中，我们推知 $\gamma(0)$ 不在 m 的支集中。

A.4.5. 边界传播：高接触阶积分曲线。我们回顾一下，若 (x_0', ξ_0') 满足 $R(x_0', 0, \xi_0', 0) = 1, \partial_{x_d} R(x_0', 0, \xi_0', 0) = 0$，并且记从 $(x_0', 0, \xi_0', 0)$ 出发的 H_p 的积分曲线为 $\gamma(s) = (x'(s)\ x_d(s)\ \xi'(s)\ \xi_d(s))$。根据所作假设（见定义 A.1），存在 $k \in \mathbb{N}, k \geq 3$ 和 $\alpha \neq 0$，使得 $x_d(s) = \alpha s^k + \mathcal{O}(s^{k+1})$。我们记 $\gamma_g(s) = (x_g'(s)\ \xi_g'(s))$ 为从 (x_0', ξ_0') 出发的 H_R' 的积分曲线。对于每个 k，我们假设已经证明：当 $j<k$ 或 $\mathcal{H}$ 时，击中 $x_d = 0$ 上 $\mathcal{G}^j$ 中某一点的积分曲线不在 m 的支集中。

情形 k 为偶数， $\alpha<0$。从 $T^*\partial\Omega$ 中 $T^*\Omega$ 内、(x_0', ξ_0') 邻域里的某一点出发的 H_p 的积分曲线，最终会在一点 ρ' 处与 $x_d = 0$ 相交，该点位于 $\mathcal{H}$ 或 $\mathcal{G}^j$ 中（定义见 A.1 节，关于 $\mathcal{G}^j$）。根据假设并利用归纳法，这条积分曲线不在 m 的支集内，除非 ρ' 属于 $\mathcal{G}^k$；但在这种情况下，这条积分曲线位于 $x_d \leq 0$ 中。这意味着 $1_{x_d>0}m = 0$，于是 $m_0 = 0$。由引理 A.5 可得 $H_R' m^\partial = 0$；又由于根据假设，当 $s<0$ 足够小时，$\gamma_g(s)$ 不在 m^∂ 的支集内，因此我们推得 $\gamma_g(0)$ 不在 m^∂ 的支集内。

情形 k 为奇数， $\alpha<0$。按照与前一种情形相同的论证，从 $T^*\partial\Omega$ 中 $T^*\Omega$ 内、(x_0',ξ_0') 邻域里的某一点出发的 H_p 的积分曲线会与 $\mathcal{G}^k$ 相交，或者不在 m 的支集内。记这条积分曲线与 $x_d=0$ 相交的点为 ρ'。从 ρ' 出发的广义双特征曲线在 $s>0$ 时位于 $x_d=0$ 上，在 $s<0$ 时位于 $x_d>0$ 中；并且当 $|s|$ 足够小时，对于 $s>0$，积分曲线 H_R' 上的所有点都位于 $\mathcal{G}_g$ 中。由于根据假设，该广义双特征曲线在过去不属于 m 的支集，这意味着 $1_{x_d>0}m=0$，于是 $m_0=0$。因此可以应用引理 A.5，得到 $H_R'm^\partial=0$。但是，由于 $\gamma_g(s)\in\mathcal{G}_d$，当 $s<0$ 且 $|s|$ 足够小时，$\gamma_g(s)$ 不在 $m=m^\partial\otimes\delta_{x_d=0}\otimes\delta_{\xi_d=0}$ 的支集内，因此 $\gamma_g(0)$ 不在 m^∂ 的支集内。

情形 k 偶数， $\alpha>0$。根据归纳假设，只有具有相同接触阶 k 和相同符号条件 $\alpha>0$ 的广义双特征线才能位于 m的支集内。应用引理 A.5，我们有 $-\partial_{x_d}R(x',0,\xi')m^\partial\otimes\delta_{x_d=0}\otimes\delta'_{\xi_d=0}=0$，根据归纳假设，当 $\partial_{x_d}R(x',0,\xi')\neq0$时，$m^\partial=0$。由此可得 $H_pm=0$。随后，m 的支集在 H_p的流下保持不变。

情形 k 奇数， $\alpha>0$。根据归纳假设，只有具有相同接触阶 k 和相同符号条件 $\alpha>0$ 的广义双特征线才能位于 m的支集内。我们可以应用引理 A.5，并通过与前一种情形相同的论证，得到 $H_pm=0$；由于$\gamma(s)$对于充分小的 $|s|<0$ 属于 $x_d<0$，因此 $\gamma(s)$对于 $s<0$ 不在 m 的支集内，而根据传播性质，$\gamma(0)$不在 m的支集内。

命题 5.1 的证明，第一种情形。根据假设，对于某个点 $\rho\in T_b\Omega=T^*\partial\Omega\cup T^*\Omega$，存在某个 $s_0\geq0$, $\pi(\Gamma(s_0,\rho))\in\omega$，并且由命题 4.3 和假设（几何控制条件），$m$ 在 $j^{-1}(\gamma(s_0,\rho))$ 的某个邻域内为零。由于 supp m是闭集，如果 $\rho\in\operatorname{supp}m$，则存在 $s_1\in[0,s_0]$使得 $j^{-1}\Gamma(s_1,\rho)\cap\operatorname{supp}m\neq\emptyset$且 $j^{-1}\Gamma(s,\rho)\cap\operatorname{supp}m=\emptyset$，对于 $s\in(s_1,s_0].$)，在 $\Gamma(s_1,\rho)$处，我们可以应用本节得到的结果，证明 $j^{-1}\Gamma(s_1,\rho)\cap\operatorname{supp}m=\emptyset$，从而得出矛盾。□

附录B. 边界迹的估计：严格衍射的情形

本节证明一项技术性结果，用于估计衍射点邻域内的边界迹。这一精确估计使我们能够证明此类点邻域内的支集传播。

B.1. **关于 OIF 和艾里函数的回顾**。本节给出一些记号和结果，这些记号和结果由 [13] 遵循 Tataru [41] 引入。

引理 *B.1.* 设 $(x_0',\xi_0')\in\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}^{d-1}$满足 $R(x_0',0,\xi_0')-1=0$。对于所有 x_d，在 *0* 的某个邻域内，存在一个光滑辛变换 $\kappa:U_0\to U_1$，其中 U_0 和U_1 分别是 $\mathbb{R}^{d-1}_{x'}\times\mathbb{R}^{d-1}_{\xi'}$ 和 $\mathbb{R}^{d-1}_{y'}\times\mathbb{R}^{d-1}_{\eta'}$ 的某个开集，满足 $(x_0',\xi_0')\in U_0$，$(0,0)\in U_1$，$\kappa(x_0',\xi_0')=(0,0)$，且 $\kappa^*(\eta_1)=R(x,\xi')-1$。此外，$x_d$ 作为参数起作用，且 κ 关于 $x_d=y_d$ 光滑。

这个引理是经典结果。我们可以在 Hörmander [24, 定理 21.16]中找到证明。这意味着我们可以以辛方式补全坐标 $R-1$。

为避免歧义，即使在 $x_d=y_d$ 的情况下，我们在使用（x，ξ'）变量时记作 x_d，否则记作 y_d。

我们将 0 阶符号称为符号 $a\in S(1,|dx|^2+|d\xi'|^2)$，或称为 $S(1,|dy|^2+|d\eta'|^2)$ 中的符号。在本节中，我们只使用切向符号；但由于在下文中必须使用不同类的符号，我们更倾向于始终使用同一种记号。

设 χ 是一个光滑函数，其支集包含在 $(x_0',0,\xi_0')$ 的邻域内的 U_0, $\chi\geq0$ 和 $\chi=1$.

引理 B.2。与 κ 相关联，存在一个 F，即一个半经典傅里叶积分算子，满足以下性质，

i) F 关于 x_d一致地是一个酉算子。*ii)* 对所有 $\tilde{a} \in \mathscr{C}_0^\infty(U_1)$，$F^{-1}$ 算子$_{\mathrm{sc}}(\tilde{a})F =$ 算子$_{\mathrm{sc}}(a)$，其中 $a = \kappa^* \tilde{a} + hb$ 其中 b 是一个 0 阶符号。特别地，我们有 F^{-1} 算子$_{\mathrm{sc}}(\eta_1 \tilde{\chi}^2(y,\eta'))F =$ 算子$_{\mathrm{sc}}(\chi^2(R-1)) + h$ 算子$_{\mathrm{sc}}(b)$，其中 $\tilde{\chi} \in \mathscr{C}_0^\infty(U_1)$，$\tilde{\chi} \geq 0$ 和 b 是一个 0 阶符号。*iii)* 存在 θ 一个 0 阶符号、B 一个作用于 L^2 上的有界算子，使得算子$_{\mathrm{sc}}(\theta)^* =$算子$_{\mathrm{sc}}(\theta)$，$\kappa^* \tilde{\chi} = \chi$ 且 $(\partial_{x_d} F)F^{-1} = ih^{-1}$ 算子$_{\mathrm{sc}}(\theta) + hB$。*iv)* 若算子 A 和 $\tilde{A}$ 满足 $A = F^{-1}\tilde{A}F$，则

$$\partial_{x_d} A = F^{-1}\big(\partial_{y_d}\tilde{A} + ih^{-1}[\tilde{A}, \mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(\theta)] + h[\tilde{A}, B]\big)F$$

其中 B 是前面定义的算子。

v) 特别地，在$(x_0', 0, \xi_0')$的一个邻域内，我们有 $\kappa^*\{\eta_1, \theta\} = \partial_{x_d} R$。

关于该引理的证明，请参见 [13, 引理 B.2]。

从现在起，我们将使用两种符号的半经典量子化，一种参数为 h，另一种参数为 $h^{1/3}$。为避免两者之间产生歧义或混淆，我们不使用记号 $\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}$，而采用经典量子化。例如，对于 a 一个 0 阶符号，我们有 $\mathrm{op}_{\mathrm{sc}}(a) = \mathrm{op}(a(x, h\xi'))$，也就是说，我们在记号中保留 h 或 $h^{1/3}$。

设 $g = |dy|^2 + h^{2/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-2}|d\eta'|^2$，该度量给出的符号类本质上是以 $h^{1/3}$ 为半经典参数的半经典符号类。我们将验证 g 缓慢变化且 σ 温和这一点留给读者。Hörmander 定义的与 g 相关的"h"是$h^{1/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1}$。它是我们在符号演算的渐近展开中得到的量。特别地，对于每个 $\nu \in \mathbb{R}$，函数 $\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^\nu$ 是 g-连续的，且 σ, g 温和。有关此处广泛使用的定义，请参见 [24, 第 18 章第 4 节和 5]。

为简化记号，在不会对 L^2 范数是对变量 x' 还是 y'、在点 x_d 还是 y_d处取值产生歧义时，我们用 $|u|$ 代替$|u|_{L^2}(x_d)$。同样滥用记号时，我们用内积$(.|.)$代替$(.|.)_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}(x_d)$。

我们回顾一下艾里函数的若干性质，该函数记作 Ai。它满足方程 $\mathrm{Ai}''(z) - z\,\mathrm{Ai}(z) = 0$ for $z \in \mathbb{C}$；Ai 在实轴上取实值，且 $\mathrm{Ai}(z) = \mathrm{Ai}(\bar{z})$。令 $\omega = e^{2i\varepsilon\pi/3}$ for$\varepsilon = \pm 1$。

对于 $x \in \mathbb{R}$，令 $\alpha(x) = -\omega\,\mathrm{Ai}'(\omega x)/\,\mathrm{Ai}(\omega x) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$。由于 Ai 的零点都在负实轴上，函数 α 对 $x \in \mathbb{R}$ 有定义且光滑。函数 α 满足以下性质。

引理 B.3. 我们有

i) $\alpha(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{4x} + b_1(x)$ *for* $x > 0$
ii) $\alpha(x) = \varepsilon i\sqrt{-x} + \frac{1}{4x} + b_2(x)$ *for* $x < 0$
iii) $\mathrm{Re}\,\alpha(x) < 0$ *for all* $x \in \mathbb{R}$
iv) α *satisfies the differential equation* $\alpha'(x) = \alpha^2(x) - x$,

其中 $b_j \in S(\langle x\rangle^{-5/2}, |dx|^2)$ 对于 $j = 1,2$。

关于该引理的证明，参见 [13, 引理 B.3]。

令 $\tilde{r}_d$ 满足 $\kappa^*\tilde{r}_d = -\partial_{x_d} R$。我们假设局部有 $\partial_{x_d} R < 0$，这意味着在 (0,0) 的某个邻域内有 $\tilde{r}_d > 0$。

令 $\tilde{a}(y,\eta') = h^{1/3}\tilde{\chi}(y, h\eta')\tilde{r}_d^{1/3}(y, h\eta')\alpha(\zeta)$，其中 $\zeta = h^{1/3}\eta_1\tilde{r}_d^{-2/3}(y, h\eta')$。我们假设，在 $\tilde{\chi}(y, h\eta')$ 的支集上，$\tilde{r}_d(y, h\eta') > 0$。下文中，我们记 $\rho = (x, h\xi')$ 和 $\tilde{\rho} = (y, h\eta')$。我们定义 $\tilde{A} =$算子$(\tilde{a}(y,\eta'))$、$\tilde{\Psi} = h^{-1/3}$算子$(\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1/2})$，并令 $A = F^{-1}\tilde{A}F$, $\Psi = F^{-1}\tilde{\Psi}F$。

由引理 B.3，我们有 $\tilde{a} \in S(h^{1/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{1/2}, g)$ 如 $h^{-1/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1/2} \in S(h^{-1/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1/2}, g)$。注意，由于在 $\tilde{\chi}(y, h\eta')$ 的支集上，$|\eta_1| \leq h^{-1}$ 和$\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{1/2} \leq h^{-1/3}$，因此 $\tilde{a}$ 有界。由此可得，$\tilde{A}$ 在 L^2 上有界。

我们陈述如下引理，该引理已在 [13], 引理 C.1 中证明。

引理 B.4。设 $\tilde{\chi}_3 \in \mathscr{C}_0^\infty(U_1)$ 满足 $(1-\tilde{\chi}_3)\tilde{\chi}_1 = 0$，其中 $\kappa^*\tilde{\chi}_1 = \chi_1$。我们有

$$|\tilde{\Psi}\,\mathrm{op}(\tilde{\chi}_1(\tilde{\rho}))w| \lesssim |h^{-1/3}\,\mathrm{op}(\tilde{\chi}_3(\tilde{\rho})\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1/2})\,\mathrm{op}(\tilde{\chi}_1(\tilde{\rho}))w| + |w|,$$

对所有 w 属于 L^2。

B.2. **边界处的估计：掠射点**。设 χ_0 是 $(x_0', 0, \xi_0')$ 邻域内的一个光滑截断函数，使得 χ_0 支撑在满足 $\chi = 1$ 的集合中，并且 $\chi_0 = 1$ 位于 $(x_0', 0, \xi_0')$ 的一个邻域内。我们考虑方程 (4.47) 的解 (r_h, u_h^d)。令 $\mathrm{r} = \mathrm{op_{sc}}(\chi_0)r_h$，且 $\mathrm{v} = \mathrm{op_{sc}}(\chi_0)u_h^d$。我们有

$$\begin{aligned}
&\|\,\mathrm{op_{sc}}(\chi_0)(\mathrm{op_{sc}}((1-\chi)^2)(R-1))r\| \lesssim h\|r_h\|,\\
&\|[\mathrm{op_{sc}}(\chi_0), \mathrm{op_{sc}}(\chi^2(R-1))]r\| \lesssim h\|r_h\|,\\
&\|[\mathrm{op_{sc}}(\chi_0), hD_{x_d}](r_h, u_h^d)\| \lesssim h(\|r_h\| + \|u_h^d\|).
\end{aligned}$$

在系统（4.47）上作用算子$\mathrm{sc}(\chi_0)$，得到系统

$$\begin{aligned}
&hD_{x_d}\mathrm{r} + \mathrm{v} = h\mathrm{f}\\
&hD_{x_d}\mathrm{v} - \mathrm{op}(\chi^2(x, h\xi')(R(x, h\xi)-1))\mathrm{r} = h\mathrm{k},\\
&\text{where } \|\mathrm{f}\| + \|\mathrm{k}\| \lesssim \|q_h\| + \|f\| + \|r_h\| + \|u_h^d\|\\
&\text{and } \mathrm{r} = \mathrm{op_{sc}}(\chi_0)r_h,\ \mathrm{v} = \mathrm{op_{sc}}(\chi_0)u_h^d.
\end{aligned} \tag{2.92}$$

命题 B.1. 设r 和v 满足系统(2.92)。存在 $C_0 > 0$ 使得

$$\begin{aligned}
&|i\mathrm{v} + A\mathrm{r}|^2(0) + \|\Psi(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})\|^2_{L^2(x_d>0)}\\
&\qquad\qquad \leq C_0\big(\|u_h^d\|^2_{L^2(x_d>0)} + \|r_h\|^2_{L^2(x_d>0)} + \|\mathrm{k}\|^2_{L^2(x_d>0)} + \|\mathrm{f}\|^2_{L^2(x_d>0)}\big).
\end{aligned}$$

证明. 我们计算

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_{x_d}|i\mathrm{v} + A\mathrm{r}|^2 &= \mathrm{Re}(i\partial_{x_d}\mathrm{v} + (\partial_{x_d}A)\mathrm{r} + A\partial_{x_d}\mathrm{r}|i\mathrm{v} + A\mathrm{r})\\
&= \mathrm{Re}(-h^{-1}(\mathrm{op}(\chi^2(\rho)(R(\rho)-1))\mathrm{r} + h\mathrm{k}) + (\partial_{x_d}A)\mathrm{r} + ih^{-1}A(-\mathrm{v} + h\mathrm{f})|i\mathrm{v} + A\mathrm{r})\\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mathrm{Re}(-h^{-1}A(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})|i\mathrm{v} + A\mathrm{r})\\
I_2 &= \mathrm{Re}(h^{-1}(-\mathrm{op}(\chi^2(\rho)(R(\rho)-1))\mathrm{r} + A^2\mathrm{r})|i\mathrm{v} + A\mathrm{r})\\
I_3 &= \mathrm{Re}((\partial_{x_d}A)\mathrm{r}|i\mathrm{v} + A\mathrm{r})\\
I_4 &= \mathrm{Re}(-\mathrm{k} + iA\mathrm{f}|i\mathrm{v} + A\mathrm{r}).
\end{aligned}$$

令 $\mathrm{w} = F(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})$。由于 $\tilde{A}$ 且 A 在 L^2 上有界，我们有 $|\mathrm{w}| \lesssim |\mathrm{v}| + |\mathrm{r}|$。现在估计各项 I_k。

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mathrm{Re}(-h^{-1}FAF^{-1}\mathrm{w}|\mathrm{w})\\
&= \mathrm{Re}(-h^{-1}\tilde{A}\mathrm{w}|\mathrm{w}).
\end{aligned}$$

由引理 B.3 得

$$-h^{-1}\,\mathrm{Re}\,\tilde{a}(y, \eta) \geq \delta h^{-2/3}\tilde{\chi}^2(\tilde{\rho})\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1},$$

以及 $h^{-1}\,\mathrm{Re}\ \tilde{a}(y, \eta) \in S(h^{-2/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{1/2}, g)$。

那么根据 Fefferman-Phong 不等式（见 [24, 定理 18.6.8]），并且由于算子 $\mathrm{op}(h^{-1/3}\tilde{\chi}(\tilde{\rho})\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1/2})^*\,\mathrm{op}(h^{-1/3}\tilde{\chi}(\tilde{\rho})\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1/2})$ 的符号的实部模 $h^{-2/3}\tilde{\chi}^2(\tilde{\rho})\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1}$ 一个在 L^2 上有界的算子，我们有

$$I_1 \geq \delta|h^{-1/3}\,\mathrm{op}(\tilde{\chi}(\tilde{\rho})\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1/2})\mathrm{w}|^2 - C|\mathrm{w}|^2,$$

对于 $C>0$。由 w 的定义可得 $\mathrm{w} = \mathrm{op}(\tilde{\chi}_0(\tilde{\rho}))(iFu_h^d + \tilde{A}Fr_h) + [\tilde{A}, \mathrm{op}(\tilde{\chi}_0(\tilde{\rho}))]Fr_h$。我们可以应用引理 B.4，其中 $\mathrm{op}(\tilde{\chi}_1(\tilde{\rho}))w = \mathrm{op}(\tilde{\chi}_0(\tilde{\rho}))(iFu_h^d + \tilde{A}Fr_h)$，并且由于 $[\tilde{A}, \mathrm{op}(\tilde{\chi}_0(\tilde{\rho}))]$ 是一个符号属于 $S(h^{2/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1/2}, g)$ 的算子，因此 $\tilde{\Psi}[\tilde{A}, \mathrm{op}(\tilde{\chi}_0(\tilde{\rho}))]$ 是 L^2 上的有界算子。于是得到

$$I_1 \geq \delta|\tilde{\Psi}\,\mathrm{op}(\tilde{\chi}_0(\tilde{\rho}))(iFu_h^d + \tilde{A}Fr_h)|^2 - C\big(|u_h^d|^2 + |r_h|^2\big).$$

同样的论证允许我们用 w 替换 $\mathrm{op}(\tilde{\chi}_0(\tilde{\rho}))(iFu_h^d + \tilde{A}Fr_h)$。最后得到

$$I_1 \geq \delta|\tilde{\Psi}\mathrm{w}|^2 - C\big(|u_h^d|^2 + |r_h|^2\big). \tag{2.93}$$

我们有

$$\begin{aligned} I_2 &= \mathrm{Re}\,\big(h^{-1}F(-\,\mathrm{op}(\chi^2(\rho)(R(\rho)-1)) + A^2)\mathrm{r}|\mathrm{w}\big) \\ &= \mathrm{Re}\,\big(h^{-1}(-\,\mathrm{op}(h\eta_1\tilde{\chi}^2(\tilde{\rho})) + \tilde{A}^2)F\mathrm{r}|\mathrm{w}\big) + \mathrm{Re}\,\big(F\,\mathrm{op}(b(\rho))\mathrm{r}|\mathrm{w}\big), \end{aligned}$$

其中，$\mathrm{op}(b(\rho))$在 L^2 上有界（见引理 B.2）。

$\tilde{A}^2$ 的符号模去 $S(h,g)$中的一项后为 $\tilde{a}^2 \in S(h^{2/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle, g)$。根据 $\tilde{a}$的定义和引理 B.3，我们有

$$\begin{aligned} \tilde{a}^2 &= h^{2/3}\tilde{\chi}^2(\tilde{\rho})\tilde{r}_d^{2/3}(\tilde{\rho})\alpha^2(\zeta) \\ &= h^{2/3}\tilde{\chi}^2(\tilde{\rho})\tilde{r}_d^{2/3}(\tilde{\rho})\big(\zeta + \alpha'(\zeta)\big) \\ &= h\eta_1\tilde{\chi}^2(\tilde{\rho}) + h^{2/3}\tilde{\chi}^2(\tilde{\rho})\tilde{r}_d^{2/3}(\tilde{\rho})\alpha'(\zeta). \end{aligned}$$

我们有

$$h^{-1/3}\tilde{\chi}^2(\tilde{\rho})\tilde{r}_d^{2/3}(\tilde{\rho})\alpha'(\zeta) \in S(h^{-1/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1/2}, g),$$

于是得到

$$|I_2| \lesssim |\mathrm{r}|\big(|\tilde{\Psi}\mathrm{w}| + |\mathrm{w}|\big). \tag{2.94}$$

我们有

$$\begin{aligned} I_3 &= -\,\mathrm{Re}\,\big(F(\partial_{x_d}A)F^{-1}F\mathrm{r}|\mathrm{w}\big) \\ &= -\,\mathrm{Re}\,\big((\mathrm{op}(\partial_{y_d}\tilde{a}(\tilde{\rho})) + ih^{-1}[\mathrm{op}(\tilde{a}(\tilde{\rho})), \mathrm{op}(\theta(\tilde{\rho}))]F\mathrm{r}|\mathrm{w}\big) \\ &\quad -\,\mathrm{Re}\,\big(h[\mathrm{op}(\tilde{a}(\tilde{\rho})), B]F\mathrm{r}|\mathrm{w}\big), \end{aligned}$$

根据引理 B.2。

注意到，由于 $h^{1/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{1/2}$ 在 $\tilde{\chi}(\tilde{\rho})$ 的支集上有界，因此 $\tilde{a}(\tilde{\rho}) \in S(1,g)$。于是，$\mathrm{op}(\partial_{y_d}\tilde{a}(\tilde{\rho}))$ 和 $h[\mathrm{op}(\tilde{a}(\tilde{\rho}))\ B]$ 是 L^2 上的有界算子。

根据 α 的性质和符号演算，.....的符号

$$h^{-1}[\mathrm{op}(\tilde{a}(\tilde{\rho})), \mathrm{op}(\theta(\tilde{\rho}))] \text{ is in } S(h^{-1/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1/2}, g).$$

于是我们得到

$$|I_3| \lesssim |\mathrm{r}|\big(|\tilde{\Psi}\mathrm{w}| + |\mathrm{w}|\big). \tag{2.95}$$

我们有

$$|I_4| = |\,\mathrm{Re}(-\mathrm{k} + iA\mathrm{f}|i\mathrm{v} + A\mathrm{r})| \lesssim (|\mathrm{k}| + |\mathrm{f}|)(|\mathrm{v}| + |\mathrm{r}|). \tag{2.96}$$

由 (2.93)—(2.96) 可得

$$\frac{1}{2}\partial_{x_d}|i\mathrm{v} + A\mathrm{r}|^2 \geq \delta|\tilde{\Psi}\mathrm{w}|^2 - C\big(|\mathrm{k}|^2 + |\mathrm{f}|^2 + |u_h^d|^2 + |r_h|^2\big).$$

将此不等式在 0 和 $\sigma > 0$ 之间积分，得到

$$|i\mathrm{v} + A\mathrm{r}|^2(0) + \delta' \int_0^\sigma |\tilde{\Psi}\mathrm{w}|^2(x_d)dx_d \\ \lesssim \|u_h^d\|^2_{L^2(x_d>0)} + \|r_h\|^2_{L^2(x_d>0)} + \|\mathrm{k}\|^2_{L^2(x_d>0)} + \|\mathrm{f}\|^2_{L^2(x_d>0)} + |u_h^d|^2(\sigma) + |r_h|^2(\sigma).$$

对该不等式在 σ 的两个正值之间积分，并令 $|\Psi\mathrm{w}|(y_d) = |\Psi(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})|(x_d)$，即可得到所需结果。□

回顾记号 $\tilde{a}(y,\eta') = h^{1/3}\tilde{\chi}(\tilde{\rho})\tilde{r}_d^{1/3}(\tilde{\rho})\alpha(\zeta)$，其中 $\tilde{\rho} = (y, h\eta')$、$\zeta = h^{1/3}\eta_1\tilde{r}_d^{-2/3}(\tilde{\rho})$，且根据假设，$\tilde{r}_d(\tilde{\rho})$ 在 $\tilde{\chi}(\tilde{\rho})$ 的支集上。我们陈述如下引理，证明见 [13,引理 B.5]。

引理 B.5. 存在一个函数 $\beta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$，满足以下性质

i) $-\beta' - \beta \operatorname{Re}\alpha \geq 0$
ii) $\beta \in S(\langle x\rangle^{-1/4}, |dx|^2)$
iii) $\beta \gtrsim \langle x\rangle^{-1/4}$.

设 $\tilde{c}(y,\eta') = h^{-1/6}\tilde{\chi}_2(\tilde{\rho})\beta(\zeta)$，其中 $\tilde{\chi}_2$ 的支集包含于 $\{\tilde{\chi} = 1\}$，而 $\tilde{\chi}_2 = 1$ 在 $(0,0)$ 的一个邻域内。我们有 $\tilde{a} \in S(h^{1/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{1/2}, g)$ 和 $\tilde{c} \in S(h^{-1/6}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1/4}, g)$。

We define $\tilde{C} = \mathrm{op}(\tilde{c})$ and $C = F^{-1}\tilde{C}F$.

命题 B.2. 设r 和v 满足系统(2.92)。存在 $C_0 > 0$ 使得

$$|C(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})|^2(0) \leq C_0\big(\|\mathrm{k}\|^2_{L^2(x_d>0)} + \|\mathrm{f}\|^2_{L^2(x_d>0)} + \|r_h\|^2_{L^2(x_d>0)} + \|u_h^d\|^2_{L^2(x_d>0)}\big).$$

证明。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_{x_d}|C(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})|^2 &= \operatorname{Re}\big(\partial_{x_d}\big(C(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})\big)|C(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})\big) \\ &= \operatorname{Re}((\partial_{x_d}C)(i\mathrm{v} + A\mathrm{r}) + iC\partial_{x_d}\mathrm{v} + C\partial_{x_d}(A)\mathrm{r} + CA\partial_{x_d}\mathrm{r}|C(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})) \\ &= J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5,\end{aligned} \tag{2.97}$$

其中

$$\begin{aligned}J_1 &= \operatorname{Re}(C^*(\partial_{x_d}C)(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})|i\mathrm{v} + A\mathrm{r}) \\ J_2 &= \operatorname{Re}(\partial_{x_d}(A)\mathrm{r}|C^*C(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})) \\ J_3 &= \operatorname{Re}(-\mathrm{k} + iA\mathrm{f}|C^*C(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})) \\ J_4 &= \operatorname{Re}(-ih^{-1}A\mathrm{v}|C^*C(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})) \\ J_5 &= \operatorname{Re}(-h^{-1}\operatorname{op}(\chi^2(\rho)(R(\rho) - 1))\mathrm{r}|C^*C(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})).\end{aligned}$$

Taki与命题 B.2 的证明中一样，$\mathrm{w} = F(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})$，并根据引理 B.2，我们写作

$$\begin{aligned}K_1 &= \operatorname{Re}(\tilde{C}^*(\partial_{y_d}\tilde{C})\mathrm{w}|\mathrm{w}) \\ K_2 &= \operatorname{Re}((\partial_{y_d}\tilde{A} + h[\tilde{A}, B])F\mathrm{r}|\tilde{C}^*\tilde{C}\mathrm{w}) + \operatorname{Re}(F\operatorname{op}(b(\rho))\mathrm{r}|\tilde{C}^*\tilde{C}\mathrm{w}) \\ K_3 &= \operatorname{Re}(-F\mathrm{k} + iFA\mathrm{f}|\tilde{C}^*\tilde{C}\mathrm{w}) \\ K_4 &= \operatorname{Re}(-h^{-1}\tilde{A}\mathrm{w}|\tilde{C}^*\tilde{C}\mathrm{w}) + \operatorname{Re}(\tilde{C}^*(ih^{-1}[\tilde{C}, \operatorname{op}(\theta(\tilde{\rho}))] + h\tilde{C}^*[\tilde{C}, B])F\mathrm{w}|\mathrm{w}) \\ K_5 &= \operatorname{Re}(h^{-1}(\tilde{A}^2 - \operatorname{op}(h\eta_1\tilde{\chi}^2(\tilde{\rho})))F\mathrm{r}|\tilde{C}^*\tilde{C}\mathrm{w}) + \operatorname{Re}((ih^{-1}[\tilde{A}, \operatorname{op}(\theta(\tilde{\rho}))]F\mathrm{r}|\tilde{C}^*\tilde{C}\mathrm{w}).\end{aligned}$$

注意，$\tilde{C}^*(\partial_{y_d}\tilde{C})$的符号属于 $S(h^{-1/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1/2}, g)$，于是

$$|K_1| \lesssim |\tilde{\Psi}\mathrm{w}||\mathrm{w}|. \tag{2.98}$$

根据符号演算，$(\partial_{y_d}A)^*C^*C$ 的符号属于 $S(1,g)$，因此该算子在 L^2 上有界。显然，$[\tilde{A}, B]$ 来自 $\partial_{x_d}A$ 的余项（见**iv**) 引理 B.2），以及

$\mathrm{op}(b(\rho))$来自 $F\,\mathrm{op}(\chi^2(\rho)(R(\rho)-1))F^{-1}$ 的余项（见ii) 引理 B.2），在 L^2 上有界。由于 $\tilde{C}^*\tilde{C}$ 的符号属于 $S(h^{-1/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1/2},g)$，我们得到

$$|K_2|\lesssim |\mathrm{r}||\mathrm{w}|+|\mathrm{r}||\tilde{\Psi}\mathrm{w}|. \tag{2.99}$$

根据相同的论证，我们有

$$|K_3|\lesssim (|\mathrm{k}|+|\mathrm{f}|)|\tilde{\Psi}\mathrm{w}|. \tag{2.100}$$

~ ~ ~ ~ ~ ~为了估计 K_4的最后一项，我们写作 $C^*[C,B]=C^*CB-C^*BC$，第一项给出一项，可由 $|\tilde{\Psi}\mathrm{w}||\mathrm{w}|$ 估计；第二项可由 $|\tilde{C}\mathrm{w}|^2=(\tilde{C}^*\tilde{C}\mathrm{w}|\mathrm{w})\lesssim|\tilde{\Psi}\mathrm{w}||\mathrm{w}|$.估计

为了估计 K_4 的其他项，注意到 $-h^{-1}\tilde{C}^*\tilde{C}\tilde{A}+ih^{-1}\tilde{C}^*[\tilde{C},\mathrm{op}(\theta(\tilde{\rho}))]$的符号模去属于 $S(h^{-2/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1},g)$的符号后为 $-h^{-1}\tilde{c}^2\tilde{a}+h^{-1}\tilde{c}\{\tilde{c},\theta(\tilde{\rho})\}$，而这一项可由 $|\tilde{\Psi}w_h|^2$. 估计。我们计算

$$\begin{aligned}h^{1/6}\{\tilde{c},\theta(\tilde{\rho})\}&=\{\tilde{\chi}_2(\tilde{\rho}),\theta(\tilde{\rho})\}\beta(\zeta)+\{\beta(\zeta),\theta(\tilde{\rho})\}\chi_2(\tilde{\rho})\\&=\{\tilde{\chi}_2(\tilde{\rho}),\theta(\tilde{\rho})\}\beta(\zeta)+\{\zeta,\theta(\tilde{\rho})\}\chi_2(\tilde{\rho})\beta'(\zeta).\end{aligned}$$

项 $h^{-1}\tilde{c}h^{-1/6}\{\tilde{\chi}_2(\tilde{\rho})\ \theta(\tilde{\rho})\}\beta(\zeta)\in S(h^{-1/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1/2},g)$，以及由该项产生的 K_4 coming~ 项，可以通过 $|\Psi\mathrm{w}||\mathrm{w}|$ 估计。对于另一项，我们有

$$h^{-1/3}\{\zeta,\theta(\tilde{\rho})\}=\{\tilde{r}_d^{-2/3}(\tilde{\rho}),\theta(\tilde{\rho})\}\eta_1+\{\eta_1,\theta(\tilde{\rho})\}\tilde{r}_d^{-2/3}(\tilde{\rho}).$$

项 $h^{-1}\tilde{c}h^{-1/6}\chi_2(\tilde{\rho})\beta'(\zeta)h^{1/3}\{\tilde{r}_d^{-2/3}\ (\tilde{\rho})\ \theta(\tilde{\rho})\}\eta_1\in S(h^{-1/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1/2},g)$，以及由该项产生的~ K_4 coming 项，可以通过 $|\Psi\mathrm{w}||\mathrm{w}|$ 估计。

因此，忽略余项，$-h^{-1}\tilde{C}^*\tilde{C}\tilde{A}+ih^{-1}\tilde{C}^*[\tilde{C},\mathrm{op}(\theta)]$ 的符号为

$$\begin{aligned}L=&-h^{-1}\tilde{c}^2\tilde{a}+h^{-1}\tilde{c}h^{-1/6}\tilde{\chi}_2(\tilde{\rho})\beta'(\zeta)h^{1/3}\{\eta_1,\theta(\tilde{\rho})\}\tilde{r}_d^{-2/3}(\tilde{\rho})\\&=-h^{-1}h^{-1/3}\tilde{\chi}_2^2(\tilde{\rho})\beta^2(\zeta)h^{1/3}\tilde{\chi}(\tilde{\rho})\tilde{r}_d^{1/3}(\tilde{\rho})\alpha(\zeta)\\&\quad-h^{-1}h^{-1/6}\tilde{\chi}_2(\tilde{\rho})\beta(\zeta)h^{-1/6}\tilde{\chi}_2(\tilde{\rho})\beta'(\zeta)h^{1/3}\tilde{r}_d\tilde{r}_d^{-2/3}(\tilde{\rho})\end{aligned}$$

由引理 B.2 的v) 。因此我们得到

$$L=h^{-1}\tilde{\chi}_2^2(\tilde{\rho})\beta(\zeta)\tilde{r}_d^{1/3}(\tilde{\rho})\big(-\beta(\zeta)\tilde{\chi}(\tilde{\rho})\alpha(\zeta)-\beta'(\zeta)\big)\in S(h^{-1},g).$$

由于 $\tilde{\chi}$ 在 $\tilde{\chi}_2^2$ 的支集上等于 1，$\beta\geq 0$ 和 $-\beta(\zeta)\,\mathrm{Re}\ \alpha(\zeta)-\beta'(\zeta)\geq 0$，我们有 $\mathrm{Re}\,L\geq 0$。我们可以应用尖锐 Gårding 不等式（见 [24, 定理 18.6.7]），并考虑余项，得到

$$K_4\geq -C\big(|\tilde{\Psi}\mathrm{w}|^2+|\tilde{\Psi}\mathrm{w}||\mathrm{w}|\big). \tag{2.101}$$

现在我们来估计 K_5。$h^{-1}\tilde{A}^2+ih^{-1}[\tilde{A},\mathrm{op}(\theta(\tilde{\rho}))]-h^{-1}\,\mathrm{op}(h\eta_1\tilde{\chi}^2(\tilde{\rho}))$ 的符号模去 $S(1,g)$ 中的一个符号后为$h^{-1}\tilde{a}^2+h^{-1}\{\tilde{a},\theta(\tilde{\rho})\}-\eta_1\tilde{\chi}^2(\tilde{\rho})$。我们有

$$\begin{aligned}\{\tilde{a},\theta(\tilde{\rho})\}=&h^{1/3}\alpha(\zeta)\{(\tilde{\chi}\tilde{r}_d^{1/3})(\tilde{\rho}),\theta(\tilde{\rho})\}+h^{2/3}(\tilde{\chi}\tilde{r}_d^{1/3})(\tilde{\rho})\alpha'(\zeta)\eta_1\{\tilde{r}_d^{-2/3}(\tilde{\rho}),\theta(\tilde{\rho})\}\\&+h^{2/3}(\tilde{\chi}\tilde{r}_d^{-1/3})(\tilde{\rho})\alpha'(\zeta)\{\eta_1,\theta(\tilde{\rho})\}.\end{aligned}$$

前两项给出的项可用 $h^{1/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{1/2}\lesssim 1$ 估计，因为在 $\tilde{\chi}$ 的支集上我们有$|\eta_1|\lesssim h^{-1}$。于是这两项都给出在 L^2 上有界的相应算子。模去 L^2 上的一个有界算子后，我们需要考虑该符号，并计及引理 B.2 的v)

$$\begin{aligned}&h^{-1/3}\tilde{\chi}^2(\tilde{\rho})\tilde{r}_d^{2/3}(\tilde{\rho})\alpha^2(\zeta)-h^{-1/3}(\tilde{\chi}\tilde{r}_d^{2/3})(\tilde{\rho})\alpha'(\zeta)-\eta_1\tilde{\chi}^2(\tilde{\rho})\\&=h^{-1/3}\tilde{\chi}^2(\tilde{\rho})\tilde{r}_d^{2/3}(\tilde{\rho})\big(\alpha^2(\zeta)-\alpha'(\zeta)-h^{1/3}\tilde{r}_d^{-2/3}(\tilde{\rho})\eta_1\big)\\&\quad-h^{-1/3}(\tilde{\chi}\tilde{r}_d^{2/3})(\tilde{\rho})(1-\tilde{\chi}(\tilde{\rho}))\alpha'(\zeta).\end{aligned}$$

第一项为零，这是由 α 满足的微分方程以及 ζ 的值所致。我们声称:

$$|\,\mathrm{op}\big(h^{-1/3}(\tilde{\chi}\tilde{r}_d^{2/3})(\tilde{\rho})(1-\tilde{\chi}(\tilde{\rho}))\alpha'(\zeta)\big)F\mathrm{r}|\lesssim|r_h|. \tag{2.102}$$

该断言的证明如下。结合这一断言和上文的推导，算子$h^{-1}\tilde{A}^2 + ih^{-1}[\tilde{A},$算子$(\theta(\tilde{\rho}))] - h^{-1}$算子$(h\eta_1\tilde{\chi}^2(\tilde{\rho})))$给出的项有界于 $|r_h|$.。由于$\tilde{C}^*\tilde{C}$的符号属于 $S(h^{-1/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1/2}, g)$，我们得到：

$$|K_5| \lesssim |r_h||\tilde{\Psi}\mathrm{w}|. \tag{2.103}$$

由（2.97）—（2.101）和（2.103）可得

$$\frac{1}{2}\partial_{x_d}|C(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})|^2 \gtrsim -\big(|\mathrm{k}|^2 + |\mathrm{f}|^2 + |\tilde{\Psi}\mathrm{w}|^2 + |u_h^d|^2 + |r_h|^2\big).$$

˜在 0 到 $\sigma > 0$ 之间对该不等式积分，并根据命题 B.1 估计来自 $|\Psi\mathrm{w}|$的项，可得

$$|C(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})|^2(0) \lesssim \|\mathrm{k}\|^2 + \|\mathrm{f}\|^2 + \|u_h^d\|^2 + \|r_h\|^2 + |C(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})|^2(\sigma). \tag{2.104}$$

As

$$|C(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})|^2(\sigma) = (\tilde{C}^*\tilde{C}\mathrm{w}, \mathrm{w}),$$

可得

$$|C(i\mathrm{v} + A\mathrm{r})|^2(\sigma) \lesssim |\tilde{\Psi}\mathrm{w}|^2(\sigma) + |u_h^d|^2(\sigma) + |r_h|^2(\sigma).$$

在 σ 的两个正值之间对估计式（2.104）积分，并像上面一样估计项$|\tilde{\Psi}\mathrm{w}|^2$（$\sigma$），即可得到命题 B.2 的结论。□

命题（*2.102*）的证明。令 χ_1 为一个光滑截断函数，使得 χ_1 的支集包含于 $\chi = 1$ 中，且 χ_0 的支集包含于 $\chi_1 = 1$中。对于所有 $N > 0$，有 $|\mathrm{r} -$算子$(\chi_1(\rho))$ 算子$(\chi_0(\rho))r_h| \lesssim h^N|r_h|$。

由 $\kappa^*\tilde{\chi}_1 = \chi_1$，根据引理 B.2，我们得到

$$F^{-1}\operatorname{op}(\tilde{\chi}_1(\tilde{\rho}))F = \operatorname{op}(\chi_1(x, h\xi')) + hK,$$

其中，K在 L^2上有界。因此我们有 $F\mathrm{r} =$op$(\tilde{\chi}_1(\tilde{\rho}))F\mathrm{r} + hK'r_h$，其中 K'在L^2上有界。于是

$$\begin{aligned}&\operatorname{op}\big(h^{-1/3}(\tilde{\chi}\tilde{r}_d^{2/3})(\tilde{\rho})(1 - \tilde{\chi}(\tilde{\rho}))\alpha'(\zeta)\big)F\mathrm{r}\\ &\quad= \operatorname{op}\big(h^{-1/3}(\tilde{\chi}\tilde{r}_d^{2/3})(\tilde{\rho})(1 - \tilde{\chi}(\tilde{\rho}))\alpha'(\zeta)\big)\big(\operatorname{op}(\tilde{\chi}_1(\tilde{\rho}))F\mathrm{r} + hK'r_h\big).\end{aligned}$$

由 op$(\tilde{\chi}_1(\tilde{\rho}))$产生的第一项给出了一个具有零符号的算子。由于

$$h^{-1/3}(\tilde{\chi}\tilde{r}_d^{2/3})(\tilde{\rho})(1 - \tilde{\chi}(\tilde{\rho}))\alpha'(\zeta) \in S(h^{-1/3}, g),$$

于是第二项也被 $|r_h|$控制。这就证明了该结论。 □

在下面的命题中，我们沿用上文引入的记号；关于 $\tilde{\chi}_2$ 的精确陈述已在命题 B.2 之前给出。

命题 B.3。设 $(x_0', 0) \in \partial\Omega$。设 $\chi_4 \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ 的支集包含于 *0* 的某个邻域内，并且$\chi_4 = 1$ 在 *0* 的某个邻域内。设 $(x_0', 0, \xi_0')$ 以及 U_0 如引理 *B.1* 的陈述所述。设 $\ell \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d-1})$ 对每个 x_d都支集于 $\{\chi_2 = 1\}$ 上，其中 $\kappa^*\tilde{\chi}_2 = \chi_2$。此外，我们假设 $\partial_{x_d}R(x, \xi') < 0$ 在 ℓ的支集上。我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{h\to 0}\Big|\Big(\operatorname{op}\big(\ell(x', 0, h\xi')\chi_4\big((R(x', 0, h\xi') - 1)/\varepsilon\big)(R(x', 0, h\xi') - 1)\big)\mathrm{r}_{|x_d=0}|\mathrm{r}_{|x_d=0}\Big)_\partial\Big| = 0.$$

˜ ˜证明。令 $\mathrm{y} = (F\mathrm{r})_{|x_d=0}$。由命题 B.2 以及 $\mathrm{v}_{|x_d=0} = 0$，我们得到 $|CA\mathrm{y}|$ 有界。根据符号演算以及 $\tilde{\chi}$ 和 $\tilde{\chi}_2$ 的支撑性质

$$\tilde{C}\tilde{A} = h^{1/6}\operatorname{op}\big(\tilde{\chi}_2(\tilde{\rho})\beta(\zeta)\tilde{r}_d^{1/3}(\tilde{\rho})\alpha(\zeta)\big),$$

模去一个符号属于 $S(h^{1/2}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-3/4}, g)$ 的算子。由引理 4.4 可知，当 h 时，这个余项趋于 0。

设 $\tilde{\ell}$ 满足 $\kappa^*\tilde{\ell} = \ell$ 且 $\kappa^*\chi_4(\eta_1/\varepsilon) = \chi_4((R(x',0,\xi') - 1)/\varepsilon)$。接下来，为与前面的记号保持一致，我们定义 $\tilde{\chi}_4 = \chi_4$；当函数以 (y,η) 个变量定义时，我们使用记号 $\tilde{\chi}_4$。

由引理 B.2 可得

$$F^{-1}\operatorname{op}(h\eta_1\tilde{\ell}(\tilde{\rho})\tilde{\chi}_4(h\eta_1/\varepsilon))F = \operatorname{op}\big(\ell(x',0,h\xi')\chi_4\big((R(x',0,h\xi')-1)/\varepsilon\big)(R(x',0,h\xi')-1)\big) + h\operatorname{op}(r_0(x,h\xi')),$$

其中 r_0 是 0 阶的。根据引理 4.4，由 r_0 产生的项在 h时趋于 0。因此，只需证明 $\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{h\to 0}\Big(\operatorname{op}(h\eta_1\tilde{\ell}(\tilde{\rho})\tilde{\chi}_4(h\eta_1/\varepsilon))\mathrm{y}|\mathrm{y}\Big)_\partial = 0.$。考虑符号$h\eta_1\tilde{\ell}(\tilde{\rho})\tilde{\chi}_4(h\eta_1/\varepsilon) \in S(h^{2/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle, g)$，并利用 $\tilde{\ell}$和 $\tilde{\chi}_2$的支撑性质，可得

$$\operatorname{op}(h\eta_1\tilde{\ell}(\tilde{\rho})\tilde{\chi}_4(h\eta_1/\varepsilon)) = \tilde{\gamma}^*\operatorname{op}\big(h^{2/3}\eta_1\tilde{\ell}(\tilde{\rho})\tilde{\chi}_4(h\eta_1/\varepsilon)\beta^{-2}(\zeta)\tilde{r}_d^{-2/3}(\tilde{\rho})|\alpha(\zeta)|^{-2}\big)\tilde{\gamma},$$

其中 $\tilde{\gamma} = \operatorname{op}\big(h^{1/6}\tilde{\chi}_2(\tilde{\rho})\beta(\zeta)\tilde{r}_d^{1/3}(\tilde{\rho})\alpha(\zeta)\big)$，相差一个符号属于 $S(h,g)$ 的算子；那么最后一项包含一个在 h 趋于 0 时趋于 0 的项。于是，模去一个在 h 趋于 0 时趋于 0 的项后，可得以下估计，

$$|\Big(\operatorname{op}(h\eta_1\tilde{\ell}(\tilde{\rho})\tilde{\chi}_4(h\eta_1/\varepsilon))\mathrm{y}|\mathrm{y}\Big)_\partial| \lesssim |\operatorname{op}\big(h^{2/3}\eta_1\tilde{\ell}(\tilde{\rho})\tilde{\chi}_4(h\eta_1/\varepsilon)\beta^{-2}(\zeta)\tilde{r}_d^{-2/3}(\tilde{\rho})|\alpha(\zeta)|^{-2}\big)\mathrm{z}||\mathrm{z}|, \tag{2.105}$$

其中 $\mathrm{z} = \operatorname{op}\big(h^{1/6}\tilde{\chi}_2(\tilde{\rho})\beta(\zeta)\tilde{r}_d^{1/3}(\tilde{\rho})\alpha(\zeta)\big)\mathrm{y}$。由命题 B.2 可知，$|\mathrm{z}|$ 有界，因为$h^{1/6}\tilde{\chi}_2(\tilde{\rho})\beta(\zeta)\tilde{r}_d^{1/3}(\tilde{\rho})\alpha(\zeta)$是 $\tilde{C}\tilde{A}$的主符号。

我们断言 $h^{2/3}\eta_1\tilde{\chi}_4(h\eta_1/\varepsilon) \in S(\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{1/2}, g)$。事实上 $h^{2/3}|\eta_1| \lesssim \langle h\eta_1\rangle^{1/2}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{1/2}$，由此得到所需的估计。对于导数以及 $k \geq 1$，我们有

$$\partial_{\eta_1}^k\big(h^{2/3}\eta_1\tilde{\chi}_4(h\eta_1/\varepsilon)\big) = kh^{2/3}(h/\varepsilon)^{k-1}\tilde{\chi}_4^{(k-1)}(h\eta_1/\varepsilon) + h^{2/3}\eta_1(h/\varepsilon)^k\tilde{\chi}_4^{(k)}(h\eta_1/\varepsilon).$$

由于 $h\eta_1$ 在 $\tilde{\chi}_4^{(k)}$ $(h\eta_1/\varepsilon)$的支集上有界，因此两项均被 $h^{k-1/3}$控制。由估计 $h^{2/3}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle \lesssim \langle h\eta_1\rangle$ 可得

$$h^{k-1/3} \lesssim h^{k/3}\big(\langle h\eta_1\rangle/\langle h^{1/3}\eta_1\rangle\big)^{k-1/2},$$

这就证明了该结论。注意，上述估计中的常数关于 ε 并不一致。

结合前面的结论，并且由于 $\beta^{-2}(\zeta)|\alpha(\zeta)|^{-2} \lesssim \langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{-1/2}$，我们有

$$L(y',\eta') = h^{2/3}\eta_1\tilde{\ell}(\tilde{\rho})\tilde{\chi}_4(h\eta_1/\varepsilon)\beta^{-2}(\zeta)\tilde{r}_d^{-2/3}(\tilde{\rho})|\alpha(\zeta)|^{-2} \in S(1,g).$$

由于 $h^{2/3}|\eta_1| \lesssim |h\eta_1|^{1/2}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{1/2} \lesssim \sqrt{\varepsilon}\langle h^{1/3}\eta_1\rangle^{1/2}$，在 $\tilde{\chi}_4(h\eta_1/\varepsilon)$ 的支集上，由 Gårding不等式（见 [24, 定理 18.6.7]）可知，$\operatorname{op}(L)$ 从 L^2 到 L^2 的算子范数有界于 $C\sqrt{\varepsilon} + C_\varepsilon h^{1/3}$，其中 C 与 ε 无关，而 C_ε 可能依赖于 ε。由此以及 (2.105) 可得结论。□

参考文献

[1] G. Allaire，Navier–Stokes方程的均 homogenization及Brinkman定律的推导，工程科学应用数学（圣地亚哥，*1989*），*Cépaduès*，图卢兹，(1991)，7–20。 [2] K. Ammari、E. Feireisl和S. Nicaise，若干耗散双曲系统的多项式稳定化，*DCDS-A*，**34** (2014)，4371–4388。 [3] K. Ammari、F. Hassine和L. Robbiano，具有Brinkman型阻尼项的声学系统的对数稳定化，*SIAM*控制期刊，即将出版，2023。 [4] K. Ammari和M. Tucsnak，通过一类无界反馈实现二阶演化方程的稳定化，*ESAIM*控制、优化与变分法，**6** (2001)，361–386。 [5] P. Angot、C. H. Bruneau和P. Fabrie，一种用于在不可压缩黏性流中考虑障碍物的惩罚法，数值数学，**81** (1999)，497–520。

[6] W. Arendt和C. J. K. Batty，陶伯定理与单参数半群的稳定性，美国数学会会刊，305 (1988)，837–852。[7] N. Burq，半经典测度与缺陷测度。布尔巴基研讨会，1996/97卷，Astérisque，245 (1997)，167–195。[8] N. Burq，外部区域波动方程局部能量的衰减及实轴附近无共振，Acta Math.，180 (1998)，1–29。[9] N. Burq和G. Lebeau，紧性缺陷测度及其在Lamé系统中的应用。高等师范学校科学年刊，34 (2001)，817–870。[10] C. J. K. Batty和T. Duyckaerts，巴拿赫空间上有界半群的非一致稳定性，J. Evol. Equ.，8 (2008)，765–780。[11] A. P. Calderón，偏微分方程柯西问题解的唯一性，美国数学杂志，80 (1958)，16–36。[12] T. Carleman，关于一个具有两个独立变量的偏微分方程组的唯一性问题，Ark. Mat., Astr. Fys.，26 (1939)，1–9。[13] P. Cornilleau和L. Robbiano，Zaremba边界条件下波的指数稳定化，arXiv:2110.05986。[14] T. Duyckaerts，由界面耦合的双曲-抛物系统的能量最优衰减率，Asymptot. Anal.，51 (2007)，17–45。[15] M. Eller和D. Toundykov，椭圆边值问题的Carleman估计及其在双曲系统稳定化中的应用。Evolution Equations & Control Theory，1 (2012)，271–296。[16] K. J. Engel和R. Nagel，线性演化方程的单参数半群，数学研究生教材 194, 2000 Springer-Verlag，纽约，[17] A. Fursikov和O. Y. Imanuvilov，演化方程的可控性，第34卷。韩国首尔国立大学，1996。讲义。[18] L. Gearhart，希尔伯特空间上压缩半群的谱理论。美国数学会会刊，236 (1978 385 394) – [19] P. Gérard，微局部缺陷测度。Comm. Partial Differential Equations, **16** 1991 1761 1794 ( ), – [20] P. Gérard 和 E. Leichtnam，狄利克雷问题特征函数的遍历性质，Duke Math. J., **71** 1993 559 607 ( ), – [21] V. Girault和P.-A. Raviart，Navier–Stokes方程的有限元方法，计算数学丛书，Springer-Verlag，柏林，1986。[22] A. Grigis，具有双重特征的伪微分算子的次椭圆性与参数构造，雷恩偏微分方程研讨会（ 1975 **34 35** 1976 183 205 ），Astérisque，– ( )，– [23] L. Hörmander，线性偏微分算子，《数学科学基础》，第116卷。Academic Press Inc.出版社，纽约，1963。[24] L. Hörmander，线性偏微分算子分析，第III卷。Springer，柏林 [25] F. L. Huang，希尔伯特空间上线性动力系统指数稳定性的特征条件，Ann. Differential Equations, **1** 1985 43 56 ( )，– [26] V. Isakov，各向异性情形下的Carleman型估计及其应用，J. Differential Equations，105 (1993)，217–238。[27] H. O. Kreiss，双曲系统的初边值问题，Comm. Pure Appl. Math.，23 (1970)，277–298。[28] G. Lebeau，双曲控制与稳定化。巴黎综合理工学院偏微分方程研讨会，1990，报告16，1–16。[29] G. Lebeau，阻尼波方程，《数学物理中的代数与几何方法》（Kaciveli，1993），73–109，数学物理研究丛书，19，Kluwer Acad. Publ.，多德雷赫特，1996。[30] G. Lebeau和L. Robbiano，热方程的精确控制，Comm. Partial Differential Equations，20 (1995)，335–356。[31] G. Lebeau和L. Robbiano，通过边界实现波动方程的稳定化，Duke Math. J.，86 (1997)，465–491。[32] G. Lebeau、J. Le Rousseau和L. Robbiano，椭圆Carleman估计及其在稳定化与可控性中的应用，Birkhäuser，2022。[33] M. J. Lighthill，流体中的波，剑桥大学出版社，剑桥，1978。[34] M. J. Lighthill，空气动力学产生的声音。I. 一般理论，Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.，211 (1952)，564–587。[35] M. J. Lighthill，空气动力学产生的声音。II. 湍流作为声源，Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.，222 (1954)，1–32。[36] R. B. Melrose和J. Sjöstrand，边值问题的奇性 I。Comm. Pure Appl. Math. **31** 1978 593 617 ( )，– [37] R. B. Melrose和J. Sjöstrand，边值问题的奇性 II。Comm. Pure Appl. Math. **35** 1982 129 168 ( )，– [38] L. Miller，尖锐界面处高频波密度的折射及边界处的半经典测度。J. Math. Pures Appl. (9)，79 (2000)，227–269。

[39] J. Prüss，关于 C_0-半群的谱。美国数学会会刊，**284**（1984），847–857。
[40] 1980 M. Reed 和 B. Simon，《现
[41]
代数学物理方法》。I. 学术出版社。D. Tataru，关于波动方程边界迹的正则性。比萨高等师范学院科学类年刊，**26**（1998），185–206

偏微分方程分析与控制研究实验室，LR 22ES03，数学系，莫纳斯提尔大学理学院，莫纳斯提尔大学，5019 莫纳斯提尔，突尼斯，以及凡尔赛数学实验室／凡尔赛圣康坦伊夫林大学／巴黎-萨克雷大学，法国

电子邮箱：kais.ammari@fsm.rnu.tn

偏微分方程分析与控制研究实验室，LR 22ES03，数学系，莫纳斯提尔大学理学院，莫纳斯提尔大学，5019 莫纳斯提尔，突尼斯

电子邮箱地址: fathi.hassine@fsm.rnu.tn

巴黎-萨克雷大学、凡尔赛圣康坦伊夫林大学、法国国家科学研究中心、凡尔赛数学实验室，78000，法国凡尔赛。

电子邮箱地址: luc.robbiano@uvsq.fr