arXiv:2302.02730v2 [cs.AI] 6 May 2023

一阶逻辑的二变量片段中的精确采样

Yuanhong Wang[1,2], Juhua Pu[1,2], Yuyi Wang[3,4], 和 Ondˇrej Kuˇzelka[5]

[1]软件开发环境国家重点实验室，北京航空航天大学，中国[2]北京航空航天大学杭州创新研究院余杭，中国[3]中车株洲电力机车研究所有限公司，中国[4]苏黎世联邦理工学院，瑞士[5]布拉格捷克理工大学，捷克共和国

2023年5月9日

摘要

本文研究 Wang 等人最近提出的一阶逻辑采样问题：如何在有限论域上高效地对给定一阶句子的模型进行采样？我们将他们关于二变量逻辑全称量化子片段$\mathbf{FO}^2$ ($\mathbf{UFO}^2$)的结果扩展到$\mathbf{FO}^2$的整个片段。具体而言，我们证明了$\mathbf{FO}^2$, 在采样下具有域可提升性，这意味着存在一种$\mathbf{FO}^2$ 采样算法，其运行时间关于域大小为多项式级。随后我们进一步证明，即使存在计数约束，该结果仍然成立，例如 $\forall x \exists_{=k} y: \varphi(x, y)$ 和 $\exists_{=k} x \forall y: \varphi(x, y)$，其中 $\varphi(x, y)$ 是某个无量词公式。我们提出的方法具有构造性，所得采样算法有望应用于多个领域，包括组合结构的均匀生成，以及统计关系模型（如马尔可夫逻辑网络和概率逻辑程序）中的采样。

1 引言

令 Γ 表示在词汇表 $\mathcal{P}$ 上构成的无函数一阶句子，并令 Δ 为有限论域。 Γ 的模型在 Δ 上解释 $\mathcal{P}$ 中的每个谓词，使得该解释满足 Γ。我们使用 $\mathcal{M}_{\Gamma,\ \Delta}$ 表示 Δ 上 Γ 的所有模型构成的集合。 Γ 上关于 Δ 的一阶模型均匀采样问题是：按照概率 $\mathbb{P}[\mu] = 1/|\mathcal{M}_{\Gamma,\ \Delta}|$，均匀生成 Γ 的一个模型 μ 。该问题的加权变体为模型中的原子事实及其否定添加非负权重；模型的总权重是其事实权重的乘积。此时，问题变为按照严格与其权重成正比的概率对模型进行采样。

我们研究一阶逻辑二变量片段 对称加权一阶模型采样问题（*WFOMS*）$\mathbf{FO}^2$ 。“对称”一词指权重仅由关系符号决定这一性质。本文重点研究 WFOMS 的数据复杂度——当 Γ 、 w 和 $\bar{w}$ 固定，且论域作为输入时，对模型进行采样的复杂度。特别是，我们希望设计

一个域提升的加权模型采样器，用于$\mathbf{FO}^2$, ，其运行时间关于论域大小为多项式。

WFOMS 最早由 Wang 等人提出 [1] ，他们证明，对于全称量化子片段 $\mathbf{UFO}^2$ $\mathbf{FO}^2$ 中的公式，WFOMS 的数据复杂度为多项式时间。子片段 $\mathbf{UFO}^2$, 由形如 $\forall x \forall y: \psi(x, y)$ 的句子组成，其中包含某个无量词公式 $\psi(x, y)$。已证明该子片段存在提升的加权模型采样器，因此将其认定为在采样下域可提升。

对称加权模型采样问题有广泛的实际应用。例如，许多与组合结构生成相关的问题都可以轻松地表述为 WFOMS，并利用为解决这一问题而开发的技术加以求解。WFOMS 也应用于统计关系学习 *(SRL)* [2]领域。众所周知，许多统计关系学习模型中的概率推理可以归约为加权一阶模型计数（WFOMC） [3, 4], ，同样的归约也可应用于相应的采样问题。

在 WFOMS 的各种应用中，输入的一阶句子通常较为复杂，超出了$\mathbf{UFO}^2$片段的范围。例如，即使是均匀生成无孤立顶点的图这一非常简单的问题，也需要使用带存在量词的公式 $\forall x \exists y: E(x, y)$，来编码每个顶点都必须至少有一条关联边这一约束。然而，将 [1] 中描述的方法直接扩展到$\mathbf{FO}^2$ 是不可行的。正如作者所指出的，他们的技术在某个环节需要解决 #P 困难问题："……对一个含有存在量词的 $\mathbf{FO}^2$ 句子应用我们的采样算法是难以处理的（非域提升的），除非 FP$=\#$P，……"。我们在此强调，他们并未证明针对$\mathbf{FO}^2$ 片段的 WFOMS 难以处理，而是指出了其特定方法不可行，这表明需要采用不同的采样方法。此外，自动推理 [5]和加权一阶模型计数（WFOMC） [4]中使用的标准斯科伦化技术，会预先消除存在量词，但不适用于 WFOMS，因为这类技术会引入函数或负权重，从而使生成的采样问题定义不明确。这进一步加大了将 WFOMS 方法扩展到$\mathbf{UFO}^2$之外、更复杂公式的难度。

1.1 我们的贡献

本文提出了一种适用于完整$\mathbf{FO}^2$的新型采样算法。该算法采用了与斯科伦化截然不同的方法，其基础是域递归 方案。基本思路是每次考虑论域中的一个对象，然后对所有相关原子事实的取值进行采样，从而在移除该对象后，得到一个论域更小的新 WFOMS。新 WFOMS 的形式与原始 WFOMS 相同，但可能包含更少的存在量化公式。随后，算法在约化后的采样问题上递归运行，直到论域只剩一个元素，或所有存在量化公式都已消除。我们证明，该算法的数据复杂度属于多项式时间，这意味着$\mathbf{FO}^2$ 的整个片段在采样下域可提升。

我们还展示了如何将结果进一步扩展到包含计数约束的情形。具体而言，我们的广义算法可应用于$\mathbf{FO}^2$ 句子，并允许加入形式为 $\forall x \exists_{=k} y: \varphi(x, y)$ 和 $\exists_{=k} x \forall y: \varphi(x, y)$ 的附加计数约束，其中 φ是无量词公式， k 是自然数。这一扩展最初由 Kuusisto和Lutz [6] 以及 Kuzelka [7] 针对一阶计数问题提出，其主要动机是 WFOMS 与组合结构均匀生成之间的联系。例如，我们的算法可用于高效解决 k-正则图的均匀采样问题

，这是一个在组合学界受到广泛研究的问题 [8, 9]。该问题可以表述为以下句子上的 WFOMS:

$$\forall x \forall y : (E(x,y) \Rightarrow E(y,x)) \wedge \forall x : \neg E(x,x) \wedge \forall x \exists_{=k} y : E(x,y),$$

where $\forall x \exists_{=k} y$： $E(x,\ y)$表示每个顶点 x 恰好有 k 条相连的边 s.

1.2 相关工作

对称加权一阶模型采样问题最初由 [1] 提出并加以研究。该研究所采用的方法以及其中考虑的形式化可提升性 概念，均源自提升推断 [10, 11, 3]相关文献。在提升推断中，目标是对统计关系学习模型进行概率推理，同时利用模型高层结构中的对称性。WFOMS 中也存在这种对称性，本文利用这一重要性质证明了$\mathbf{FO}^2$在采样下的可提升性。这里还要指出，Beame 等人 [12] 也曾深入讨论对称性对于提升推断（及其对应的 WFOMC）的重要性。

本文采用的论域递归方法与加权一阶模型计数中使用的论域递归规则 相似 [13, 14, 15, 16]。WFOMC 的论域递归规则是一种技术，它对输入的一阶句子采用渐进式基化过程，每次只基化论域中的一个元素。随着每个元素被基化，部分基化的句子会逐步简化，直至该元素被完全消去，从而得到一个论域更小的新 WFOMC 问题。借助论域递归规则，可以在论域大小上应用归纳原理，并通过动态规划计算 WFOMC。与本文密切相关的一项工作是 Kazemi 等人提出的方法[14], ，他们使用论域递归规则，在不进行斯科伦化 [4],的情况下计算 WFOMC，从而避免引入负权重。不过需要注意的是，他们的方法仅适用于某些特定的一阶公式，而本文提出的论域递归方案主要用于消去存在量化公式，适用于整个$\mathbf{FO}^2$ 片段。

此外，还值得一提的是，从命题逻辑公式（布尔公式）中进行采样是一个相对成熟的研究领域 [17, 18, 19]。然而，许多现实世界的问题用一阶逻辑表示会更加自然、简洁，而将其展开为命题逻辑后，公式大小会显著增加。例如，形如 $\forall x \exists y : \varphi$ 的公式可编码为形如 $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n} l_{i,j}$的布尔公式，其长度与域大小 n呈二次关系。由于即使是从这样的大型基公式中寻找一个解也颇具挑战性，命题逻辑中的大多数采样方法转而专注于设计近似采样器。我们还注意到，这些方法并非关于输入公式长度的多项式时间算法，并且依赖于高效 SAT 求解器的支持。另一支研究方向 [20, 21, 22] 则聚焦于组合采样，致力于开发近似均匀且高效的采样算法。然而，这些方法只能用于满足某项特定技术要求的布尔公式，该要求被称为 Lov´asz 局部引理。本文研究的 WFOMS问题通常不满足应用这些技术所需的标准。

2 预备知识

本节将简要回顾本文中将要使用的主要必要技术概念

2.1 对称加权一阶模型采样

我们考虑一阶逻辑的无函数片段。元数为 k 的原子公式 形式为$P(x_1, \ldots\ldots, x_k)$，其中 P/k 来自谓词词汇表（也称为关系），而 $x_1, \ldots\ldots, x_k$ 是变量词汇表中的逻辑变量。文字 是原子公式或其否定。公式 由使用合取或析取连接一个或多个文字构成。公式的外部可以选择性地包含一个或多个形如 $\forall x$ 或 $\exists x$ 的量词，其中x 是逻辑变量。如果公式中的逻辑变量未被任何量词约束，则称其为自由 变量。不含自由变量的公式称为句子。公式 α 的词汇表定义为 $\mathcal{P}_\alpha$。

给定词汇表 $\mathcal{P}$， $\mathcal{P}$-结构 $\mathcal{A}$ 在给定论域上解释 $\mathcal{P}$ 中的每个谓词。我们通常将结构视为基文字及其合取组成的集合。给定 $\mathcal{P}$-结构 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$，我们用 $\langle \mathcal{A} \rangle_{\mathcal{P}'}$ 表示 $\mathcal{A}$ 的 $\mathcal{P}'$-约化结构。我们遵循一阶逻辑的标准语义来确定一个结构是否为公式的模型。我们将论域为 Δ 上句子 Γ 的所有模型的集合记为$\mathcal{M}_{\Gamma,\ \Delta}$。一阶逻辑的二变量语法片段（$\mathbf{FO}^2$）通过将变量词汇表限制为 $\{x, y\}$ 得到。

一阶模型计数问题 [3] 询问：给定一个论域 Δ 和一个句子 Γ，在 Δ上有多少个模型 Γ 。加权一阶模型计数问题（WFOMC）在输入中加入一对加权函数（w， $\bar{w}$），二者都将 Γ 中的所有谓词映射到一个权重集合： $\mathcal{P}_\Gamma \to \mathbb{R}$。给定一个文字集合 L ， L 的权重定义为

$$\langle w, \bar{w} \rangle(L) := \prod_{l \in L_T} w(\mathsf{pred}(l)) \cdot \prod_{l \in L_F} \bar{w}(\mathsf{pred}(l))$$

其中， L_T （分别是 L_F）表示 L中的真地基文字集合（分别是假的），而 pred(l) 将文字 l 映射到其对应的谓词名称。于是，WFOMC(Γ， Δ， w， $\bar{w}$) 的值是 Γ在 Δ上的所有模型的权重 $\langle w, \bar{w} \rangle(\mu)$ 之和。

最近， [1], 将模型计数问题扩展到了采样模式，而其中定义的对称加权一阶模型采样问题（*WFOMS*）是本文的主要关注对象。

定义 1 (**对称加权一阶模型采样**)。 设 $(w, \bar{w})$ 为一对加权函数： $\mathcal{P}_\Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ [1]。在论域 Δ 上，关于 $(w, \bar{w})$ 的 Γ 对称加权一阶模型采样问题，是生成一个 Γ 在 Δ 上的模型 $G(\Gamma, \Delta, w, \bar{w})$，使得

$$\mathbb{P}[G(\Gamma, \Delta, w, \bar{w}) = \mu] = \frac{\langle w, \bar{w} \rangle(\mu)}{\mathsf{WFOMC}(\Gamma, \Delta, w, \bar{w})} \tag{1}$$

对于每个 $\mu \in \mathcal{M}_{\Gamma,\ \Delta}$。

沿用 [1], 中的术语，我们将实现 WFOMS 解的概率算法称为加权模型采样器 （WMS）。如果模型生成算法的运行时间关于论域 [1], 的大小是多项式的，则称 WMS域提升的 （或简称提升的）

[1]非负权重确保模型的采样概率定义良好。

。如果一个句子或一类句子的采样采用域可提升的 （或简称可提升的）采样，则称其具有域提升加权模型采样器。

例 1. 句子的 *WMS*

$$(\forall x \forall y : (E(x,y) \Rightarrow E(y,x)) \wedge \neg E(x,x)) \wedge (\forall x \exists y E(x,y))$$

在大小为 n 的论域上，采用权重 $w(E) = \bar{w}(E) = 1$，均匀分布地采样无孤立顶点的无向图。

出于技术上的考虑，当论域固定时，我们允许 WFOMC（以及 WFOMS）的输入句子包含一些基文字，例如，$\Gamma = (\forall x \forall y\colon fr(x,y) \wedge sm(x) \Rightarrow sm(y)) \wedge sm(e_1) \wedge \neg sm(e_3)$，其论域为固定的 $\{e_1, e_2, e_3\}$。此类句子上的 WFOMC 问题也称为条件WFOMC [23, 24]。我们将论域 Δ上，在 $(w, \bar{w})$ 条件下，句子 Φ关于另一句子 Γ 的概率定义为

$$\mathbb{P}[\Phi \mid \Gamma; \Delta, w, \bar{w}] := \frac{\mathsf{WFOMC}(\Phi \wedge \Gamma, \Delta, w, \bar{w})}{\mathsf{WFOMC}(\Gamma, \Delta, w, \bar{w})}.$$

稍微滥用一下记法，我们也用相同的形式表示论域 Δ 上，在 $(w, \bar{w})$ 条件下，基文字集合 L 关于句子 Γ 的概率:

$$\mathbb{P}[L \mid \Gamma; \Delta, w, \bar{w}] := \mathbb{P}\left[\bigwedge_{l \in L} l \mid \Gamma; \Delta, w, \bar{w}\right].$$

那么，WFOMS 中 $G(\Gamma, \Delta, w, \bar{w})$ 的所需采样概率可写为$\mathbb{P}[G(\Gamma, \Delta, w, \bar{w}) = \mu] = \mathbb{P}[\mu \mid \Gamma; \Delta, w, \bar{w}]$。上下文明确时，我们在条件概率中省略 Δ 和 $(w, \bar{w})$。

如果存在一个模型$\mu \in \mathcal{M}_{\Gamma,\Delta}$ 包含 L，我们就称 WFOMS $(\Gamma, \Delta, w, \bar{w})$ 中的基文字集合 L 有效。WFOMS $(\Gamma, \Delta, w, \bar{w})$ 的骨架是词汇表$\mathcal{P}_\Gamma$的子集 $\mathcal{P}$，使得 $\mathcal{P}$ 的解释能够完全确定 Γ 的模型中的 $\mathcal{P}_\Gamma \setminus \mathcal{P}$，并且对于任意谓词 $P \in \mathcal{P}_\Gamma \setminus \mathcal{P}$, $w(P) = \bar{w}(P) = 1$。利用骨架这一概念，WFOMS $(\Gamma, \Delta, w, \bar{w})$ 可归约为随机生成一个有效的 $\mathcal{P}$-结构 $G(\Gamma, \Delta, w, \bar{w})$，使得

$$\mathbb{P}[G(\Gamma, \Delta, w, \bar{w}) = \langle \mu \rangle_{\mathcal{P}}] = \mathbb{P}[\langle \mu \rangle_{\mathcal{P}} \mid \Gamma; \Delta, w, \bar{w}]$$

对于每个 $\mu \in \mathcal{M}_{\Gamma,\ \Delta}$，其中 $\mathcal{P}$ 是该问题的骨架。

在本文中，我们经常将复杂的 WFOMS问题转换为更简单的问题，这通常称为归约。此类归约的关键性质是可靠性。

定义 2 （**可靠性**）。从（$\Gamma, \Delta, w, \bar{w}$）到（$\Gamma', \Delta', w', \bar{w}'$）的 *WFOMS*归约是可靠的，当且仅当存在一个多项式时间确定性函数 f，将 $\mathcal{M}_{\Gamma',\ \Delta'}$ 映射到 $\mathcal{M}_{\Gamma,\ \Delta}$，并且对于每个模型 $\mu \in \mathcal{M}_{\Gamma,\ \Delta}$,

$$\mathbb{P}[\mu \mid \Gamma; \Delta, w, \bar{w}] = \sum_{\substack{\mu' \in \mathcal{M}_{\Gamma', \Delta'}: \\ f(\mu') = \mu}} \mathbb{P}[\mu' \mid \Gamma'; \Delta', w', \bar{w}']. \tag{2}$$

本文中最常用的一般映射函数 f 是投影 $f(\mu') = \langle \mu' \rangle_{\mathcal{P}_\Gamma}$，其中$\mathcal{P}_\Gamma$ 是 $(\Gamma', \Delta', w', \bar{w}')$ 的骨架。在这种情况下，映射函数是双射，并且保持映射模型的权重。通过可靠归约，我们可以轻松地将 $(\Gamma', w', \bar{w}', \Delta')$ 的 WMSG' 转换为 $(\Gamma, w, \bar{w}, \Delta)$ 的 WMS G，方法是 $G(\Gamma, \Delta, w, \bar{w}) = f(G'(\Gamma', \Delta', w', \bar{w}'))$。注意，可靠性具有传递性，即，如果从 WFOMS $\mathfrak{S}_1$ 到 $\mathfrak{S}_2$ 的归约，以及从 $\mathfrak{S}_2$到 $\mathfrak{S}_3$ 的归约都可靠，那么从 $\mathfrak{S}_1$ 到 $\mathfrak{S}_3$ 的归约也可靠。

2.2 类型与表

我们将*1-*文字 定义为仅使用变量 x的原子谓词或其否定，将*2-*文字 定义为同时使用变量 x 和 y的原子谓词或其否定。像$R(x,x)$这样的原子公式或其否定被视为 1-文字，尽管 R 是二元关系。2-文字总是具有 $R(x,y)$ 和 $R(y,x)$ 的形式，或它们各自的否定。

设 $\mathcal{P}$ 是一个有限词汇表。 $\mathcal{P}$ 上的*1-*类型 是由 $\mathcal{P}$ 构成的 1-文字的极大一致集。将 $\mathcal{P}$ 上所有 1-类型的集合记为 $U_{\mathcal{P}}$。 $U_{\mathcal{P}}$ 的大小是有限的，且仅取决于 $\mathcal{P}$ 的大小。我们常将 1-类型 τ 视为其元素的合取，因此 $\tau(x)$ 只是一个仅含变量 x 的公式。

设 $\mathcal{A}$ 是一个论域为 $\mathcal{P}$ 的结构。若域元素 $e \in \in \mathrm{dom}(\mathcal{A})$ 满足 1-类型 τ，则称其实现了该类型，当且仅当 $\mathcal{A} \models \tau(e)$。注意， $\mathcal{A}$ 的每个元素都恰好实现 $\mathcal{P}$ 上的一种 1-类型，我们称之为该元素的 *1-*类型。1-类型的基数 是实现该类型的元素数量。

$\mathcal{P}$ 上的*2-*表 是由 $\mathcal{P}$ 构成的 2-文字的极大一致集。我们常将 2-表 π 视为其元素的合取，并将其写成公式 $\pi(x,\ y)$。将 $\mathcal{P}$ 上所有 2-表的集合记为 $T_{\mathcal{P}}$，其大小也仅取决于 $\mathcal{P}$ 的大小。给定一个论域为 Δ 的 $\mathcal{P}$-结构 $\mathcal{A}$，元素元组$(,\ b)$ 的 2-表 $\in \Delta^2$ 是唯一的 2-表 π，使得 $(a,\ b)$ 在 $\mathcal{A}$ 中满足： $\mathcal{A} \models \pi(a,\ b)$。值得注意的是，1- 类型与 2- 表共同完全刻画了一个结构。

例 2. 考虑词汇表 $\mathcal{P} = \{F/2, G/1\}$ 和结构

$$\{F(a,a), G(a), \neg F(b,b), G(b), F(a,b), \neg F(b,a)\}$$

其论域为 $\{a,b\}$。元素 a和 b的 *1-*类型分别为 $F(x,x) \wedge G(x)$ 和 $\neg F(x,x) \wedge G(x)$。这两种 *1-*类型的基数均为 *1*，而其他 *1-*类型$F(x,x) \wedge \neg G(x)$ 和 $\neg F(x,x) \wedge \neg G(x)$ 的基数均为 *0*。元素元组 (a,b) 和 (b,a) 的 *2-* 表分别为 $F(x,y) \wedge \neg F(y,x)$ 和 $\neg F(x,y) \wedge F(y,x)$。

2.3 全称量化 $\mathbf{FO}^2$ 在采样下可提升

作为对称加权一阶模型采样问题的一项初步尝试，Wang 等人 [1] 针对全称量化片段 $\mathbf{FO}^2$ ($\mathbf{UFO}^2$) 给出了数据复杂度方面的一个正面结果，形式为 $\forall x \forall y:\ \psi(x,\ y)$，其中 $\psi(x,\ y)$ 是一个无量词公式[2]。

这一结果的证明建立了设计 WMS 的通用框架。因此，我们在此概述他们论证的主要思路，并请读者参阅他们的论文以了解完整证明和技术细节。需要指出的是，此处介绍的方法与 [1]中的原始方法略有不同。主要区别在于，我们不使用计数分布的概念 [7], ，而是通过对论域进行随机划分来采样 1-类型，这与我们针对$\mathbf{FO}^2$的采样算法保持一致。

定理 1 （[1] 中的命题 1 [1]）。 片段$\mathbf{UFO}^2$ 在采样下域可提升 .

证明概要。 假设我们希望从某个输入$\mathbf{UFO}^2$ 句子$\Gamma = \forall x \forall y:\ \psi(x,y)$中随机采样模型，其论域为 $\Delta = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$，权重为$(w, \bar{w})$。给定一个 $\mathcal{P}_\Gamma$-结构 $\mathcal{A}$，其论域为 Δ，我们将第 i个元素的1-类型记为 τ_i，并将该元组的2-表记为$\pi_{i,j}$

[2]他们的研究范围略超出了这一片段，例如$\mathbf{UFO}^2$ 加上基数约束；我们也将在本文后续部分处理这种情况。

第 i个和第 j个元素的。结构 $\mathcal{A}$ 完全由基域1-类型 $\tau_i(e_i)$和2-表$\pi_{i,j}(e_i,e_j)$刻画。我们可以将 $\mathcal{A}$ 的采样概率写为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\mathcal{A} \mid \Gamma] &= \mathbb{P}\left[\bigwedge_{i\in[n]} \tau_i(e_i) \wedge \bigwedge_{i,j\in[n]:i<j} \pi_{i,j}(e_i,e_j) \mid \Gamma\right] \\ &= \underbrace{\mathbb{P}\left[\bigwedge_{i\in[n]} \tau_i(e_i) \mid \Gamma\right]}_{\mathfrak{P}_1} \cdot \underbrace{\mathbb{P}\left[\bigwedge_{\substack{i,j\in[n]:\\ i<j}} \pi_{i,j}(e_i,e_j) \mid \Gamma \wedge \bigwedge_{i\in[n]} \tau_i(e_i)\right]}_{\mathfrak{P}_2},\end{aligned}$$

其中，$[n]$ 表示 $\{1,2,\ldots,n\}$的集合。这种分解自然地引出了一种两阶段采样算法：

1. 按照概率 $\mathfrak{P}_1$对 1-类型 τ_i 进行采样，并且
2. 按照 $\mathfrak{P}_2$，将 2-表$\pi_{i,\ j}$ 随机分配给每个元素元组。

对 1-类型的采样可以通过对论域 Δ进行随机划分来实现，从而得到 $|U_{\mathcal{P}_\Gamma}|$ 个互不相交的子集 Δ；每个子集都包含被分配给相应 1-类型的元素。加权函数的对称性保证了论域元素的排列不会影响模型的满足性和权重。因此，所有划分大小相同的论域划分被采样的概率都相同。这进一步将 1-类型的采样问题分解为两个阶段：随机生成划分大小，以及根据采样得到的大小对论域进行随机划分。按照采样得到的大小对论域进行随机划分很简单；我们将证明，采样划分大小所需的时间关于论域大小是多项式的。

回顾一下，所有 *1*-类型的数量 $|U_{\mathcal{P}_\Gamma}|$ 仅取决于输入句子，因此枚举所有可能的划分大小在计算上是可行的。对于任意划分大小 $(n_1, n_2, \ldots, n_{|U_{\mathcal{P}_\Gamma}|})$，论域中具有相同采样概率的划分总共有 $\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ ,,,n_{|U_{\mathcal{P}_\Gamma}|}}$ 个。我们将看到，采样概率的形式为 $\mathfrak{P}_1$，且可在关于论域大小的多项式时间内计算。原因如下：我们将 $\mathfrak{P}_1$ 展开为 $\mathit{WFOMC}(\Gamma \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \eta_i(e_i)\ \Delta, w, \bar{w})/\mathit{WFOMC}(\Gamma, \Delta, w, \bar{w})$；分子中的 *WFOMC* 可视为在所有 $\eta_i(e_i)$ 中的一元事实条件下对 Γ 进行的 *WFOMC*，根据 [23]，其复杂度关于论域大小为多项式；分母中的 *WFOMC* 也可高效计算，这是由于 Γ 根据 [3]具有可提升性（就 *WFOMC* 而言）。最后，划分大小 $(n_1, n_2, \ldots, n_{|U_{\mathcal{P}_\Gamma}|})$ 的采样概率为 $\mathfrak{P}_1 \cdot \binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ ,,,n_{|U_{\mathcal{P}}}}$

对于按照 $\mathfrak{P}_2$ 进行的采样 $\pi_{i,\ j}$，我们首先在论域 Δ 上对 Γ 进行实例化：

$$\bigwedge_{i,j\in[n]:i<j} \psi(e_i,e_j) \wedge \psi(e_j,e_i).$$

令 $\psi'_{i,\ j}(x,\ y)$ 为 $\psi(x,\ y) \wedge \psi(y,\ x)$ 的简化公式，该公式通过将一元基文字替换为 1-类型 τ_i 和 τ_j 给出的真值得到。于是，概率 $\mathfrak{P}_2$可以写为

$$\mathbb{P}[\bigwedge_{i,j\in[n]:i<j} \pi_{i,j}(e_i,e_j) \mid \bigwedge_{i,j\in[n]:i<j} \psi'_{i,j}(e_i,e_j)].$$

注意，在此概率中，每个基二表 $\pi_{i,j}(e_i, e_j)$ 都是相互独立的，即它们不共享任何基文字。基公式 $\psi'_{i,j}(e_i, e_j)$ 也具有独立性。因此，概率 $\mathfrak{P}_2$ 可以分解为

$$\prod_{i,j\in[n]:i<j} \mathbb{P}[\pi_{i,j}(e_i, e_j) \mid \psi'_{i,j}(e_i, e_j)].$$

因此，可以分别对每个 $\pi_{i,j}$ 进行采样：根据概率 $\mathbb{P}[\pi_{i,j}(e_i, e_j) \mid \psi'_{i,j}(e_i, e_j)]$，随机选择其相应基公式 $\psi'(e_i, e_j)$ 的一个模型即可。总体计算复杂度显然是关于域大小的多项式。

对 τ_i 和 $\pi_{i,j}$ 进行采样的过程关于域大小是多项式的，由此完成了 $\mathbf{UFO}^2$ 在采样下的可提升性。□

将上述方法扩展到 $\mathbf{FO}^2$ 的情形，需要采用一种新颖且更复杂的策略，尤其是对 2-表进行采样时；因为即使在对采样得到的 1-类型进行条件化后，也无法将 $\forall x\exists y$ 的基化：$\varphi(x, y)$ 解耦为 $\bigwedge_{i,j\in[n]:\, i<j} \psi_{i,j}(e_i, e_j)$ 的形式。

2.4 记法

我们用 $[n]$ 表示 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的集合。记法 $\{x_i\}_{i\in[n]}$ 表示项 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 的集合，而 $(x_i)_{i\in[n]}$ 表示向量 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$。我们还用粗体符号 $\mathbf{x}$ 表示向量 $(x_i)_{i\in[n]}$，并用 $\mathbf{x}^{\mathbf{y}}$ 表示两个向量 $\mathbf{x}^{\mathbf{y}} = \prod_{i\in[n]} x_i^{y_i}$ 逐元素幂的乘积。记法 $\oplus$ 用来表示两个向量的拼接。使用向量记法时，我们常将多项式系数 $\binom{N}{x_1\, x_2\, \ldots, x_n}$ 写作 $\binom{N}{\mathbf{x}}$。

3 面向 $\mathbf{FO}^2$ 的采样算法

现在，我们通过为其提供一个提升式 WMS，证明 $\mathbf{FO}^2$ 片段在采样下具有域可提升性。逻辑算法通常使用范式表示，而非任意句子。我们的采样算法所用的 $\mathbf{FO}^2$ 范式是斯科特范式（*SNF*）[25]；若一个 $\mathbf{FO}^2$ 句子写成如下形式，则称其处于 SNF 中：

$$\Gamma = \forall x\forall y : \psi(x, y) \wedge \bigwedge_{k\in[m]} \forall x\exists y : \varphi_k(x, y), \tag{3}$$

其中 ψ 和 φ_k 是无量词公式。众所周知，可以在多项式时间内将任意 $\mathbf{FO}^2$ 句子 Γ 转换为 SNF 中的公式 Γ_S，使得 Γ和 Γ_S 等可满足 [26]。其主要思路是从原子层级开始，逐层向上，将任意子公式 $\varphi(x) = Qy$：$\phi(x, y)$（其中 $Q \in \{\forall, \exists\}$ 和 ϕ 是无量词公式）替换为原子公式 A_φ，其中 A_φ 是一个新的谓词符号。随后，将这个新的原子公式 $A_\varphi(x)$ 单独进行“公理化”，使其等价于 $\varphi(x)$。A_φ 的权重设为 $w(A_\varphi) = \bar{w}(A_\varphi) = 1$。根据与 Kuusisto 和 Lutz [6] 所用方法类似的推理可知，这种归约不仅等可满足，而且也是可靠的（依据定义 2）。

引理 1. 对于任意 *WFOMS* $\mathfrak{S} = (\Gamma, \Delta, w, \bar{w})$，若 Γ 是一个 **一阶逻辑**[2] 句子，则存在一个 *WFOMS* $\mathfrak{S}' = (\Gamma', \Delta, w', \bar{w}')$，其中 Γ' 为 *SNF*，且独立于 Δ，使得从 $\mathfrak{S}$ 到 $\mathfrak{S}'$ 的归约是可靠的。

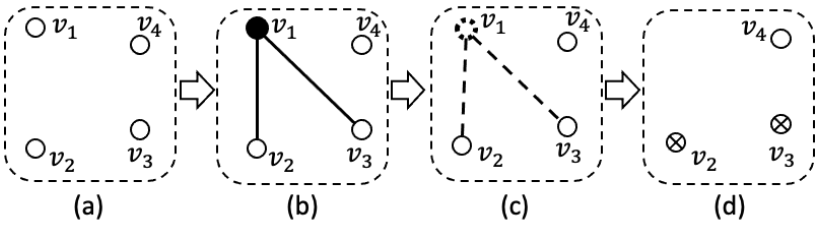


图 1：对没有孤立顶点的无向图执行采样步骤：(a) 从一个没有边的初始图开始；在更一般的采样问题中，$V_\forall = V_\exists = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$；(b) 为顶点 v_1 采样边；(c) 移除顶点 v_1 及其采样得到的边；(d) 获得一个包含部分已非孤立顶点（v_2 和 v_3）的图，从而得到一个新的采样问题，其中包含 $V'_\forall = \{v_2, v_3, v_4\}$ 和 $V'_\exists = \{v_4\}$。

证明显然，因为 SNF 变换中引入的每个新谓词（例如 P_φ）都被公理化为等价于子公式（$\varphi(x)$），而该子公式中的量词将被消去，因此，在所得 SNF 句子的每个模型中，该谓词的解释都完全由该子公式确定（详情见附录A.1）。

3.1 一个直观的例子

我们先通过一个直观的例子，说明如何均匀随机地生成一个大小为 n 且不含任何孤立顶点的无向图，以阐释我们的采样算法的基本思想。这种图结构可以用 SNF 中的一个 $\mathbf{FO}^2$ 句子表示，

$$\Gamma_G := (\forall x \forall y : (E(x,y) \Rightarrow E(y,x)) \wedge \neg E(x,x)) \wedge (\forall x \exists y : E(x,y)),$$

采样问题对应于顶点域 $V = \{v_i\}_{i\in[n]}$ 上、满足 $w(E) = \bar{w}(E) = 1$ 的 WFOMS，其中包含 Γ_G。在该句子中，唯一可实现的 1-类型是 $\neg E(x, x)$，而可实现的 2-表为 $\pi^1(x, y) = E(x, y) \wedge E(y, x)$，以及 $\pi^2(x, y) = \neg E(x, y) \wedge \neg E(y, x)$，表示两个顶点的连通性。

我们首先对 Γ_G 进行以下变换，得到 Γ_{GT}：

1. 引入一个辅助的 *Tseitin*谓词 $Z/1$，用于指示顶点的非孤立性，并将 $\forall x : Z(x) \Leftrightarrow \exists y : E(x, y)$ 添加到 Γ_G 中；以及
2. 移除 $\forall x \exists y : E(x, y)$,

并将谓词 Z 的权重设为 $w(Z) = \bar{w}(Z) = 1$。接着，我们考虑一个稍微更一般的 WFOMS ($\Gamma_{GT} \wedge \bigwedge_{v\in V_\exists} Z(v)$ $V_\forall, w, \bar{w}$)，其中 $V_\exists \subseteq V_\forall \subseteq V$和 $V_\exists$ 表示在由 $V_\forall$诱导的图中应当非孤立的顶点集合。通过设定 $V_\exists = V_\forall = V$，原始的关于 Γ_G的 WFOMS 显然可归约到这个更一般的问题；该归约是可靠的，其映射函数为 $f(\mu') = \langle \mu' \rangle_{\{E\}}$。

Let $\Gamma_{GT} \wedge \bigwedge_{v\in V_\exists} Z(v)$ 表示句子 $\Gamma_{GT} \wedge \bigwedge_{v\in V_\exists} Z(v)$。对于更一般的 WFOMS，由于 $\{E\}$ 是其骨架，该问题等价于根据概率 $\mathbb{P}[\mathcal{A} \mid \Gamma_G]$对 $V_\forall$ 上的一个 $\{E\}$-结构 $\mathcal{A}$ 进行采样。给定 $V_\forall$上的一个 $\{E\}$-结构 $\mathcal{A}$，记 $\mathcal{A}_i$ 为关于顶点 $v_i \in V_\forall$的 $\mathcal{A}$子结构，它由所有包含 v_i以及 $V_\forall$中的其他顶点的顶点元组所对应的 2-表组成：

$$\mathcal{A}_i := \bigcup_{v_j \in V_\forall : j \neq i} \pi_{i,j}(v_i, v_j),$$

其中，$\pi_{i,\ j}$ 是 $(v_i,\ v_j)$ 的 2-表。根据域递归方案，我们从 $V_\forall$ 中选择一个顶点 v_t，并将 $\mathcal{A}$ 的采样概率分解为

$$\mathbb{P}[\mathcal{A} \mid \widehat{\Gamma}_G] = \mathbb{P}\left[\mathcal{A} \mid \widehat{\Gamma}_G \wedge \mathcal{A}_t\right] \cdot \mathbb{P}[\mathcal{A}_t \mid \widehat{\Gamma}_G].$$

该分解引出了两个连续的一般 WFOMS 子问题：第一个是从 Γ_G中采样一个有效子结构 $\mathcal{A}_t$；另一个可以视为给定采样得到的 $\mathcal{A}_t$后，在 Γ_G上构造一个新的 WFOMS。

我们首先证明，新的 WFOMS 也可以归约为一般 WFOMS，只不过其论域更小，为 $V'_\forall = V_\forall \setminus \{v_t\}$，并且

$$V'_\exists = \{v_i \mid v_i \in V_\exists : v_i \neq v_t \wedge \pi_{t,i} = \pi^2\}.$$

该归约显然是可靠的，因为 WFOMS $(\Gamma_{GT} \wedge \bigwedge_{v \in V'_\exists} Z(v)\ V'_\forall,\ w,\ \bar{w})$ 的每个模型都可以映射到 WFOMS $(\Gamma_G \wedge \mathcal{A}_t,\ V_\forall,\ w,\ \bar{w})$ 的唯一一个模型，反之亦然，且不会影响模型的权重。因此，可以递归地对任意定义在 $V_\forall$上的 Γ_G 上的 WFOMS 执行该分解。具体而言，该算法以 $V_\forall$ 和 $V_\exists$ 作为输入，

1. 从 $V_\forall$中选择一个顶点 v_t，
2. 根据概率 $\mathbb{P}[\mathcal{A}_t \mid$对其子结构 $\mathcal{A}_t$ 进行采样 $\widehat{\Gamma}_G]$，并且
3. 更新 $V'_\forall$ 和 $V'_\exists$，得到一个新的问题以进行递归。

当所有子结构 $\mathcal{A}_i$ 均已采样（$V_\forall$ 仅包含一个顶点），或问题退化为关于 $\mathbf{UFO}^2$ 句子的 WFOMS（$V_\exists$ 为空）时，递归过程终止。递归次数少于顶点总数 $|V|$。递归步骤示例见图 1。

剩下的问题是根据 $\mathbb{P}[\mathcal{A}_t \mid \widehat{\Gamma}_G]$，决定对该子结构中的顶点连接的边。令 $V_1 = V'_\forall \setminus V_\exists$ 和 $V_2 = V'_\forall \setminus V_1$。对 $\mathcal{A}_t$ 的采样可以通过分别对 V_1 和V_2 进行两次随机二元划分来实现，得到 $\{V_{11}, V_{12}\}$ 和 $\{V_{21}, V_{22}\}$；其中，V_{11} 和 V_{21} 中的顶点会与 v_t相连，而 V_{12} 和 V_{22} 中的顶点则不会与其相连。可以证明，子结构 $\mathcal{A}_t$ 的采样概率仅取决于其大小（$|V_{11}|$，$|V_{12}|$，$|V_{21}|$，$|V_{22}|$）。这一结论的证明见第 3.4 节，其中讨论了更一般的$\mathbf{FO}^2$ 采样。因此，对 $\mathcal{A}_t$ 的采样可以通过随机生成划分大小，然后分别对 V_1 和 V_2 进行相应大小的随机划分来完成。我们采用枚举采样方法生成划分大小。所有可能的划分大小的数量显然关于 $|V_\forall|$是多项式级的；并且将在第 3.4 节中证明，每种划分大小的采样概率都可以在关于 $|V'_\forall|$的多项式时间内计算。因此，采样算法的复杂度关于顶点数是多项式级的。这一点与递归过程的复杂度（同样关于顶点数是多项式级的）共同表明，整个采样算法是提升的。

3.2 一个更一般的采样问题

不失一般性，[3]，我们假设 SNF句子 (3) 中的每个公式 $\varphi_k(x, y)$ 都是原子公式$R_k(x, y)$，其中 R_k 是 $\mathcal{P}_{\psi(x,y)}$中的一个二元谓词，且其权重 $w(R_k) = \bar{w}(R_k) = 1$。我们

[3]任何 SNF句子都可以通过引入一个带有权重$w(R_k) = \bar{w}(R_k)$的辅助谓词 R_k 转换为这种形式：对于每个 $\varphi_k(x, y)$，将 $\forall x \forall y$: $R_k(x, y) \Leftrightarrow \varphi_k(x, y)$ 附加到该句子中，并将 $\varphi_k(x, y)$ 替换为 $R_k(x, y)$。将其视为 WFOMS 中的归约时，该变换显然是可靠的。

首先，从该 SNF句子构造以下句子：

$$\Gamma_T := \forall x \forall y : \psi(x, y) \wedge \bigwedge_{k \in [m]} \forall x : Z_k(x) \Leftrightarrow (\exists y : R_k(x, y)), \tag{4}$$

其中每个 $Z_k/1$ 都是权重为 $w(Z_k) = \bar{w}(Z_k) = 1$的 Tseitin 谓词。

接下来，我们考虑以下句子上的一个更一般的 WFOMS问题

$$\widehat{\Gamma} := \Gamma_T \wedge \bigwedge_{i \in [n]} \mathcal{C}_i \tag{5}$$

其论域为 $\{e_i\}_{i \in [n]}$，其中每个 $\mathcal{C}_i$ 都是基原子$\{Z_k(e_i)\}_{k \in [m]}$的某个子集上的合取。我们称 $\mathcal{C}_i$ 为元素 e_i 上的 存在约束，并允许 $\mathcal{C}_i = \top$，这意味着 e_i 未经存在量化。更一般的 WFOMS可以视为一个条件采样问题，其中存在约束充当对问题施加条件的一元事实。通过将所有存在约束设为 $\bigwedge_{k \in [m]} Z_k(x)$，可以将原始的、关于 Γ 的 WFOMS归约为一个更一般的问题。另一方面，关于 $\mathbf{UFO}^2$ 句子 $\forall x \forall y : \psi(x, y)$ 的 WFOMS也可以归约为一个对所有 $i \in [n]$均满足 $\mathcal{C}_i = \top$ 的问题。容易验证，这两种归约都是可靠的。我们的采样算法的核心思想是利用域递归方案逐步移除存在约束，直到最终得到一个关于 $\mathbf{UFO}^2$ 句子的 WFOMS问题。

3.3 划分论域

除非另有说明，本节余下部分中的 1-类型和 2-表均定义在 $\mathcal{P}_\Gamma$之上，其中 Γ 是 SNF 中的句子。请注意，Tseitin 谓词 Z_k 不属于这些 1-类型。

我们将块类型和单元类型的概念引入为 1-类型的扩展。在 $\mathbf{UFO}^2$的采样算法中，这些类型的用法与 1-类型类似。考虑一个形如 (5) 的句子 $\widehat{\Gamma}$，其中包含 Tseitin 谓词 Z_k。块类型 β 是原子公式 $\{Z_k(x)\}_{k \in [m]}$的一个子集。块类型的数量为 2^m，其中 m 是存在量化公式的数量。我们通常将块类型表示为 $\beta(x)$，并将其视为块内原子公式 $\widehat{}$上的合取公式。借助块类型的概念，我们可以写出 $\Gamma = \Gamma_T \wedge \bigwedge_{i \in [n]} \beta_i(e_i)$，其中基化 $\beta_i(e_i)$恰好是施加于 e_i上的存在约束 $\mathcal{C}_i$。我们称 β_i 为 e_i 的块类型。我们固定所有块类型的顺序，并用 β^i 表示第 i 个块类型。随后，论域 Δ 被划分为块 $\{B_{\beta^i}\}_{i \in [2^m]}$，其中每个子集 $B_{\beta^i} \subseteq \Delta$ 恰好包含块类型为 β^i的论域元素。需要注意的是，块类型仅指明给定元素应满足哪些 Tseitin 原子，而未被块类型涵盖的 Tseitin 原子则不作规定。相比之下，1-类型会明确确定所有一元原子和自反原子的真值，但不包括 Tseitin 原子。

这些块进一步划分为单元。单元类型 $\eta = (\beta, \tau)$ 是由一个块类型 β和一个 1-类型 τ组成的有序对。我们也将单元类型写作合取公式 $\eta(x) = \beta(x) \wedge \tau(x)$。给定一个 $\mathcal{P}_\Gamma$-结构 $\mathcal{A}$，元素的单元类型 e 是其块类型（由句子 Γ给出）与它在 $\mathcal{A}$中实现的 1-类型的组合。每个块 B_β 都划分为单元$\{C_\eta^{\mathcal{A}} \mid \eta = (\beta, \tau)\ \tau \in U_{\mathcal{P}_\Gamma}\}$，其中每个单元 $C_\eta^{\mathcal{A}} \subseteq B_\beta$恰好包含单元类型为 η的论域元素。

为简洁起见，我们用 $N_u = |U_{\mathcal{P}_\Gamma}|$表示所有 1-类型的数量，用 $N_c = 2^m \times N_u$ 表示所有单元类型的数量。我们分别为 1-类型和单元类型固定一个线性序，并令 τ^i 和 η^j

分别表示第 i 个 1-类型和第 j 个单元类型。给定一个 $\mathcal{P}_{\widehat{\Gamma}}$-结构 $\mathcal{A}$ 及其单元划分 $\{C^{\mathcal{A}}_{\eta^i}\}_{i\in[N_c]}$，我们将单元划分的大小 $\left(|C^{\mathcal{A}}_{\eta^i}|\right)_{i\in[N_c]}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的单元配置，并将 $\left(|C^{\mathcal{A}}_{\beta\ (,\ \tau^i)}|\right)_{i\in[N_u]}$ 称为 $\mathcal{A}$ 在块 β 中的单元配置。一个 $\mathcal{P}_{\widehat{\Gamma}}$-结构将具有唯一的（块中的）单元配置。

我们经常会关注在一组元素上的所有单元配置的集合，该集合定义为配置空间。

定义 3（配置空间）。给定一个非负整数 M 和一个正整数m，我们将配置空间 $\mathcal{T}_{M,\ m}$ 定义为

$$\mathcal{T}_{M,m} = \left\{ (n_i)_{i\in[m]} \mid \sum_{i\in[m]} n_i = M, n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N} \right\}.$$

$\mathcal{T}_{M,\ m}$ 的大小为 $\binom{M+m-1}{m-1}$，显然关于 M 是多项式的（而关于 m 是指数的）。

3.4 采样算法

现在我们描述针对 $(\Gamma,\ \Delta,\ w,\ \bar{w})$ 的 WFOMS算法，其中 Γ 具有式（5）的形式且$\Delta = \{e_i\}_{i\in[n]}$，并证明该算法是域提升的（即运行时间关于域大小是多项式的）。容易验证，$\mathcal{P}_\Gamma$ 是 WFOMS问题的骨架。因此，该 WFOMS问题等价于按照概率 $\propto \mathbb{P}[\mathcal{A} \mid \Gamma]$ 对有效的 $\mathcal{P}_\Gamma$-结构 $\mathcal{A}$ 进行采样。

给定一个 $\mathcal{P}_\Gamma$-结构 $\mathcal{A}$ 在 Δ上，令 τ_i 为元素 e_i的 1-类型，并将$\eta_i = (\beta_i,\ \tau_i)$记为 e_i的单元类型。使用条件概率的记法，我们将采样概率分解为

$$\mathbb{P}[\mathcal{A} \mid \widehat{\Gamma}] = \mathbb{P}\left[\bigwedge_{i\in[n]} \tau_i(e_i) \mid \widehat{\Gamma}\right] \cdot \mathbb{P}\left[\mathcal{A} \mid \widehat{\Gamma} \wedge \bigwedge_{i\in[n]} \tau_i(e_i)\right]$$

借鉴从 $\mathbf{UFO}^2$ 句子中采样模型时所采用的类似思路，我们提出的算法分为两个阶段——首先为每个元素采样 1-类型，然后根据采样得到的 1-类型处理结构的条件采样。

3.4.1 采样 1-类型

我们首先考虑根据 $\mathbb{P}[\bigwedge_{i\in[n]} \tau_i(e_i) \mid \Gamma]$ 对 1-类型进行采样。注意，每个元素的块类型已由句子 Γ 确定，因此该问题等价于对每个元素的单元类型进行采样 [4]。由于 WFOMS 问题具有对称性，单元划分的采样概率完全由其对应的单元配置决定。因此，随机划分单元的问题进一步归结为对单元配置进行采样。

[4]在只有一个块这一特殊情况下，例如 $\widehat{\Gamma}$ 属于标准 SNF，或在 $\mathbf{UFO}^2$, 中，采样问题可以得到简化。

单元配置的采样算法概述见算法 1。算法首先在第 1–14 行采样一个随机单元配置，然后在第 15–21 行据此将每个块随机划分为单元。虽然划分过程相对直接，但在接下来的讨论中，我们将重点介绍如何对单元配置进行采样。

算法 1 单类型采样器($\widehat{\Gamma}, \Delta, w,$ $\bar{w}$)

$W \leftarrow$ 加权一阶模型计数($\Gamma, \Delta, w, \bar{w}$)

从 Γ 获取块 $B_{\beta^1}, B_{\beta^2}, \ldots, B_{\beta^{2^m}}$

对于 $(\mathbf{n}_{\beta^i})_{i\in[2^m]} \in$ **Prod** $\left(\mathcal{T}_{|B_{\beta^1}|,N_u}, \ldots, \mathcal{T}_{|B_{\beta^{2^m}}|,N_u}\right)$

执行 $\mathbf{n} \leftarrow \bigoplus_{i\in[2^m]} \mathbf{n}_{\beta^i}$

通过 (6) 计算 $\mathcal{W}_{\mathbf{n}}$

$W' \leftarrow \mathcal{W}_{\mathbf{n}} \cdot \prod_{t=1}^{2^m} \binom{|B_{\beta^t}|}{\mathbf{n}_{\beta^t}}$

// 均匀分布(0, 1) 会在 $[0,1]$ 上生成一个均匀随机数

如果 Uniform(0, 1) $< \frac{W'}{W}$ 则

$\mathbf{n}^* \leftarrow \mathbf{n}$

跳出循环

否则 $W \leftarrow W - W'$

结束 if

结束 for

对于 $i \in [2^m]$ 执行

从 β^i 中获取单元配置 $\mathbf{n}^*_{\beta^i}$，其中 $\mathbf{n}^*$

根据 $\mathbf{n}^*_{\beta^i}$ 将 B_{β^i} 随机划分为 $\{C_{\beta^i,\tau^j}\}_{j\in[N_u]}$

对于 $j \in [N_u]$ 执行

将 1-类型 τ^j 分配给 C_{β^i,τ^j} 中的所有元素

结束 for

结束 for

基本思路仍然基于枚举采样。设 B_{β^1}，B_{β^2}，……，$B_{\beta^{2^m}}$ 为由 Γ 定义的块。任意单元配置 $\mathbf{n}$ 都可以看作由各块中的单元配置 2^m $\mathbf{n}^{\beta^1}$、$\mathbf{n}^{\beta^2}$、……、$\mathbf{n}^{\beta^{2^m}}$ 串接而成，且每个 $\mathbf{n}^{\beta^i}$ 都来自配置空间 $\mathcal{T}_{|B_{\beta^i}|,\ N_u}$。因此，在算法中，通过对配置空间 $\mathcal{T}_{|B_{\beta^1}|,\ N_u}$，$\mathcal{T}_{|B_{\beta^2}|,\ N_u}$，……，$\mathcal{T}_{|B_{\beta^{2^m}}|,\ N_u}$ 应用笛卡尔积函数 Prod，来枚举所有单元配置。

在计算采样概率时，我们首先注意到，任何产生相同配置 $\mathbf{n}$ 的单元划分都具有相同的采样概率。我们用 $\mathcal{W}_{\mathbf{n}}$ 表示任意此类单元划分的采样权重（该概率的分子，即加权一阶模型计数）。于是，单元配置 $\mathbf{n}$ 的采样概率可由 $\mathcal{W}_{\mathbf{n}} \cdot \prod_{i\in[2^m]} \binom{|B_{\beta^i}|}{\mathbf{n}_{\beta^i}}$ 推得，其中后一个乘积等于产生 $\mathbf{n}$ 的划分总数。

$\mathcal{W}_{\mathbf{n}}$ 的值将在后续的采样算法中发挥关键作用。在此背景下，我们给出其形式化定义。给定一个大小为 N_c 的非负整数向量 $\mathbf{n}$，令 $\widetilde{n} = \sum_{i\in[N_c]} n_i$，并将 $\mathcal{W}_{\mathbf{n}}$ 定义为

$$\mathcal{W}_{\mathbf{n}} := \mathsf{WFOMC}(\Gamma_T \wedge \bigwedge_{i\in[\widetilde{n}]} \widetilde{\eta}_i(\widetilde{e}_i), \widetilde{\Delta}, w, \bar{w}), \tag{6}$$

~其中， $\{\eta_i\}_{i\in[\widetilde{n}]}$ 是生成配置 $\mathbf{n}$ 的单元类型集合， Δ 是一个大小为~$\widetilde{n}$的论域，而 $\widetilde{e}_i$ 是 Δ 中的第 i个元素。回顾一下，单元类型可以表示为一元原子的合取，因此， $\mathcal{W}_{\mathbf{n}}$ 中的每个 $\widetilde{\eta}_i$（$\widetilde{e}_i$）都可以解释为一组一元事实。于是， $\mathcal{W}_{\mathbf{n}}$ 的值等于在一组一元事实条件下，$\mathbf{FO}^2$ 句子 Γ_T 的加权一阶模型计数。Van den Broeck 和 Davis[23], 已对这类条件计数问题进行了深入研究，并证明其计算复杂度关于域大小 $\widetilde{n}$和事实数量为多项式级。由于事实数量显然关于 $\widetilde{n}$为多项式级，因此可以在关于 $\widetilde{n}$的多项式时间内计算 $\mathcal{W}_{\mathbf{n}}$。

引理 2. 算法 *1* 中 *OneTypeSampler*$(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ 的复杂度关于输入域的大小是多项式级的。

证明。 对于每个块 B_{β^i}， B_{β^i} 中总共有$|\mathcal{T}_{|B_{\beta^i}|,N_u}|$ 种可能的单元配置。在算法 1 第 3 行的循环中遍历所有块，将枚举出总计 $\prod_{i=1}^{2^m}|\mathcal{T}_{|B_{\beta^i}|,N_u}|$种可能的单元配置。尽管这个数目看起来可能很大，但根据配置空间的定义，它关于域大小是多项式级的。该算法其余的复杂度来自对 $\mathcal{W}_{\mathbf{n}}$ 的计算，而已证明该计算在 $\sum_{i\in[N_c]}n_i$ 中可以在多项式时间内完成。最后， $\sum_{i\in[N_c]}n_i$ 的值等于域大小，证毕。 □

3.4.2 论域递归采样

现在，让我们考虑在给定采样得到的 1-类型~η_i条件下，对 $\mathcal{P}_{\mathrm{T}}$-结构进行采样的问题。为便于表述，我们将采样概率 $\mathbb{P}[\mathcal{A}\mid\Gamma\wedge\bigwedge_{i\in[n]}\tau_i(e_i)]$ 重写为 $\mathbb{P}[\mathcal{A}\mid\Gamma_T\wedge\bigwedge_{i\in[n]}\eta_i(e_i)]$。

令 $\pi_{i,j}$ 表示元素元组（e_i,e_j）的 2-表，并将涉及元素 e_i 的所有元素元组上的基二表集合记为 $\mathcal{A}_i$ ：

$$\mathcal{A}_i:=\bigcup_{j\in[n]:j\neq i}\pi_{i,j}(e_i,e_j).$$

遵循域递归的思想，我们从 Δ 中选取一个元素 e_t ，并将采样概率分解为

$$\mathbb{P}\left[\mathcal{A}\mid\Gamma_T\wedge\bigwedge_{i\in[n]}\eta_i(e_i)\right]=\mathbb{P}\left[\mathcal{A}\mid\Gamma_T\wedge\bigwedge_{i\in[n]}\eta_i(e_i)\wedge\mathcal{A}_t\right]\cdot\mathbb{P}\left[\mathcal{A}_t\mid\Gamma_T\wedge\bigwedge_{i\in[n]}\eta_i(e_i)\right].$$

我们首先证明，对于采样问题的任意有效子结构 $\mathcal{A}_t$ ，由概率 $\mathbb{P}[\mathcal{A}\mid\Gamma_T\wedge\bigwedge_{i\in[n]}\eta_i(e_i)\wedge\mathcal{A}_t]$ 指定的 WFOMS 可以约化为与原问题具有相同形式、定义在 $\Gamma_T\wedge\bigwedge_{i\in[n]}\eta_i(e_i)$ 上但论域更小的 $\Delta'=\Delta\setminus e_t$ 上的 WFOMS。

给定一个 2-表 π 和一种块类型 β，令 $\beta_{|\pi}$ 为一种新的块类型:

$$\beta_{|\pi}=\beta\setminus\{Z_k(x)\mid k\in[m]:R_k(y,x)\in\pi(x,y)\}$$

我们将 $\beta_{|\pi}$ 称为 β 在 π下的松弛块类型，因为它移除了存在约束中的一部分，而这部分已由 π中的关系满足。我们也可以在 π 下将这种松弛应用于单元类型 $\eta=(\beta,\tau)$，得到 $\eta_{|\pi}=(\beta_{|\pi},\tau)$。令

$$\widetilde{\Gamma}=\Gamma_T\wedge\bigwedge_{i\in[n]}\eta_i(e_i)\wedge\mathcal{A}_t, \tag{7}$$

and

$$\widetilde{\Gamma}' = \Gamma_T \wedge \bigwedge_{i\in[n]\setminus\{t\}} \eta_{i|\pi_{t,i}}(e_i). \tag{8}$$

我们有以下引理。

引理 3. 如果 相对于 $(\Gamma_T \wedge \bigwedge_{i\in[n]} \eta_i(e_i)\ \Delta, w, \bar{w})$的 *WFOMS* 有效，即 Γ 可满足，那么从 $(\Gamma, \Delta, w, \bar{w})$ 的 *WFOMS* 到 $(\Gamma', \Delta', w, \bar{w})$ 的归约是可靠的。

证明。设 $\mathfrak{S}_1$ 和 $\mathfrak{S}_2$ 分别为 $(\Gamma, \Delta, w, \bar{w})$ 和 $(\Gamma', w, \Delta', \bar{w})$ 的 WFOMS。$\mathfrak{S}_1$ 和 $\mathfrak{S}_2$ 都以 $\mathcal{P}_\Gamma$ 为骨架。因此，$\mathfrak{S}_1$（分别为 $\mathfrak{S}_2$）的问题等价于在论域 Δ（分别为 Δ'）上对一个 $\mathcal{P}_\Gamma$-结构进行采样。该归约中的映射函数可定义在 Δ'上的 $\mathcal{P}_\Gamma$-结构上。我们说明映射函数是 $f(\mathcal{A}') = \mathcal{A}' \cup \mathcal{A}_t \cup \tau_t(e_t)$。函数 f 显然是确定性的，且可在多项式时间内计算。

为简化证明余下的论证，我们先证明 f 是双射；也就是说，对于 $\mathfrak{S}_1$ 的任意有效 $\mathcal{P}_\Gamma$-结构 $\mathcal{A}$，存在唯一的 $\mathfrak{S}_2$ 的有效结构 $\mathcal{A}'$，使得 $f(\mathcal{A}') = \mathcal{A}$。令相应的结构为 $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_t \setminus \{\tau_t(e_t)\}$，其唯一性显而易见。接下来，我们证明 $\mathcal{A}'$ 相对于 $\mathfrak{S}_2$ 有效。将 Γ 基化为 Δ:

$$\mathcal{A}_t \wedge \bigwedge_{i\in[n]} \eta_i(e_i) \wedge \bigwedge_{i,j\in[n]} \psi(e_i, e_j) \wedge \Lambda,$$

其中 $\Lambda = \bigwedge_{k\in[m]} \bigwedge_{i\in[n]} \left(Z_k(e_i) \Leftrightarrow \bigvee_{j\in[n]} R_k(e_i, e_j)\right)$。将 Λ 中单元类型 $\eta_i(e_i)$ 内的基化 Tseitin 原子替换为相应的真值赋值，然后丢弃 Λ，即可得到一个不含 Tseitin 原子的基公式:

$$\mathcal{A}_t \wedge \bigwedge_{i\in[n]} \tau_i(e_i) \wedge \bigwedge_{i,j\in[n]} \psi(e_i, e_j) \wedge \bigwedge_{i\in[n]} \bigwedge_{\substack{k\in[m]:\\ Z_k(x)\in\beta_i}} \bigvee_{j\in[n]} R_k(e_i, e_j). \tag{9}$$

容易证明，$\mathcal{A}$ 相对于 $\mathfrak{S}_1$ 有效，当且仅当 $\mathcal{A}$ 满足公式 (9)。因此，结构 $\mathcal{A}'$ 满足以下公式

$$\bigwedge_{i\in[n]\setminus\{t\}} \tau_i(e_i) \wedge \bigwedge_{i,j\in[n]\setminus\{t\}} \psi(e_i, e_j) \wedge \bigwedge_{i\in[n]\setminus\{t\}} \bigwedge_{\substack{k\in[m]:\\ Z_k(x)\in\beta_{i|\pi_{t,i}}}} \bigvee_{j\in[n]\setminus\{t\}} R_k(e_i, e_j), \tag{10}$$

该公式由 (9) 通过替换 $\mathcal{A}_t$ 和 $\tau_t(e_t)$ 中的基原子得到。公式 (10) 不过是对 Δ' 上的 Γ' 进行基化，然后对放宽的单元类型 $\eta_{i|\pi_{t,\ i}}$中的基化 Tseitin 原子进行相同的替换。因此，我们可以得出结论，$\mathcal{A}'$ 相对于 $\mathfrak{S}_2$ 也有效。

现在，我们已准备好通过映射函数证明采样概率的一致性。由于 f 是双射，只需证明

$$\mathbb{P}[f(\mathcal{A}') \mid \widetilde{\Gamma}; \Delta, w, \bar{w}] = \mathbb{P}[\mathcal{A}' \mid \widetilde{\Gamma}'; \Delta', w, \bar{w}]$$

对于 $\mathfrak{S}_2$ 的任意有效结构 $\mathcal{A}'$。根据映射函数 f 的定义，我们有

$$\langle w, \bar{w}\rangle(f(\mathcal{A}')) = \langle w, \bar{w}\rangle(\mathcal{A}') \cdot \langle w, \bar{w}\rangle(\mathcal{A}_t) \cdot \langle w, \bar{w}\rangle(\tau_t).$$

此外，由于 f 是双射，且 $\mathcal{P}_\Gamma$ 是 $\mathfrak{S}_1$ 和 $\mathfrak{S}_2$ 的骨架，我们有

$$\begin{aligned}\mathsf{WFOMC}(\widetilde{\Gamma},\Delta,w,\bar{w}) &= \sum_{\mu\in\mathcal{M}_{\widetilde{\Gamma},\Delta}} \langle w,\bar{w}\rangle(\langle\mu\rangle_{\mathcal{P}_\Gamma}) \\ &= \sum_{\mu'\in\mathcal{M}_{\widetilde{\Gamma}',\Delta'}} \langle w,\bar{w}\rangle(f(\langle\mu'\rangle_{\mathcal{P}_\Gamma})) \\ &= \langle w,\bar{w}\rangle(\mathcal{A}_t)\cdot\langle w,\bar{w}\rangle(\tau_t)\cdot\sum_{\mu'\in\mathcal{M}_{\widetilde{\Gamma}',\Delta'}} \langle w,\bar{w}\rangle(\langle\mu'\rangle_{\mathcal{P}_\Gamma}) \\ &= \langle w,\bar{w}\rangle(\mathcal{A}_t)\cdot\langle w,\bar{w}\rangle(\tau_t)\cdot\mathsf{WFOMC}(\widetilde{\Gamma}',\Delta',w,\bar{w}).\end{aligned} \tag{11}$$

最后，根据条件概率的定义，我们可以写出

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[f(\mathcal{A}')\mid\widetilde{\Gamma};\Delta,w,\bar{w}] &= \frac{\langle w,\bar{w}\rangle(f(\mathcal{A}'))}{\mathsf{WFOMC}(\widetilde{\Gamma},\Delta,w,\bar{w})} \\ &= \frac{\langle w,\bar{w}\rangle(\mathcal{A}')\cdot\langle w,\bar{w}\rangle(\mathcal{A}_t)\cdot\langle w,\bar{w}\rangle(\tau_t)}{\langle w,\bar{w}\rangle(\mathcal{A}')\cdot\langle w,\bar{w}\rangle(\mathcal{A}_t)\cdot\mathsf{WFOMC}(\widetilde{\Gamma}',\Delta',w,\bar{w})} \\ &= \frac{\langle w,\bar{w}\rangle(\mathcal{A}')}{\mathsf{WFOMC}(\widetilde{\Gamma}',\Delta',w,\bar{w})} \\ &= \mathbb{P}[\mathcal{A}'\mid\widetilde{\Gamma}';\Delta',w,\bar{w}],\end{aligned} \tag{12}$$

从而完成证明。 □

借助上述可靠归约，算法剩下的工作就是在给定概率 $\mathbb{P}\left[\mathcal{A}_t\mid\Gamma_T\wedge\bigwedge_{i\in[n]}\eta_i(e_i)\right]$ 的条件下对 $\mathcal{A}_t$ 进行采样。

回想一下， $\mathcal{A}_t$ 由所有由 e_t 和 Δ' 中元素构成的元组的基二表组成。我们采用与单元类型采样类似的方法，通过对单元进行随机划分来完成对 $\mathcal{A}_t$ 的采样。令 $C_{\eta^1},C_{\eta^2},\ldots,C_{\eta^{N_c}}$ 为与采样得到的单元类型 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{n-1}$ 相对应的 Δ' 的单元划分。设所有 2-表的数量为 N_b，并固定 2-表的线性序 $\pi^1,\pi^2,\ldots,\pi^{N_b}$。任意子结构 $\mathcal{A}_t$ 都可视为将每个单元划分为 N_b 个互不相交子集；每个子集对应一个 2-表 π^j，且恰好包含与 e_t 组合时实现 π^j 的元素。

给定一个子结构 $\mathcal{A}_t$，我们用 $\left\{G^{\mathcal{A}_t}_{\eta^i,\ \pi^j}\right\}_{j\in[N_b]}$ 表示 C_{η^i} 上的细化划分，并用 $\mathbf{g}^{\mathcal{A}_t}_{\eta^i}=\left(|G^{\mathcal{A}_t}_{\eta^i,\pi^j}|\right)_{j\in[N_b]}$ 表示其对应的基数向量。令 $\mathbf{g}^{\mathcal{A}_t}=\bigoplus_{i\in[N_c]}\mathbf{g}^{\mathcal{A}_t}_{\eta^i}$ 为所有单元的基数向量的拼接，称为 $\mathcal{A}_t$ 的**二表配置**。

我们首先假设 $\mathcal{A}_t$ 在采样问题（$\Gamma_T\wedge\bigwedge_{i\in[n]}\eta_i(e_i)$ Δ， w， $\bar{w}$）中有效。我们将看到， $\mathcal{A}_t$ 的采样概率完全由其对应的二表配置 $\mathbf{g}^{\mathcal{A}_t}$ 决定。首先，如式 (11) 所述，我们可以将采样权重 加权一阶模型计数($\Gamma_T\wedge\bigwedge_{i\in[n]}\eta_i(e_i)\wedge\mathcal{A}_t$， Δ， w， $\bar{w}$) 写为

$$\mathsf{WFOMC}(\widetilde{\Gamma}',\Delta',w,\bar{w})\cdot\langle w,\bar{w}\rangle(\tau_t)\cdot\langle w,\bar{w}\rangle(\mathcal{A}_t) \tag{13}$$

其中， $\widetilde{\Gamma}'$（定义见式 (8)）是由 $\mathcal{A}_t$ 中的 2-表确定的约化句子。令 $\mathbf{n}^{\mathcal{A}_t}$ 为对应于 Γ' 中基底单元的单元 ~ ~配置。WFOMC($\Gamma',\Delta',w,\bar{w}$) 的值为

恰为 $\mathcal{W}_{\mathbf{n}^{\mathcal{A}_t}}$，其形式化定义见第 3.4.1 节。记 $\mathbf{w} = \big(\langle w, \bar{w}\rangle(\pi^i)\big)_{i\in N_b}$ 为 2-表的权重向量。于是，式 (13) 可写为

$$\mathcal{W}_{\mathbf{n}^{\mathcal{A}_t}} \cdot \langle w, \bar{w}\rangle(\tau_t) \cdot \prod_{i\in[N_c]} \mathbf{w}^{\mathbf{g}^{\mathcal{A}_t}_{\eta^i}}. \tag{14}$$

在上面的等式中，τ_t 已由单类型采样器在单元类型 η_t 中确定，而最后一项仅取决于 2-表配置 $\mathbf{g}^{\mathcal{A}_t}$。很容易验证，$\mathbf{n}^{\mathcal{A}_t}$ 的单元配置也完全由$\mathbf{g}^{\mathcal{A}_t}$确定。为说明这一点，设 $n^{\mathcal{A}_t}_\eta$为$\mathbf{n}^{\mathcal{A}_t}$中单元类型 η 的基数，$g^{\mathcal{A}_t}_{\eta,\,\pi}$ 为$\mathbf{g}^{\mathcal{A}_t}_\eta$中 π 的基数，即 $|G^{\mathcal{A}_t}_{\eta,\,\pi}|$。对于任意单元类型 η，$n^{\mathcal{A}_t}_\eta$的值可计算为

$$n^{\mathcal{A}_t}_\eta = \sum_{i\in[N_c], j\in[N_b]:\eta^i{}_{|\pi^j}=\eta} g^{\mathcal{A}_t}_{\eta^i,\pi^j}. \tag{15}$$

根据上述论证，有效子结构 $\mathcal{A}_t$ 的采样概率 (14) 完全由$\mathbf{g}^{\mathcal{A}_t}$确定。因此，我们可以按照与第 3.4.1 节中采样 1-类型相同的思路来采样 $\mathcal{A}_t$：首先采样一个 2-表配置$\mathbf{g}^{\mathcal{A}_t}$，然后据此划分单元。接着，我们只需应用枚举采样方法，因为可能的 2-表配置数量显然关于域大小是多项式的。对于任意 2-表配置 $\mathbf{g}^{\mathcal{A}_t}$，其采样权重可通过将 (14) 乘以 $\prod_{i\in[N_c]} \binom{n_{\eta^i}}{\mathbf{g}^{\mathcal{A}_t}_{\eta^i}}$来计算，其中

n_{η^i} 是 C_{η^i}的大小。

在目前为止的讨论中，我们始终假设子结构 $\mathcal{A}_t$ 在 WFOMS（$\Gamma_T \wedge \bigwedge_{i\in[n]} \eta_i(e_i)$ $\Delta, w, \bar{w}$）中有效，否则就不应对其进行采样。我们通过对 2-表配置 $\mathbf{g}^{\mathcal{A}_t}$施加一些约束来保证这一假设。如果对于某些论域元素 a 和 b，$\tau(a) \cup \pi(a,b) \cup \tau'(b)$的解释满足公式 $\psi(a,b) \wedge \psi(b,a)$，那么我们就称 2-表 π与 1-类型元组（τ, τ'）相容。于是，第一个约束是，$\mathcal{A}_t$ 中的任意 2-表$\pi_{t,i}$ 都必须与 τ_t 和 τ_i相容。这转化为对 2-表配置的一项要求：划分单元 η^i时，与 τ_t 和 τ_i 不相容的 2-表的基数必须为 0。第二个约束是，对于任意索引 $k \in \{i \mid Z_i \in \beta_t\}$，子结构 $\mathcal{A}_t$ 必须至少包含一个形如 $R_k(e_t, a)$的基原子公式，其中 a 是来自 Δ的域元素，以使 $\mathcal{A}_t$ 满足存在公式 $\exists y:\ R_k(e_t, y)$。这意味着，2-表配置中必须至少有一个非零基数，使得其对应的 2-表 π 满足 $R_k(x,y) \in \pi$。

结合以上讨论的所有要素，我们现在给出针对句子 Γ_T、在单元类型 η_i 条件下的采样算法，如算法 2 所示。该算法整体采用递归方法，在第 33 行调用一个论域更小、单元类型放宽的递归调用。当输入域仅包含一个元素（第 1 行），或元素上不存在存在性约束（第 4 行）时，算法终止。在第 10–23 行，枚举所有可能的 2-表配置。对于每种配置，我们在第 13–15 行计算其对应权重，并在第 16–21 行决定是否对其进行采样。采样了 2-表配置后，我们在第 25–32 行随机划分单元，然后分别在第 29 行和第 30 行更新采样结构以及每个元素的单元类型。第 12 行的函数 ExSat($\mathbf{g}$, η) 用于检查 2-表配置 $\mathbf{g}$ 是否能够保证采样子结构的有效性，如上文所述。该函数的伪代码见附录 A.5.2。

算法 2 DRSampler$(\Gamma_T, \Delta, w, \bar{w}, (\eta_i)^{i\in[n]})$

1: **如果** $n = 1$ **那么**2: **返回** $\emptyset$3: **结束如果**4: **如果**仅类型为 $\beta = \top$ 的块非空**那么**5: **返回**一个由$\mathbf{UFO}^2$ WMS 从 $\forall x \forall y$ 中采样得到的模型 μ： $\psi(x, y) \wedge \bigwedge_{i\in[n]} \tau_i(e_i)$ 在 Δ 上方 **在** $(w, \bar{w})$ **下方 6: 结束如果 7: 选择** $t \in [n]$**;** $\mu \leftarrow \tau_t(e_t)$**;** $\Delta' \leftarrow \Delta \setminus \{e_t\}$**8: 获取** $(\eta_i)^{i\in[n]\setminus\{t\}}$ **的单元配置** $\mathbf{n} = \left(n_{\eta^i}\right)_{i\in[N_c]}$ **9:** $W \leftarrow \mathcal{W}_{\mathbf{n}}$ **10: 对** $\left(\mathbf{g}_{\eta^i}\right)_{i\in[N_c]} \leftarrow \underset{\eta^i}{\mathbf{Prod}}(\mathcal{T}_{n_{\eta^1}, N_b}, \ldots, \mathcal{T}_{n_{\eta^{N_c}}, N_b})$ **执行 11:** $\mathbf{g} \leftarrow \bigoplus_{i\in[N_c]} \mathbf{g}$ 12 **: 如果 ExSat (g** η_t**) 成立，则 13: 根据 (15) 获取新的单元配置** $\mathbf{n}'$ **（相对于 g）14: 根据 (6) 计算** $\mathcal{W}_{\mathbf{n}'}$ **15:** $W' \leftarrow \mathcal{W}_{\mathbf{n}'} \cdot \langle w, \bar{w}\rangle$**(** τ_t**)** $\cdot \prod_{i\in[N_c]} \binom{n_{\eta^i}}{\mathbf{g}_{\eta^i}} \mathbf{w}^{\mathbf{g}_{\eta^i}}$**16: 如果 Uniform(0, 1)** $< \frac{W'}{W}$ **则 17:** $\mathbf{g}^* \leftarrow$**g 18: 跳出循环 19: 否则 20:** $W \leftarrow W - W'$**21: 结束如果 22: 结束如果 23: 结束循环 24: 从** $(\eta_i)^{i\in[n]\setminus\{t\}}$ **获取单元划分** $\{C_{\eta^i}\}_{i\in[N_c]}$**：对** $i \in [N_c]$ **执行 26: 从** $\mathbf{g}^*$ **中获取** η^i **的基数向量** $\mathbf{g}^*_{\eta^i}$ **27: 根据** $\mathbf{g}^*_{\eta^i}$ **将单元** C_{η^i} **随机划分为** $\left\{G_{\eta^i,\pi^j}\right\}_{j\in[N_b]}$ **28: 对** $j \in [N_b]$ **执行 29:** $\mu \leftarrow \mu \cup \left\{\pi^j(e_t, e)\right\}_{e\in G_{\eta^i,\pi^j}}$**30:** $\forall e_s \in G_{\eta^i,\pi^j}, \eta'_s \leftarrow \eta_{s|\pi^j}$**31: 结束循环 32: 结束循环 33:** $\mu \leftarrow \mu \cup$ **DRSampler(**$\Gamma_T, \Delta', w, \bar{w}, (\eta'_i)^{i\in[n-1]}$**) 34: 返回** μ

引理 4。 算法 *2* 中 *DRSampler*$(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ 的复杂度关于输入域的大小是多项式级的。

证明。 算法 DRSampler 最多调用 n 次，其中 n 是论域的大小。每次递归调用的主要计算是执行循环，我们需要遍历所有$\prod_{i\in[N_c]} |\mathcal{T}_{n_{\eta^i},\ N_b}|$ 种可能的配置。配置空间 $\mathcal{T}_{M,\ m}$ 的大小关于 M是多项式级的，因此该循环的复杂度关于域大小也是多项式级的。计算 $\mathcal{W}_{\mathbf{n}'}$ 的其他复杂度已证明关于向量的求和是多项式级的

$\mathbf{n}'$，它显然小于域大小。 □

3.4.3 面向 $\mathbf{FO}^2$ 的提升式 WMS

我们在算法 3 中给出了针对$\mathbf{FO}^2$ 的 WMS。给定一个处于 SNF 中的$\mathbf{FO}^2$ 句子 Γ，算法首先得到一般形式 (5) 的句子 Γ_T。然后依次应用单类型采样器 OneTypeSampler 和 $\widehat{}$DRSampler，对 Γ的骨架结构进行采样。容易验证，该骨架结构也是 Γ的模型，因为它可以视为从 Γ 上的 WFOMS问题到 Γ的可靠归约中，映射函数$\widehat{}$的输出。引理 2 和 4 已证明，单类型采样器 OneTypeSampler 和 DRSampler 均关于域大小具有多项式时间复杂度，因此算法 3 中的 WMS 显然是提升的。

算法 3 $\mathsf{WMS}(\Gamma, \Delta, w, \bar{w})$

输入： 一个$\mathbf{FO}^2$ 句子 Γ，其形式为 (3)；一个大小为 n 的论域 $\Delta = \{e_i\}_{i\in[n]}$；一个权重函数 $(w, \bar{w})$
输出： 一个模型 μ，其 Γ 在 Δ上

1：根据 (4) 从 Γ **构造** Γ_T **2：** $\forall i \in [n]$, $\beta_i(x) \leftarrow \bigwedge_{k\in[m]} Z_k(x)$ **3：** $\Gamma \leftarrow \Gamma_T \wedge \bigwedge_{i\in[n]} \beta_i(e_i)$ **4：** $(\tau_i)^{i\in[n]} \leftarrow$ **单类型采样器**$(\Gamma, \Delta, w, \bar{w})$ **5：** $\forall i \in [n], \eta_i \leftarrow (\beta_i, \tau_i)$ **6：** $\mu \leftarrow$ **DRSampler**$(\Gamma_T, \Delta, w, \bar{w}, (\eta_i)^{i\in[n]})$ **7：返回** μ

定理 2. 片段 $\mathbf{FO}^2$ 在采样下域可提升。

证明 定理 *2.* 证明可直接由上述内容和引理 1 得出。 □

注 1. 我们注意到，针对我们的 *WMS*，可以进行若干优化，例如，在 *DRSampler* 中启发式地选择域元素，以便算法快速达到终止条件。然而，当前算法足够清晰且高效，能够证明我们的主要结果，因此我们将一些优化的讨论留给附录 *A.5.1*。

4 推广至带基数约束的 $\mathbf{FO}^2$

本节将我们的结果推广到带基数约束的 $\mathbf{FO}^2$。单个基数约束的形式为 $|P| \bowtie q$，其中 $\bowtie$ 是比较运算符（例如 $=, \leq, \geq, <, >$），q 是自然数。这些约束作用于结构 $\mathcal{A}$ 中由谓词 P构成的不同正基文字的数量。例如，如果结构$\mathcal{A}$ 中至多有 q 个关于 P 的文字为真，那么该结构就满足约束 $|P| \leq q$。为便于说明，我们允许在 FO 公式中将基数约束作为原子公式，例如 $(|E| = 2) \wedge (\forall x \forall y\colon E(x, y) \Rightarrow E(y, x))$（其模型可解释为恰有一条边的无向图），并自然地扩展满足关系 $\models$。

这些基数约束未必能用一阶逻辑表达，除非将该约束在整个论域上进行基化；它们与$\mathbf{C}^2$, 片段有着密切联系，

该片段将在下一节介绍。在 [1], 中，作者还扩展了他们的 WMS（最初是为$\mathbf{UFO}^2$开发的），使其能够处理基数约束。不过，他们的方法相对直接，而扩展到**一阶逻辑**^{2} 则更为复杂。

令 Γ 为一个$\mathbf{FO}^2$ 句子，并且

$$\Upsilon := \varphi(|P_1| \bowtie q_1, \ldots, |P_M| \bowtie q_M), \tag{16}$$

其中， φ 是一个布尔公式， $\{P_i\}_{i\in[M]} \subseteq \mathcal{P}_\Gamma$，且 $\forall i \in [M]$， $q_i \in \mathbb{N}$。考虑在论域 Δ 上、约束条件为（w， $\bar{w}$）时，关于 $\Gamma \wedge \Upsilon$ 的 WFOMS 问题。 $\Gamma \wedge \Upsilon$ 的采样算法整体结构与算法 3 相比保持不变。算法仍然首先从 Γ获得一般句子 Γ 。然后依次将公式 $\Gamma \wedge \Upsilon$ 输入单类型采样器和 DRSampler，以采样 $\mathcal{P}_\Gamma$-结构。详细算法请参见附录 A.5.3。下面仅描述相较于原算法所做的修改。

One Type Sampler 1，这里不别在于，加权一阶模型计数问题的计算，具体而言是 WFOMC(Γ， Δ， w， $\bar{w}$) 和 $\mathcal{W}_{\mathbf{n}}$，现在会在其输入句子中包含基数约束 Υ 。为适应这一变化，我们稍微修改了式 (6) 中 $\mathcal{W}_{\mathbf{n}}$ 的定义，将 $\Gamma_T \wedge \bigwedge_{i\in[\widetilde{n}]} \widetilde{\eta}_i \wedge \Upsilon$ 作为输入，并将新的项记为$\mathcal{W}_{\mathbf{n},\ \Upsilon}$。根据 [7], 中的命题 5，向可提升句子添加基数约束不会影响所得公式的可提升性（就加权一阶模型计数问题而言）。因此，$\mathcal{W}_{\mathbf{n},\ \Upsilon}$ 的计算仍关于域大小为多项式时间，因为 $\mathcal{W}_{\mathbf{n}}$ 中的原句子已被证明是可提升的。

对于给定采样单元类型 η_i的采样问题，论域递归性质仍然成立，下面将依次证明。给定基文字集合 L 和谓词 P，令 $N(P,\ L)$ 表示 P在 L中的正基文字数量。给定元素 e_t的一个有效子结构$\mathcal{A}_t$，按惯例将 e_t的 1-类型记为 τ_t，令 $q'_i = q_i - N(P_i,\ \mathcal{A}_t) - N(P_i,\ \tau_t(e_t))$ 对每个 $i \in [M]$ 都成立，并定义

$$\Upsilon' = \varphi(|P_1| \bowtie q'_1, \ldots, |P_M| \bowtie q'_M). \tag{17}$$

令 $\Gamma_C = \Gamma \wedge \Upsilon$ 和 $\Gamma'_C = \Gamma' \wedge \Upsilon'$，其中 Γ 和 Γ' 分别定义为（7）和（8）。那么从 WFOMS问题 Γ到 Γ' 的归约是可靠的。

引理 5. </style}若 相对于 ($\bigwedge_{i\in[n]} \eta_i(e_i) \wedge \Gamma_T \wedge \Upsilon, \Delta, w, \bar{w}$)的 *WFOMS* 有效，即 Γ_C 是可满足的，那么从 *WFOMS* $(\Gamma_C, \Delta, w, \bar{w})$ 到 $(\Gamma'_C, \Delta', w, \bar{w}')$ 的归约是可靠的。

引理 *5* 的证明。 证明沿用引理 3 的相同论证。唯一需要再次论证的是映射函数 $f(\mathcal{A}') = \mathcal{A}' \cup \mathcal{A}_t \cup \tau_t(e_t)$ 的双射性。令 $\mathfrak{S}_1^C$和 $\mathfrak{S}_2^C$分别为 $(\widetilde{\Gamma}_C, \Delta, w, \bar{w})$ 和 $(\widetilde{\Gamma}'_C, \Delta', w, \bar{w})$ 的 WFOMS。对于 $\mathfrak{S}_1^C$ 的任意有效 $\mathcal{A}$， $\mathcal{A}$必须同时满足 Γ 和 Υ。由此可知， $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_t \setminus \{\tau_t(e_t)\}$ 满足 Γ' 和 Υ'，这意味着 $\mathcal{A}'$ 相对于 $\mathfrak{S}_2^C$ 也有效。这就确立了 f 的双射性。证明的其余部分，包括采样概率的一致性，均与引理 3 完全相同，具体来说遵循 (11) 和 (12)。 □

DRSampler 的核心结构保持不变，因为可靠归约仍然成立。不过，现在递归调用使用约化句子 $\Gamma_T \wedge \Upsilon'$。其他一些细微修改包括：

- $\mathcal{W}_{\mathbf{n}^{\mathcal{A}_t}}$ （14）已替换为 $\mathcal{W}_{\mathbf{n}^{\mathcal{A}_t},\ \Upsilon'}$，并且

• ExSat 中对采样得到的 2-表配置进行有效性检查时，现在会额外检查约简后的基数约束 Υ' 是否定义良好；如果任何 $q_i' \notin \mathbb{N}$ for $i \in [M]$，则返回 False。

如上所述，将我们的采样算法扩展到处理$\mathbf{FO}^2$ 中的基数约束，只会略微增加该过程的复杂度。此外，$\mathcal{W}_{\mathbf{n},\Upsilon}$ 的计算仍为关于域大小的多项式时间，这意味着广义算法仍然是提升的，从而证明了带基数约束的$\mathbf{FO}^2$ [5]在采样下的可提升性。

定理 3. </style}设是一个FO^2 句子，且 Υ 具有(16)的形式。则 $\Gamma \wedge \Upsilon$ 在采样下是域可提升的。

证明。 证明由上述讨论可得。 □

5 对 SC^2 的进一步推广

借助带基数约束的$\mathbf{FO}^2$ 的提升式WMS，我们可以将结果进一步推广到涉及计数量词 $\exists_{=k}$ [27] 的情形。这里，我们研究如下形式的句子

$$\begin{aligned}\Gamma \wedge (\forall x \exists_{=k_1} y : \phi_1(x,y)) \wedge \cdots \wedge (\forall x \exists_{=k_{M'}} : \phi_{M'}(x,y)) \\ \wedge (\exists_{=k_1'} x \forall y : \phi_1'(x,y)) \wedge \cdots \wedge (\exists_{=k_{M''}'} x \forall y : \phi_{M''}'(x,y)),\end{aligned}$$

其中 Γ是一个$\mathbf{FO}^2$ 句子，而 $\exists_{=k}$ 是计数量词，用于指定论域中满足给定公式的元素的确切数量。例如，若结构 $\mathcal{A}$ 的论域为 Δ，那么当且仅当恰有 k 个不同元素 $t_1, \ldots, t_k \in \Delta$ 满足$\mathcal{A} \models \psi(t_i)$（对所有 $i \in [k]$均成立）时，该结构满足句子 $\exists_{=k} x:\ \psi(x)$。我们将这一片段称为*SNF* 中带计数的二变量逻辑 $\mathbf{SC}^2$, ，因为它对$\mathbf{FO}^2$ 句子的扩展合取与 SNF 类似。计数量词的引入显著增强了 $\mathbf{SC}^2$, 的表达能力；例如， k-正则图可以在$\mathbf{SC}^2$,中编码，正如引言中所示。

最近，Kuzelka [7] 证明，$\mathbf{FO}^2$ 的可提升性可以推广到带计数的二变量逻辑片段$\mathbf{C}^2$, ，这是$\mathbf{SC}^2$, 的超集；具体做法是将$\mathbf{C}^2$ 句子的加权一阶模型计数问题归约为带基数约束的$\mathbf{FO}^2$ 句子。我们证明，这一归约也可应用于采样问题；当该片段限制为$\mathbf{SC}^2$时，归约是可靠的。

引理 6. 对于任意 *WFOMS* $\mathfrak{S} = (\Phi, \Delta, w, \bar{w})$，其中 Φ 是一个$\mathbf{SC}^2$ 句子，存在一个 *WFOMS* $\mathfrak{S}' = (\Gamma' \wedge \Upsilon, \Delta, w', \bar{w}')$，其中 Γ' 是一个$\mathbf{FO}^2$ 句子， Υ 表示形式为(16) 的基数约束，且 Γ' 和 Υ 均独立于 Δ，使得从 $\mathfrak{S}$ 到 $\mathfrak{S}'$的归约是可靠的。

证明采用了与 [7], 中类似的技术，具体细节见附录 A.2。我们在此指出，将这一结果进一步推广到一般的 $\mathbf{C}^2$ 句子是不可行的，因为 [7] 中针对 $\mathbf{C}^2$ 句子所采用的原始归约在谓词上引入了一些负权重。不过，可以证明，$\mathbf{C}^2$ 在采样下的域可提升性

[5]值得注意的是，$\mathcal{W}_{\mathbf{n},\Upsilon}$ 的计算复杂度与基数约束 Υ 中的取值 $q_1, \ldots, q_M$无关，因此，对这些约束进行归约不会影响归约后的 $\mathcal{W}_{\mathbf{n}\cdot\mathcal{A}_t,\Upsilon'}$ 的可提升性。

可以通过直接应用我们的域递归采样方法来证明，而无需诉诸基数约束归约。更详细的讨论请参阅附录 A.3。

由于已证明带有基数约束的$\mathbf{FO}^2$ 在采样下可提升，因此很容易证明$\mathbf{SC}^2$ 片段在采样下可提升。

定理 4. $\mathbf{SC}^2$ 片段在采样下域可提升。

证明。 该证明由引理 6 和定理 3 得出。 □

此外，还可以在$\mathbf{SC}^2$ 中进一步引入额外的基数约束，而不会降低其在采样下的可提升性。

推论 1. 设 Φ 是一个$\mathbf{SC}^2$ 句子，且 Υ 具有(16)的形式。那么 $\Phi \wedge \Upsilon$ 在采样下域可提升。

6 实验结果

我们进行了多项实验，以评估采样算法的性能和正确性。所有算法均使用 Python 实现，实验在一台配备 8 核英特尔 i7 3.60GHz 处理器和 32 GB 内存的计算机上进行 [6]。

许多采样问题都可以表示为 WFOMS问题。这里我们考察其中两种典型问题。

- **组合结构采样**：某些组合结构的均匀生成可以直接归约为 WFOMS，例如，示例 1 和引言中提到的无孤立顶点的图和 k正则图的均匀生成。我们在这两类问题的基础上，又增加了四个组合采样问题进行评估：函数、无不动点函数（即满足 $f(x) \neq x$ 的函数 f）、排列以及无不动点排列。这些问题的详细信息见附录 A.4.1。

- **从马尔可夫逻辑网络中采样**：我们的算法也可用于从马尔可夫逻辑网络中采样可能世界。马尔可夫逻辑网络定义了一个作用于结构的概率分布（即统计关系学习文献中的可能世界），相应的采样问题是根据该分布随机生成可能世界。从马尔可夫逻辑网络的采样问题到 WFOMS问题存在一种标准归约（见附录 A.4.1，另见 [1]）。我们在实验中使用了两个马尔可夫逻辑网络：1）经典朋友-吸烟者马尔可夫逻辑网络的一个变体，并加入了每个人至少有一位朋友的约束：

$$\{(\infty, \neg fr(x,x)), (\infty, fr(x,y) \Rightarrow fr(y,x)), (0, sm(x)),$$
$$(0.2, fr(x,y) \wedge sm(x) \Rightarrow sm(y)), (\infty, \exists y : fr(x,y))\}.$$

2) 就业MLN 使用于 [4]:

$$\{(1.3, \exists y : workfor(x,y) \vee boss(x))\},$$

该句指出，以高概率，每个人要么受雇于某位老板，要么自己就是老板。关于从马尔可夫逻辑网络采样归约到 WFOMS，以及这两个马尔可夫逻辑网络对应的 WFOMS问题的详细信息，见附录 A.4.1。

[6]代码可在 https://github.com/lucienwang1009/lifted_sampling_fo2 找到

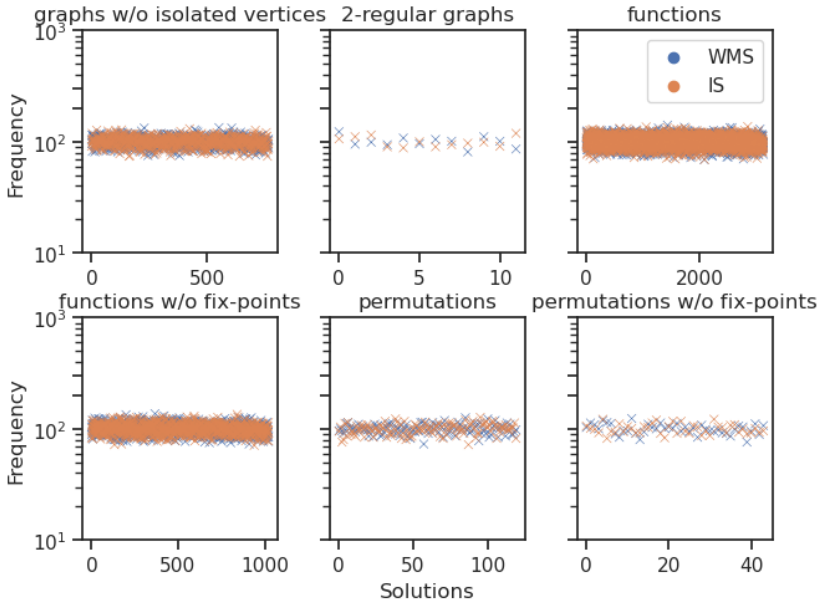
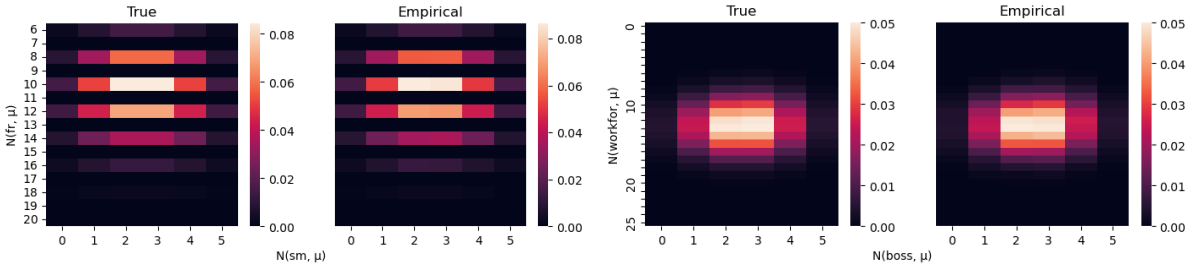


图 2：理想采样器（IS）与我们的 WMS 的均匀性比较。



(a) 朋友-吸烟者　　(b) 就业

图 3：马尔可夫逻辑网络的计数分布符合性检验。

6.1 正确性

我们首先考察在小论域上均匀生成组合结构的实现是否正确；在这种情况下，可以通过基于枚举的技术进行精确采样，因此我们选用域大小为 5 进行评估。作为基准，我们通过枚举所有模型，再从中均匀抽取样本，实现了一个简单的理想均匀采样器，记作 IS。对于每个编码到 **一阶逻辑**[2] 句子 Γ中的组合结构，IS 和我们的 WMS 各生成了总计 $100 \times |\mathcal{M}_{\Gamma,\ \Delta}|$ 个模型。图 2 展示了这两种算法生成的模型分布——横轴表示按字典序编号的模型，纵轴表示模型的生成频次。图中显示，我们的 WMS 生成的分布与 IS 的分布无法区分。此外，我们对 WMS 生成的分布进行了统计检验，没有发现其与均匀分布之间存在统计显著差异。该检验的详细信息见附录 A.4.2。

对于马尔可夫逻辑网络中的采样问题，即使论域

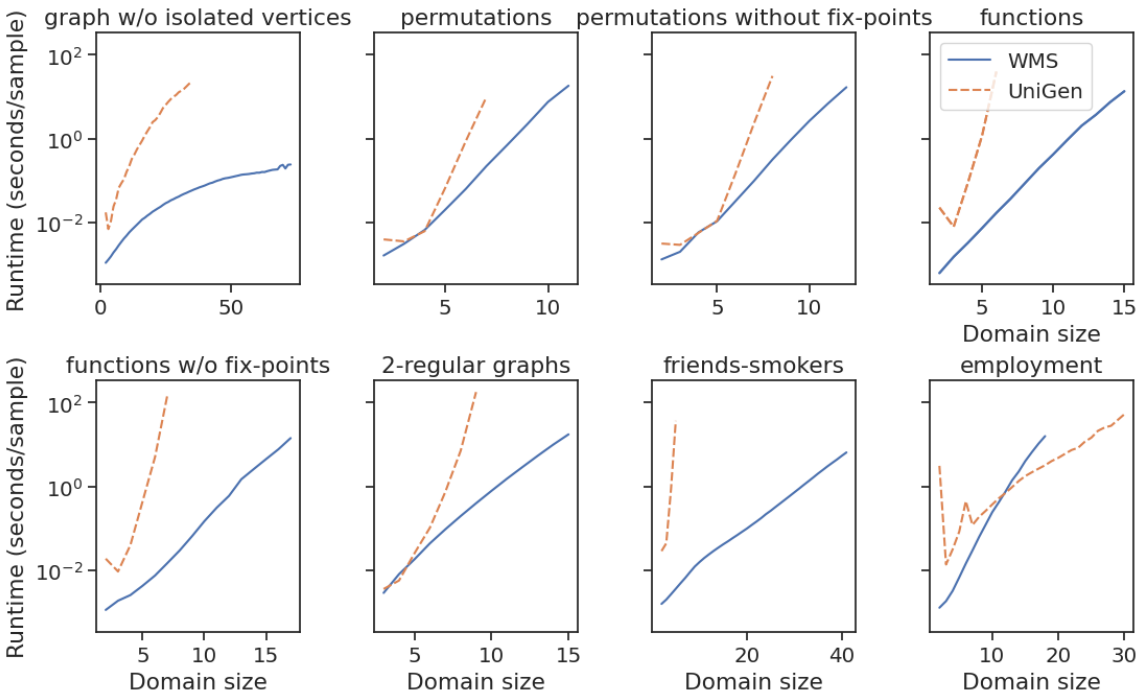


图4：WMS与UniGen的性能比较。

大小为 5，枚举所有模型也不可行。例如，就业MLN 中有 $2^{2^5+5} = 2^{37}$ 个模型。这就是我们要检验这两个马尔可夫逻辑网络的词汇表的计数分布 的原因。计数分布不指定每个模型的概率，而只告诉我们在模型中，有多少个谓词被解释为真的概率有多大。检验计数分布的一个优点是，对于我们的马尔可夫逻辑网络，可以高效地计算计数分布。有关计数分布的更多详情，请参阅 [7] 。我们还注意到，计数分布的一致性是算法正确性的必要条件。我们将域大小设为 5，并分别从朋友-吸烟者和就业马尔可夫逻辑网络中采样了 10^5 个模型。图 3 展示了计数统计量的经验分布以及真实计数分布。从图中很容易看出经验分布与真实分布的一致性。我们还对计数分布进行了统计检验，结果证实了从图中得出的结论（另见附录 A.4.2）。

6.2 性能

为评估性能，我们将加权模型采样器与最先进的布尔公式近似采样器 Unigen [18, 28],进行了比较。通过在给定论域上对输入句子进行基化，可以将 WFOMS 问题化简为布尔公式的采样问题。由于 Unigen 仅适用于均匀采样，我们采用了 [29] 中的技术，将 WFOMS 问题中的加权函数编码为布尔公式。

对于每个采样问题，我们分别使用 WMS 和 UniGen 随机生成了 1000 个模型，并计算了生成单个模型的平均采样时间。性能比较如图4所示。在大多数情况下，我们的方法比 UniGen 快得多。就业MLN 中的例外情况——UniGen 的表现优于 WMS——很可能是由于

对于其底层 SAT 求解器而言，这个特定实例较为简单。这与理论结果一致：我们的 WMS 在域大小上是多项式时间的，而 UniGen 通常需要对基化公式进行大量代价高昂的 SAT 调用。

7 结论与未来工作

本文通过提出一种新颖且高效的方法来解决$\mathbf{FO}^2$ 的对称加权一阶模型采样问题，证明了$\mathbf{FO}^2$ 在采样下的域可提升性。我们进一步将这一结果推广到包含计数约束的$\mathbf{SC}^2$ 片段。WFOMS 的广泛适用性使本文提出的方法有望成为解决大量采样问题的通用范式。

未来研究的一个潜在方向是将本文提出的方法扩展到表达能力更强的一阶语言。具体而言，本研究采用的域递归方案可以扩展到$\mathbf{FO}^2$ 和$\mathbf{SC}^2$, 之外，因为 WFOMC 中与之类似的方法已被证明能够有效证明$\mathbf{S}^2\mathbf{FO}^2$ 和$\mathbf{S}^2\mathbf{RU}$ [15]片段的域可提升性。

除了扩展输入逻辑之外，未来研究的其他潜在方向还包括纳入初等公理，例如树公理 [30] 和线性序公理 [16], ，以及采用包含负权重的更一般的权重函数。不过，值得注意的是，这些扩展可能需要比本文提出的方法更先进、更精细的处理方式，也可能带来重大挑战。

最后，WFOMS 的复杂度下界也是一个值得关注的开放问题。由 [31] 中 WFOMC 不可行这一点可直接推知，对于完整的一阶逻辑，似乎不太可能存在（甚至是近似的）提升式 WMS。然而，针对一阶逻辑片段（如 **一阶逻辑**^{3}, ）建立更紧的下界，仍是一个尚未探索且颇具挑战性的领域，值得进一步研究。

致谢

作者谨向匿名审稿人致以谢意，感谢他们提出的宝贵意见。Yuanhong Wang 和 Juhua Pu 获得国家重点研发计划（2021YFB2104800）和国家自然科学基金委员会（62177002）的资助。Ondˇrej Kuˇzelka 的工作得到捷克科学基金会项目 20-19104Y 的资助，部分也得到项目 23-07299S 的资助（大部分工作是在后一个项目启动前完成的）

A 附录

A.1 Scott范式

我们简要介绍将一**阶逻辑**[2] 公式转换为 SNF 的过程，并证明其对应归约在 WFOMS问题上的可靠性。这个过程广为人知，因此我们只概述相关细节。

设 Γ 是一个一**阶逻辑**[2]句子。为将其化为 SNF，考虑一个子公式 $\varphi(x) = Qy\colon \phi(x,\ y)$，其中 $Q \in \{\forall, \exists\}$，且 ϕ 是无量词的。设 A_φ 是一个新的 一元谓词[7]，并考虑句子

$$\forall x : (A_\varphi(x) \Leftrightarrow (Qy : \phi(x, y)))$$

该句子表明 $\varphi(x)$ 等价于 $A_\varphi(x)$。令 Q' 表示 Q 的对偶，即 $Q' = \{\forall, \exists\} \backslash \{Q\}$，则该句子可视为等价于

$$\begin{aligned}\Gamma' :=& \forall x Q y : (A_\varphi(x) \Rightarrow \phi(x, y)) \\ & \wedge \forall x Q' y : (\phi(x, y) \Rightarrow A_\varphi(x)).\end{aligned}$$

Let

$$\Gamma'' = \Gamma' \wedge \Gamma[\varphi(x)/A_\varphi(x)],$$

其中 $\Gamma[\varphi(x)/A_\varphi(x)]$ 是通过将 Γ 中的 $\varphi(x)$ 替换为 $A_\varphi(x)$ 得到的。对于任意论域 Δ，Γ'' 在 Δ 上的每个模型都可以映射到 Γ 在 Δ 上的唯一模型。这个双射映射函数就是投影 $\langle\cdot\rangle_{\mathcal{P}_\Gamma}$。令 A_φ 的正权重和负权重均为 1，并将新的权重函数记为 w' 和 $\bar{w}'$。显然，从 $(\Gamma,\ \Delta,\ w,\ \bar{w})$ 到 $(\Gamma'',\ \Delta,\ w',\ \bar{w}')$ 的归约是可靠的。从原子层级开始，重复这一过程并逐步向上处理，直到该句子成为 SNF。由于可靠性的传递性，整个归约仍然可靠。

A.2 A 从 $\mathbf{SC}^2$ 到带基数约束的 $\mathbf{FO}^2$ 的可靠归约 s

在本节中，我们展示如何将一个关于$\mathbf{SC}^2$ 句子的 WFOMS问题可靠归约为一个关于带基数约束的$\mathbf{FO}^2$ 句子的 WFOMS问题。

我们首先需要以下两个引理。

引理 7。设 Γ 是一个一阶逻辑句子，设 Δ 是一个论域。设 Φ 是一个带基数约束的一阶句子，其定义如下：

$$\begin{aligned}\Pi :=& (|P| = k \cdot |\Delta|) \\ & \wedge (\forall x \forall y : P(x, y) \Leftrightarrow (R_1^P(x, y) \vee \cdots \vee R_k^P(x, y))) \\ & \wedge \bigwedge_{i \in [k]} (\forall x \exists y : R_i^P(x, y)) \\ & \wedge \bigwedge_{i,j \in [k] : i \neq j} (\forall x \forall y : \neg R_i^P(x, y) \vee \neg R_j^P(x, y)),\end{aligned}$$

其中，R_i^P 是权重为 $w(R_i^P) = \bar{w}(R_i^P) = 1$且不属于 $\mathcal{P}_\Gamma$ 的辅助谓词。于是，从 *WFOMS* $(\Gamma \wedge \forall x \exists_{=k} y\colon P(x, y)\ \Delta, w, \bar{w})$ 到$(\Gamma \wedge \Pi, \Delta, w, \bar{w})$ 的归约是可靠的。

[7]如果 $\varphi(x)$ 没有自由变量，例如 $\exists x\colon \phi(x)$，则谓词 A_φ 是零元的。

证明。设 $f(\cdot) = \langle\cdot\rangle_{\mathcal{P}_\Gamma \cup \{P\}}$ 是一个映射函数。我们首先证明，f 是从 $\mathcal{M}_{\Gamma\wedge\Pi,\Delta}$ 到 $\mathcal{M}_{\Gamma\wedge\forall x\exists_{=k}:P(x,y)\ \Delta}$ 的映射：若 $\mathcal{A} \models \Gamma \wedge \Pi$，则 $f(\mathcal{A}) \models \Gamma \wedge \forall x \exists_{=k} y\colon P(x,y)$。

句子 Π 的含义是：对于每个 c_1，若 $c_2 \in \Delta$ 使得 $P(c_1, c_2)$ 为真，则恰有一个 $i \in [k]$ 使得 $R_i^P(c_1, c_2)$ 为真。因此我们有 $\sum_{i\in[k]} |R_i^P| = |P| = k \cdot |\Delta|$，而结合 $\bigwedge_{i\in[k]} \forall x \exists y\colon R_i^P(x,y)$，可推出 $|R_i^P| = k$ 对于 $i \in [k]$ 成立。我们论证每个 R_i^P 都是函数谓词，即 $\forall x \exists_{=1} y : R_i^P(x,y)$ 在 $\Gamma \wedge \Pi$ 的任意模型中都成立。反设 $(\forall x \exists y\colon R_i^P(x,y)) \wedge (|R_i^P| = k)$ 成立，但存在某个 $a \in \Delta$，使得对于某个 $b \neq b' \in \Delta$，$R_i^P(a,b)$ 和 $R_i^P(a,b')$ 均为真。根据事实 $\forall x \exists y\colon R_i^P(x,y)$，我们有 $|\{(x,y) \in \Delta^2 \mid R_i^P(x,y) \wedge x \neq a\}| \geq |\Delta| - 1$。由此可得 $|R_i^P| \geq |\{(x,y) \in \Delta^2 \mid R_i^P(x,y) \wedge x \neq a\}| + 2 > |\Delta|$，这就导致矛盾。由于所有 R_i^P 都是函数谓词，很容易验证，在 $\Gamma \wedge \Pi$ 的任意模型 μ 中，$\forall x \exists_{=k} y\colon P(x,y)$ 必须为真，即 $f(\mu) \models \Gamma \wedge \forall x \exists_{=k} y\colon P(x,y)$。

为了完成证明，可以很容易地证明，对于每个模型 $\mu \in \mathcal{M}_{\Gamma\wedge\forall x\exists_{=k}y:P(x,y)\ \Delta}$，恰好存在 $(k!)^{|\Delta|}$ 个模型 $\mu' \in \mathcal{M}_{\Gamma\wedge\Pi,\Delta}$，使得 $f(\mu') = \mu$。原因是：1）对于任意 $a \in \Delta$，若我们在模型 μ' 中将 $b_1, b_2, \ldots, b_k$ 在 $R_1^P(a,b_1)\ R_2^P(a,b_2) \ldots, R_k^P(a,b_k)$ 中进行排列，就会得到 $\Gamma \wedge \Pi$ 的另一个模型；2）除这些排列外，μ' 中的谓词 R_i^P 由 μ 唯一确定。最后，所有这些 μ'的权重都与 μ 的权重相同，因此我们可以写成

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{\mu' \in \mathcal{M}_{\Gamma\wedge\Pi,\Delta}:\\ f(\mu')=\mu}} \mathbb{P}[\mu' \mid \Gamma \wedge \Pi] &= \frac{\sum_{\substack{\mu' \in \mathcal{M}_{\Gamma\wedge\Pi,\Delta}:\\ f(\mu')=\mu}} \mu'}{\mathsf{WFOMC}(\Gamma \wedge \Pi, \Delta, w, \bar{w})} \\
&= \frac{(k!)^{|\Delta|} \cdot \langle w, \bar{w}\rangle(\mu)}{(k!)^{|\Delta|} \cdot \mathsf{WFOMC}(\Gamma \wedge \forall x \exists_{=k} y : P(x,y), \Delta, w, \bar{w})} \\
&= \frac{\langle w, \bar{w}\rangle(\mu)}{\mathsf{WFOMC}(\Gamma \wedge \forall x \exists_{=k} y : P(x,y), \Delta, w, \bar{w})} \\
&= \mathbb{P}[\mu \mid \Gamma \wedge \forall x \exists_{=k} y : P(x,y)],
\end{aligned}
$$

由此完成证明。 □

引理 8。设 Γ 是一阶逻辑句子，Δ 是论域，P 是谓词。那么，$\mathit{WFOMS}(\Gamma \wedge \forall_{=k} \forall y\colon P(x,y)\ \Delta, w, \bar{w})$ 可以归约为 $(\Gamma \wedge (|U| = k) \wedge (\forall x\colon U(x) \Leftrightarrow (\forall y : P(x,y)))\ \Delta, w, \bar{w})$，其中 U 是一个辅助一元谓词，其权重为 $w(U) = \bar{w}(U) = 1$，且该归约是可靠的。

证明。证明很直接。 □

引理 6 的证明。我们可以先反复应用引理 8，消去所有形如 $\exists_{=k} x \forall y\colon P(x,y)$ 的公式。然后，我们可以反复应用引理 7，消去所有形如 $\forall x \exists_{=k} y\colon P(x,y)$ 的公式。由于可靠性的传递性，整个归约是可靠的。

□

A.3 在 $\mathbf{C}^2$ 上应用域递归方案是可行的

我们需要处理的$\mathbf{C}^2$ 句子形式如下

$$
\Gamma \wedge \bigwedge_{k\in[q]} (\forall x : A_k(x) \Leftrightarrow (\exists_{=m_k} y : R_k(x,y))), \tag{18}
$$

其中 Γ 是一个一**阶逻辑**[2] 句子，每个 $R_k(x,\ y)$ 都是一个原子公式，而每个 A_k 都是一个辅助Tseitin谓词。对于$\mathbf{C}^2$ 上的任何 WFOMS问题，都可以通过以下步骤将其规约为一个新的问题，其输入句子具有上述形式且 $\max_{k\in[q]} m_k \le |\Delta|$:

- 将每个形如 $\exists_{\ge m}y:\ \varphi(x,\ y)$ 的计数量化公式转换为 $\neg(\exists_{\le m-1}y:\varphi(x,\ y))$。
- 将每个 $\exists_{\le m}y\colon\ \varphi(x,\ y)$ 分解为 $(\forall y\colon\ \neg\varphi(x,\ y)) \wedge \bigvee_{i\in[m]}(\exists_{=i}y\colon\ \varphi(x,\ y))$。
- 将每个子公式 $\exists_{=m}y\colon\ \varphi(x,\ y)$（其中 $m > |\Delta|$）替换为 False。
- 从原子层级开始逐步向上处理，将任何子公式 $\exists_{=m}\varphi(x,\ y)$（其中 $\varphi(x,\ y)$ 是一个不含任何计数量词的公式）替换为 $A(x)$；并将 $\forall x\forall y\colon\ R(x,\ y) \Leftrightarrow \varphi(x,\ y)$ 和 $\forall x\colon\ A(x) \Leftrightarrow (\exists_{=m}y\colon\ R(x,\ y))$（其中 R 是一个辅助二元谓词）附加到原句子中。

容易验证，只要论域大小大于输入句子中的最大计数参数 m，上述归约就是可靠的，且与论域大小无关。[8]

我们首先从句子 (18) 中对每个元素的 1-类型进行采样，从而消去所有谓词A_k。随后，在以下句子上定义所得的 WFOMS:

$$\Gamma_0 \wedge \bigwedge_{k\in[q]} \left(\bigwedge_{e\in\Delta_k^{\exists}} \exists_{=m_k} y : R_k(e,y) \wedge \bigwedge_{e\in\Delta_k^{\nexists}} \neg(\exists_{=k} y : R_k(e,y)) \right),$$

其中，Γ_0 是将 Γ 中所有一元文字替换为其真值后得到的简化句子，$\Delta_k^{\exists}$ 恰好包含具有正采样文字 $A_k(e)$ 的元素，并且 $\Delta_k^{\nexists} = \Delta \setminus \Delta_k^{\exists}$。

为了应用我们的域递归方案，我们需要考虑一个更一般的 WFOMS 问题。对于每个计数量化公式 $\exists_{=k}y\colon\ R_k(x,\ y)$，我们引入 $2m_k$ 个新的一元谓词 $Z^{\exists}_{k,\ 1}$，$Z^{\exists}_{k,\ 2}$，……，$Z^{\exists}_{k,\ m_k}$，$Z^{\nexists}_{k,\ 1}$，$Z^{\nexists}_{k,\ 2}$，……，$Z^{\nexists}_{k,\ m_k}$，并附加以下合取

$$\forall x : \left(Z^{\exists}_{k,t}(x) \Leftrightarrow (\exists_{=t} y : R_k(x,y))\right) \wedge \left(Z^{\nexists}_{k,t}(x) \Leftrightarrow \neg(\exists_{=t} y : R_k(x,y))\right)$$

关于 $t \in [m_k]$ 到 Γ_0，从而得到一个新的句子 Γ_1。随后，一般 WFOMS 定义在

$$\Gamma_1 \wedge \bigwedge_{i\in[n]} \nu_i(e_i), \tag{19}$$

其中，每个 $\nu_i(x)$ 都是在 $\{Z^{\exists}_{k,t}(x)\}_{t\in[m_k]} \cup \{Z^{\nexists}_{k,t}(x)\}_{t\in[m_k]}$ 的某个子集上的无量词合取式。容易验证，式 (18) 的原 WFOMS 可归约为更一般的 WFOMS问题，并且该归约是可靠的，且独立于论域大小。

我们证明，域递归方案仍然适用于式 (19) 的 WFOMS。这里我们仅提供直观说明，具体细节留待本文的未来版本。此外，我们希望未来能够找到一种更实用、更高效的解决方案，在保持当前方法为域提升的同时，引入更少的一元谓词。

直观上，我们可以将 $\nu_i(x)$ 视为“块类型”，这与我们在 $\mathbf{FO}^2$ 的 WMS 中所做的类似。接着应用域递归策略，首先对元素的子结构进行采样

[8]该条件不会改变问题的数据复杂度，因为句子中的所有计数参数都被视为常数，而不是问题的输入。

，然后相应地更新每种块类型。更新后的块类型仍可用一元谓词 $Z^{\exists}_{k,\ t}$ 和 $Z^{\nexists}_{k,\ t}$表示，而新的采样问题可归约为一般形式的新 WFOMS。沿用对 $\mathbf{FO}^2$, 进行采样时的类似论证，$\mathbf{C}^2$ 对应的 WMS 也可提升，这意味着 $\mathbf{C}^2$ 的完整片段在采样下可提升。

A.4 实验详情补充

A.4.1 实验设置

组合结构采样我们实验中用于均匀生成组合结构的相应 WFOMS 问题如下所示。权重函数 w 和 $\bar{w}$ 将所有谓词映射为 1。

- 函数:

$$\forall x \exists_{=1} y : f(x, y).$$

- 无不动点函数:

$$(\forall x \exists_{=1} y : f(x, y)) \wedge (\forall x : \neg f(x, x)).$$

- 排列:

$$(\forall x \exists_{=1} y : Per(x, y)) \wedge (\forall y \exists_{=1} x : Per(x, y)).$$

- 无不动点的排列:

$$(\forall x \exists_{=1} y : Per(x, y)) \wedge (\forall y \exists_{=1} x : Per(x, y)) \wedge (\forall x : \neg Per(x, x)).$$

从马尔可夫逻辑网络中采样 马尔可夫逻辑网络是一个带权一阶公式的有限集合 $\{(w_i,\ \alpha_i)\}_{i\in[m]}$，其中每个 w_i 要么是实值权重，要么是 ∞，而 α_i 是一阶公式。令 $\mathcal{P}$ 为 α_1的词汇表，α_2、α_m。与论域 Δ配对的马尔可夫逻辑网络 Φ 会在 $\mathcal{P}$-结构（也称为可能世界）上诱导出一个概率分布:

$$p_{\Phi,\Delta}(\omega) := \begin{cases} \frac{1}{Z_{\Phi,\Delta}} \exp\left(\sum_{(\alpha,w)\in\Phi_{\mathbb{R}}} w \cdot \#(\alpha,\omega)\right) & \text{if } \omega \models \Phi_{\infty} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中，$\Phi_{\mathbb{R}}$ 和 Φ_{∞} 分别是 Φ 中的实值公式和 ∞-值公式，而 #(α，ω) 表示在 ω中满足 α 的基实例数量。对于论域 Δ 上的马尔可夫逻辑网络 Φ，其采样问题是根据概率 $p_{\Phi,\ \Delta}(\omega)$ 随机生成一个可能世界 ω 。

从马尔可夫逻辑网络上的采样问题到 WFOMS 的归约可按如下方式进行。对于每个实值公式 (α_i，w_i) $\in \Phi_{\mathbb{R}}$，其中 α_i 中的自由变量为$\mathbf{x}$，我们引入一个新的辅助谓词 ξ_i ，并创建一个新公式 $\forall \mathbf{x} :\ \xi_i(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \alpha_i\mathbf{x}$。对于具有无穷权重的公式 α_i，我们改为创建一个新公式 $\forall\mathbf{x} :\ \alpha_i(\mathbf{x})$。将所得句子集合的合取记为 Γ，并将加权函数设置为 $w(\xi_i)$ =exp(w_i)，将$\bar{w}(\xi_i)$设置为 $= 1$；对于所有其他谓词，我们将 w 和 $\bar{w}$ 都设为 1。于是，论域 Δ 上的 Φ 的采样问题被归约为 WFOMS (Γ，Δ，w，$\bar{w}$)。

通过上述归约，我们可以将实验中使用的两个马尔可夫逻辑网络写成 WFOMS问题的形式。除非另有说明，谓词的权重均设为 1。

- 朋友-吸烟者马尔可夫逻辑网络：约化句子为

$$
\begin{aligned}
&(\forall x : \neg fr(x,x) \wedge sm(x)) \\
&\wedge (\forall x \forall y : fr(x,y) \Leftrightarrow fr(y,x)) \\
&\wedge (\forall x \forall y : \xi(x,y) \Leftrightarrow (fr(x,y) \wedge sm(x) \Rightarrow sm(y))) \\
&\wedge (\forall x \exists y : fr(x,y)),
\end{aligned}
$$

且 ξ 的权重设为 $w(\xi) = \exp(0.2)$。

- 就业MLN：相应的句子为

$$
\forall x : \xi(x) \Leftrightarrow (\exists y : workfor(x,y) \vee boss(x)),
$$

且 ξ 的权重设为 $\exp(1.3)$。

A.4.2 更多实验结果

柯尔莫哥洛夫–斯米尔诺夫检验 我们使用柯尔莫哥洛夫–斯米尔诺夫（KS）检验 [32]验证我们的算法生成的（计数）分布是否符合参考分布。此处使用的 KS 检验基于 [33]最近证明的多元 Dvoretzky–Kiefer–Wolfowitz（DKW）不等式。

设 $\mathbf{X}_1 = (X_{1i})_{i\in[k]}$，$\mathbf{X}_2 = (X_{2i})_{i\in[k]}$，……，$\mathbf{X}_n = (X_{ni})_{i\in[k]}$ 为 n 实值、相互独立且同分布的多元随机变量，其累积分布函数（CDF）为$F(\cdot)$。设 $F_n(\cdot)$ 为相应的经验分布函数，定义如下：

$$
F_n(\mathbf{x}) := \frac{1}{n} \sum_{i\in[n]} \mathbb{1}_{X_{i1}\le x_1, X_{i2}\le x_2, \ldots, X_{ik}\le x_k}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k.
$$

DKW不等式指出

$$
\mathbb{P}\left[\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k} |F_n(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x})| > \epsilon\right] \ge (n+1)ke^{-2n\epsilon^2} \tag{20}
$$

对每个 $\epsilon, n, k > 0$ 均成立。当随机变量是单变量时，即 $k = 1$，我们可以将上述概率界中的 $(n+1)k$ 替换为更紧的常数 2。

表1：柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫检验

问题	最大偏差	上界
无孤立顶点的图	0.0036	0.0049
2-正则图	0.0065	0.0069
函数	0.0013	0.0024
无不动点函数	0.0027	0.0042
排列	0.0071	0.0124
无不动点排列	0.019	0.02
朋友-吸烟者	0.0021	0.0087
就业	0.0030	0.0087

在 KS检验 中，零假设是样本 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ 服从某个参考分布，其累积分布函数为 $F(\cdot)$。根据式 (20)，以概率 $1-\alpha$，经验分布与参考分布之间的最大偏差 $\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k} |F_n(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x})|$ 不超过 $\epsilon = \sqrt{\ln(k(n+1)/\alpha)/2n}$ ($\sqrt{\ln(2/\alpha)/2n}$，适用于单变量情形)。如果最大偏差的实际值大于 ϵ，我们可以在置信水平 α下拒绝零假设。否则，我们不能拒绝零假设，也就是说，样本的经验分布与参考分布在统计上没有显著差异。在我们的实验中，我们选择$\alpha = 0.05$ 作为显著性水平。

对于组合结构的均匀生成，我们为每个模型分配一个字典序编号，并将模型索引视为服从离散均匀分布的随机变量。对于马尔可夫逻辑网络的采样问题，我们将其计数分布与真实计数分布进行检验。表1展示了经验累积分布函数与参考累积分布函数之间的最大偏差，以及由DKW不等式给出的上界。如表1所示，所有最大偏差均在各自的上界范围内。因此，我们无法拒绝任何原假设，即两组分布之间不存在统计显著差异。

A.5 WMS的补充细节

A.5.1 WMS的优化

有几种优化方法可以使其更实用。这里介绍其中一些已用于我们实现的方法。

- DRSampler的复杂度很大程度上取决于递归深度。在我们的实现中，选择域元素 e_t 来采样其子结构时，我们总是选择包含最多Tseitin原子$Z_k(x)$的“最强”存在约束所对应的元素。这样有助于DRSampler快速达到所有元素的存在约束均为 $\top$的条件。在这种情况下，DRSampler会调用更高效的WMS来为$\mathbf{UFO}^2$采样剩余的子结构。

- 令 $\mathcal{P}_\exists$ 为存在量化公式的词汇表并集

$$\mathcal{P}_\exists := \mathcal{P}_{\varphi_1(x,y)} \cup \mathcal{P}_{\varphi_2(x,y)} \cup \cdots \cup \mathcal{P}_{\varphi_m(x,y)}.$$

我们进一步将采样概率 $\mathbb{P}[\mathcal{A} \mid \Gamma_T \wedge \bigwedge_{i\in[n]} \eta_i(e_i)]$ 分解为

$$\mathbb{P}\left[\mathcal{A} \mid \Gamma_T \wedge \bigwedge_{i\in[n]} \eta_i(e_i) \wedge \mathcal{A}_\exists\right] \cdot \mathbb{P}\left[\mathcal{A}_\exists \mid \Gamma_T \wedge \bigwedge_{i\in[n]} \eta_i(e_i)\right],$$

其中 $\mathcal{A}_\exists$ 是定义在 Δ上的 $\mathcal{P}_\exists$-结构。它将 $\mathcal{A}$ 的条件采样问题分解为两个子问题——一个是采样 $\mathcal{A}_\exists$ ，另一个是在给定 $\mathcal{A}_\exists$的条件下采样其余子结构。这种分解的优点在于，后一个子问题可以化简为对一个 $\mathbf{UFO}^2$ 句子的采样问题，因为所有存在量化公式都已由 $\mathcal{A}_\exists$满足。采样 $\mathcal{A}_\exists$ 的第一个子问题可以通过一种与 DRSampler 类似的算法解决。在该算法中，用于划分单元的 2-表现在定义在 $\mathcal{P}_\exists$上，其规模比原始算法中的规模小一个指数级。因此，算法 2 中对 2-表配置的枚举将快一个指数级。

• 我们缓存了 $\mathcal{W}_{\mathbf{n}}$、所有 1-类型的权重 $\langle w, \bar{w} \rangle(\tau^i)$，以及所有 2-表的权重 $\langle w, \bar{w} \rangle(\pi^i)$；这些内容在我们的 WMS 中被广泛使用。

A.5.2 函数 ExSat$(\cdot, \cdot)$

ExSat 的伪代码见算法 4。

算法 4 ExSat($\mathbf{g}$ η)

将 $\mathbf{g}$ 分解为 $\{g_{\eta^i,\pi^j}\}_{i\in[N_c],j\in[N_b]}$
$(\beta, \tau) \leftarrow (\eta)$
// 检查 2-表的一致性
对于 $i \in [N_u]$ **执行**
    对于 $j \in [N_b]$ **执行**
        // $\tau(\eta^i)$ 是 η^i 中的 1-类型
        如果 π^j 与 $\tau(\eta^i)$ 不相容，且 τ 和 $g_{\eta^i,\ \pi^j} > 0$ **那么**
            返回 假
        结束如果
    结束循环
结束循环
// 检查存在量化公式是否成立
$\forall j \in [N_b], h_{\pi^j} \leftarrow \sum_{i\in[N_c]} g_{\eta^i,\pi^j}$
对于 $Z_k(x) \in \beta$，**执行**
    对于 $j \in [N_b]$，**执行**
        若 $R_k(x, y) \in \pi^j$ 且 $h_{\pi^j} > 0$ **则**
            返回 真
        结束若
    结束循环
结束循环
返回假

A.5.3 带基数约束的 $\mathbf{FO}^2$ 提升版 WMS

我们介绍带基数约束的$\mathbf{FO}^2$ 修改版采样算法。原始的$\mathbf{FO}^2$ WMS 算法所做的修改以蓝色线条标出。

算法5 WMS$(\Gamma, \Upsilon, \Delta, w, \bar{w})$

输入： 一个$\mathbf{FO}^2$ 句子 Γ，其形式为 (3)；一组形式为 (16) 的基数约束 Υ；一个大小为 n 的论域 $\Delta = \{e_i\}_{i\in[n]}$；一个权重 $(w, \bar{w})$**输出：** 一个关于 Δ 的模型 μ $\Gamma \wedge \Upsilon$

1: 通过 (4) 构造 Γ **to** Γ_T **2:** $\forall i \in [n], \beta_i(x) \leftarrow \bigwedge_{k\in[m]} Z_k(x)$**3:** $\Gamma \leftarrow \Gamma_T \wedge \bigwedge_{i\in[n]} \beta_i(e_i)$**4:** $(\tau_i)^{i\in[n]} \leftarrow$ **单类型采样器(**$\Gamma, \Upsilon, \Delta, w, \bar{w}$**)** **5:** $\forall i \in [n], \eta_i \leftarrow (\beta_i, \tau_i)$ **6:** $\mu \leftarrow$ **DRSampler(**$\Gamma_T, \Upsilon, \Delta, w, \bar{w}, (\eta_i)^{i\in[n]}$**) 7: 返回** μ

算法6 单类型采样器$(\Gamma, \Upsilon, \Delta, w, \bar{w})$

1: $W \leftarrow$ **加权一阶模型计数(**$\Gamma \wedge \Upsilon, \Delta, w, \bar{w}$**) 2: 从** Γ**获取块** $B_{\beta^1}, B_{\beta^2}, \ldots, B_{\beta^{2^m}}$ **3: 对于** $(\mathbf{n}_{\beta^i})_{i\in[2^m]} \in$ **Prod** $\left(\mathcal{T}_{|B_{\beta^1}|,N_u}, \ldots, \mathcal{T}_{|B_{\beta^{2^m}}|,N_u}\right)$ **执行 4:** $\mathbf{n} \leftarrow \bigoplus_{i\in[2^m]} \mathbf{n}_{\beta^i}$**5: 计算**$\mathcal{W}_{\mathbf{n},\Upsilon}$**6:** $W' \leftarrow \mathcal{W}_{\mathbf{n},\Upsilon} \cdot \prod_{t=1}^{2^m} \binom{|B_{\beta^t}|}{\mathbf{n}_{\beta^t}}$**7: 如果 Uniform(0, 1)** $< \frac{W'}{W}$ **则 8:** $\mathbf{n}^* \leftarrow \mathbf{n}$ **9: 跳出循环 10: 否则 11:** $W \leftarrow W - W'$**12: 结束 if 13: 结束 for 14: 对于** $i \in [2^m]$ **执行 15: 获取** β^i **中的单元配置** $\mathbf{n}^*_{\beta^i}$**，该配置来自** $\mathbf{n}^*$**16: 根据** $\mathbf{n}^*_{\beta^i}$**将** B_{β^i} **随机划分为** $\{C_{\beta^i,\tau^j}\}_{j\in[N_u]}$ **17: 对于** $j \in [N_u]$ **执行 18: 将 1-类型** τ^j **赋给**C_{β^i}**中的所有元素，**τ^j**19: 结束 for 20: 结束 for**

算法 7 DRSampler$(\Gamma_T, \Upsilon, \Delta, w, \bar{w}, (\eta_i)^{i\in[n]})$

1: **如果** $n = 1$ **那么**2: **返回** $\emptyset$3: **结束如果**4: **如果**只有类型为 $\beta = \top$ 的块非空**那么**

5: **返回**一个由**UFO**^{2} WMS 从 $\forall x \forall y$: $\psi(x,\ y) \wedge \bigwedge_{i\in[n]} \tau_i$(e采样得到的模型 μ

$_i) \wedge \Upsilon$ 对

Δ在 $(w,\ \bar{w})$ 下 **6: 结束 if 7: 选择** $t \in [n]$; $\mu \leftarrow \tau_t\ (e_t)$; $\Delta' \leftarrow \Delta \setminus \{e_t\}$**8: 获取** $(\eta_i)^{i\in[n]\setminus\{t\}}$**的单元配置 n** $= \left(n_{\eta^i}\right)_{i\in[N_c]}$ **9:** $W \leftarrow \mathcal{W}_{\mathbf{n}}$, Υ**10:** $\forall i \in [N_c]$, $T_i \leftarrow \mathcal{T}_{n_{\eta^i}}$, N_b**11: 对于** $\left(\mathbf{g}_{\eta^i}\right)_{i\in[N_c]} \leftarrow$ **Prod(**$\mathcal{T}_{n_{\eta^1}}$**,**N_b**, . . . ,** $\mathcal{T}_{n_{\eta^{N_c}}}$**,**$N_b$**), 执行 12: g** $\leftarrow \bigoplus_{i\in[N_c]}$ **g**

13 Υ**: 如果 ExSat (g** η_t**,) 则 14: 通过 (15) 获取关于 g 的新单元配置 n′ 15: 通过 (17) 获取关于 g 的新基数约束** Υ' **16: 计算** $\mathcal{W}_{\mathbf{n}'}$, Υ**17:** $W' \leftarrow \mathcal{W}_{\mathbf{n}'}$, $\Upsilon \cdot \langle w, \bar{w}\rangle\ (\tau_t) \cdot \prod_{i\in[N_c]} \binom{n_{\eta^i}}{\mathbf{g}_{\eta^i}} \cdot \mathbf{w}^{\mathbf{g}_{\eta^i}}$**18: 如果 Uniform(0, 1)** $< \frac{W'}{W}$ **则 19:** $\mathbf{g}^* \leftarrow$**g 20: 跳出 21: 否则 22:** $W \leftarrow W - W'$**23: 结束 if 24: 结束 if 25: 结束 for 26: 从** $(\eta_i)^{i\in[n]\setminus\{t\}}$ **获取单元划分** $\{C_{\eta^i}\}_{i\in[N_c]}$ **27: 对于** $i \in [N_c]$ **执行 28: 从 g*****获取** η^i **的基数向量** $\mathbf{g}^*_{\eta^i}$ **29: 根据** $\mathbf{g}^*_{\eta^i}$**将单元** C_{η^i} **随机划分为** $\left\{G_{\eta^i,\pi^j}\right\}_{j\in[N_b]}$ **30: 对于** $j \in [N_b]$ **执行 31:** $\mu \leftarrow \mu \cup \left\{\pi^j\ (e_t,\ e)\right\}_{e\in G_{\eta^i}}$, $_{\pi^j}$**32:** $\forall e_s \in G_{\eta^i,\ \pi^j}$, $\eta'_s \leftarrow \eta_{s|\pi^j}$**33: 结束 for 34: 结束 for 35: 通过 (17) 获取关于 g*** **的简化基数约束** Υ' **36:** $\mu \leftarrow \mu \cup$ **DRSampler(**$\Gamma_T, \Upsilon', \Delta', w, \bar{w}, (\eta'_i)^{i\in[n-1]}$**) 37: 返回** μ

参考文献

[1] Y. Wang、T. Van Bremen、Y. Wang 和 O. Kuˇzelka，《通用二变量逻辑及其扩展的域提升采样》，载于*AAAI* 人工智能会议论文集，第 36 卷，第 9 期，2022 年，第 10 070–10 079 页。[2] L. D. Raedt、K. Kersting、S. Natarajan 和 D. Poole，《统计关系人工智能：逻辑、概率与计算》，人工智能与机器学习综合讲座，第 10 卷，第 2 期，第 1–189 页，2016 年。[3] G. Van den Broeck、N. Taghipour、W. Meert、J. Davis 和 L. De Raedt，《通过一阶知识编译进行提升概率推理》，载于第二十二届人工智能国际联合会议论文集，2011 年，第 2178–2185 页。[4] G. Van den Broeck、W. Meert 和 A. Darwiche，《加权一阶模型计数的斯科伦化》，载于第十四届知识表示与推理原理国际会议，2014 年。[5] A. J. Robinson 和 A. Voronkov，自动推理手册。Elsevier，2001 年，第 1 卷。[6] A. Kuusisto 和 C. Lutz，《超越二变量逻辑的加权模型计数》，载于第 *33* 届 *ACM/IEEE*计算机科学逻辑研讨会论文集，2018 年，第 619–628 页。[7] O. Kuzelka，《带计数量词的二变量片段中的加权一阶模型计数》，《人工智能研究期刊》，第 70 卷，第 1281–1307 页，2021 年。[8] C. Cooper、M. Dyer 和 C. Greenhill，《正则图采样与点对点网络》，《组合学、概率与计算》，第 16 卷，第 4 期，第 557–593 页，2007 年。[9] P. Gao 和 N. Wormald，《随机正则图的均匀生成》，载于 *2015* 年 *IEEE* 第 *56* 届年度计算机科学基础研讨会。IEEE，2015 年，第 1218–1230 页。[10] D. Poole，《一阶概率推理》，载于*IJCAI*，第 3 卷，2003 年，第 985–991 页。[11] M. Richardson 和 P. Domingos，《马尔可夫逻辑网络》，机器学习，第 62 卷，第 1 期，第 107–136 页，2006 年。[12] P. Beame、G. Van den Broeck、E. Gribkoff 和 D. Suciu，《对称加权一阶模型计数》，载于第 *34* 届 *ACM SIGMOD-SIGACT-SIGAI*数据库系统原理研讨会论文集，2015 年，第 313–328 页。[13] G. Van den Broeck，《一阶知识编译在提升概率推理中的完备性》，神经信息处理系统进展，第 24 卷，2011 年。[14] S. M. Kazemi、A. Kimmig、G. Van den Broeck 和 D. Poole，《一阶概率推理的新可提升类》，神经信息处理系统进展，第 29 卷，2016 年。[15] S. M. Kazemi、A. Kimmig、G. V. d. Broeck 和 D. Poole，《带存在量词的提升推理中的域递归》，*arXiv* 预印本 *arXiv:1707.07763*，2017 年。

[16] J. T´oth 和 O. Ku˘zelka，《带线性序公理的提升推断》，载于*AAAI* 人工智能会议论文集，2023，即将发表。[17] C. P. Gomes、A. Sabharwal 和 B. Selman，《模型计数》，载于可满足性手册。IOS 出版社，2021，第 993–1014 页。[18] S. Chakraborty、K. S. Meel 和 M. Y. Vardi，《可扩展且近似均匀的 SAT 见证生成器》，载于计算机辅助验证国际会议。Springer，2013，第 608–623 页。[19] S. Chakraborty、D. J. Fremont、K. S. Meel、S. A. Seshia 和 M. Y. Vardi，《关于并行、可扩展的均匀 SAT 见证生成》，载于系统构造与分析工具和算法国际会议。Springer，2015，第 304–319 页。[20] H. Guo、M. Jerrum 和 J. Liu，《通过 Lov´ász 局部引理进行均匀采样》，*ACM* 期刊（*JACM*），第 66 卷，第 3 期，第 1–31 页，2019。[21] K. He、X. Sun 和 K. Wu，《（原子）Lov\ász 局部引理的完美采样》，*arXiv* 预印本 *arXiv:2107.03932*，2021。[22] W. Feng、K. He 和 Y. Yin，《在局部引理范围内对约束满足解进行采样》，载于第 *53* 届 *ACM SIGACT* 计算理论年度研讨会论文集，2021，第 1565–1578 页。[23] G. Van den Broeck 和 J. Davis，《一阶知识编译与提升概率推理中的条件化》，载于第二十六届 *AAAI* 人工智能会议，2012。[24] G. Van den Broeck 和 A. Darwiche，《提升推理中二元证据的复杂度与近似》，神经信息处理系统进展，第 26 卷，2013。[25] D. Scott，《二变量句子有效性的判定方法》，符号逻辑杂志，第 27 卷，第 377 期，第 74 页，1962。[26] E. Gr¨adel、P. G. Kolaitis 和 M. Y. Vardi，《关于二变量一阶逻辑的判定问题》，符号逻辑公报，第 3 卷，第 1 期，第 53–69 页，1997。[27] E. Gradel、M. Otto 和 E. Rosen，《带计数的二变量逻辑是可判定的》，载于第十二届 *IEEE* 计算机科学逻辑年度研讨会论文集。IEEE，1997，第 306–317 页。[28] M. Soos、S. Gocht 和 K. S. Meel，《着色、分离和惰性 CNF-XOR 求解及其在计数与采样中的应用》，载于计算机辅助验证国际会议。Springer，2020，第 463–484 页。[29] S. Chakraborty、D.Fried、K. S. Meel 和M.Y. Vardi，《从加权模型计数到非加权模型计数》，载于第二十四届人工智能国际联合会议，2015。[30] T. Van Bremen 和 O. Ku˘zelka，《带树公理的提升推断》，载于知识表示与推理原理国际会议论文集，第 18 卷，第 1 期，2021，第 599–608 页。

[31] M. Jaeger, 《提升推断的复杂度下界》, 逻辑编程理论与实践, 第 15 卷, 第 2 期, 第 246–263 页, 2015。[32] F. J. Massey Jr, 《拟合优度的柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫检验》, 美国统计学会会刊, 第 46 卷, 第 253 期, 第 68–78 页, 1951。[33] M. Naaman, 《多变量 Dvoretzky–Kiefer–Wolfowitz 不等式中的紧常数》, 《统计与概率快报》, 第 173 卷, 第 109088 页, 2021。