arXiv:2302.02753v1 [math.PR] 6 Feb 2023

正则树上高斯自由场的临界与近临界水平集渗流

JIŘÍ ČERNÝ、RAMON LOCHER

摘要。对于带有 $d \geq 2$ 的 $(d+1)$-正则树上的高斯自由场，我们研究其水平集在临界与近临界区域的渗流性质。特别地，我们证明了渗流概率的连续性，推导出临界水平集连通分量基数的精确渐近尾部估计，并描述了近临界区域中渗流概率的渐近行为。

1. 引言

本文研究正则树上离散高斯自由场的水平集渗流，重点关注其在临界与近临界区域的性质。我们的结果包括渗流函数的连续性、临界水平集连通分量基数的精确渐近尾部估计，以及近临界情形下渗流概率的渐近行为。

高斯自由场的水平集渗流，尤其是在 $\mathbb{Z}^d$上，是具有长程依赖性的最重要、研究最广泛的渗流模型之一，最早的研究可追溯到 20 世纪 80 年代， [MS83, LS86, BLM87]。过去十年间，[RS13], 开启了这一模型研究的新一轮成果；他们证明，在 $\mathbb{Z}^d$ 上，该模型在任意维度 $d \geq 3$ 都会在临界水平 $h^* = h^*(d)$ 处发生非平凡的渗流相变。在随后的论文中（例如 [RS13, DRS14, PR15, DPR18, Szn19, CN20, GRS22, PS22], ），研究者深入理解了该模型的亚临界相和超临界相，通常会借助其他自然的临界点，以便在强亚临界或强超临界区域开展研究。随后，在重要论文 [DGRS 20], 中，研究者证明所有这些临界点都与 h^* 一致，也就是说，渗流相变是锐利的（关于锐利性的最新、更简单且更一般的证明，见 [Mui22]）。

与亚临界和超临界区域相比，临界和近临界区域的研究要少得多。在 $\mathbb{Z}^d$上，情况在某种程度上类似于伯努利渗流：目前尚不清楚渗流概率在 h^*处是否连续，而各种临界指数的存在也仅是猜想。直到最近，[Mui22] 才给出了近临界渐近渗流概率所涉及的临界指数 β 的第一个上界（据猜测并非最优）。

顺带一提，在相关的 $\mathbb{Z}^d$度量图上的高斯自由场模型中，临界行为的理解要深入得多；已知渗流函数[DW20、DPR22], 的连续性，且各种临界指数已在 [DPR21]中得到计算。

在这里，我们研究一种简单得多的情形下的临界行为，即正则树上高斯自由场的水平集渗流。该模型最初由[Szn16] 研究，他们将临界值 h^* 刻画为某个积分算子的最大特征值，并利用与随机交错集的耦合推导出

$$h^* \qquad 0 < \text{的界},$$

$h^* < \infty$特别是由此得出 。后来， [AČ20], 详细研究了该模型的亚临界相和超临界相。他们的结果包括渗流概率在临界水平 h^*之外的连续性，以及对亚临界相和超临界相中水平集连通分量基数的相当精确的估计。我们通过给出临界和近临界估计来补充这些结果。

与[Szn16] 类似，尤其是与 [AČ20], 一样，我们将利用正则树上的高斯自由场与某些多类型分枝过程之间的联系（见下文第3 节）。这些分枝过程的分析并非完全直接，因为其类型空间不可数且无界，并且不满足分枝过程经典文献 [Har63、Mod71、AN72]中使用的条件。所幸，这些条件可以由某些超收缩估计（见下文命题3.2）取代；此前的研究中已经用到过这些估计。据我们所知，也没有关于近临界多类型分枝过程的结果与我们对渗流概率近临界行为的分析相似。

2. 模型与结果

现在我们定义模型。设 $\mathbb{T}$ 为无限的 $(d+1)$-正则树，其中 $d \geq 2$，并以任意固定顶点 $o \in \mathbb{T}$为根。在 $\mathbb{T}$ 上，我们考虑高斯自由场 $\varphi = (\varphi_x)_{x\in\mathbb{T}}$，它是一个中心高斯过程，其协方差函数与 $\mathbb{T}$上简单随机游走的格林函数一致；精确定义见下文（3.1）。我们用 P 表示该过程在 $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$上的分布；对于 $a \in \mathbb{R}$，记 P_a 为在给定 φ 的条件下的条件分布 $\varphi_o = a$，

$$P_a[\,\cdot\,] := P[\,\cdot \mid \varphi_o = a]. \tag{2.1}$$

（关于 P_a 的显式构造，见（3.3）及其下方段落。）进一步设 $\bar{o} \in \mathbb{T}$ 为根 o 的任意固定邻居，并定义前向树 $\mathbb{T}^+$ 如下：

$$\mathbb{T}^+ := \{x \in \mathbb{T} : \bar{o} \text{ is not contained in the geodesic path between } o \text{ and } x\}. \tag{2.2}$$

我们分析 φ 高于水平 $h \in \mathbb{R}$ 的（超）水平集的渗流性质，即

$$E^h_\varphi := \{x \in \mathbb{T} : \varphi_x \geq h\}. \tag{2.3}$$

特别是，我们关注包含根 o 的该集合的连通分量，

$$\mathcal{C}_o^h := \{y \in \mathbb{T} : y \text{ is connected to } o \text{ in } E_\varphi^h\}, \quad h \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

水平集渗流的临界高度 h^* 定义为

$$h^* = h^*(d) := \inf\{h \in \mathbb{R} : P[|\mathcal{C}_o^h| = \infty] = 0\}. \tag{2.5}$$

众所周知， h^* 并非平凡，具体而言， $h^* \in (0, \infty)$，见 [Szn16，推论 4.5]。此外，正如 [Szn16]所证明的， h^* 可以借助作用于空间 $L^2(\nu)$上的一族非负算子（L_h）$_{h\in\mathbb{R}}$ 的算子范数来刻画，其中 ν 是方差为 $\sigma_\nu^2 = d/(d-1)$的中心高斯测度。我们将在下文第 3 节进一步详述这一刻画。这里，我们仅定义 λ_h 为 L_h 的最大特征值，定义 χ_h 为对应的单位特征函数，并回顾 h^* 是下式的唯一解

$$\lambda_{h^*} = 1. \tag{2.6}$$

由于我们主要讨论临界情形，因此常将其简写为

$$\chi := \chi_{h^*} \quad \text{and} \quad L := L_{h^*}. \tag{2.7}$$

对于 $a, h \in \mathbb{R}$ ，我们进一步定义条件渗流概率和向前渗流概率：

$$\eta(h, a) := P_a[|\mathcal{C}_o^h| = \infty] \quad \text{and} \quad \eta^+(h, a) := P_a[|\mathcal{C}_o^h \cap \mathbb{T}^+| = \infty]. \tag{2.8}$$

已知这两个函数恒等于 0 当 $h > h^*$时；而对于$h < h^*$ ，它们严格为正当且仅当 $a \in [h, \infty)$，参见 [Szn16 、命题 3.3 及其证明]。

我们的前两个结果考察了 $\mathcal{C}_0^h$ 在临界高度 $h = h^*$ 处的行为。第一个初步结果表明，在 h^* 处不存在渗流。

定理 2.1。对于所有 $a \in \mathbb{R}$,

$$\eta(h^*, a) = \eta^+(h^*, a) = 0, \tag{2.9}$$

并且，由此可得，

$$P[|\mathcal{C}_o^{h^*} \cap \mathbb{T}^+| = \infty] = P[|\mathcal{C}_o^{h^*}| = \infty] = 0. \tag{2.10}$$

作为该定理的推论，我们可以直接得到渗流函数的连续性。这推广了 [AČ20], 的定理 5.1，其中证明了函数 $h \mapsto \eta(h, a)$ 和 $h \mapsto \eta^*(h, a)$ 处处左连续，并且在 $\mathbb{R} \setminus \{h^*\}$上连续。

推论 2.2。对于任意 $a \in \mathbb{R}$，函数 $h \mapsto \eta(h, a)$ 和 $h \mapsto \eta^*(h, a)$ 都是连续的。

第二个结果考察了临界情形下 $\mathcal{C}_o^{h^*}$ 的基数，并描述了其精确的渐近尾部行为。特别是，它赋予特征函数 χ 一种概率意义。

定理 2.3. 对于每个 $a \geq h^*$，当 $t \to \infty$ 时，

$$P_a[|\mathcal{C}_o^{h^*} \cap \mathbb{T}^+| > t] = C_1 \chi(a) t^{-1/2} \big(1 + o(1)\big), \tag{2.11}$$

$$P_a[|\mathcal{C}_o^{h^*}| > t] = C_1 d^{-1}(d+1) \chi(a) t^{-1/2} \big(1 + o(1)\big), \tag{2.12}$$

其中，将 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$ 上的标量积记为 $L^2(\nu)$，常数 C_1 定义为

$$C_1 = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \sqrt{\frac{2d}{d-1} \cdot \frac{\langle 1, \chi \rangle_\nu}{\langle \chi, \chi^2 \rangle_\nu}}. \tag{2.13}$$

注 2.4. 定理 2.1 可视为定理 2.3的推论，但我们倾向于将其单独陈述，因为前一个定理在后一个定理的证明中有所应用。

注 2.5. 结合定理 2.3与随机支配（见下文），可得 (3.4)

$$a \mapsto \chi_{h^*}(a) \text{ is non-decreasing}, \tag{2.14}$$

据我们所知，这一点此前尚未有人发现。

我们的第三个结果考察近临界超临界区域中的渗流概率。我们能够描述其在 $h \uparrow h^*$时的渐近行为。与定理 2.3中一样，极限对象可以用特征函数 χ表示。

定理 2.6。 渗流概率 η 和 η^+ 可写为

$$\eta^+(h, a) = C_2 (h^* - h) \big(\chi(a) + r_h^+(a)\big), \tag{2.15}$$

$$\eta(h, a) = C_2 \frac{d+1}{d} (h^* - h) \big(\chi(a) + r_h(a)\big), \tag{2.16}$$

其中，对于任意的 $\varepsilon \in (0, 1]$，余项函数 r_h 和 r_h^+ 满足

$$\lim_{h \uparrow h^*} \|r_h\|_{L^{2-\varepsilon}(\nu)} = \lim_{h \uparrow h^*} \|r_h^+\|_{L^{2-\varepsilon}(\nu)} = 0, \tag{2.17}$$

并且，记 Id 为 $\mathbb{R}$上的恒等映射，常数 C_2 由下式给出

$$C_2 = 2 \cdot \frac{d-1}{d+1} \frac{\langle \mathrm{Id}, \chi^2 \rangle_\nu}{\langle \chi, \chi^2 \rangle_\nu}. \tag{2.18}$$

注记 2.7. 作为定理 2.6的推论，临界指数 β 定义为$\beta = \lim_{h \uparrow h^*} \log P(|\mathcal{C}_0^h| = \infty) / \log(h^* - h)$ 满足 $\beta = 1$。~~这与高斯~~自由场在 $\mathbb{Z}^d$上的该指数的猜想值一致，也与其在一大类度量图上的严格证明值一致， [DPR21，推论 1。2]。

现在简要介绍本文的结构。在第 3 节中，我们将引入更多记号，并汇集有关 $\mathbb{T}$上高斯自由场的有用已知结果。定理 2.1的证明运用了多类型分枝过程理论中的方法，并利用某个非负鞅的收敛性（见（3.15）），见第 4节。第 5 节中，我们给出

定理 2.3的证明，运用陶伯理论并考察 $\mathcal{C}_o^{h^*}$ 基数的拉普拉斯变换。最后，在第 6 节中，我们结合巴拿赫空间上的双分岔结果与 [AČ20]中引入的前向渗流概率的定义方程（见（6.1））， 证明定理 2.6。

3. 符号与有用结果

本节介绍全文所用的符号，并回顾有关树上高斯自由场水平集渗流的一些已知事实。

如引言中所述，我们用 $\mathbb{T}$ 表示$(d+1)$-正则树，$d \geq 2$，即每个顶点恰有 $d+1$ 个邻居的无限树。对于两个顶点 x， $y \in \mathbb{T}$ 我们用 $d(x, y)$ 表示它们通常意义下的图距离。将树以一个任意固定顶点 $o \in \mathbb{T}$为根，且 $\bar{o} \in \mathbb{T}$ 表示o的一个固定邻居。 $\mathbb{T}^+$ 表示式 (2.2) 中定义的前向树。

我们考虑高斯自由场 $\varphi = (\varphi_x)_{x\in\mathbb{T}}$ ，它是定义在 $\mathbb{T}$ 上的中心高斯过程，其协方差函数为 $\mathbb{T}$上简单随机游走的格林函数，即

$$E[\varphi_x \varphi_y] = g(x, y) := \frac{1}{d+1}\mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{\infty} 1_{X_k=y}\Big], \qquad x, y \in \mathbb{T}, \tag{3.1}$$

其中 $\mathbb{E}_x$ 表示关于从 $x \in \mathbb{T}$出发、在 $\mathbb{T}$ 上的简单随机游走 $(X_k)_{k\geq 0}$ 的期望。

我们经常利用这样一个事实：在 $\mathbb{T}$ 上的高斯自由场可以看作具有连续类型空间的多类型分枝过程（参见[Szn16，第 3] 节，以及 [AČ20，第 2 节。1]）。为此，我们定义

$$\sigma_\nu^2 := \frac{d}{d-1} \quad \text{and} \quad \sigma_Y^2 := \frac{d+1}{d}, \tag{3.2}$$

并令 $(Y_x)_{x\in\mathbb{T}}$ 为定义在某个概率空间 $(\Omega, \mathcal{A}, P')$ 上的一族相互独立、均值为零的高斯随机变量，使得 $Y_o \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\nu^2)$ 且 $Y_x \sim \mathcal{N}(0, \sigma_Y^2)$，其中 $x \neq o$。接着，我们递归地定义另一个定义在 $\mathbb{T}$ 上的场 $\widetilde{\varphi}$：

(a) $\widetilde{\varphi}_o := Y_o$; (b) 对于 $x \neq o$， $\widetilde{\varphi}_x := \frac{1}{d}\widetilde{\varphi}_{\bar{x}} + Y_x$，其中 $\bar{x}$ 是 $\mathbb{T}$ 中 x 的直接祖先，也就是说，它是从 x 到 o 的测地路径上不同于 x 的第一个顶点。 (3.3)

例如，正如[AČ20中的（2.9）所解释的，], 在$(\widetilde{\varphi}_x)_{x\in\mathbb{T}}$下的分布 P'与 P 高斯自由场 φ的分布一致。因此，我们始终假设所考虑的高斯自由场是以这种方式构造的，并且不区分 φ与 $\widetilde{\varphi}$。

表示式（3.3）可用于为 φ 构造一个具体的条件概率 P_a，该条件概率在（2.1）中引入：只需将（3.3）中的（a）替换为

$\widetilde{\varphi}_0 = a$。此外，（3.3）很容易构造出 P_a与 P_b的单调耦合。因此，我们得到：

$$\text{If } a < b, \text{ then } P_b \text{ stochastically dominates } P_a, \tag{3.4}$$

也就是说，对于每个有界递增函数 f： $E_a[f(\varphi)] \le E_b[f(\varphi)]$.

根据构造（3.3），根 o 可视为多类型分枝过程的初始粒子；其类型的分布为 Y_0。该分枝过程中的每个粒子 $\bar{x}$ 随后有 d 个子代（$d+1$ 如果 $\bar{x}=0$），其类型独立地由 $\frac{1}{d}\varphi_{\bar{x}} + Y$给出，其中 $Y \sim N(0,\ \sigma_Y^2)$。

分枝过程的视角可适用于 $\mathcal{C}_o^h$：考虑相同的多类型分枝过程，但杀死所有类型低于h 的粒子（因此也不允许它们拥有后代）。同样，$\mathcal{C}_o^h \cap \mathbb{T}^+$ 也可以用相同的方式构造，唯一的区别是，在这种情况下，根节点 o也有 d个潜在后代，而不是 $d+1$。我们用 Z_n^h 表示该分枝过程的第 n 代

$$Z_n^h := \{x \in \mathcal{C}_o^h \cap \mathbb{T}^+ : d(o,x) = n\}, \qquad h \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

现在我们更详细地回顾[Szn16] 引入的谱方法，以刻画临界值 h^*。设 ν 是 $\mathbb{R}$ 上的中心高斯测度，其方差为 σ_ν^2（定义见 (3.2)），并设 Y 是方差为 σ_Y^2 的中心高斯随机变量。关于该随机变量的期望记作 E_Y。我们考虑希尔伯特空间 $L^2(\nu) := L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\ \nu)$，并对每个 $h \in \mathbb{R}$，定义算子 L_h 在 $L^2(\nu)$ 上为

$$\begin{aligned} L_h[f](a) &:= 1_{[h,\infty)}(a)\, d\, E_Y\Big[1_{[h,\infty)}\Big(Y + \frac{a}{d}\Big) f\Big(Y + \frac{a}{d}\Big)\Big] \\ &= 1_{[h,\infty)}(a)\, d \int_{[h,\infty)} f(x) \rho_Y\Big(x - \frac{a}{d}\Big)\, \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{3.6}$$

其中 ρ_Y 表示 Y的密度。我们用 λ_h 表示L_h 在 $L^2(\nu)$上的算子范数，

$$\lambda_h := \|L_h\|_{L^2(\nu)\to L^2(\nu)}. \tag{3.7}$$

以下命题总结了算子L_h 的一些已知性质，以及 L_h 与临界高度 h^* 之间的联系。

命题 3.1 ([Szn16] 命题 3.1、命题 3.3、推论 4.5)。对所有 $h \in \mathbb{R}$， L_h是一个自伴、非负的希尔伯特－施密特算子，作用在 $L^2(\nu)$上， λ_h 是其简单特征值，并且存在唯一的 $\chi_h \ge 0$，其 $L^2(\nu)$范数为 1，在 $[h,\infty)$上连续且严格为正，在 $(-\infty, h)$上为零，使得

$$L_h[\chi_h] = \lambda_h \chi_h. \tag{3.8}$$

此外，映射 $h \mapsto \lambda_h$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $(0,\ d)$ 的递减同胚，而 h^* 是 $\mathbb{R}$ 中满足 $\lambda_{h^*} = 1$ 的唯一值。最后，对每个 $d \ge 2$,

$$0 < h^* < \infty. \tag{3.9}$$

稍后我们将需要以下关于 $L_h[f]$ 的范数的估计，它们由 Ornstein–Uhlenbeck半群的超收缩性推出，参见 [Szn16] 中的 (3.14) 以及 [AČ20] 中的 (4.12)。

Pr命题 3.2。 对于每个 $f \in L^2(\nu)$， $h \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$ 和 $q \le (p-1)d^2 + 1$ ，

$$\left\|L_h[f]\right\|_{L^q(\nu)} \le \left\| dE_Y\left[f\left(Y + \frac{\cdot}{d}\right)\right]\right\|_{L^q(\nu)} \le d\,\|f\|_{L^p(\nu)}. \tag{3.10}$$

特别地（取 $p = 2$），

$$\left\|L_h[f]^k\right\|_{L^2(\nu)} \le d\,\|f\|^k_{L^2(\nu)} \quad \textit{for all } 1 \le k \le d^2 + 1. \tag{3.11}$$

关于 χ_h 的 L_h 特征函数在 [AČ20]中得到了更详细的研究。我们将需要下面这个描述其行为的命题。（注意，[AČ20] 讨论的是d-正则树，因此在我们的设定中对应于 d 在 $d-1$ 中的 [AČ20]。）

命题 3.3 ([AČ20] 命题 3.1)。 ***(a)*** 存在 $c > 0$ 使得

$$\chi_h(a) \le c a^{1-\log_d(\lambda_h)} \textit{ for all } h \in \mathbb{R} \textit{ and } a \ge d. \tag{3.12}$$

(b) 对每个 $h \in \mathbb{R}$，存在 $c_h > 0$ 使得

$$\chi_h(a) \ge c_h a^{1-\log_d(\lambda_h)} \textit{ for all } a \ge h. \tag{3.13}$$

最后，我们引入滤过

$$\mathcal{F}_n := \sigma\big(\varphi_x : x \in \mathbb{T}^+,\ d(o,x) \le n\big), \qquad n \ge 0, \tag{3.14}$$

并回顾 [Szn16 中的 (3.35)]，，可知 $(\mathcal{F}_n)$-适应过程 $M^h = (M^h_n)_{n\ge 0}$定义为

$$M^h_n := \lambda_h^{-n} \sum_{x \in Z^h_n} \chi_h(\varphi_x) \tag{3.15}$$

在 P 以及任意 P_a, $a \in \mathbb{R}$ 下，都是非负鞅。

全文中，我们采用表示两个函数渐近关系的常用记号：对于函数 f 和 g，若 $\lim_{s\to s_0} {}^{f}{}_{(s)}\ {}_{g(s)} = 1$，则记作 $f(s) \sim g(s)$ as $s \to s_0$ ；若 $\lim_{s\to s_0} {}^{|f}{}_{(\underline{\ s\ }|)}{}_{()} = 0$，则记作 $f(s) = o(g(s))$ as $s \to s_0$ 。我们用$c, c', c_1, \ldots$ 表示有限正数常数，其取值可能随处变化，且仅取决于 d。这些常数对其他参数的依赖关系会在记号中体现。

4. 临界高度处的渗流概率

本节将证明定理 2.1 该定理指出，在临界高度 h^*处不存在渗流。其证明采用了分枝过程领域中颇为常见的论证，为求完整起见，现予以给出。证明利用了鞅 $(M^h_n)_{n\ge 0}$（见（3.15））几乎必然收敛这一事实，由此可知各代的规模 Z^h_n（见（3.5））以及

它们上面的场值也有界。这便足以证明 $\mathcal{C}_o^{h^*} \cap \mathbb{T}^+$ 几乎必然有限。

为使记号简洁，我们常省略记号中的 $h = h^*$，例如写作 $Z_n := Z_n^{h^*}$，$M_n := M_n^{h^*}$ 和 $\chi = \chi_{h^*}$。令 $\mathcal{A}$ 表示 $\mathcal{C}_o^{h^*} \cap \mathbb{T}^+$ 具有无限大小这一事件，

$$\mathcal{A} := \{|\mathcal{C}_o^{h^*} \cap \mathbb{T}^+| = \infty\}, \tag{4.1}$$

并令 $\Phi_n := \max_{x \in Z_n} \varphi_x$ 表示场在 Z_n 上的最大值（约定空集上的最大值为 $-\infty$）。对于 $H > 0, N \in \mathbb{N}$，我们定义以下事件

$$\mathcal{C}_H := \{\Phi_n \le H \text{ for all } n \ge 0\} \quad \text{and} \quad \mathcal{D}_N := \{|Z_n| \le N \text{ for all } n \ge 0\}. \tag{4.2}$$

我们首先证明，当 H 和 N 足够大时，这些事件是典型的。

引理 4.1。对于任意 $a \ge h^*$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $H = H(a,\varepsilon) < \infty$ 和 $N = N(a,\varepsilon) < \infty$，使得

$$P_a[\mathcal{C}_H] \ge 1 - \varepsilon, \tag{4.3}$$

$$P_a[\mathcal{D}_N] \ge 1 - \varepsilon. \tag{4.4}$$

证明。由非负鞅 M 几乎必然收敛可知

$$\text{for every } \varepsilon > 0 \text{ there is } N < \infty \text{ such that } P_a\big[\sup_{n \ge 0} M_n \le N\big] \ge 1 - \varepsilon. \tag{4.5}$$

事实上，假设该陈述不成立。那么，存在一个 $\varepsilon_0 > 0$，使得事件 $A_k := \{\sup M_n \ge k\}$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 都满足 $P_a[A_k] > \varepsilon_0$。由于 $A_{k+1} \subseteq A_k$，这意味着 $P_a[\sup M_n = \infty] > \varepsilon_0$，这与 M 几乎处处收敛到有限极限相矛盾。

为证明（4.3），注意到 $\lambda_{h^*} = 1$ 意味着 $M_n = \sum_{x \in Z_n} \chi(\varphi_x) \ge \chi(\Phi_n)$。因此，令 $H' = \inf\{\chi(h) : h > H\}$ 并利用 $\Phi_n > H$ 蕴含 $\chi(\Phi_n) \ge H'$，我们得到

$$\mathcal{C}_H = \big\{\sup \Phi_n \le H\big\} \supseteq \big\{\sup \chi(\Phi_n) < H'\big\} \supseteq \big\{\sup M_n < H'\big\}. \tag{4.6}$$

根据命题 3.3 $\lim_{x \to \infty} \chi(x) = \infty$，因此对于 N 如（4.5）中所述的，存在 H'，使得 $H' \ge N + 1$。估计（4.3）随即由（4.5）和（4.6）得到。

估计（4.4）的证明类似。由（3.13）可知存在 $c > 0$ 使得 $c \le \chi(h)$ 对每个 $h \in [h^*, \infty)$ 成立。因此，$M_n \ge c|Z_n|$，从而 $\mathcal{D}_N \supseteq \{\text{上确界 } M_n \le cN\}$。断言（4.5）随即直接推出（4.4）。□

现在我们论证，事件 $\mathcal{C}_H$ 和 $\mathcal{D}_N$ 排除了渗流事件 $\mathcal{A}$。

引理 4.2。$P_a[\mathcal{A} \cap \mathcal{C}_H \cap \mathcal{D}_N] = 0$ 对每个 $a \ge h^*$、$H \ge h^*$ 和 $N \ge 1$ 均成立。

证明。给定 $H \ge h^*$ 和 $N > 0$，令 Θ_n 表示截至第 n 代，$\mathcal{C}_o^{h^*} \cap \mathbb{T}^+$ 的各代均不超过 N 且场有界于 H的事件，

$$\Theta_n := \{|Z_k| \le N \text{ and } \Phi_k \le H \text{ for all } k \le n\}, \qquad n \ge 0, \tag{4.7}$$

并令 $\mathcal{A}_n$ 表示第 n 代非空的事件,

$$\mathcal{A}_n := \{|Z_n| > 0\}, \qquad n \geq 0. \tag{4.8}$$

序列 $\mathcal{A}_n$ 和 Θ_n 单调递减，且 $\cap_{n\geq 0}\Theta_n = \mathcal{C}_H \cap \mathcal{D}_N$、$\cap_{n\geq 0}\mathcal{A}_n = \mathcal{A}$。因此,

$$P_a[\mathcal{A} \cap \mathcal{C}_H \cap \mathcal{D}_N] = \lim_{n\to\infty} P_a[\mathcal{A}_n \cap \Theta_n]. \tag{4.9}$$

我们将证明该极限为零。在给定事件 $\Theta_n \cap \mathcal{A}_n$的条件下， Z_n 中的粒子数至多为 N ，且它们的类型有界于 H。因此，根据随机支配（3.4），Z_{n+1} 为空的条件概率不小于 N 个类型为 H 的独立粒子均没有后代的概率,

$$P_a[\mathcal{A}_{n+1}^c \mid \mathcal{A}_n \cap \Theta_n] \geq P_H[|Z_1| = 0]^N \geq c > 0. \tag{4.10}$$

因此，由于 $\mathcal{A}_{n+1} \cap \Theta_{n+1} \subset \mathcal{A}_n \cap \Theta_n$,

$$\frac{P_a[\mathcal{A}_{n+1} \cap \Theta_{n+1}]}{P_a[\mathcal{A}_n \cap \Theta_n]} = P_a[\mathcal{A}_{n+1} \cap \Theta_{n+1} \mid \mathcal{A}_n \cap \Theta_n] \leq P_a[\mathcal{A}_{n+1} \mid \mathcal{A}_n \cap \Theta_n] \leq 1 - c. \tag{4.11}$$

归纳应用此界可证明（4.9）右端的极限为零，从而完成证明。□

借助引理 4.1、4.2，很容易完成定理 2.1的证明。

定理*2.1*的证明。根据引理4.1，对任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $a \in \mathbb{R}$ ，存在H和 N，使得 $P_a[\mathcal{C}_H] \geq 1 - \varepsilon$且 $P_a[\mathcal{D}_N] \geq 1 - \varepsilon$。因此，再利用引理4.2

$$0 = P_a[\mathcal{A} \cap \mathcal{C}_H \cap \mathcal{D}_N] \geq P_a[\mathcal{A}] - 2\varepsilon. \tag{4.12}$$

由于 ε 是任意的，这就推出了所需的 $P_a[\mathcal{A}] = 0$ 。定理的第二个结论由等式

$$P[\mathcal{A}] = \int P_a[\mathcal{A}]\, \nu(\mathrm{d}a) = 0, \tag{4.13}$$

这是由（3.3）成立的。 □

5. 临界簇大小的分布

本节证明定理2.3 ，该定理描述了临界情形 $h = h^*$下，连通簇 $|\mathcal{C}_o^{h^*}|$ 和 $|\mathcal{C}_o^{h^*} \cap \mathbb{T}^+|$ 大小的渐近行为。

为此，我们用 T 表示限制在前向树上的 $\mathcal{C}_o^{h^*}$ 的总大小,

$$T := |\mathcal{C}_o^{h^*} \cap \mathbb{T}^+|, \tag{5.1}$$

并令 $\mathcal{L}_a(s)$ 为其在 P_a 下的拉普拉斯变换,

$$\mathcal{L}_a(s) := E_a[e^{-sT}], \quad a \in \mathbb{R}, s \geq 0. \tag{5.2}$$

定理的证明 2.3 基于以下经典的陶伯定理，该定理将随机变量的累积分布函数在无穷远处的渐近行为与其拉普拉斯变换在零点附近的行为联系起来。

命题 5.1（推论 8.1。7, [BGT89]）。设 X 是一个累积分布函数为 F 且拉普拉斯变换为 $\mathcal{L}(s) = E[e^{-sX}]$的非负随机变量。对于 $0 \le \alpha < 1$和函数 $\ell : [0,\infty) \to [0,\infty)$ 在 ∞处缓变，以下各项等价:

(a) $1 - \mathcal{L}(s) \sim \Gamma(1-\alpha)s^{\alpha}\ell(1/s)$ *as* $s \to 0^+$,
(b) $1 - F(t) \sim t^{-\alpha}\ell(t)$ *as* $t \to \infty$.

鉴于此命题，为证明定理 2.3 ，我们首先需要控制 $1 - \mathcal{L}_a(s)$ 的渐近行为。

命题 5.2。对于每个 $a \ge h^*$,

$$\lim_{s\downarrow 0} s^{-1/2}\big(1 - \mathcal{L}_a(s)\big) = C_1\Gamma(1/2)\chi(a), \tag{5.3}$$

其中 C_1 定义于 (2.13)。

我们从一些基本观察和定义开始，它们最终将导出该命题的证明。根据定理 2.1， $P_a[T = \infty] = 0$ 对于每个 $a \in \mathbb{R}$，因此

$$\lim_{s\downarrow 0}\big(1 - \mathcal{L}_a(s)\big) = 0. \tag{5.4}$$

此外，拉普拉斯变换 $\mathcal{L}_a(s)$ 满足递归方程

$$\mathcal{L}_a(s) = \begin{cases} e^{-s}\left(E_Y[\mathcal{L}_{\frac{a}{d}+Y}(s)]\right)^d, & \text{if } a \ge h^*, \\ 1, & \text{if } a < h^*, \end{cases} \tag{5.5}$$

其中，与 (3.6) 中一样， $Y \sim \mathcal{N}(0,\ \sigma_Y^2)$。为说明 $a \ge h^*$ 的情形（另一种情形显然成立），只需写出 $T = 1 + T_1 + \cdots + T_d$，其中 T_i 是 $\mathcal{C}_0^{h^*}$ 与根 i 的第 x_i 个邻居 o 的子树的交集大小，并注意到 T_1，.....， T_d 在给定 $\varphi_o = a$ 的条件下相互独立，其拉普拉斯变换分别为

$$E_a[e^{-sT_i}] = E_a\big[E_a[e^{-sT_i} \mid \varphi_{x_i}]\big] = E_a[\mathcal{L}_{\varphi_{x_i}}(s)] = E_Y[\mathcal{L}_{\frac{a}{d}+Y}(s)], \tag{5.6}$$

其中，最后一个等号利用了 φ 的分枝过程表示 (3.3) .

我们进一步定义

$$\gamma_s(a) := 1 - \mathcal{L}_a(s), \tag{5.7}$$

并注意到 $\gamma_s(a) = 0$ 对于 $a < h^*$, $\gamma_s(a) \in [0,1]$ 对于每个 $s \ge 0$ 并且 $a \in \mathbb{R}$, 因此对于每个 $s \ge 0$, $\gamma_s \in L^2(\nu)$。由 (5.5)，利用 ($L = L_{h^*}$中的算子 (3.6)，对于 $a \ge h^*$,

$$1 - \gamma_s(a) = e^{-s}E_Y\Big[1 - \gamma_s\Big(\frac{a}{d} + Y\Big)\Big]^d = e^{-s}\Big(1 - \frac{1}{d}L[\gamma_s](a)\Big)^d. \tag{5.8}$$

重新整理这个等式可知，对于 $a \geq h^*$ 和 $s \geq 0$,

$$1 - e^{-s} - \gamma_s(a) + e^{-s} L[\gamma_s](a) = e^{-s} f(L[\gamma_s](a)), \tag{5.9}$$

其中函数 $f\colon [0,d] \to \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x) = f_d(x) \coloneqq \left(1 - \frac{x}{d}\right)^d - 1 + x = \sum_{k=2}^{d} \binom{d}{k} (-1)^k \left(\frac{x}{d}\right)^k. \tag{5.10}$$

方程（5.9）将作为下文若干证明的出发点。

接下来，我们对函数 f作一个简单的观察。

引理 5.3。对于任意 $d \geq 2$，存在常数 c_1、c_2，使得对所有 $x \in [0,d]$,

$$c_1 x^2 \leq f(x) \leq c_2 x^2. \tag{5.11}$$

证明。由（5.10）容易看出，f 在 $[0,d]$ 上光滑且严格凸，$f(0) = f'(0) = 0$且 $f''(0) = c > 0$。由此可得 $cx^2/2 \leq f$（x）$\leq 2cx^2$在 x某个区间 $[0,\varepsilon]$内成立，并且 f在$(\varepsilon$，$d]$上严格为正且有界。由这两点即可轻易推出该引理。□

本节余下部分中，我们只在 $L^2(\nu)$中讨论，并将 $\|\cdot\|$和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 分别记作相应的范数和标量积。由于 L 是自伴的（见命题3.1），$L^2(\nu)$ 具有由特征函数构成的标准正交基$\{e_k\}_{k\geq 1}$，这些特征函数对应于 L 的特征值 $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$。由于 $h = h^*$, 根据命题3.1 我们不妨假设 $1 = \lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq 0$，其中 $\lambda_k \to 0$ 为 $k \to \infty$，并且 $e_1 = \chi$。因此

$$\gamma_s = \sum_{k\geq 1} a_k(s) e_k, \qquad \text{with} \qquad a_k(s) \coloneqq \langle \gamma_s, e_k \rangle. \tag{5.12}$$

将第一项单独考虑后，我们把 γ_s 写成

$$\gamma_s = \alpha_s + \beta_s, \qquad \text{with} \qquad \alpha_s \coloneqq a_1(s)\chi \text{ and } \beta_s \coloneqq \sum_{k\geq 2} a_k(s) e_k. \tag{5.13}$$

注意到

$$L[\gamma_s] = \sum_{k\geq 1} \lambda_k a_k(s) e_k = \alpha_s + \sum_{k\geq 2} \lambda_k a_k(s) e_k = \alpha_s + L[\beta_s]. \tag{5.14}$$

因此

$$\langle \gamma_s - L[\gamma_s], \chi \rangle = 0. \tag{5.15}$$

由于 $\gamma_s(a) \in [0,1]$，根据定义（3.6）对 L 的定义以及引理5.3 可知

$$0 \leq L[\gamma_s] \leq d \qquad \text{and} \qquad 0 \leq f(L[\gamma_s]) \leq c_2 L[\gamma_s]^2 \leq c_2 d^2. \tag{5.16}$$

由5.4中 γ_s 逐点收敛到 0，依次利用控制收敛定理以及 L的连续性，可得

$$\lim_{s\downarrow 0} \gamma_s = \lim_{s\downarrow 0} L[\gamma_s] = \lim_{s\downarrow 0} f(L[\gamma_s]) = 0 \quad \text{in } L^2(\nu). \tag{5.17}$$

特别地，对所有 $k \geq 1$，当 $s \downarrow 0$ 时，$a_k(s) \to 0$。最后，由于 $\|\gamma_s - L[\gamma_s]\|^2 = \sum_{k\geq 2}(1-\lambda_k)^2 a_k(s)^2 \geq \sum_{k\geq 2}(1-|\lambda_2|)^2 a_k(s)^2 = (1-|\lambda_2|)^2\|\beta_s\|^2$，可得

$$\|\beta_s\| \leq \frac{1}{1-|\lambda_2|}\|\gamma_s - L[\gamma_s]\|. \tag{5.18}$$

以下三个引理是证明命题 5.2 的主要准备步骤。它们共同表明 α_s 在范数意义下支配 β_s，并对 α_s 进行精确估计。

引理 5.4. 存在一个常数 $c < \infty$，使得对于所有足够小的 s，都有 $\|\alpha_s\|^2 \leq cs$。

证明。注意到在 $(-\infty, h^*)$ 上有 $\chi = 0$，并在等式两边应用 $\langle \cdot, \chi\rangle$，得到 (5.9)

$$(1-e^{-s})\big(\langle 1, \chi\rangle - a_1(s)\big) = e^{-s}\big\langle f(L[\gamma_s]), \chi\big\rangle \quad \text{for } s \geq 0. \tag{5.19}$$

由 (3.13)，$\chi > c > 0$ 在 $[h^*, \infty)$ 上。因此，再结合引理 5.3，(5.19) 的右侧对于 $s \leq 1$满足

$$e^{-s}\langle f(L[\gamma_s]), \chi\rangle \geq c\langle L[\gamma_s]^2, \chi\rangle \geq c'\|L[\gamma_s]\|^2 \geq c'\|\alpha_s\|^2 = c'\alpha_1(s)^2, \tag{5.20}$$

其中，最后一个不等式由正交分解 (5.14) 得出。结合 (5.19)，得到

$$(1-e^{-s})(\langle 1, \chi\rangle - a_1(s)) \geq c'\alpha_1(s)^2 \quad \text{for } s \leq 1. \tag{5.21}$$

由于，正如 $s \downarrow 0$，$(1-e^{-s}) \sim s$ 且 $a_1(s) \to 0$，这就完成了证明。 □

引理 5.5. 存在一个常数 $c < \infty$ 使得 $\|\beta_s\| \leq cs$ 当 s 充分小时成立。证明。我们重排方程 (5.9) 得到

$$\gamma_s - L[\gamma_s] = (1-e^{-s})(1-L[\gamma_s]) - e^{-s}f(L[\gamma_s]) \quad \text{on} \quad [h^*, \infty). \tag{5.22}$$

由于左端在 $(-\infty, h^*)$ 上恒等于零，取范数可得

$$\|\gamma_s - L[\gamma_s]\| \leq (1-e^{-s})\|1 - L[\gamma_s]\| + \|f(L[\gamma_s])\|. \tag{5.23}$$

利用 (5.16)，$1-e^{-s} \leq s$以及引理 5.3，可推出

$$\|\gamma_s - L[\gamma_s]\| \leq (1+d)s + c\|L[\gamma_s]^2\|. \tag{5.24}$$

右端的范数可利用命题 3.2 和不等式 $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$,

$$\|L[\gamma_s]^2\| \leq d\|\gamma_s\|^2 \leq d(\|\alpha_s\| + \|\beta_s\|)^2 \leq 2d(\|\alpha_s\|^2 + \|\beta_s\|^2). \tag{5.25}$$

结合 (5.24)、(5.25) 与 (5.18)，可得存在一个常数 $c < \infty$ 且对所有$s > 0$ 充分小

$$\|\beta_s\| \leq cs + c\|\alpha_s\|^2 + c\|\beta_s\|^2. \tag{5.26}$$

由（5.17），极限$_{s\to 0}\|\gamma_s\| = 0$ 因此极限$_{s\to 0}\|\beta_s\| = 0$ 也成立。由此可轻易得出引理的结论，引理 5.4。□

引理 5.6。有极限$_{s\downarrow 0}\, s^{-1}a_1$（$s$）^{2} = （$C_1\Gamma$（1/2））^{2}, 其中 C_1 定义见（2.13）。

证明。 我们首先证明以下估计

$$\left\|(1-e^{-s})1_{[h^*,\infty)}-\gamma_s+L[\gamma_s]-\frac{1}{d^2}\binom{d}{2}L[\alpha_s]^2\right\|\le cs^{3/2} \tag{5.27}$$

对某个常数成立 $c<\infty$ 且对所有 s 足够小的情形：重新整理（5.9）并在两边减去$\frac{1}{d^2}\binom{d}{2}L[\alpha_s]^2$可得，在 $[h^*,\infty)$，

$$\begin{aligned}&(1-e^{-s})-(\gamma_s-L[\gamma_s])-\frac{1}{d^2}\binom{d}{2}L[\alpha_s]^2\\&\qquad=(1-e^{-s})\big(L[\gamma_s]-f(L[\gamma_s])\big)+f(L[\gamma_s])-\frac{1}{d^2}\binom{d}{2}L[\alpha_s]^2.\end{aligned} \tag{5.28}$$

取范数后，再次利用当 $s\downarrow 0$ 时 $s\sim(1-e^{-s})$，可得

$$\begin{aligned}&\left\|(1-e^{-s})1_{[h^*,\infty)}-(\gamma_s-L[\gamma_s])-\frac{1}{d^2}\binom{d}{2}L[\alpha_s]^2\right\|\\&\qquad\le cs\|L[\gamma_s]\|+cs\|f(L[\gamma_s])\|+\left\|f(L[\gamma_s])-\frac{1}{d^2}\binom{d}{2}L[\alpha_s]^2\right\|\end{aligned} \tag{5.29}$$

对某个常数成立 c 且 s 足够小。由引理 5.4 和 5.5， $\|L[\gamma_s]\|\le\|\gamma_s\|\le\|\alpha_s\|+\|\beta_s\|\le cs^{1/2}$。此外，由引理 5.3–5.5 和（5.25）， $\|f$（$L[\gamma_s]$）$\|\le\|cL[\gamma_s]^2\|\le c\|\alpha_s\|^2+c\|\beta_s\|^2\le cs$。因此，要证明（5.27），只需将（5.29）中的最后一项控制在 $cs^{3/2}$以内。根据 5.10 对 f 的定义，

$$f(L[\gamma_s])-\frac{1}{d^2}\binom{d}{2}L[\alpha_s]^2=2\frac{1}{d^2}\binom{d}{2}L[\alpha_s]L[\beta_s]+\frac{1}{d^2}\binom{d}{2}L[\beta_s]^2+\sum_{k=3}^{d}c_kL[\gamma_s]^k \tag{5.30}$$

对于某个 $c_k\in(0,\infty)$。因此，取范数后，

$$\left\|f(L[\gamma_s])-\frac{1}{d^2}\binom{d}{2}L[\alpha_s]^2\right\|\le c\|L[\alpha_s]L[\beta_s]\|+c\|L[\beta_s]^2\|+c\sum_{k=3}^{d}\|L[\gamma_s]^k\|, \tag{5.31}$$

对于某个常数 $c>0$。由柯西-施瓦茨不等式、命题 3.2 以及引理 5.4、5.5，

$$\begin{aligned}\|L[\alpha_s]L[\beta_s]\|^2&=\langle L[\alpha_s]L[\beta_s],L[\alpha_s]L[\beta_s]\rangle=\langle L[\alpha_s]^2,L[\beta_s]^2\rangle\\&\le\|L[\alpha_s]^2\|\|L[\beta_s]^2\|\le c\|\alpha_s\|^2\|\beta_s\|^2\le cs^{3/2},\\\|L[\beta_s]^2\|&\le c\|\beta_s\|^2\le cs^2,\end{aligned} \tag{5.32}$$

而对于 $3\le k\le d$，由相同的论证可得，

$$\|L[\gamma_s]^k\|\le c\|\gamma_s\|^k\le c(\|\alpha_s\|+\|\beta_s\|)^k\le c2^{k-1}(\|\alpha_s\|^k+\|\beta_s\|^k)\le cs^{3/2}. \tag{5.33}$$

这证明了右侧的第三项和（5.29）有界于 $cs^{3/2}$，从而完成了（5.27）的证明。

现在我们可以证明这个引理。由（5.27），利用 $\lim_{s\downarrow 0} s^{-1}(1-e^{-s}) = 1$，很容易得到

$$\lim_{s\downarrow 0}\left(\frac{1}{s}(\gamma_s - L[\gamma_s]) + \frac{1}{d^2}\binom{d}{2}\frac{L[\alpha_s]^2}{s}\right) = 1_{[h^*,\infty)} \quad \text{in } L^2(\nu). \tag{5.34}$$

由于 $\chi = 0$ 在 $(-\infty, h)$ 上成立，且 $L[\alpha_s] = \alpha_s = a_1(s)\chi$，这意味着

$$\begin{aligned}\langle 1, \chi\rangle &= \left\langle \lim_{s\downarrow 0}\left(\frac{1}{s}(\gamma_s - L[\gamma_s]) + \frac{1}{d^2}\binom{d}{2}\frac{\alpha_s^2}{s}\right), \chi\right\rangle \\ &= \lim_{s\downarrow 0}\left(\left\langle \frac{1}{s}(\gamma_s - L[\gamma_s]), \chi\right\rangle + \frac{1}{d^2}\left\langle \binom{d}{2}\frac{\alpha_s^2}{s}, \chi\right\rangle\right) \\ &= \frac{d-1}{2d}\langle \chi^2, \chi\rangle \lim_{s\downarrow 0}\frac{a_1(s)^2}{s},\end{aligned} \tag{5.35}$$

最后一个等式中我们使用了 $\langle \gamma_s - L[\gamma_s],\ \chi\rangle = 0$，由（5.15）。于是引理的结论得证。□

现在我们已具备所有要素，可以给出命题 5.2 的证明，随后直接证明定理 2.3。

命题 *5.2* 的证明。 由引理 5.5 和5.6,

$$\lim_{s\downarrow 0}\frac{\gamma_s}{\sqrt{s}} = \lim_{s\downarrow 0}\left(\frac{a_1(s)\chi}{\sqrt{s}} + \frac{\beta_s}{\sqrt{s}}\right) = C_1\Gamma(1/2)\chi \qquad \text{in } L^2(\nu). \tag{5.36}$$

根据随机支配（3.4），函数 $a \mapsto \gamma_s(a)$ 对任意$s > 0$均为递增函数；并且根据命题3.1，极限函数 $C_1\Gamma(1/2)\chi$ 在$[h^*, \infty)$上连续。因此，（5.36）中的收敛也是逐点收敛。□

定理*2.3*的证明。断言（2.11）可直接由命题5.1 和5.2推出。为证明（2.12），令 $\tilde{\mathcal{L}}_a$ 为$|\mathcal{C}_o^{h^*}|$ 在 P_a下的拉普拉斯变换,

$$\tilde{\mathcal{L}}_a(s) := E_a\left[e^{-s|\mathcal{C}_o^{h^*}|}\right], \qquad a \in \mathbb{R}, s \geq 0. \tag{5.37}$$

运用与递归性质（5.5）证明中相同的论证，可得

$$\tilde{\mathcal{L}}_a(s) = e^{-s}\left(E_Y[\mathcal{L}_{\frac{a}{d}+Y}(s)]\right)^{d+1}, \qquad \text{for } s > 0, a \geq h^*, \tag{5.38}$$

将其与（5.5）结合，得到

$$\tilde{\mathcal{L}}_a(s) = e^{s/d}\mathcal{L}_a(s)^{(d+1)/d} \qquad \text{for } s > 0, a \geq h^*. \tag{5.39}$$

利用命题 5.2，这意味着当 $s \downarrow 0$,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_a(s) &= \left(1 - \frac{s}{d} + o(s)\right)\left(1 - C_1\Gamma(1/2)\chi(a)s^{1/2} + o(s^{1/2})\right)^{(d+1)/d} \\ &= 1 - \frac{d+1}{d}C_1\Gamma(1/2)\chi(a)s^{1/2} + o(s^{1/2}).\end{aligned} \tag{5.40}$$

命题（2.12）则可通过再次应用命题 5.1。 □

6. 近临界水平集渗流的连通性行为

本节证明定理2.6 ，该定理描述了渗流概率 $\eta(h,a)$ 和 $\eta^+(h,a)$ 在固定 $a\in\mathbb{R}$ 时，当 h 从下方趋近h^* 时的渐近行为。

证明基于对 η^+ 函数方程的细致分析，该方程已在[AČ20] 中证明，我们将在下面的命题中重述。

命题 6.1([AČ20]定理 4.1)。对于每个 $h\in\mathbb{R}$，前向渗流概率 $\eta_h^+ := \eta^+(h,\cdot)$ 满足函数方程

$$f(a) = 1_{[h,\infty)}(a)\Big(1-\big(1-d^{-1}L_h[f]\big)^d\Big),\quad a\in\mathbb{R}. \tag{6.1}$$

此外，方程(6.1) 在集合中仅有两个解

$$\mathcal{S}_h := \{f\in L^2(\nu) : 0\le f\le 1 \text{ and } f=0 \text{ on } (-\infty,h)\} \tag{6.2}$$

分别是常值函数 $f=0$ 和 η_h^+ 。当 $h\ge h^*$ 时，这两个解重合；当 $h<h^*$ 时，它们则彼此不同。

该命题的最后一个结论结合渗流函数的连续性（参见推论 2.2）表明，方程（6.1）的解集在临界点 h^*处发生分岔。因此，为了描述 η_h^+ 在$h\uparrow h_*$时的行为，我们将分析该分岔附近的解集。

我们主要将用到关于一般巴拿赫空间中横截分岔的定理，该定理以下述命题 6.2 的形式给出。为了介绍这个定理，我们需要引入更多记号。对于巴拿赫空间 X、Y，令 $B(X,Y)$ 表示从 X 到 Y的有界线性算子空间。对于函数 $F\colon X\to Y$，我们用 $DF\colon X\to B(X,Y)$ 表示其弗雷歇导数，并用 $DF(x)\colon X\to Y$ 表示其在点 $x\in X$处取值的弗雷歇导数。若 T 是实数集 $\mathbb{R}$ 中的一个开区间，且 $G\colon T\times X\to Y$，则我们用 $D_xG(t,x)\colon X\to Y$和 $D_tG(t,x)\in Y$表示在点 (t,x) 处沿 x 和 t 方向取值的偏弗雷歇导数。类似地， $D_{xx}G$ 或 $D_{xt}G$ 表示相应的二阶偏弗雷歇导数。最后，我们用 $N(F)$ 和 $R(F)$ 表示线性泛函 F的核和值域。

命题 6.2 ([CR71], 定理 1.7 和 1.18)。 设 X， Y 为巴拿赫空间，V是 0 在 X中的邻域，$I=(t_0-1,\ t_0+1)$ 对某个 $t_0\in\mathbb{R}$成立。假设一个（非线性）泛函 $F\colon I\times V\to Y$满足：

(a) $F(t,0)=0$ 当 $t\in I$ 时，*(b)* 偏导数 D_tF、 D_xF 和 $D_{tx}F$ 存在且连续，*(c)* $N(D_xF(t_0,0)) =$ 对某个 $x_0\in X$ 张成 $\{x_0\}$，且 $R(D_xF(t_0,0))$ 的余维数为 $=1$，*(d)* $D_{tx}F(t_0,0)(x_0)\notin R(D_xF(t_0,0))$，其中 x_0 如 *(c)* 中所述。

那么，对于 X 中 x_0 的任意补空间 Z （即，对于满足 $Z \oplus$张成$\{x_0\} = X$ 的 X 的任意子空间 Z ），存在 $\mathbb{R}\times X$ 中 U 的一个邻域，该邻域包含 $(t_0, 0)$；还存在一个区间 $(-a, a)$，以及连续函数 $\varphi : (-a, a) \to I$、 $\psi : (-a, a) \to Z$，使得 $\varphi(0) = t_0$、$\psi(0) = 0$，并且

$$F^{-1}(0) \cap U = \{(\varphi(\alpha), \alpha x_0 + \alpha\psi(\alpha)) : |\alpha| < a\} \cup \{(t, 0) : (t, 0) \in U\}. \tag{6.3}$$

此外，若除满足 *(a)–(d)* 外， $D_{xx}F$ 还是连续的，则函数 φ 和 ψ 关于 α 具有连续导数，并且

$$\frac{1}{2}D_{xx}F(t_0, 0)(x_0, x_0) + D_xF(t_0, 0)(\psi'(0)) + \varphi'(0)D_{tx}F(t_0, 0)(x_0) = 0. \tag{6.4}$$

将此命题应用于我们的情形时，主要困难之一是选择合适的空间 X 和 Y，使其条件能够得到验证。我们首先对函数 η_h^+ 进行平移，使它们具有公共零点集。为此，令 θ_a为作用于 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 上的通常平移算子，其定义为 $\theta_a f(x) = f(x + a)$，并定义$\widetilde{\eta}_h := \theta_h\eta_h^+$。注意，对于 $h < h^*$， $\widetilde{\eta}_h(a) > 0$ 当且仅当 $a \in [0, \infty)$。对于 $h \in \mathbb{R}$，令 H_h 为一个定义如下的算子

$$H_h[f] = d^{-1}\theta_h L_h[\theta_h^{-1} f]. \tag{6.5}$$

根据 3.6 式中对 L_h 的定义，经过简单计算，该算子可以更明确地写为:

$$H_h[f](a) = \begin{cases} \int_0^\infty f(x)\rho_Y\left(x - \frac{a}{d} + \frac{d-1}{d}\,h\right)\mathrm{d}x, & \text{when } a \geq 0, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{6.6}$$

其中 ρ_Y 表示方差为 σ_Y^2的中心高斯密度。此记号可以将方程（6.1）改写为关于 $\widetilde{\eta}_h$ 的形式:

$$0 = -\widetilde{\eta}_h(a) + 1_{[0,\infty)}(a)\Big(1 - \big(1 - H_h[\widetilde{\eta}_h](a)\big)^d\Big), \qquad a \in \mathbb{R}. \tag{6.7}$$

最后，令 ν^* 为由高斯测度 ν（见上文（3.6））平移 h^*后得到的高斯测度，即相应的密度满足$\rho_{\nu^*} = \theta_{h^*}\rho_\nu$。

鉴于（6.7），为证明定理 2.6，我们将证明命题 6.2 适用于

$$F(h, f) = -f + 1_{[0,\infty)}\Big(1 - \big(1 - H_h[f]\big)^d\Big), \tag{6.8}$$

视为从 $I \times L^2(\nu^*)$ 到 $L^2(\nu^*)$的映射，其中 $I = (h^* - 1, h^* + 1)$。证明命题 6.2 适用，需要分几个步骤进行。首先，我们证明F 确实是从 $I \times L^2(\nu^*)$ 到 $L^2(\nu^*)$的映射。然后计算必要的偏弗雷歇导数，最后验证该命题的其余假设。在开始这项工作之前，我们先陈述一个简单的估计，稍后会多次用到。

引理 6.3。 设 ρ 是任意一个中心高斯密度。那么存在常数$r, c \in (0,\infty)$，使得对所有 $x \in \mathbb{R}$ 和 $|s| \in (-1,1) \setminus \{0\}$,

$$\left|\frac{\rho(x+s)-\rho(x)}{s}\right| \le c\big(\rho(x+r)+\rho(x-r)\big). \tag{6.9}$$

证明。 根据泰勒定理，对于某个介于 x 和 $x+s$之间的ξ_x，有 $\rho(x+s) = \rho(x) + \rho'(x)s + \frac{1}{2}\rho''(\xi_{x,\ s})s^2$。因此，对于 $|s| \in (0,1)$,

$$\left|\frac{\rho(x+s)-\rho(x)}{s}\right| \le |\rho'(x)| + |\rho''(\xi_{x,s})|. \tag{6.10}$$

由于 $\rho'(x) = P_1(x)\rho(x)$且对于某些多项式 P_1、 P_2， $\rho''(x) = P_2(x)\rho(x)$，容易推出存在 $x_0 < \infty$，使得对于所有 $x \notin [-x_0, x_0]$ 和 $s \in [-1,1]$， $|\rho'(x)|+|\rho''(\xi_{x,\ s})| \le (\rho(x+2)+\rho(x-2))$。最后，由于 $\rho > 0$ 在 $\mathbb{R}$上，我们可以将右侧乘以一个足够大的常数 c，从而使最后一个不等式在整个 $\mathbb{R}$ 上成立。□

我们现在证明 F 将 $I \times L^2(\nu^*)$ 映射到 $L^2(\nu^*)$。为此，只需证明对于 $f \in L^2(\nu^*)$ 和 $h \in \mathbb{R}$，有 $H_h[f] \in L^{2d}(\nu^*)$。下面的引理证明了一个稍强的结论，因为后续证明中也会用到它，同时还证明了 $h \mapsto H_h$ 的连续性。

引理 6.4。 *(a)* 若 $h, s \in \mathbb{R}$ 且 $f \in L^2(\nu^*)$，则

$$\|\theta_s H_h[f]\|_{L^{2d}(\nu^*)} \le C_{h,s}\|f\|_{L^2(\nu^*)}. \tag{6.11}$$

特别地， $\theta_s H_h[f] \in L^{2d}(\nu^*)$。

(b) 函数 $h \mapsto H_h$ 从 I 到 $B(L^2(\nu^*)\ L^{2d}(\nu^*))$ 是（强）连续的 *s.*

证明。 (a) 对于 $f \in L^2(\nu^*)$，令 $g = \theta_{h^*}^{-1} f \in L^2(\nu)$。于是，对于 $a \ge 0$，由（6.6），

$$\begin{aligned} H_h[f](a) &= \int_0^\infty f(x)\rho_Y\Big(x - \frac{a}{d} + \frac{d-1}{d}\,h\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{h^*}^\infty g(x)\rho_Y\Big(x - \frac{a+dh^*-(d-1)h}{d}\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= G[g]\big(a+dh^*-(d-1)h\big), \end{aligned} \tag{6.12}$$

其中我们定义 $G[g](a) := \int_{h^*}^\infty g(x)\rho_Y(x-\frac{a}{d})\,\mathrm{d}x$。注意， G 与 L_{h^*} （见（3.6））有密切关系，这提示我们最终应当应用命题 3.2。因此我们写作

$$\begin{aligned} \big\|\theta_s H_h[f]\big\|_{L^{2d}(\nu^*)}^{2d} &\le \int_{\mathbb{R}} \big(G[g](a+s+dh^*-(d-1)h)\big)^{2d}\rho_\nu(a+h^*)\,\mathrm{d}a \\ &= \int_{\mathbb{R}} \big(G[g](a)\big)^{2d}\rho_\nu\big(a-s-(d-1)h^*+(d-1)h\big)\,\mathrm{d}a \\ &= \int_{\mathbb{R}} \big(G[g](a)\big)^{2d}\frac{\rho_\nu\big(a-s-(d-1)(h^*-h)\big)}{\rho_\nu(a)}\rho_\nu(a)\,\mathrm{d}a. \end{aligned} \tag{6.13}$$

对 $p = 5/4$ 和 $q = 5$ 应用霍尔德不等式可得

$$\big\|\theta_s H_h[f]\big\|_{L^{2d}(\nu^*)}^{2d} \le \big\|G[g]\big\|_{L^{5d/2}(\nu)}^{2d} \Big\| \frac{\rho_\nu(\cdot - s - (d-1)(h^* - h))}{\rho_\nu(\cdot)} \Big\|_{L^5(\nu)}. \tag{6.14}$$

右端第二个范数中的函数在无穷远处至多呈指数增长，因此其 $L^5(\nu)$-范数是有限的，记为 $\tilde{C}_{h,s}$。第一个范数满足 $\|G[g]\|_{L^{5d/2}(\nu)}^{2d} \le \|G[g]\|_{L^{d^2+1}(\nu)}^{2d}$，因为 $5d/2 \le d^2 + 1$ 对每个 $d \ge 2$都成立。此外，由于 $G[f](a) = E_Y\big[1_{[h^*,\infty)}(Y + \frac{a}{d}) f(Y + \frac{a}{d})\big]$，超收缩性 (3.10) 蕴含 $\|G[g]\|_{L^{d^2+1}(\nu)}^{2d} \le d\,\|g\|_{L^2(\nu)}^{2d}$，该量是有限的，因为 $g \in L^2(\nu)$。综上可得 (6.11)，其中 $C_{h,s} = (d\tilde{C}_{h,s})^{1/(2d)}$。

(b) 令 h，$h' \in I$ 满足 $|h - h'| < 1$，并令 $f \in L^2(\nu^*)$ 和 $g = \theta_{h^*}^{-1} f$。那么，类似于 (6.12)，再利用引理 6.3，

$$\begin{aligned}
&\big|H_h[f](a) - H_{h'}[f](a)\big| \\
&\le \int_{h^*}^{\infty} |g(x)| \Big| \rho_Y\Big(x - \frac{a + dh^* - (d-1)h}{d}\Big) - \rho_Y\Big(x - \frac{a + dh^* - (d-1)h'}{d}\Big) \Big| \,\mathrm{d}x \\
&\le c|h - h'| \sum_{u=\pm 1} \int_{h^*}^{\infty} |g(x)| \rho_Y\Big(x - \frac{a + dh^* - (d-1)h}{d} + ur\Big) \,\mathrm{d}x \\
&\le c|h - h'| \sum_{u=\pm 1} G[|g|]\big(a + dh^* - (d-1)h + urd\big).
\end{aligned} \tag{6.15}$$

因此，完全按照 (a) 的证明中的论证并利用三角不等式，

$$\big\|H_h[f] - H_{h'}[f]\big\|_{L^{2d}(\nu^*)} \le c|h - h'| \|f\|_{L^2(\nu^*)}, \tag{6.16}$$

这就证明了所述连续性。 □

现在我们可以计算函数 F（定义于6.8）的一阶偏弗雷歇导数。

引理 6.5. 偏导数 $D_f F$在点 (h, f) 处由下式给出

$$D_f F(h, f)(g) = -g + 1_{[0,\infty)} d(1 - H_h[f])^{d-1} H_h[g]. \tag{6.17}$$

特别地，$D_f F(h, f)$ 是 $L^2(\nu^*)$ 上的有界线性算子，并且它连续依赖于 $h \in I$ 和 $f \in L^2(\nu^*)$。

证明。我们回顾一下，对于每个 $k \le d$，幂函数$f \mapsto f^k$的弗雷歇导数（视为从 $L^{2d}(\nu^*)$ 到 $L^{2d/k}(\nu^*)$ 的映射）是关于 f 的连续函数，其表达式为

$$D_f(f^k)(g) = k f^{k-1} g, \tag{6.18}$$

（例如，参见 [Zei95，第 4 章。3]），并且弗雷歇导数满足链式法则（例如，参见 [Zei95]中的定理 4.D 的推论）。因此，同时利用 $H_h[f] \in$

$L^{2d}(\nu^*)$ 根据引理 6.4（a），

$$\begin{aligned} D_f\big((1-H_h[f])^d\big)(g) &= -d(1-H_h[f])^{d-1} D_f H_h[f](g) \\ &= -d(1-H_h[f])^{d-1} H_h[g], \end{aligned} \tag{6.19}$$

其中在最后一步中，我们用到了以下事实： H_h 是一个线性算子，因此$D_f H_h[f](g) = H_h[g]$。回顾6.8中 F的定义，公式6.17便直接成立。由引理 6.4(a) 和霍尔德不等式，可知 $D_f F(h,f)$ 是 $L^2(\nu^*)$ 上的有界线性算子。

为证明 $D_f F(h,f)$ 的连续性，令 $h, h' \in I$ 和 $f, f', g \in L^2(\nu^*)$。忽略非本质的前置因子 $d1_{[0,\infty)}$， $D_f F(h,f)(g) - D_f F(h',f')(g)$ 可写为

$$\begin{aligned} &(1-H_h[f])^{d-1} H_h[g] - (1-H_{h'}[f'])^{d-1} H_{h'}[g] \\ &= \big((1-H_h[f])^{d-1} - (1-H_{h'}[f'])^{d-1}\big) H_h[g] + (1-H_{h'}[f'])^{d-1}\big(H_h[g] - H_{h'}[g]\big). \end{aligned} \tag{6.20}$$

由霍尔德不等式和 (6.16)，第二项的 $L^2(\nu^*)$ 范数有界于 $C(1+\|f'\|_{L^2(\nu^*)})^{d-1}\|g\|_{L^2(\nu^*)}|h-h'|$。利用公式 $a^k - b^k = (a-b)\sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-1-i}$，可将第一项改写，而由此得到的项$H_h[f] - H_{h'}[f']$可展开为 $(H_h[f] - H_{h'}[f]) + (H_{h'}[f] - H_{h'}[f'])$。因此，利用 H_h 的线性性、引理 6.4(a,b) 以及再次使用霍尔德不等式，第一项的 $L^2(\nu^*)$ 范数有界于

$$C\|g\|\big[|h-h'|\big(1+\|f\|+\|f'\|\big)^{d-1} + \|f-f'\|\big(1+\|f\|+\|f'\|\big)^{d-2}\big], \tag{6.21}$$

其中所有范数均取在 $L^2(\nu^*)$ 中。由这些估计可直接得到 $(f,h) \mapsto D_f(f,h)$ 的连续性。□

引理 6.6. 点 $(h,\ f)$ 处的偏导数 $D_h F$ 为

$$D_h F(h,f) = 1_{[0,\infty)} d\big(1-H_h[f]\big)^{d-1} H_h'[f], \tag{6.22}$$

其中，对于 $h \in I$ 和 $f \in L^2(\nu^*)$， $H_h'[f]:\ \mathbb{R} \to L^{2d}(\nu^*)$ 由下式给出

$$H_h'[f](a) = \frac{d-1}{d} \int_0^\infty f(x) \rho_Y'\Big(x - \frac{a}{d} + \frac{d-1}{d} h\Big)\, \mathrm{d}x, \tag{6.23}$$

其中 ρ_Y' 是 ρ_Y 的导数。特别地， $D_h F(h,\ f) \in L^2(\nu^*)$，且它是 $h \in I$ 和 $f \in L^2(\nu^*)$ 的连续函数。

证明。 我们首先证明，对于任意 $f \in L^2(\nu^*)$， $H_h[f]$ 的 h-导数由 $D_h H_h[f] = H_h'[f] \in L^{2d}(\nu^*)$ 给出。为此，我们需要验证

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\big(H_{h+s}[f] - H_h[f]\big) = H_h'[f] \quad \text{in } L^{2d}(\nu^*). \tag{6.24}$$

我们首先证明逐点收敛。由（6.6），对于固定的 $a \in \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{s}\big(H_{h+s}[f](a) - H_h[f](a)\big)\\&\quad= \int_0^\infty f(x)\frac{1}{s}\Big(\rho_Y\Big(x - \frac{a}{d} + \frac{d-1}{d}(h+s)\Big) - \rho_Y\Big(x - \frac{a}{d} + \frac{d-1}{d}h\Big)\Big)\,\mathrm{d}x\\&\quad=: \int_0^\infty f(x)\Phi_s\Big(x - \frac{a}{d} + \frac{d-1}{d}h\Big)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{6.25}$$

显然，$\lim_{s\to 0}\Phi_s(x - \frac{a}{d} + \frac{d-1}{d}h) = \frac{d-1}{d}\rho_Y'(x - \frac{a}{d} + \frac{d-1}{d}h)$，并且根据引理 6.3，$\max_{|s|<1}|\Phi_s(y)| \le c(\rho_Y(y+r) + \rho_Y(y-r)) =: \bar\Phi(y)$。由于 $f \in L^2(\nu^*) \subset L^1(\nu^*)$，可得 $f\rho_{\nu^*} \in L^1(\mathrm{d}x)$。此外，由于 ν^* 的方差大于 Y的方差，即 $\sigma_\nu^2 > \sigma_Y^2$，因此对于任意 $c \in \mathbb{R}$，比值 $\rho_Y(y+c)/\rho_{\nu^*}(y)$ 都是有界的。因此，$f(\cdot)\,\bar\Phi(\cdot - \frac{a}{d} + \frac{d-1}{d}h) \in L^1([0,\infty), \mathrm{d}x)$，从而根据控制收敛定理，

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\big(H_{h+s}[f](a) - H_h[f](a)\big) = \int_0^\infty f(x)\lim_{s\to\infty}\Phi_s\Big(x - \frac{a}{d} + \frac{d-1}{d}h\Big)\,\mathrm{d}x\\&= \frac{d-1}{d}\int_0^\infty f(x)\rho_Y'\Big(x - \frac{a}{d} + \frac{d-1}{d}h\Big)\,\mathrm{d}x = H_h'[f](a),\end{aligned} \tag{6.26}$$

这就确立了（6.24）中的逐点收敛。

为证明 $L^{2d}(\nu^*)$ 中的收敛，我们再次根据引理 6.3 注意到，函数

$$\bar H_h[f](a) := \int_0^\infty |f(x)|\bar\Phi\Big(x - \frac{a}{d} + \frac{d-1}{d}h\Big)\,\mathrm{d}x = c\big(H_h[f](a+r) + H_h[f](a-r)\big) \tag{6.27}$$

支配 $\big|\frac{1}{s}(H(h+s, f) - H(h, s))\big|$ 对所有充分小的 $|s|$ 均成立。此外，根据引理 6.4，$\theta_{\pm r}H_h[f] \in L^{2d}(\nu^*)$，因此 $\bar H_h[f] \in L^{2d}(\nu^*)$ 也成立。因此，$L^{2d}(\nu^*)$ 在（6.24）中的收敛，可由再次应用控制收敛定理得到。

由（6.22）和（6.24），以及 6.8）中对 F 的定义，利用链式法则即可推出断言（

$$D_hF(h,f) = -D_h\Big(1_{[0,\infty)}\big(1 - H_h[f]\big)^d\Big) = 1_{[0,\infty)}d\big(1 - H_h[f]\big)^{d-1}H_h'[f], \tag{6.28}$$

正如所需。

最后，我们证明 $(h, f) \mapsto D_hF(h, f)$ 是连续的。首先注意到，根据与引理 6.4的证明类似的论证，可以证明 $H_h'[f]$ 满足与 $H_h[f]$类似的估计，即对于 $h, h' \in \mathbb{R}$ 以及 $f \in L^2(\nu^*)$，

$$\begin{aligned}\|H_h'[f]\|_{L^{2d}(\nu^*)} &\le C_h\|f\|_{L^2(\nu^*)},\\\|H_h'[f] - H_{h'}'[f]\|_{L^{2d}(\nu^*)} &\le c|h-h'|\|f\|_{L^2(\nu^*)}.\end{aligned} \tag{6.29}$$

然后，同样类似于证明 $D_f F(h,f)$ 连续性的过程，忽略非本质的前因子 $d1_{[0,\infty)}$，$D_h F(h,f) - D_h F(h',f')$ 可以写成

$$\begin{aligned}&(1-H_h[f])^{d-1}H_h'[f] - (1-H_{h'}[f'])^{d-1}H_{h'}'[f'] \\ &= \big((1-H_h[f])^{d-1} - (1-H_{h'}[f'])^{d-1}\big)H_h'[f] + (1-H_{h'}[f'])^{d-1}\big(H_h'[f] - H_{h'}'[f']\big).\end{aligned} \tag{6.30}$$

由此，$D_h F(h,f)$ 的连续性可由与前面相同的论证得出；必要时，将关于 $H_h[f]$ 的一些估计替换为类似的估计（6.29）。□

引理 6.7。 F 的相关二阶 ***Fréchet*** 偏导数是连续的，且其表达式为

$$D_{ff}F(h,f)(g_1,g_2) = -1_{[0,\infty)}d(d-1)\big(1-H_h[f]\big)^{d-2}H_h[g_1]H_h[g_2]. \tag{6.31}$$

and

$$\begin{aligned}D_{hf}F(h,f)(g) = &-1_{[0,\infty)}d(d-1)\big(1-H_h[f]\big)^{d-2}H_h[g]H_h'[f] \\ &+1_{[0,\infty)}d\big(1-H_h[f]\big)^{d-1}H_h'[g].\end{aligned} \tag{6.32}$$

证明。固定 $h\in\mathbb{R}$，$D_f F(h,\cdot)$ 可以写成函数的复合$D_f F(h,\cdot) = F_2\circ F_1$，其中 $F_1\colon L^2(\nu^*) \to L^{2d/(d-1)}(\nu^*)$，$F_1(f) = 1_{[0,\infty)}d(1-H_h[f])^{d-1}$，且 $F_2\colon L^{2d/(d-1)}(\nu^*) \to B(L^2(\nu^*)\ L^2(\nu^*))$ $F_2(l)(g) = -g + l\cdot H_h[g]$。由 (6.18)，$F_1$ 是 C^1，且 $DF_1(f)(g) = -1_{[0,\infty)}d(d-1)(1-H_h[f])^{d-2}H_h[g]$。此外，通过计算项 $F_2(l+u) - F_2(l)$，可得 $DF_2(l)(u)(g) = u\cdot H_h[g]$。应用链式法则，得到如 (6.31) 所示的 $D_{ff}F(h,f)$。

为了计算 $D_{hf}F(h,f)$，我们固定 $h\in\mathbb{R}$，并将 $D_h F(h,\cdot)$ 写成函数 $D_h F(h,\cdot) = F_1(\cdot)H_h'[\cdot]$ 的乘积，其中 F_1 如上所述。注意到，由于线性性，$D_f H_h'[f](g) = H'[g]$，再根据弗雷歇导数的乘积法则（例如参见 [Zei95] 中定理 4.D 的标准例 3），即可得到 (6.32)。

为了说明 $D_{ff}F(h,f)$ 的连续性，令 $h,h'\in I$ 和 $f,f',g\in L^2(\nu^*)$。差值 $D_{ff}F(h,f)(g_1,g_2) - D_{ff}F(h',f')(g_1,g_2)$ 可写为（同样忽略前置因子 $d1_{[0,\infty)}$）

$$\begin{aligned}&(1-H_h[f])^{d-2}H_h[g_1]H_h[g_2] - (1-H_{h'}[f'])^{d-2}H_{h'}[g_1]H_{h'}[g_2] \\ &\quad= \big((1-H_h[f])^{d-2} - (1-H_{h'}[f'])^{d-1}\big)H_h[g_1]H_h[g_2] \\ &\qquad+\frac{1}{2}(1-H_{h'}[f'])^{d-2}\big(H_h[g_1] - H_{h'}[g_1]\big)\big(H_h[g_2] + H_{h'}[g_2]\big) \\ &\qquad+\frac{1}{2}(1-H_{h'}[f'])^{d-2}\big(H_h[g_1] + H_{h'}[g_1]\big)\big(H_h[g_2] - H_{h'}[g_2]\big).\end{aligned} \tag{6.33}$$

对每个求和项应用三函数的霍尔德不等式，并结合引理的证明中类似的论证6.5 和6.6，即可推出

$(f,h) \mapsto D_{ff}F(f,h)$ 的连续性。类似地，对于 $D_{fh}F(h,f)$，将 $D_{fh}F(h,f) - D_{fh}F(h',f')$ 作相应的分解，再结合前面的论证，即可得到连续性。□

有待检验命题 6.2 的性质（c）和（d）是否满足 .

引理 6.8。令 $\chi^* = \theta_{h^*}\chi_{h^*}$ 为 χ_{h^*}的一个平移。则有

$$N(D_fF(h^*,0)) = R(D_fF(h^*,0))^\perp = \operatorname{span}\{\chi^*\}, \tag{6.34}$$

其中，$^\perp$ 表示 L^2（ν^*）中的正交补。特别地，

$$\dim N(D_fF(h^*,0)) = \operatorname{codim} R(D_fF(h^*,0)) = 1. \tag{6.35}$$

证明。根据引理 6.5 和（6.5），有

$$D_fF(h^*,0)(g) = -g + 1_{[0,\infty)}dH_{h^*}[g] = -g + \theta_{h^*}L_h[\theta_{h^*}^{-1}g]. \tag{6.36}$$

因此，$g \in N$（D_fF（h^*，0））当且仅当 $\theta_{h^*}^{-1}g$是 L_{h^*}对应于特征值 1的一个特征函数。由命题 3.1，χ 是唯一的此类特征函数，因此

$$N(D_fF(h^*,0)) = \operatorname{span}\{\theta_{h^*}\chi_{h^*}\} = \operatorname{span}\{\chi^*\} \tag{6.37}$$

且其维数等于一。

$l \in R(D_fF(h^*,0))^\perp$等价于对所有 $g \in L^2(\nu^*)$都有 $\langle l, D_fF(h^*,0)(g)\rangle_{\nu^*} = 0$。然而，由于根据命题 3.1 L_h 在$L^2(\nu)$上是自伴的，(6.36)意味着 $D_fF(h^*,0)$在 $L^2(\nu^*)$上是自伴的。因此，这等价于对所有 $g \in L^2(\nu^*)$都有 $0 = \langle l, D_fF(h^*,0)(g)\rangle_{\nu^*} = \langle D_fF(h^*,0)(l)\ g\rangle_{\nu^*}$。然而，当且仅当 $l \in N(D_fF(h^*,0)) = \operatorname{span}\{\chi^*\}$时，这一结论成立。□

引理 6.9. 成立

$$D_{hf}F(h^*,0)(\chi^*) \notin R(D_fF(h^*,0)). \tag{6.38}$$

证明。根据引理 6.8，$g \in R(D_fF(h^*,0))$ 当且仅当 g正交于 张成空间$\{\chi^*\}$。因此，我们只需证明 $\langle \chi^*,\ D_{hf}F(h^*,0)(\chi^*)\rangle_{\nu^*} \neq 0$。

回顾 $\sigma_Y^2 = \frac{d+1}{d}$，因此 $\rho_Y'(x) = -\frac{d}{d+1}x\rho_Y(x)$。根据引理 6.7，对于$a$，$s \in \mathbb{R}$，利用 $H_{h^*}[0] = 0$ 以及 6.23 中 H_h' 的定义，

$$\begin{aligned}
&D_{hf}F(h^*,0)(\chi^*)(a) = 1_{[0,\infty)}(a)dH'_{h^*}[\chi^*](a)\\
&= 1_{[0,\infty)}(a)(d-1)\int_0^\infty \chi^*(x)\rho_Y'\Big(x - \frac{a}{d} + \frac{d-1}{d}h^*\Big)\,\mathrm{d}x\\
&= -1_{[0,\infty)}(a)\frac{d(d-1)}{d+1}\int_0^\infty \chi^*(x)\Big(x - \frac{a}{d} + \frac{d-1}{d}h^*\Big)\rho_Y\Big(x - \frac{a}{d} + \frac{d-1}{d}h^*\Big)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{6.39}$$

记作 $x-\frac{a}{d}+\frac{d-1}{d}h^*=x+h^*-\frac{1}{d}(a+h^*)$，并注意到 $(\cdot+h^*)=\theta_{h^*}\mathrm{Id}$，其中 Id 是 $\mathbb{R}$ 上的恒等映射，可将其写成

$$\begin{aligned}&=1_{[0,\infty)}(a)\frac{d-1}{d+1}\Big((a+h^*)H_{h^*}[\chi^*](a)-dH_{h^*}[\chi^*\theta_{h^*}\mathrm{Id}](a)\Big)\\&=1_{[0,\infty)}(a)\frac{d-1}{d+1}\Big(\frac{1}{d}(\chi^*\theta_{h^*}\mathrm{Id})(a)-dH_{h^*}[\chi^*\theta_{h^*}\mathrm{Id}](a)\Big),\end{aligned}\tag{6.40}$$

其中，在最后一个等式中，我们利用了 χ^* 是 H_{h^*} 的特征函数，特征值为d^{-1}，由（6.5）可知。因此，利用 $\chi^*=1_{[0,\infty)}\chi^*$ 以及 H_{h^*} 在L^2（ν^2）上的自伴性，

$$\begin{aligned}&\big\langle\chi^*,D_{hf}F(h^*,0)(\chi^*)\big\rangle_{\nu^*}\\&\quad=\frac{d-1}{d+1}\Big(\frac{1}{d}\big\langle\chi^*,\chi^*\theta_{h^*}\mathrm{Id}\big\rangle_{\nu^*}-d\big\langle\chi^*,H_{h^*}[\chi^*\theta_{h^*}\mathrm{Id}]\big\rangle_{\nu^*}\Big)\\&\quad=\frac{d-1}{d+1}\Big(\frac{1}{d}\big\langle\chi^*,\chi^*\theta_{h^*}\mathrm{Id}\big\rangle_{\nu^*}-d\big\langle H_{h^*}[\chi^*],\chi^*\theta_{h^*}\mathrm{Id}\big\rangle_{\nu^*}\Big)\\&\quad=\frac{d-1}{d+1}\Big(\frac{1}{d}\big\langle\chi^*,\chi^*\theta_{h^*}\mathrm{Id}\big\rangle_{\nu^*}-\big\langle\chi^*,\chi^*\theta_{h^*}\mathrm{Id}\big\rangle_{\nu^*}\Big)\\&\quad=-\frac{(d-1)^2}{d(d+1)}\langle\chi,\chi\mathrm{Id}\rangle_\nu\neq0,\end{aligned}\tag{6.41}$$

其中在最后一步，我们先应用了 $\theta_{h^*}^{-1}$，然后利用了这样一个事实：$\chi(a)>0$ 当且仅当$a\in[h^*,\infty)$，因此 $\langle\chi,\chi\mathrm{Id}\rangle_\nu>0$。□

现在我们可以证明定理 2.6。

定理 2.6 的证明。正如前面所述，我们将命题 6.2 应用于在（6.8）中定义的函数 F，其中 $X=Y=L^2(\nu^*)$、h 和 f 分别起到 t 和x的作用，而 h^* 对应于 t_0。根据引理 6.5–6.9，该命题的条件（a）–（d）在 $x_0=\chi^*$下均得到满足，并且 $D_{ff}F$ 是连续的。具体而言，取 $Z=(\chi^*)^\perp$，于是存在$(h^*,0)$的一个邻域 $U\subset\mathbb{R}\times L^2(\nu^*)$，使得 U 中的 $F(h,f)=0$的所有非平凡（即非零）解都可写为 $\{(\varphi(\alpha)\ \alpha\chi^*+\alpha\psi(\alpha)):|\alpha|<a\}$，其中对于某些 $a>0$ 和 C^1 函数 $\varphi:(-a,a)\to\mathbb{R}$, $\psi:(-a,a)\to(\chi^*)^\perp\subset L^2(\nu^*)$，有 $\varphi(0)=h^*$, $\psi(0)=0$。此外，根据（6.4），

$$\frac{1}{2}D_{ff}F(h^*,0)(\chi^*,\chi^*)+D_fF(h^*,0)(\psi'(0))+\varphi'(0)D_{hf}F(h^*,0)(\chi^*)=0.\tag{6.42}$$

由于当 $\alpha\to0$ 时，$\varphi(\alpha)=h^*+\alpha\varphi'(0)+o(\alpha)$，因此当 $h\to h^*$ 时，$\varphi^{-1}(h)=\frac{h-h^*}{\varphi'(0)}()+o(h-h^*)$，非平凡解 $\alpha\chi^*+\alpha\psi(\alpha)$ 可在 h^* 的邻域内展开为关于 h 的函数，

$$\varphi^{-1}(h)\chi^*+\varphi^{-1}(h)\psi(\varphi^{-1}(h))=\frac{h-h^*}{\varphi'(0)}(\chi^*+r_h^*),\tag{6.43}$$

其中余项函数 r_h^* 满足 $\lim_{h\to h^*}\|r_h^*\|_{L^2(\nu^*)}=0$。

现在回顾式（6.7）、（6.8），可知 $F(h,f)=0$ 是移位后的前向渗流概率 $\widetilde{\eta}_h$ 所满足的方程。将所有量移回 θ_h^{-1}，并利用渗流概率的连续性（推论 2.2），分岔分析得到的解必然与 $\eta^+(h,a)$一致，由式（6.43）可得

$$\eta^+(h,\cdot)=\frac{h-h^*}{\varphi'(0)}\theta_h^{-1}(\chi^*+r_h^*)=\frac{h-h^*}{\varphi'(0)}\big(\chi+(\theta_{h^*-h}\chi-\chi)+\theta_{-h}r_h^*\big). \tag{6.44}$$

我们首先证明

$$r_h^+:=(\theta_{h-h^*}\chi-\chi)+\theta_{-h}r_h^*\to 0 \qquad \text{as } h\to h^* \text{ in } L^{2-\varepsilon}(\nu). \tag{6.45}$$

对于第一项 $\theta_{h-h^*}\chi-\chi$，由 χ（命题 3.1）的连续性、关于 χ （命题 3.3）的增长估计以及控制收敛定理，容易得到这一结论。对于第二项，有

$$\begin{aligned}\|\theta_{-h}r_h^*\|_{L^{2-\varepsilon}(\nu)}^{2-\varepsilon}&=\int|r_h^*(a-h)|^{2-\varepsilon}\rho_\nu(a)\,\mathrm{d}a\\&=\int|r_h^*(a)|^{2-\varepsilon}\frac{\rho_\nu(a+h)}{\rho_{\nu^*}(a)}\rho_{\nu^*}(a)\,\mathrm{d}a\\&\le\|r_h^*\|_{L^2(\nu^*)}^{2-\varepsilon}\Big\|\frac{\rho_\nu(a+h)}{\rho_{\nu^*}(a)}\Big\|_{L^{2/\varepsilon}(\nu^*)},\end{aligned} \tag{6.46}$$

其中最后一行应用了霍尔德不等式。右侧的第一个因子当 0 时收敛于 $h\to h^*$，而第二个因子保持有界，由此完成了（6.45）的证明。

接下来我们计算 $\varphi'(0)$。为此，我们将（6.42）投影到 χ^* 方向上，即在等式两边应用 $\langle\chi^*,\cdot\rangle_{\nu^*}$。注意，根据引理 6.8，$D_fF(h^*,0)$的值域与 χ^*正交，因此 $\langle\chi^*,D_fF(h^*,0)(\psi'(0))\rangle_{\nu^*}=0$。于是，

$$\varphi'(0)=-\frac{\langle\chi^*,D_{ff}F(h^*,0)(\chi^*,\chi^*)\rangle_{\nu^*}}{2\langle\chi^*,D_{hf}F(h^*,0)(\chi^*)\rangle_{\nu^*}}. \tag{6.47}$$

分母中的标量积已在（6.41）中计算。对于分子，根据引理6.7，

$$D_{ff}F(h^*,0)(\chi^*,\chi^*)=-d(d-1)H_{h^*}[\chi^*]H_{h^*}[\chi^*]=-\frac{d-1}{d}(\chi^*)^2, \tag{6.48}$$

因此，

$$\langle\chi^*,D_{ff}F(h^*,0)(\chi^*,\chi^*)\rangle_{\nu^*}=-\frac{d-1}{d}\langle\chi^*,(\chi^*)^2\rangle_{\nu^*}=-\frac{d-1}{d}\langle\chi,\chi^2\rangle_\nu. \tag{6.49}$$

由此可得，

$$\varphi'(0)=-\frac{1}{2}\frac{d+1}{d-1}\frac{\langle\chi,\chi^2\rangle_\nu}{\langle\chi^2,\mathrm{Id}\rangle_\nu}. \tag{6.50}$$

定理的断言（2.15）直接由（6.44）、（6.45）和（6.50得出).

为得到2.16）中的渐近表达式 η，注意对任意 $a \geq h^*$，利用证明递归性质（5.5）中的类似论证，

$$\begin{aligned}\eta(h,a) &= P_a[|\mathcal{C}_o^h| = \infty] = 1 - P_a[|\mathcal{C}_o^h| < \infty] \\ &= 1 - \left(E_Y\left[1 - \eta^+\left(h, \frac{a}{d} + Y\right)\right]\right)^{d+1} \\ &= (d+1)E_Y\left[\eta^+\left(h, \frac{a}{d} + Y\right)\right]\big(1 + o(1)\big)\end{aligned} \tag{6.51}$$

如 $h \uparrow h^*$。将同一论证应用于 η^+ 可得

$$\eta^*(h,a) = dE_Y\left[\eta^+\left(h, \frac{a}{d} + Y\right)\right]\big(1 + o(1)\big) \tag{6.52}$$

因此，对任意 $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{h \uparrow h^*} \frac{\eta(h,a)}{\eta^+(h,a)} = \frac{d+1}{d}. \tag{6.53}$$

这与 (2.15) 一起表明 (2.16)，并完成了证明。 □

参考文献

[AČ20] Angelo Abächerli 和 Jiří Černý，《正则图上的高斯自由场水平集渗流 I：正则树》，Electron. J. Probab. 25（2020年），第 65 号论文，24 页。MR4115734[AN72] Krishna B. Athreya 和 Peter E. Ney，《分枝过程》，数学科学基础丛书第 196 卷，施普林格出版社，纽约—海德堡，1972年。MR0373040[BGT89] N. H. Bingham、C. M. Goldie 和 J. L. Teugels，《正则变差》，数学及其应用百科全书第 27 卷，剑桥大学出版社，1989年。MR1015093[BLM87] Jean Bricmont、Joel L. Lebowitz 和 Christian Maes，《强关联系统中的渗流：无质量高斯场》，J. Statist. Phys. 48（1987年），第 5–6 期，1249–1268。MR914444[CN20] Alberto Chiarini 和 Maximilian Nitzschner，《以水平集断连为条件的高斯自由场的熵排斥》，Probab. Theory Related Fields 177（2020年），第 1–2 期，525–575。MR4095021[CR71] Michael G. Crandall 和 Paul H. Rabinowitz，《从单特征值处分岔》，J. Functional Analysis 8（1971年），321–340。MR0288640[DGRS20]Hugo Duminil-Copin、Subhajit Goswami、Pierre-François Rodriguez 和 Franco Severo，《高斯自由场水平集渗流的临界参数相等》，预印本，见 arXiv:2002.07735，2020年。[DPR18] Alexander Drewitz、Alexis Prévost 和 Pierre-FrançcoisRodriguez，《无质量高斯自由场的符号簇在 $\mathbb{Z}^d, d \geqslant 3$ 上渗流（以及更多）》，Comm. Math. Phys. 362（2018年），第 2 期，513–546。MR3843421[DPR21] Alexander Drewitz、Alexis Prévost 和 Pierre-François Rodriguez，《暂态图上渗流模型的临界指数》，预印本，见 arXiv:2101.05801，2021年。

[DPR22] Alexander Drewitz、Alexis Prévost 和 Pierre-François Rodriguez，《高斯自由场的簇容量泛函与同构定理》，Probab. Theory Related Fields 183（2022年），第 1–2 期，255–313。MR4421175[DRS14] Alexander Drewitz、Balázs Ráth 和 Artëm Sapozhnikov，《具有长程相关的渗流模型中的化学距离与形状定理》，J. Math. Phys. 55（2014年），第 8 期，083307，30 页。MR3390739[DW20] Jian Ding 和 Mateo Wirth，《度量图上高斯自由场水平集的渗流》，Ann. Probab. 48（2020年），第 3 期，1411–1435。MR4112719[GRS22] Subhajit Goswami、Pierre-François Rodriguez 和 Franco Severo，《高斯自由场越阈簇的半径》，Ann. Probab. 50（2022年），第 5 期，1675–1724。MR4474499[Har63] Theodore E. Harris，《分枝过程理论》，数学科学基础丛书第 119 卷，施普林格出版社，柏林；Prentice Hall, Inc.，新泽西州恩格尔伍德克利夫斯，1963年。MR0163361[LS86] Joel L. Lebowitz 和 H. Saleur，《强关联系统中的渗流》，Phys. A 138（1986年），第 1–2 期，194–205。MR865243[Mod71] Charles J. Mode，《多类型分枝过程：理论与应用》，《科学与数学现代分析与计算方法》第 34 号，American Elsevier Publishing Co., Inc.，纽约，1971年。MR0279901[MS83] S. A. Molchanov 和 A. K. Stepanov，《随机场中的渗流 I》，Teoret. Mat. Fiz. 55（1983年），第 2 期，246–256。MR734878[Mui22] Stephen Muirhead，《强相关高斯场的渗流 II：相变的锐性》，预印本，见 arXiv:2206.10724，2022年。[PR15] Serguei Popov 和 Balázs Ráth，《关于高斯自由场越阈集的解耦不等式与渗流》，J. Stat. Phys. 159（2015年），第 2 期，312–320。MR3325312[PS22] Christoforos Panagiotis 和 Franco Severo，《高斯自由场渗流观测量的解析性》，Comm. Math. Phys. 396（2022年），第 1 期，187–223。MR4499015[RS13] Pierre-François Rodriguez 和 Alain-Sol Sznitman，《高斯自由场的相变与水平集渗流》，Comm. Math. Phys. 320（2013年），第 2 期，571–601。MR3053773[Szn16] Alain-Sol Sznitman，《耦合及其在高斯自由场水平集渗流中的应用》，Electron. J. Probab. 21（2016年），1–26。MR3492939[Szn19] Alain-Sol Sznitman，《一些超临界强依赖渗流模型中的宏观空洞》，Ann. Probab. 47（2019年），第 4 期，2459–2493。MR3980925[Zei95] Eberhard Zeidler，《应用泛函分析》，《应用数学科学》第 109 卷，施普林格出版社，纽约，1995年，基本原理及其应用。MR1347692