arXiv:2302.02756v1 [cs.CC] 6 Feb 2023

开关网络中常量故障的诊断

Mikhail Moshkov*

摘要

本文研究用于诊断开关网络中常值故障的决策树。每个常值故障都包含将布尔常量赋给网络中的某些边，以取代文字。诊断问题是：从给定的故障集合中，识别存在常值故障的开关网络所实现的函数。为解决这一问题，我们使用决策树。决策树中的每个查询（属性）都通过观察故障开关网络在给定变量取值元组上的函数值来执行。我们研究任意开关网络和专门构造的开关网络的常值故障诊断决策树深度，以及诊断决策树构造的复杂性。

关键词：开关网络、常值故障、决策树。

1 引言

开关网络是计算布尔函数[5]最基础的模型之一。本文研究用于诊断此类网络中常值故障的决策树。

开关网络是一个具有两个极点的无向图，其边上标记有文字（变量或变量的否定）。对于给定的变量值元组，当且仅当两个极点之间存在一条路径，且该路径上每条边所标记文字的值均为 1 时，网络实现的函数值才等于 1。我们考虑这样的故障：将网络某些边上的文字替换为布尔常量。常值故障诊断问题是从给定的故障集合中识别开关网络在发生常值故障时所实现的函数。

解决这一问题的算法有两类：非自适应算法（诊断测试）和自适应算法（诊断决策树）。大多数关于开关网络诊断的论文都致力于研究诊断测试，例如参见 [3, 6, 7]。专门研究用于诊断开关网络的决策树的论文则为数不多 [1, 2, 4]。这些论文研究的是无迭代开关网络，其中各边标记的变量两两不同。

本文研究任意开关网络故障诊断的决策树。决策树的每次查询（属性）都需要观察故障开关网络在给定变量值元组上所实现函数的值。

*阿卜杜拉国王科技大学 (KAUST) 计算机、电气与数学科学及工程部和计算生物科学研究中心，沙特阿拉伯图瓦勒 23955-6900。电子邮箱：mikhail.moshkov@kaust.edu.sa。

设 P 为一个开关网络。我们用 $L(P)$表示 P中的边数。我们考虑三种常值故障：$\{0,1\}$-故障、 $\{0\}$-故障以及 P的 $\{1\}$-故障。令$C \in \{\{0,1\},\{0\},\{1\}\}$。 P的 C-故障是指将常数从 C赋给 P 中的某些边，以取代文字。设 R 是 P的 C-故障集合。对于 P 和 R，C-故障的诊断问题如下：对于带有来自 R的 C-故障 ρ 的开关网络 P，我们应找到 P 的一个 C-故障 δ，使带有故障 δ 的网络 P 实现与带有故障 ρ的网络 P相同的函数。我们用 $h_C(P)$ 表示能够解决 P 及其所有可能的 P 的 C- 故障的诊断问题的决策树的最小深度。

我们得到了若干关于任意开关网络诊断决策树的否定性结果。

首先，我们证明，存在一些简单的开关网络，其常值故障诊断决策树的深度很大。我们证明，对于任意 $C \in \{\{0,1\},\{0\},\{1\}\}$ 和任意自然数 n，存在一个开关网络 P，使得 $L(P) = 2n$ 且 $h_C(P) \geq 2^n$。

接着我们证明，存在一些简单的开关网络，使得对于所有实现相同函数的开关网络，其常值故障诊断决策树的深度都很大。我们证明，对于任意 $C \in \{\{0,1\},\{0\},\{1\}\}$ 和任意自然数 n，存在一个开关网络 P，使得对于任何实现与 P 相同函数的开关网络 Q， $L(P) = n^2 + n$ 且 $h_C(Q) \geq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$。

对于任意 $C \in \{\{0,1\},\{0\},\{1\}\}$，我们定义算法问题 $Con(C)$：给定一个具有 $L(P) \geq 1$ 的开关网络 P 和一个由 P 的 C 故障构成的集合 R，要求构造一棵决策树 Γ，以解决针对 P 和 R 的 C 故障诊断问题。可以证明，存在一棵能够解决该问题且至多有 $2|R|-1$ 个节点的决策树。我们证明，对于任意 $C \in \{\{0,1\},\{0\},\{1\}\}$，问题 $Con(C)$ 是 NP 困难的。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍主要概念。第 3 节讨论对称布尔函数的开关网络。第 4 节研究任意构造和特殊构造的开关网络的故障诊断决策树深度。第 5 节探讨诊断决策树构造的复杂性。第 6 节简要总结。

2 主要概念

本节将介绍与开关网络、常值故障以及用于故障诊断的决策树相关的主要概念。我们还将证明用于故障诊断的决策树深度的一个简单下界。

开关网络 是一个带有重边且不含自环的无向连通图 P，其中固定了两个不同的节点，称为极点。 P 的每条边都标记有集合 $\{x_i, \bar{x}_i$ 中的一个文字： $i \in \{0,1,2,\ldots\}\}$，其中 x_i 是一个变量， $\bar{x}_i$ 是其否定。我们用 $L(P)$ 表示开关网络 P 中边的数量。

我们考虑三种常值故障： P 的 $\{0,1\}$-故障、 $\{0\}$-故障和 $\{1\}$-故障。设 $C \in \{\{0,1\},\{0\},\{1\}\}$。 P 的 C-故障是指将集合 C 中的常数赋给 P 的某些边，以代替文字。

设 $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}$ 是附着在 P边上的文字所涉及的所有变量的集合。我们将 ll

称 x_{i_1}、…、x_{i_m}为 P的输入变量。我们将开关网络 P及其 C故障 ρ对应为布尔函数$f_{P,\rho}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$，该函数由带有故障 ρ的开关网络 P实现。设 ξ是P极点之间的一条简单路径（不重复经过节点）。我们用$c_\rho(\xi)$表示开关网络 P在故障 ρ下，路径 ξ各边上所附所有布尔函数（文字或常数）的合取。于是，$f_{P,\rho}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$是与$P$极点之间所有简单路径 ξ相对应的合取式$c_\rho(\xi)$的析取。我们记作$f_P = f_{P,\lambda}$，其中 λ 为空故障（没有常数赋给P的边），并称网络 P实现函数 f_P。

令 R 为 P 的一组 C 故障。针对 C-故障的 P 和 R诊断问题：对于具有来自 R 的 C 故障 ρ 的开关网络 P，我们应找到 P 的一个 C 故障 δ，使得$f_{P,\rho} = f_{P,\delta}$。为了解决这个问题，我们可以询问函数 $f_{P,\rho}$ 在 $\{0,1\}^m$ 中任意元组上的取值。

作为解决 C-故障诊断问题的算法，我们将考虑决策树，每棵树都是一棵以根节点为根的有向树。树的终端节点标记有 P 的 C 故障。每个非终端节点都标记有一个来自 $\{0,1\}^m$ 的 m 元组。该节点发出两条边，分别标记为 0 和 1。决策树 Γ 的深度 $h(\Gamma)$ 是从根节点到终端节点的路径的最大长度。

设 Γ 是一棵决策树。对于带有 C-故障 ρ 的开关网络 P，这棵树按以下方式工作。如果 Γ 的根节点是终端节点，那么 Γ 的输出就是附加在根节点上的故障。否则，我们求出函数 $f_{P,\rho}$ 在附加于根节点的 m-元组上的值，并沿着从根节点出发且标记为该值的边继续前进，如此重复，直到到达一个终端节点。附加在该节点上的故障就是 Γ 的输出。若对于任意来自 R 的 C-故障 ρ，Γ 的输出都是 P 的一个 C-故障 δ，且满足 $f_{P,\rho} = f_{P,\delta}$，我们就称 Γ 可以解决关于 C-故障的诊断问题，其中涉及 P 和 R。我们用 $h_C(P)$ 表示这样一棵决策树的最小深度：它解决关于 C-故障的诊断问题，其中涉及 P 以及 P 的所有 C-故障（包括空故障 λ），也就是说，解决 P 的任意 C-故障的诊断问题。

现在我们考虑 $h_C(P)$ 的一个下界。

引理 1. 设 $C \in \{\{0,1\},\{0\},\{1\}\}$，$P$ 是具有 m 个输入变量的开关网络，$\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_r$ 是 P 的 C 故障，满足 $f_{P,\rho_0} \neq f_{P,\rho_i}$，其中 $i = 1, \ldots, r$；并设 t 是这样一个元组集合的最小基数：在该集合中，函数 f_{P,ρ_0} 与函数 $f_{P,\rho_1}, \ldots, f_{P,\rho_r}$ 不同。那么

$$h_C(P) \geq t\ .$$

证明。设 Γ 是一个决策树，它解决了针对 P的任意 C故障的诊断问题，并且满足 $h(\Gamma) = h_C(P)$。设 Γ在带有故障ρ_0 的网络 P上的运行结束于 Γ的终端节点 v。我们将从 Γ 的根节点到终端节点 v的路径记为 ξ。显然，在附属于 ξ非终端节点的 m元组集合上，函数 f_{P,ρ_0}不同于函数 f_{P,ρ_1}、……、f_{P,ρ_r}。因此，ξ的长度至少为 t。于是，$h(\Gamma) \geq t$且 $h_C(P) \geq t$。 □

3 对称布尔函数的开关网络

如果布尔函数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 的取值仅取决于输入中 1 的个数，则称其为对称函数。该函数可由元组 $\tilde{t}=(t_0,t_1,\ldots,t_n)\in\{0,1\}^{n+1}$表示，其中，对于 $i=0$，1，.....，n，t_i是函数 f在恰有 i 个 1 的每个元组上的取值。香农于 [8] 提出了一个简单的开关网络 $P_{\tilde{t}}$，它有 $L(P_{\tilde{t}})=n^2+n$，用于实现不恒等于 0 的对称函数 f。图 1 所示的网络 Q展示了 $n=3$ 的情形（下文各图中的极点均为未涂黑的节点）。设 t_{i_1}，.....，t_{i_p}是表示对称布尔函数 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的元组 $\tilde{t}=(t_0,t_1,\ldots,t_3)$ 中所有等于 1 的数字。将网络 Q 变换为实现函数 f的开关网络 $P_{\tilde{t}}$。$P_{\tilde{t}}$ 的一个极点是 Q中最左侧的节点。另一个极点由合并 Q 中标记为数字 t_{i_1}，.....，t_{i_p}的节点得到。

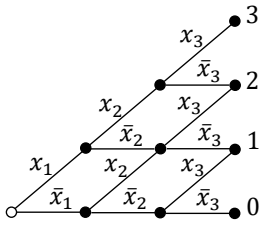

图1：网络 Q

设 n 是一个自然数。对于任意满足 $m+1\le n$ 的自然数 m，我们用 $\psi_n^{\geq m+1}$ 表示具有 n 个变量 $x_1,\ldots,x_n$ 的对称布尔函数，当且仅当输入中 1 的个数至少为 $m+1$ 时，该函数的值为 1。我们用 $\psi_n^{=\lceil \frac{n}{2}\rceil}$ 表示具有 n 个变量 $x_1,\ldots,x_n$ 的对称布尔函数，当且仅当输入中 1 的个数等于$\lceil \frac{n}{2}\rceil$时，该函数的值为 1。我们用 $\psi_n^{\neq\lceil \frac{n}{2}\rceil}$ 表示具有 n 个变量 $x_1,\ldots,x_n$ 的对称布尔函数，当且仅当输入中 1 的个数不等于 $\lceil \frac{n}{2}\rceil$时，该函数的值为 1。对于这些函数中的每一个，都存在一个实现它且包含 n^2+n 条边的开关网络。显然，该网络可以在关于 n 的多项式时间内构造。

4 任意构造和特殊构造开关网络的诊断

本节讨论两个与开关网络诊断决策树深度有关的否定性结果。首先，我们证明，对于某些简单的开关网络，常值故障诊断决策树的深度很大。

定理 1. 对于任意 $C\in\{\{0,1\},\{0\},\{1\}\}$ 和任意自然数 n，存在一个开关网络 P_C，它有 n 个输入变量，使得 $L(P_C)=2n$ 且 $h_C(P_C)\ge 2^n$。

证明。(a) 令 $C \in \{\{0,1\},\{0\}\}$。作为开关网络 $P_{\{0,1\}}$ 和 $P_{\{0\}}$，我们考虑图 2 所示的开关网络 S_1 。显然， S_1 有 n 个输入变量，且$L(S_1) = 2n$。我们将 ρ 记作 S_1 的一个 $\{0\}$-故障，该故障将常数 0 赋给 S_1的每条~边。显然，$f_{S_1,\rho} = 0$。令 $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \{0,1\}^n$。现在我们描述 S_1的一个 ~$\{0\}$-故障 $\rho(\delta)$：对于 $i = 1, \ldots, n$，若 $\delta_i = 0$，则将常数 0 赋给标记为 x_i的边；若 $\delta_i = 1$，则将 0 赋给标记为 $\bar{x}_i$的边。显然，$f_{S_1,\rho(\delta)} = x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n}$，其中 $x^\delta = x$ 在 $\delta = 1$ 时成立，而 $x^\delta = \bar{x}$ 在 $\delta = 0$时成立。可以证明，对于任意 $\delta \in \{0,1\}^n$，都有~$f_{S_1,\rho} \neq f_{S_1,\rho(\delta)}$，且 2^n 是这样一个元组集合的最小基数：该集合取自~$\{0,1\}^n$，在其上函数 $f_{S_1,\rho}$ 与函数 $f_{S_1,\rho(\delta)}$，$\delta \in \{0,1\}^n$不同。显然， S_1 的任何 $\{0\}$-故障都是 S_1的一个 $\{0,1\}$-故障。根据引理 1， $h_C(S_1) \geq 2^n$。



图 2：开关网络 S_1

(b) 令 $C = \{1\}$。作为开关网络 $P_{\{1\}}$，我们考虑图 3 中所示的开关网络 S_2。显然，S_2 具有 n 个输入变量，且 $L(S_2) = 2n$。同样显然，$f_{S_2,\lambda} = 0$，其中 λ 为空故障。令 $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \{0,1\}^n$。现在我们描述 S_2 的一个 ~$\{1\}$-故障 $\rho(\delta)$：对于 $i = 1, \ldots, n$，若 $\delta_i = 0$，则将标记为 x_i 的边赋值为 1；若 $\delta_i = 1$，则将标记为 $\bar{x}_i$ 的边赋值为 1。显然，$f_{S_2,\rho(\delta)} = x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n}$。~可以证明，对于任意 $\delta \in \{0,1\}^n$，都有 $f_{S_2,\lambda} \neq f_{S_2,\rho(\delta)}$，且 2^n 是这样一个元组集合的最小基数：在该集合上，函数 $f_{S_2,\lambda}$ 与函数 $f_{S_2,\rho(\delta)}$,~$\delta \in \{0,1\}^n$ 不同。根据引理 1， $h_C(S_2) \geq 2^n$。 □



图3：开关网络 S_2

我们现在证明，存在一些简单的开关网络，使得对于所有实现相同函数的开关网络，用于诊断常值故障的决策树深度都很高。

定理2。对于任意 $C \in \{\{0,1\},\{0\},\{1\}\}$ 和任意自然数 n，存在一个具有 n 个输入变量的开关网络 P，使得 $L(P) = n^2 + n$ 且 $h_C(Q) \geq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$，对于任意实现与 P 相同函数的开关网络 Q 均成立。

证明。(a) 令 $C \in \{\{0,1\},\{1\}\}$。我们用 P 表示具有 n 个输入变量 $x_1, \ldots, x_n$ 的开关网络，该网络实现对称函数 $\psi = \psi_n^{\neq \lceil \frac{n}{2} \rceil}$，且满足$L(P) = n^2 + n$ （见第3节）~。

令 Q 为具有 n 个输入变量 $x_1, \ldots, x_n$ 的开关网络，该网络实现函数 ψ。令 $\tilde{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ 为集合 $\{0,1\}^n$ 中恰好包含 $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ 个 1 的一个元组。则 $\psi(\delta) = 0$。为明确起见，我们假设 $\delta = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$。我们知道，$\psi$ 等于所有合取式 $c_\lambda(\xi)$ 的析取，这些合取式对应于 Q 的极点之间的简单路径 ξ，其中 λ 是 Q 的空故障（见第2节）。对于元组 δ，每个合取式都等于 0。因此，每个合取式中至少有一个文字属于集合 $A = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$。

记为 $B = \{x_1, \ldots, x_k, \bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_n\}$。将每条标记为来自 B 的文字的边赋值为常数 1。带有故障 $\rho(\delta)$ 的开关网络 Q 实现函数 $f_{Q,\ \rho(\delta)}$。该函数是所有对应于 Q 的极点之间简单路径 ξ 的合取式 $c_{\rho(\tilde{\delta})}(\xi)$ 的析取。由于每个合取式 $c_\lambda(\xi)$ 都包含来自 A 的一个文字，因此每个合取式 $c_{\rho(\tilde{\delta})}(\xi)$ 都包含来自 A 的一个文字。因此，$f_{Q,\ \rho(\tilde{\delta})}$ 在元组 δ 上的取值等于 0。

令 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 和 $\tilde{\sigma}_i$ 为由 δ 改变第 i 位数字 δ_i 得到的元组，改变为 $\bar{\delta}_i$。由于 ψ 在元组 $\tilde{\sigma}_i$ 上的取值等于 1，函数 $f_{Q,\ \rho(\tilde{\delta})}$ 在元组 $\tilde{\sigma}_i$ 上的取值等于 1。因此，在 Q 中存在一条简单路径 ξ，其中只包含基于变量 x_i、来自 A 的文字：若 $i \in \{1, \ldots, k\}$，则为 $\bar{x}_i$；若 $i \in \{k+1, \ldots, n\}$，则为 x_i。对于这条路径，$c_{\rho(\tilde{\delta})}(\xi)$ 在 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 时等于 $\bar{x}_i$，在 $i \in \{k+1, \ldots, n\}$ 时等于 x_i。

因此，我们得到 $f_{Q,\ \rho(\tilde{\delta})} = \bar{x}_1 \vee \cdots \vee \bar{x}_k \vee x_{k+1} \vee \cdots \vee x_n \vee C_1 \vee \cdots \vee C_m$，其中 C_1，……，C_m 是由 A 中的文字构成且各自至少包含两个文字的初等合取。令 $j \in \{1, \ldots, m\}$。那么，C_j 可以表示为 aD，其中 $a \in A$，而 D 是由 A 中的文字构成且不包含 a 的初等合取。显然，$a \vee aD = a$。因此，我们有 $f_{Q,\ \rho(\tilde{\delta})} = \bar{x}_1 \vee \cdots \vee \bar{x}_k \vee x_{k+1} \vee \cdots \vee x_n$。

因此，对于任意恰有 k 个零的元组（b_1，……，b_n）$\in \{0,1\}^n$，$x_1^{b_1} \vee \cdots \vee x_n^{b_n}$ 是由带有某种 $\{1\}$ 故障的开关网络 Q 实现的函数。显然，函数 1 可由网络 Q 实现，其中每条边 Q 都赋值为常数 1，且该网络带有 $\{1\}$ 故障。可以证明，对于任意恰有 k 个零的元组（b_1，……，b_n）$\in \{0,1\}^n$，$1 \neq x_1^{b_1} \vee \cdots \vee x_n^{b_n}$，且 $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ 是这样一个元组集合的最小基数：在该集合中的元组上，函数 1 与函数 $x_1^{b_1} \vee \cdots \vee x_n^{b_n}$ 不同；这些元组均来自 $\{0,1\}^n$，并且满足元组（b_1，……，b_n）属于 $\{0,1\}^n$ 且恰有 k 个零。显然，Q 的任意 $\{1\}$ 故障都是 Q 的 $\{0,1\}$ 故障。根据引理 1，$h_C(Q) \geq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$。

(b) 设 $C = \{0\}$。我们用 P 表示具有 n 个输入变量 x_1、……、x_n 的开关网络，该网络实现对称函数 $\psi = \psi_n^{=\lceil \frac{n}{2} \rceil}$，且满足 $L(P) = n^2 + n$（见第3节）。

设 Q 是一个具有 n 个输入变量 x_1、……、x_n 的开关网络，该网络实现函数 ψ。设 $\tilde{\delta} = (\delta_1$、……、$\delta_n)$ 是集合 $\{0,1\}^n$ 中恰好包含 $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ 个 1 的一个元组。于是 $\psi(\delta) = 1$。为明确起见，我们假设 $\delta = (1$、……、1、0、……、$0)$。由于 $\psi(\delta) = 1$，在 Q 中存在一条连接 Q 的极点的简单路径 ξ，使得与该路径对应的初等合取 $c_\lambda(\xi)$ 对元组 δ 取值为 1，其中 λ 是 Q 的空故障。下面证明 $c_\lambda(\xi) = x_1 \cdots x_k \bar{x}_{k+1} \cdots \bar{x}_n$。

显然，$c_\lambda(\xi)$ 中所有不带否定的变量都属于集合 $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$

而 $c_\lambda(\xi)$ 中所有带否定的变量都属于集合 $B=\{\bar{x}_{k+1},\ldots,\bar{x}_n\}$。设 A 中至少有一个文字不属于 $c_\lambda(\xi)$。那么， $c_\lambda(\xi)$ 在一个 1 的个数少于k 的元组上等于 1。设 B 中至少有一个文字不属于 $c_\lambda(\xi)$。那么， $c_\lambda(\xi)$ 在一个 1 的个数多于 k的元组上等于 1。因此， $c_\lambda(\xi)=x_1\cdots x_k\bar{x}_{k+1}\cdots\bar{x}_n$。

考虑一种 $\{0\}$故障：将不属于路径 ξ的每条边都赋值为常数 0。发生这种故障时，开关网络 Q 实现函数 $c_\lambda(\xi)=x_1\cdots x_k\bar{x}_{k+1}\cdots\bar{x}_n$。

因此，对于任意恰好含有 k 个 1 的元组 $(b_1、\ldots\ldots、b_n)\in\{0,1\}^n$，函数 $x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}$可由发生某种 $\{0\}$故障的开关网络 Q 实现。显然，函数 0 可由发生 $\{0\}$故障的 Q 实现；这种故障是将Q的每条边都赋值为常数 0。可以证明，对于任意恰好含有 k 个 1 的元组 $(b_1、\ldots\ldots、b_n)\in\{0,1\}^n$，$\left(\begin{matrix}n\\ \lceil\frac{n}{2}\rceil\end{matrix}\right)$是这样一个元组集合的最小基数：集合中的元组取自 $\{0,1\}^n$，且函数 $\bar{0}$ 在这些元组上的取值不同于函数 $x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}$；其中，元组 $(b_1、\ldots\ldots、b_n)$ 属于 $\{0,1\}^n$，并且恰好含有 k 个 1。根据引理 1， $h_C(\bar{Q})\geq\left(\begin{matrix}n\\ \lceil\frac{n}{2}\rceil\end{matrix}\right)$。 □

注记 1。 众所周知， $\left(\begin{matrix}n\\ \lceil\frac{n}{2}\rceil\end{matrix}\right)=\max\left\{\binom{n}{k}:\ k=0,\ldots,n\right\}$。因此

$$\left(\begin{matrix}n\\ \lceil\frac{n}{2}\rceil\end{matrix}\right)\geq\frac{2^n}{n+1}\,.$$

5 诊断决策树构造的复杂性

本节中，我们将考察另一个否定性结果：证明在开关网络中构造用于常值故障诊断的决策树这一问题是 NP 困难的。

设 $C\in\{\{0,1\},\{0\},\{1\}\}$。现在我们定义一个算法问题 $Con(C)$：给定一个具有 $L(P)\geq 1$ 的开关网络 P，以及一个由 P 的 C-故障组成的集合 R，要求构造一个决策树 Γ，以解决针对 P 和 R 的 C-故障诊断问题。可以证明，存在一棵能够解决该问题且至多有 $2|R|-1$ 个节点的决策树。

定理 3。 令 $C\in\{\{0,1\},\{0\},\{1\}\}$。则问题 $Con(C)$ 是 *NP* 困难。

证明。 假设存在一种算法，能够解决问题 $Con(C)$，且具有多项式时间复杂度。现在我们证明，在这种情况下，存在一种具有多项式时间复杂度、能够解决 NP 困难的顶点覆盖问题的算法。该问题要求：给定一个简单无向图 $G=(V,E)$，其顶点集合为 V，边集合为 E，以及自然数 m, $0<m<|V|$，判断是否存在集合 W，使其为集合 V 的子集，并且 E 中的每条边都至少与 W 和 $|W|\leq m$ 中的一个节点相接。令 $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$ 和 $E=\{\{v_{i_1},v_{j_1}\},\ldots,\{v_{i_t},v_{j_t}\}\}$。考虑布尔函数 $\psi_G(x_1,\ldots,x_n)=(x_{i_1}\vee x_{j_1})\cdots(x_{i_t}\vee x_{j_t})$。显然，上述顶点覆盖问题有解，当且仅当存在一个元组 $(\delta_1,\ldots,\delta_n)\in\{0,1\}^n$，其中 1 的个数不超过 m，且满足 $\psi_G(\delta_1,\ldots,\delta_n)=1$。同样显然，所考虑的问题有解，当且仅当 $\psi_n^{\geq m+1}\neq\psi_n^{\geq m+1}\vee\psi_G$ （参见第3节中函数 $\psi_n^{\geq m+1}$ 的定义）。

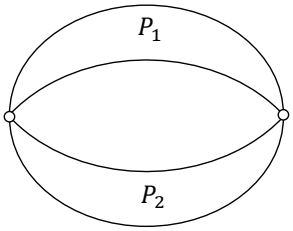

图4：开关网络 Q_1



图5：子网络 P_2

(a) 令 $C \in \{\{0,1\},\{0\}\}$。显然，我们可以在关于图 G 描述长度的多项式时间内，构造出图4所示的开关网络 Q_1，其中子网络 P_1 实现函数 $\psi_n^{\geq m+1}$，并含有 n^2+n 条边（见第3节）；子网络 P_2 实现函数 ψ_G，并含有 $2t$ 条边（见图5）。令 $R=\{\lambda,\rho\}$，其中 λ 是 Q_1 的空故障，ρ 是 Q_1 的一种故障，该故障将子网络 P_2 的每条边都赋值为常数 0。R 中的两种故障都是 $\{0\}$-故障，因此也是 $\{0,1\}$-故障。显然，带有故障 λ 的网络 Q_1 实现函数 $\psi_n^{\geq m+1} \vee \psi_G$，而带有故障 ρ 的网络 Q_1 实现函数 $\psi_n^{\geq m+1}$。

将求解问题 $Con(C)$ 且具有多项式时间复杂度的算法应用于网络 Q_1 和故障集合 R。由此，我们得到一个决策树 Γ，它能够为 Q_1 和 R诊断 C-故障。将 Γ应用于故障为 λ 的网络 Q_1，并将 Γ 应用于故障为 ρ的网络 Q_1。当且仅当 Γ 对这两种故障的处理结果不同时，所考虑的顶点覆盖问题才有解。注意，构造 Q_1、λ、ρ 和 Γ，以及将 Γ 应用于 Q_1和故障 λ、ρ 的过程，都可以在多项式时间内完成。因此，如果问题 $Con(C)$存在多项式时间算法，那么顶点覆盖问题也存在多项式时间算法。由此，问题 $Con(C)$ 是 NP 困难的。

(b) 设 $C=\{1\}$。显然，我们可以在依赖于图 G 描述长度的多项式时间内，构造图 6 所示的开关网络 Q_2，其中子网络 P_1 实现函数 $\psi_n^{\geq m+1}$，并且有 n^2+n 条边（见第3节）；子网络 P_2 实现函数 ψ_G，并且有 $2t$ 条边（见图 5）。设$R=\{\lambda,\rho\}$，其中 λ 是 Q_2 的空故障，而 ρ 是 Q_2 的一个 $\{1\}$-故障，即将网络 Q_2 右侧分别标有文字 x_1 和 $\bar{x}_1$ 的两条边赋值为常数 1。显然，带有故障 λ 的网络 Q_2 实现函数 $\psi_n^{\geq m+1}$，带有故障 ρ 的网络 Q_2 实现函数 $\psi_n^{\geq m+1} \vee \psi_G$。

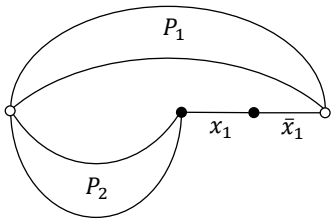

图6：开关网络 Q_2

将求解问题 $Con(C)$ 且具有多项式时间复杂度的算法应用于网络 Q_2 和故障集合 R。由此得到决策树 Γ，它可以求解针对 Q_2 和 R的 C-故障诊断问题。将 Γ应用于带有故障 λ 的网络 Q_2，并将 Γ 应用于带有故障 ρ的网络 Q_2。当且仅当针对这些故障的 Γ 运行结果不同时，所考虑的顶点覆盖问题才有解。注意，开关网络 Q_2、故障 λ、 ρ 和决策树 Γ 的构造过程，以及将 Γ应用于 Q_2 和故障 λ、 ρ 的过程，都可以在多项式时间内完成。因此，如果问题 $Con(C)$存在多项式时间算法，那么顶点覆盖问题也存在多项式时间算法。由此可知，问题 $Con(C)$是 NP 困难的。

□

6 结论

本文研究了任意开关网络中三种常值故障的诊断决策树。我们证明，存在一些简单的开关网络，其常值故障诊断决策树的深度很大。我们还证明，存在一些简单的开关网络，对于所有实现相同函数的开关网络，其常值故障诊断决策树的深度都很大。我们证明，构造诊断决策树这一问题是 NP 困难的。

致谢

本文报道的研究得到了阿卜杜拉国王科技大学（KAUST）的支持。

参考文献

[1] Busbait, M., Chikalov, I., Hussain, S., Moshkov, M.：有限基上的只读一次接触网络中常值故障的诊断。离散应用数学**184**，76–88（2015年）[2] Busbait, M., Moshkov, M.：有限基上的只读一次接触网络中三类常值故障的诊断。理论计算机科学**630**，26–42（2016年）

[3] Chegis, I.A., Yablonskii, S.V.：电路控制的逻辑方法。苏联科学院数学研究所学报**51**，270–360（1958年）。（俄文）[4] Goduhina, G.B.：无迭代接触网络中用于常值故障诊断的条件测试实验研究。载于：《组合代数与概率方法在应用数学中的应用》，第16–21页。高尔基大学出版社，高尔基（1988年）。（俄文）[5] Jukna, S.：布尔函数复杂性——进展与前沿，《算法与组合》，第27卷。施普林格（2012年）[6] Madatyan, Kh.A.：无重复接触电路的完全测试。载于：《控制论问题》，第23卷，第103–118页。科学出版社，莫斯科（1970年）。（俄文）[7] Red’kin, N.P.：接触电路的诊断测试。莫斯科大学数学通报**74(2)**，62–64（2019年）[8] Shannon, C.E.：继电器与开关电路的符号分析。美国电气工程师学会汇刊**57(12)**，713–723（1938年）