arXiv:2302.02757v1 [math.CT] 6 Feb 2023

拟一致结构与函子

Minani Iragi*, [a] 和 David Holgate[b]

[a]南非大学数学科学系，邮政信箱392号，003 Unisa，南非。[b]西开普大学数学与应用数学系，贝尔维尔7535，南非；以及布尔诺理工大学机械工程学院数学研究所，Technick´a 2，616 69 布尔诺，捷克共和国。

摘要

我们研究由函子诱导的若干范畴拟一致结构。我们从一个具有适当（$\mathcal{E}$，$\mathcal{M}$）分解系统的范畴 $\mathcal{C}$ 出发，定义相对于 $\mathcal{C}$ 上两个合成拓扑结构（特别是两个拟一致性）的 $\mathcal{C}$态射的连续性，并用它来描述由 $\mathcal{C}$的带点自函子和余带点自函子诱导的拟一致性。特别地，我们证明，$\mathcal{C}$ 的反射子范畴上的每个拟一致性都可以提升为 $\mathcal{C}$ 上的最粗拟一致性，使得每个反射态射都是连续的。

将赋有拟一致性的范畴视为广义“空间”，我们把 $\mathcal{C}$-态射关于拟一致性的连续性推广到函子。我们证明，对于一个 $\mathcal{M}$纤维化，或一个具有右伴随的函子，可以具体构造使该函子$continuous$的最粗拟一致性。我们证明的结果涵盖了针对范畴闭包算子所得的结果。论文末尾讨论的若干例子展示了我们的结果。

电子邮箱地址：[a]84miragi2016@mail.com, [b]dholgate@uwc.ac.za

*通讯作者。第一作者的研究工作基于南非国家研究基金会全额资助的研究（资助编号：129519）。第二作者也谨此感谢南非国家研究基金会，以及欧洲社会基金和捷克共和国国家预算通过项目CZ.02.2.69/0.0/0.0/16-027/0008371 提供的支持。

AMS主题分类（2020年）：18A05、18F60、54A15、54B30。

关键词：闭包算子、合成拓扑结构、拟一致结构、（余）带点自函子和伴随函子。

1 引言

范畴闭包算子的引入（[6]）是 Dikranjan 和 Giuli 开始研究范畴上的拓扑结构的出发点。这一方法最终促成了范畴内部算子（[20]）和邻域算子（[15]）的引入。尽管已证明范畴内部算子与邻域算子之间存在良好的联系，但在范畴中，闭包算子与邻域算子之间一直缺少良好的关联，直到最近范畴拓扑生成结构（[14, 16]）被引入。事实上，范畴拓扑生成结构的大类与所有邻域算子的大类序同构，并且包含所有内部算子和所有闭包算子这两个大类作为反射子范畴。

对范畴拓扑生成结构定义的自然推广，引出了范畴合成拓扑生成结构这一概念，为研究范畴上的拟一致结构提供了便利的框架。这是（[13, 17]）一文的出发点，该文引入并研究了范畴拟一致结构。此外，使用合成拓扑结构可以将拟一致性描述为一族范畴闭包算子（例如，参见 [12]）。关于拟一致性与闭包算子之间这一关系的最新论述见 [13, 18] 。

本文旨在进一步研究范畴拟一致结构。考虑一个具有适当的 $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ 分解系统的范畴 $\mathcal{C}$，我们证明，对于 $\mathcal{C}$ 上的合成拓扑结构 $\mathcal{S}$，以及 $\mathcal{C}$ 的一个 $\mathcal{E}$- 带点自函子（F,η），存在 $\mathcal{C}$ 上最粗的合成拓扑结构 $\mathcal{S}^{F,\eta}$，使得每个 $\eta_X\colon X \longrightarrow FX$ 都是 $(\mathcal{S}^{F,\eta},\mathcal{S})$-连续的。由于范畴拟一致性等价于余完美合成拓扑生成结构，而简单余完美合成拓扑结构等价于幂等闭包算子（例如参见 [12]），$\mathcal{S}^{F,\eta}$ 使我们能够构造由带点自函子诱导的拟一致结构和闭包算子。特别地，我们证明，$\mathcal{C}$ 的一个反射子范畴上的每个拟一致性 $\mathcal{U}$，都可以提升为 $\mathcal{C}$ 上最粗的拟一致性 $\mathcal{U}^{F,\eta}$，使得每个反射态射都是 $(\mathcal{U}^{F,\eta},\mathcal{U})$-连续的。当应用于空间时，$\mathcal{U}^{F,\eta}$ 结果表明描述了由反射映射诱导的初始结构。对于余带点自函子的情形，也将得到对偶结果。

对于函子 $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$，以及分别定义在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{C}$ 上的拟一致性 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$，我们引入 F 的（$\mathcal{U},\mathcal{V}$）-连续性。我们证明，若 F 是一个 $\mathcal{M}$-纤维化，或具有右伴随，则可以具体描述 $\mathcal{A}$ 上最粗的拟一致性 $\mathcal{V}^F$，使得 F 是（$\mathcal{V}^F,\mathcal{V}$）-连续的。随后，我们利用范畴余完美合成拓扑结构，具体描述使 F 连续的最大闭包算子。

在第 4 节中，我们描述由（余）带基点自函子诱导的范畴拟一致结构，并利用合成拓扑结构构造这些结构（命题 4。4，定理 4。4 和 4。9）。值得注意的是，这些拟一致结构的特例对应于 Dikranjan 和 Tholen 在 [4]（第 5 章，定理 5。12 和 5.12^*）中得到的闭包算子。第 5 节专门讨论函子相对于两个拟一致结构的连续性，以及如何利用这一性质描述由一个 $\mathcal{M}$-纤维化或具有右伴随的函子所诱导的初始拟一致结构（命题 5。4、5。7 和 5。9，定理 5。5 和 5。8）。最后，在第 6 节中，我们给出若干例子，以说明所得结果。

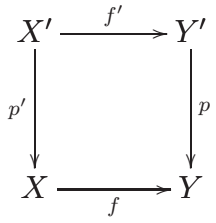
2 预备知识

关于范畴概念，我们统一参考 [1]。本文所使用的范畴闭包算子的基本事实可见于 [4] 或 [6]。对于范畴的拓扑生成结构、拟一致结构和合成拓扑结构，我们采用 [17]和 [14]中的定义。全文中，我们考虑一个范畴 $\mathcal{C}$，其态射带有一个适当的（$\mathcal{E}$，$\mathcal{M}$）分解系统。假设范畴$\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{M}$-完备的，从而 $\mathcal{M}$-态射沿 $\mathcal{C}$-态射的拉回以及 $\mathcal{M}$-态射的任意 $\mathcal{M}$-交都存在，并且仍属于 $\mathcal{M}$。对于任意 $X \in \mathcal{C}$，sub$X = \{m \in \mathcal{M} \mid \mathrm{cod}(m) = X\}$。其序关系定义如下：当且仅当存在$j$ 使得 $m \circ j = n$时，有 $n \leq m$。如果 $m \leq n$ 且 $n \leq m$，则二者同构。在这种情况下，我们简写为 $m = n$。Sub$X$ 是一个（可能很大的）完备格，最大元为1_X： $X \longrightarrow X$；最小元为 0_X： $O_X \longrightarrow X$。

任意 $\mathcal{C}$-态射 f： $X \longrightarrow Y$ 当且仅当对于所有 $n \in$sub$Y$、 $m \in$sub$X$， $f(m)$ 为 $\mathcal{M}$-分量，且 $\mathcal{E}$、$\mathcal{M}$ 是 $f \circ m$ 的分解，而 $f^{-1}(n)$ 是沿 f 对 n 的拉回时， $X \longrightarrow Y$ 诱导像/原像伴随 $f(m) \leq n$。由像/原像伴随可得，对于任意 $n \in$sub$Y$ 和 $m \in$sub$X$， $f(f^{-1}(n)) \leq n$（若 $f \in \mathcal{E}$ 且 $\mathcal{E}$ 沿 $\mathcal{M}$-态射对拉回封闭，则 $f(f^{-1}(n)) = n$），以及 $m \leq f^{-1}(f(m))$（若 $f \in \mathcal{M}$，则 $m = f^{-1}(f(m))$）。

反复应用伴随性，我们得到下面的引理。

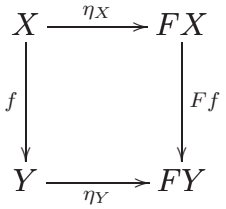
引理 1. 设



设其为一个交换图。那么对于任意子对象 $n \in \mathrm{sub}Y'$, $p'(f'^{-1}(n)) \leq f^{-1}(p(n))$。

定义 1. *A pointed endofunctor* 的 $\mathcal{C}$ 是一个有序对 (F, η)，由一个函子 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$和一个自然变换 $\eta\colon 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow F$组成。

对于任意 $\mathcal{C}$-态射 $f\colon X \longrightarrow Y$，$(F, \eta)$ 导出下列交换图。



如果每个 $\eta_X \in \mathcal{F}$ 都是 $\mathcal{C}$-态射的一个类，其中 $\mathcal{F}$，那么 (F, η) 是 $\mathcal{F}$-带点的。$\mathcal{C}$ 的余带点自函子可对偶地定义。

定义 2. 关于 $\mathcal{M}$ 的 $\mathcal{C}$ 上的 *A closure operator* c 由映射族$\{c_X\colon \mathrm{sub}X \longrightarrow \mathrm{sub}X \mid X \in \mathcal{C}\}$ 给出，满足：

$(C1)$ $m \leq c_X(m)$ 对所有 $m \in \mathrm{sub}X$ 均成立；

$(C2)$ $m \leq n \Rightarrow c_X(m) \leq c_X(n)$ 对所有 $m, n \in \mathrm{sub}X$；

$(C3)$ 每个态射 $f\colon X \longrightarrow Y$都是 c-连续的，也就是说：$f(c_X(m)) \leq c_Y(f(m))$ 对所有$m \in \mathrm{sub}X$。

我们用 $\mathrm{CL}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{C}$ 上相对于$\mathcal{M}$的所有闭包算子组成的大类，其排序如下：$c \leq c'$若对所有 $m \in \mathrm{sub}X$和 $X \in \mathcal{C}$，$c_X(m) \leq c'_X(m)$。

定义 3. $\mathcal{C}$上的闭包算子 c是 *idempotent*的，当且仅当对所有 $m \in \mathrm{sub}X$ 和 $X \in \mathcal{C}$，$c_X(c_X(m)) = c_X(m)$。

$\mathrm{ICL}(\mathcal{C}\ \mathcal{M})$ 将表示所有定义在 $\mathcal{C}$.

定义 4. *[14] A topogenous order* $\sqsubset$ 在 $\mathcal{C}$ 上是一个由 $\{\sqsubset_X \mid X \in \mathcal{C}\}$ 关系组成的族，其中每个关系$\sqsubset_X$ 定义在子X上：

$(T1)$ $m \sqsubset_X n \Rightarrow m \leq n$ 对于每个 $m, n \in$ 子X,

$(T2)$ 对每个 $m, n, p, q \in \mathrm{sub}X$, $m \leq n \sqsubset_X p \leq q \Rightarrow m \sqsubset_X q$，并且

$(T3)$ 每个态射 $f\colon X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{C}$ 都是 $\sqsubset$-连续的, $m \sqsubset_Y n \Rightarrow f^{-1}(m) \sqsubset_X f^{-1}(n)$ 对每个 $m, n \in \mathrm{sub}Y$ 成立。

给定 $\mathcal{C}$ 上的两个拓扑生成序 $\sqsubset$ 和 $\sqsubset'$，当且仅当对所有 $m, n \in \mathrm{sub}X$, $m \sqsubset_X n \Rightarrow m \sqsubset'_X n$。 $\mathcal{C}$ 上所有拓扑生成序构成的有序 conglomerate 记为 TORD($\mathcal{C}, \mathcal{M}$)。

称拓扑生成序 $\sqsubset$ 为

(1) $\bigwedge$-*preserving*，若 $(\forall i \in I\colon m \sqsubset_X n_i) \Rightarrow m \sqsubset_X \bigwedge n_i$，并且

(2) *interpolative*，若对所有 $X \in \mathcal{C}$, $m \sqsubset_X n \Rightarrow (\exists\, p) \mid m \sqsubset_X p \sqsubset_X n$。

所有保 $\bigwedge$ 且具插值性的拓扑序所构成的有序大类分别记为 $\bigwedge$-TORD($\mathcal{C}, \mathcal{M}$) 和 INTORD($\mathcal{C}, \mathcal{M}$)。 $\bigwedge$-INTORD($\mathcal{C}, \mathcal{M}$) 表示所有具插值性且保交的拓扑序所构成的大类。

命题 1。 *[14]* $\bigwedge - TORD(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ 与 $CL(\mathcal{C}, \mathcal{M})$序同构。彼此的逆向对应关系如下:

$$c_X^{\sqsubset}(m) = \bigwedge\{p \mid m \sqsubset_X p\} \text{ and } m \sqsubset_X^c n \Leftrightarrow c_X(m) \leq n \text{ for all } X \in \mathcal{C}.$$

推论 1。 $\bigwedge - INTORD(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ 与 $ICL(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ 序同构。

3 拟一致结构

众所周知（例如参见 *[8]*），集合 X 上的（围绕）拟一致性可以等价地表示为适当的映射族 $U : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$。由于这些映射可以很容易地扩展为 $\mathcal{P}(X)$ 上的自映射，因此可以将 $\mathcal{C}$ 上的拟一致性看作：对于每个 $X \in \mathcal{C}$, sub$X$ 上一族适当的自映射。这正是定义 5 所表达的观点。我们用 $\mathcal{F}$(sub$X$) 表示对于每个 $X \in \mathcal{C}$., sub$X$ 上的自函子范畴。显然，对于所有 $U, V \in \mathcal{F}$(sub$X$)，若对所有 $m \in$sub$X$ 都有 $U(m) \leq V(m)$，则 $U \leq V$。

定义 5. *[17] A quasi-uniformity* 上的 $\mathcal{C}$ 关于 $\mathcal{M}$ 是一个族 $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_X \mid X \in \mathcal{C}\}$ 满足 $\mathcal{U}_X$ 的满子范畴 $\mathcal{F}(子X)$ 对每个 X 满足:

$(U1)$ 对任意的 $U \in \mathcal{U}_X$, $1_X \leq U$,

$(U2)$ 对任意的 $U \in \mathcal{U}_X$，存在 $U' \in \mathcal{U}_X$ 使得 $U' \circ U' \leq U$，$(U3)$ 对任意的 $U \in \mathcal{U}_X$和 $U \leq U'$, $U' \in \mathcal{U}_X$, $(U4)$ 对任意的 $U, U' \in \mathcal{U}_X, U \wedge U' \in \mathcal{U}_X$, $(U5)$ 对任意的 $\mathcal{C}$-态射 f: $X \longrightarrow Y$和 $U \in \mathcal{U}_Y$，存在 $U' \in \mathcal{U}_X$ 使得 $f(U'(m)) \leq U(f(m))$，对任意的 $m \in$子X。

我们用 QUnif$(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{C}$ 上所有拟一致结构构成的大类。其序定义如下：$\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ 当且仅当对所有 $X \in \mathcal{C}$ 和 $U \in \mathcal{U}_X$，存在 $V \in \mathcal{V}_X$ 使得$V \leq U$。在大多数情况下，我们通过定义拟一致性的一个基来描述它。$\mathcal{C}$ 上拟一致性 $\mathcal{U}$ 的一个基是一个族 $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_X \mid X \in \mathcal{C}\}$，其中每个 $\mathcal{B}_X$ 都是 $\mathcal{F}$(sub$X$) 的满子范畴，对所有 $X \in \mathcal{C}$ 均如此，并且满足定义 5 中除 $(U3)$ 外的所有公理。如果对于任意 $X \in \mathcal{C}$，$\mathcal{B}_X$ 都是仅含一个成员 V 的基元素，我们就记作 V_X。$\mathcal{C}$ 上拟一致性的一个基是 $transitive$，当且仅当对所有 $X \in \mathcal{C}$ 和 $U \in \mathcal{B}_X$，$U \circ U = U$。具有传递基的拟一致性称为 $a\ transitive\ quasi\text{-}uniformity$。$\mathcal{C}$ 上所有传递拟一致性构成的有序聚集体记作 TQUnif$(\mathcal{C}, \mathcal{M})$。

定义6. *[17]* $A\ syntopogenous\ structure$ 在 $\mathcal{C}$ 关于 $\mathcal{M}$ 是一个族 $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_X \mid X \in \mathcal{C}\}$ 使得每个 $\mathcal{S}_X$ 都是定义在子集上的关系集合X 并满足:

$(S1)$ 每个 $\sqsubset_X \in \mathcal{S}_X$都是定义在子集$X$上的关系，满足$(T1)$和$(T2)$,

$(S2)$ $\mathcal{S}_X$ 关于包含构成一个有向集,

$(S3)$ $\sqsubset_X = \bigcup \mathcal{S}_X$是一个插值拓扑序。

拓扑生成序的序关系可以按以下方式扩展到合成拓扑结构：$\mathcal{S} \leq \mathcal{S}'$如果对于所有 $X \in \mathcal{C}$和 $\sqsubset_X \in \mathcal{S}_X$，都存在 $\sqsubset'_X \in \mathcal{S}'_X$使得 $\sqsubset_X \subseteq \sqsubset'_X$。所得的大类记为 SYnt$(\mathcal{C}, \mathcal{M})$。$\mathcal{S} \in$ SYnt$(\mathcal{C}, \mathcal{M})$是 $co\text{-}perfect$的，如果对于所有 $X \in \mathcal{C}$，每个 $\sqsubset_X \in \mathcal{S}_X$都是 $\bigwedge$-保持的。如果每个 $\sqsubset_X \in \mathcal{S}_X$都可插值，则它是 $interpolative$的。所有插值余完美合成拓扑结构构成的有序聚集体记为 INTCSYnt$(\mathcal{C}, \mathcal{M})$。所有余完美合成拓扑结构构成的有序聚集体记为 CSYnt$(\mathcal{C}, \mathcal{M})$。$\mathcal{S} \in$如果 $\mathcal{S}_X = \{\sqsubset_X\}$，则 SYnt$(\mathcal{C}, \mathcal{M})$是 $simple$ 的，其中$\sqsubset_X$ 对于任意 $X \in \mathcal{C}$都是一个插值拓扑序。

定理 1. *[17]* QUnif$(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ 与 CSYnt$(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ 序同构。彼此互逆的赋值 $\mathcal{U} \longmapsto \mathcal{S}^{\mathcal{U}}$ 和 $\mathcal{S} \longmapsto \mathcal{U}^{\mathcal{S}}$ 由下式给出

$$\mathcal{S}^{\mathcal{B}}_X = \{\sqsubset^U_X \mid U \in \mathcal{B}_X\}\ where\ m \sqsubset^U_X n \Leftrightarrow U(m) \leq n,\ and$$

$$\mathcal{B}_X^{\mathcal{S}} = \{U^{\sqsubset} \mid \sqsubset_X \in \mathcal{S}_X\} \text{其中 } U^{\sqsubset}(m) = \bigwedge\{n \mid m \sqsubset_X n\}$$

对所有 $X \in \mathcal{C}$ 和 $m,\ n \in \mathrm{sub}X$。

由于 $\mathcal{S}_X \subseteq \bigwedge\text{-}TORD\ (\mathcal{C}, \mathcal{M})$ 对于每个 $\mathcal{S} \in CSYnt(\mathcal{C}, \mathcal{M})$，由上述定理和命题 *1* 可知，$\mathcal{C}$ 上的拟一致性是闭包算子族的集合。

由推论 *1* (另见 *[18],* 推论 4.2.3)，$\bigwedge\text{-}INTORD(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ 同构于幂等闭包算子的大类；由定理 *1*，$\mathrm{CSYnt}(\mathcal{C}, \mathcal{M}) \cong QUnif(\mathcal{C}, \mathcal{M})$。因此，$\mathcal{C}$ 上的每个幂等闭包算子都是一种拟一致性。

4 由（余）指向端函子诱导的拟一致结构

在本节中，假定类 $\mathcal{E}$ 在沿 $\mathcal{M}$-态射的拉回下保持稳定。

定义公理 $(S3)$ 定义*6* 已经包含了以下事实：中的每个态射 $\mathcal{C}$ 都必须相对于该合成拓扑结构是连续的。在下一个定义中，我们将引入 $\mathcal{C}$-态射相对于 $\mathcal{C}$上的两个合成拓扑结构的连续性。我们的目标是利用此定义从已有的合成拓扑结构构造新的合成拓扑结构，尤其是从已有的拟一致性和闭包算子构造新的拟一致性和闭包算子。它们尤为重要，因为事实证明，它们描述了空间中由某些映射诱导的初始结构。

定义7. 设 $\mathcal{S},\ \mathcal{S}' \in \mathrm{SYnt}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$。态射 $f:\ X \longrightarrow Y$ 若满足以下条件，则称为（$\mathcal{S}, \mathcal{S}'$）-连续的：对于所有 $\sqsubset'_Y \in \mathcal{S}'_Y$，存在 $\sqsubset_X \in \mathcal{S}_X$，使得对于所有 $m \in \mathrm{sub}X$和 $n \in \mathrm{sub}Y$，有 $f(m) \sqsubset'_Y n \Rightarrow m \sqsubset_X f^{-1}(n)$；等价地，对于所有 $n, m \in \mathrm{sub}Y.$，有 $m \sqsubset'_Y n \Rightarrow f^{-1}(m) \sqsubset_X f^{-1}(n)$。

由于每个 $\mathcal{C}$-态射 f 都是 $(\mathcal{S}, \mathcal{S})$-连续且 $(\mathcal{S}', \mathcal{S}')$-连续的，因此当 $\mathcal{S}' \leq \mathcal{S}$ 时，f 是 $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$-连续的。由于当每个 $\mathcal{S}_X = \{\sqsubset_X\}$ 都满足 $\sqsubset_X$ 为插值拓扑序时，$\mathcal{S}$ 是简单的，因此我们得到以下命题。

命题2. 设 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 为简单合成拓扑结构，即 $\mathcal{S}_X = \{\sqsubset_X\}, \mathcal{S}'_X = \{\sqsubset'_X\} \subseteq \mathrm{INTORD}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$。那么，当且仅当对于所有 $m \in \mathrm{sub}X$ 和 $n \in \mathrm{sub}Y$，$f(m) \sqsubset'_Y n \Rightarrow m \sqsubset_X f^{-1}(n)$ 时，f 是 $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$- 连续的。

下一个命题由定理 *1* 得出。

命题 3. 若 $\mathcal{S},\ \mathcal{S}' \in \mathrm{SYnt}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$，则 f 是 $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$-连续的，当且仅当对任意$V \in \mathcal{B}_Y^{\mathcal{S}'}$，存在 $U \in \mathcal{B}_X^{\mathcal{S}}$使得 $f(U(m)) \leq V(f(m))$ 对所有 $m \in \mathrm{sub}X$成立。

证明。假设 $f:\ X \longrightarrow Y$ 是 $(\mathcal{S},\mathcal{S}')$-连续的，且 $\mathcal{S},\ \mathcal{S}' \in \mathbf{SYnt}(\mathcal{C},\mathcal{M})$。那么对任意 $V \in \mathcal{B}_Y^{\mathcal{S}'}$，存在确定 V 的 $\sqsubset'_Y \in \mathcal{S}'_Y$，并且存在 $\sqsubset_X \in \mathcal{S}_X$ 使得 $f(m)\ \sqsubset'_Y n \Rightarrow m \sqsubset_X f^{-1}(n)$。现在 $U(m) = U_X^{\sqsubset}(m) = \bigwedge\{p \mid m \sqsubset_X p\} \leq \bigwedge\{f^{-1}(n) \mid f(m)\ \sqsubset'_Y\ n\} = f^{-1}(V(f(m))) \Rightarrow U(m) \leq f^{-1}(V(f(m)) \Leftrightarrow f(U(m)) \leq V(f(m))$。反过来，假设对任意 $V \in \mathcal{B}_Y^{\mathcal{S}}$，存在 $U \in \mathcal{B}_X^{\mathcal{S}}$ 使得 $f(U(m)) \leq V(f(m))$。现在，对任意 $\sqsubset'_Y \in \mathcal{S}'_Y$，由定理 1，存在 $V \in \mathcal{B}^{\mathcal{S}}$ 使得 $\sqsubset_Y = \sqsubset^V$。因此 $f(m)\ \sqsubset'_Y\ n \Leftrightarrow V(f(m)) \leq n \Rightarrow f(U(m)) \leq n \Leftrightarrow U(m) \leq f^{-1}(n) \Leftrightarrow m \sqsubset_X^U f^{-1}(n) \Leftrightarrow m \sqsubset_X f^{-1}(n)$。

□

上面的命题给出了下一个定义。

定义 8. 设 $\mathcal{U},\ \mathcal{U}' \in \mathbf{QUnif}(\mathcal{C},\mathcal{M})$，且 $f:\ X \longrightarrow Y$ a $\mathcal{C}$-态射。若对于任意 $U' \in \mathcal{U}'_Y$，存在 $U \in \mathcal{U}_X$ 使得对所有 $m \in \mathbf{sub}X$，$f(U(m)) \leq U'(f(m))$，则称 f 是 $(\mathcal{U},\ \mathcal{U}')$-连续的。

命题 2 和推论 1 使我们能够证明以下结果。

命题 4. 设 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 是简单且余完备的综合拓扑结构，即 $\mathcal{S}_X = \{\sqsubset_X\}$，$\mathcal{S}'_X = \{\sqsubset'_X\} \subseteq \bigwedge - INTORD(\mathcal{C},\mathcal{M})$。那么，当且仅当对所有 $m \in \mathbf{sub}X$，$f(c_X^{\sqsubset}(m)) \leq c_X^{\sqsubset'}(f(m))$ 时，f 是 $(\mathcal{S},\mathcal{S}')$-连续的。

定义 9. [4] 令 $c, c' \in \mathbf{CL}(\mathcal{C},\mathcal{M})$，且 $f:\ X \longrightarrow Y$ 是一个 $\mathcal{C}$-态射。若对所有 $m \in \mathbf{sub}X$，都有 $f(c_X(m)) \leq c'_X(f(m))$，则称 f 是 $(c,\ c')$-连续的。

对于 $\mathcal{C}$ 上的合成拓扑结构 $\mathcal{S}$ 以及由 $\mathcal{C}$-态射组成的类 $\mathcal{F}$，我们要问：是否存在 $\mathcal{C}$ 上最粗的合成拓扑结构 $\mathcal{S}'$，使得 $\mathcal{F}$ 中的每个态射都是 $(\mathcal{S}',\mathcal{S})$-连续的。在下一个定理中，我们针对以下情形给出答案：$\mathcal{F} = \{\eta_X :\ X \in \mathcal{C}\}$，其中 (F,η) 是 $\mathcal{C}$ 上的一个 $\mathcal{E}$-带点自函子。稍后我们将讨论一个在某种意义上对偶的情形。另请注意，在闭包算子的情形下也有人提出过类似的问题（见[4], 第 5 章）。我们证明，在 ([4]) 中得到的结果可以由我们在此证明的结果推导出来。

定理 2. 设 (F,η) 是 $\mathcal{C}$ 上关于 $\mathcal{M}$ 的 $\mathcal{E}$-带点自函子，且 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{C}$ 上关于 $\mathcal{M}$ 的合成拓扑结构。那么，对于某个 $p \in$ 子 FX，$\mathcal{S}^{F,\ \eta}{}_X = \{\sqsubset_X^{F,\eta} \mid \sqsubset_{FX} \in \mathcal{S}_{FX}\}$ 满足 $m \sqsubset^{F,\ \eta}{}_X\ n \Leftrightarrow \eta_X(m) \sqsubset_{FX} p$ 且 $\eta_X^{-1}(p) \leq n$，它是 $\mathcal{C}$ 上关于 $\mathcal{M}$ 的最粗合成拓扑结构，并且每个 $\eta_X:\ X \longrightarrow FX$ 都是 $(\mathcal{S}^{F,\ \eta},\mathcal{S})$-连续的。若 $\mathcal{S}$ 是插值的（余完美的），则 $\mathcal{S}^{F,\ \eta}$ 也是插值的（分别为余完美的）。

证明。$\mathcal{S}^{F,\ \eta}$ 显然是一个合成拓扑结构，并且 η_X 是 $(\mathcal{S}^{F,\ \eta},\mathcal{S})$-连续的，因为对于所有 $\sqsubset_X \in \mathcal{S}_X, \eta_X(m)\ \sqsubset_{FX}\ n \Rightarrow \eta_X(m)\ \sqsubset_{FX}\ (\eta_X(\eta_X^{-1}(n))) \Leftrightarrow m \sqsubset^{F,\ \eta}{}_X\ \eta_X^{-1}(n)$。

若 $\mathcal{S}'$ 是 $\mathcal{C}$ 上的另一个合成拓扑结构，且 η_X 是（$\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}$）-连续的，则对于任意 $\sqsubset^{F,}{}_X{}^{\eta} \in \mathcal{S}^{F,}{}_X{}^{\eta}$, $m \sqsubset^{F,}{}_X{}^{\eta} n \Leftrightarrow \eta_X(m) \sqsubset_{FX} p$和$\eta_X^{-1}(p) \leq n$。这意味着存在$\sqsubset'_X \in \mathcal{S}'_X$ 使得 $m \sqsubset'_X \eta_X^{-1}(p) \leq n \Rightarrow m \sqsubset'_X n$. 因此 $\mathcal{S}^{F,\eta} \leq \mathcal{S}'$。

如果 $\mathcal{S}$是插值的且 $m \sqsubset^{F,}{}_X{}^{\eta} n$，那么对于某个 $p \in$子FX， $\eta_X(m) \sqsubset_{FX} p$以及 $\eta_X^{-1}(p) \leq n$。这意味着存在一个 $l \in$子FX，使得 $\eta_X(m) \sqsubset_{FX} l \sqsubset_{FX} p$。因此$\eta_X(m) \sqsubset_{FX} \eta_X(\eta_X^{-1}(l)) \sqsubset_{FX} p$，也就是说 $m \sqsubset^{F,}{}_X{}^{\eta} \eta_X^{-1}(l) \sqsubset^{F,}{}_X{}^{\eta} n.$。同样不难看出，如果 $\mathcal{S}$ 具有相同的性质，那么$_{\mathcal{S}^{F,\eta}}$ 是余完美的。

□

将反射函子视为 $\mathcal{C}$的自函子，可得到下面的命题。

推论2. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}$ 的 $\mathcal{E}$-反射子范畴， $\mathcal{S}$ 是关于 $\mathcal{M}$定义在 $\mathcal{A}$上的合成拓扑结构。那么，对于某个 $p \in$ 子FX， $\mathcal{S}_X^{\mathcal{A}} = \{\sqsubset_{FX}^{\mathcal{A}} \mid \sqsubset_{FX} \in \mathcal{S}_{FX}\}$满足 $m \sqsubset_X^{\mathcal{A}} n \Leftrightarrow \eta_X(m) \sqsubset_{FX} p$以及$\eta_X^{-1}(p) \leq n$， 是关于 $\mathcal{M}$ 定义在 $\mathcal{C}$ 上的最粗合成拓扑结构；对于该结构，每个反射态射 $\eta_X\colon X \longrightarrow FX$ 都是 $(\mathcal{S}^{\mathcal{A}}, \mathcal{S})$-连续的。如果 $\mathcal{S}$是插值的（余完美的），那么 $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$ 也是插值的（分别为余完美的）。

由于 $\mathcal{S}^{F,\eta}$ 是余完美的，只要 $\mathcal{S}$ 是余完美的，定理*1* 便得出下述命题。

命题5. 设 (F, η) 是 $\mathcal{C}$ 的带点自函子，且 $\mathcal{S} \in$CSYnt$(\mathcal{C}, \mathcal{M})$。那么

$$\mathcal{B}_X^{\mathcal{S}^{F,\eta}} = \{U^{\sqsubset^{F,\eta}} \mid U^{\sqsubset} \in \mathcal{B}_{FX}^{\mathcal{S}}\} \; with \; U^{\sqsubset^{F,\eta}}(m) = \eta_X^{-1}(U^{\sqsubset}(\eta_X(m)))$$

是关于 $\mathcal{C}$ 、相对于 $\mathcal{M}$ 的最粗拟一致性的一个基，使得每个 $\eta_X\colon X \longrightarrow FX$ 都是 $(\mathcal{U}^{\mathcal{S}^{F,\eta}}, \mathcal{U}^{\mathcal{S}})$-连续的。$\mathcal{B}^{\mathcal{S}^{F,\eta}}$ 是传递基，只要 $\mathcal{S}$ 是插值的。

证明. $(U1)$、$(U2)$ 和 $(U4)$ 显然。$(U5)$ 设 $f\colon X \longrightarrow Y$ 是一个 $\mathcal{C}$-态射，且 $U^{\sqsubset^{F,\eta}} \in \mathcal{B}^{\mathcal{S}^{F,}}{}_Y{}^{\eta}$ 对于 $\sqsubset_{FY} \in \mathcal{S}_{FY}$。那么存在 $\sqsubset_{FX} \in \mathcal{S}_{FX}$，使得 $f(V^{\sqsubset_{FX}}(m)) \leq U^{\sqsubset_{FY}}(f(m))$。

$$\begin{aligned}
\text{Thus } \; f(V^{\sqsubset^{F,\eta}}(m)) &= f(\eta_X^{-1}(V^{\sqsubset_{FX}}(\eta_X(m)))) \\
&\leq \eta_Y^{-1}(Ff)(V^{\sqsubset_{FX}}(\eta_X(m))) && \text{Lemma 1} \\
&\leq \eta_Y^{-1}(U^{\sqsubset_{FY}}(Ff)(\eta_X(m))) \\
&= \eta_Y^{-1}(U^{\sqsubset_{FX}}(\eta_Y(f(m))) && \text{Definition 1} \\
&= U^{\sqsubset^{F,\eta}}(f(m))
\end{aligned}$$

由于对任意 $\sqsubset_X \in \mathcal{S}_X$, $U^{\sqsubset^{F,\eta}}(m) = \eta_X^{-1}(U^{\sqsubset}(\eta_X(m))) \Rightarrow \eta_X(U^{\sqsubset^{F,\eta}}(m)) \leq U^{\sqsubset}(\eta_X(m))$,$\eta_X$ 对所有 $X \in \mathcal{C}$ 都是 $(\mathcal{U}^{\mathcal{S}^{F,\eta}}, \mathcal{U})$-连续的。若 $\mathcal{S}$ 是插值的，则 $U^{\sqsubset^{F,\eta}}(U^{\sqsubset^{F,\eta}}(m)) =$

$U^{\sqsubset^{F,\eta}}(\eta_X^{-1}(U^{\sqsubset}(\eta_X(m))) = \eta_X^{-1}(U^{\sqsubset}(\eta_X(\eta_X^{-1}(U^{\sqsubset}(\eta_X(m)))) \leq \eta_X^{-1}(U^{\sqsubset}(U^{\sqsubset}(\eta_X(m)))) =$
$\eta_X^{-1}(U^{\sqsubset}(\eta_X(m))) = U^{\sqsubset^{F},\eta}(m)$.
设 $\mathcal{B}'$是 $\mathcal{C}$上另一个拟一致性 $\mathcal{U}'$的基，且 η_X是 $(\mathcal{U}', \mathcal{U}^{\mathcal{S}})$-连续的，那么对于任意 $U^{\sqsubset} \in \mathcal{B}^{\mathcal{S}}_{FX}$，存在 $U' \in \mathcal{B}'_X$使得 $\eta_X(U'(m)) \leq U^{\sqsubset}(\eta_X(m)) \Leftrightarrow U'(m) \leq \eta_X^{-1}(U^{\sqsubset}(\eta_X(m)))$ $= U^{\sqsubset^{F},\eta}(m)$。因此 $\mathcal{B}^{\mathcal{S}^{F},\eta} \leq \mathcal{B}'$。 □

从上述命题的证明可以看出，当合成拓扑结构是余完美的时，并不需要条件 (F, η) 是 $\mathcal{E}$-带点的。

命题 6. 设 (F, η) 是 $\mathcal{C}$ 的一个带点自函子，且 $\mathcal{S}$ 是简单且余完美的合成拓扑结构，即 $\mathcal{S}_X = \{\sqsubseteq_X\} \in \bigwedge$ –INTORD$(\mathcal{C}, \mathcal{M})$。那么 $c^{\sqsubset^{F},\eta}(m) = \eta_X^{-1}(c^{\sqsubset}_{FX}(\eta_X(m)))$ 是一个幂等闭包算子。它是 $\mathcal{C}$上的最大闭包算子，并且对于该算子，每个 $\eta_X\colon X \longrightarrow FX$ 都是 $(c^{\sqsubset^{F},\eta}, c^{\sqsubset})$-连续的。

上述闭包算子最初由 L. Stramaccia 在拓扑空间与连续映射范畴中引入（*[19]*），随后由 D. Dikranjan 在拓扑范畴中引入（*[5]*），之后 Dikranjan 和 Tholen 又将其推广到任意范畴（*[4]*）。它是 D. Holgate 在 *[11, 10]*中研究的拉回闭包的一个特例。

推论 3. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}$ 的反射子范畴，且 $\mathcal{S}$ 是关于 $\mathcal{M}$的 $\mathcal{A}$上的余完美拟拓源结构。那么

$$\mathcal{B}^{\mathcal{A}}_X = \{U^{\sqsubset^{\mathcal{A}}} \mid U^{\sqsubset} \in \mathcal{B}^{\mathcal{S}}_{FX}\} \; with \; U^{\sqsubset^{\mathcal{A}}}(m) = \eta_X^{-1}(U^{\sqsubset}(\eta_X(m)))$$

是关于 $\mathcal{M}$ 的 $\mathcal{C}$ 上的最粗拟一致性的一个基；对于该拟一致性，每个反射态射 η_X: $X \longrightarrow FX$都是（$\mathcal{U}^{\mathcal{S}^{\mathcal{A}}}$, $\mathcal{U}^{\mathcal{S}}$）-连续的。若$_{\mathcal{S}^{F^{\eta}}}$ 是插值的，则 $\mathcal{B}^{\mathcal{S}^{\mathcal{A}}}$是传递基。

推论 *3* 使我们能够得到由**QUnif** 的任意反射子范畴所诱导的拟一致结构，并得出结论：它是使反射映射拟一致连续的初始拟一致性（参见例 6.1）。

定理 3. 设 (G, ε) 是 $\mathcal{C}$ 上的 $\mathcal{M}$-余带点自函子，且 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的合成拓扑结构，则 $\mathcal{S}^{G,}$ $_X{}^{\varepsilon} = \{\sqsubset^{G,\varepsilon}_X \mid \sqsubset_{GX} \in \mathcal{S}_{GX}\}$ 满足 $m \sqsubset^{G,}{}_X{}^{\varepsilon} n \Leftrightarrow \varepsilon_X^{-1}(n) \sqsubset_{GX} \varepsilon_X^{-1}(n)$，对所有 $m \in$sub$X$ 和 $n \geq m$ 均成立，是 $\mathcal{C}$ 上最细的合成拓扑结构，使得每个 $\varepsilon_X\colon GX \longrightarrow X$ 都是 $(\mathcal{S}, \mathcal{S}^{G,}$ $^{\varepsilon})$-连续的。

证明。经常规检验可知，$\mathcal{S}^{G,\,\varepsilon}$ 是 $\mathcal{C}$上的合成拓扑结构。对于所有的 $X \in \mathcal{C}$,ε_X : $GX \longrightarrow X$ 是（$\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^{G,\,\varepsilon}$）-连续的，因为对于任意的 $\sqsubset^{G,}{}_X{}^{\varepsilon} \in \mathcal{S}^{G,}{}_X{}^{\varepsilon}$ 以及 $m, n \in$ 子 X 且$n \leq m$, $m \sqsubset^{G,}{}_X{}^{\varepsilon} n \Rightarrow \varepsilon_X^{-1}(n) \sqsubset_{GX} \varepsilon_X^{-1}(n)$。

若 $\mathcal{S}'$ 是 $\mathcal{C}$ 上的另一种合成拓扑结构，使得 ε_X 是（$\mathcal{S},\mathcal{S}'$）-连续的，那么对于任意的 $\sqsubset_X \in \mathcal{S}'_X$, $m \sqsubset'_X n \Rightarrow \varepsilon_X(\varepsilon_X^{-1}(m)) \sqsubset'_X n \Rightarrow \exists \sqsubset_{GX} \in \mathcal{S}_{GX} \mid \varepsilon_X^{-1}(m) \sqsubset_X \varepsilon_X^{-1}(n) \Leftrightarrow m \sqsubset^{G,\ X^{\varepsilon}} n$。 □

推论 4. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}$ 的余反射子范畴，且 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{A}$ 上的合成拓扑结构，则满足对所有 $m \in$ 子X 和 $n \geq m$, $\mathcal{S}_X^{\mathcal{A}} = \{\sqsubset_X^{\mathcal{A}} \mid \sqsubset_{GX} \in \mathcal{S}_{GX}\}$ 中有 $m \sqsubset_X^{\mathcal{A}} n \Leftrightarrow \varepsilon_X^{-1}(n) \sqsubset_{GX} \varepsilon_X^{-1}(n)$ 的 $\mathcal{S}_X^{\mathcal{A}} = \{\sqsubset_X^{\mathcal{A}} \mid \sqsubset_{GX} \in \mathcal{S}_{GX}\}$ 是 $\mathcal{C}$ 上使每个余反射 $\varepsilon_X : GX \longrightarrow X$ 都是 $(\mathcal{S},\mathcal{S}^{\mathcal{A}})$-连续的最细合成拓扑结构。

命题 7. 假设对任意 $f \in \mathcal{C}$, f^{-1} 与子对象的上确界可交换。设 (G,ε) 是 $\mathcal{C}$ 的一个 $\mathcal{M}$-余带点自函子，且 $\mathcal{S} \in$CSYnt$(\mathcal{C},\mathcal{M})$。则

$$\mathcal{B}_X^{\mathcal{S}^{G,\varepsilon}} = \{V^{\sqsubset^{G,\varepsilon}} \mid V^{\sqsubset} \in \mathcal{B}_{GX}^{\mathcal{S}}\} \ with\ V_X^{\sqsubset^{F,\varepsilon}}(m) = m \vee \varepsilon_X(V^{\sqsubset}(\varepsilon_X^{-1}(m)))$$

它是 $\mathcal{C}$ 上使每个 ε_X $(\mathcal{V},\mathcal{V}^{G,\ \varepsilon})$-连续的最细拟一致性的一个基。

证明. 不难验证， $\mathcal{B}^{\mathcal{S}^G}{}_{,X}{}^{\ \varepsilon}$ 是 $\mathcal{C}$ 上某个拟一致性的一个基。由于 $\varepsilon_X(V^{\sqsubset}(\varepsilon_X^{-1}(m))) \leq V^{\sqsubset^G}{}^{,\varepsilon}(m) \Leftrightarrow V^{\sqsubset}(\varepsilon_X^{-1}(m)) \leq \varepsilon_X^{-1}(V^{\sqsubset^G}{}^{,\varepsilon}(m))$ ε_X 是 $(\mathcal{V},\mathcal{V}^{\mathcal{S}^G}{}^{,\varepsilon})$-连续的。设 $\mathcal{B}'$ 是 $\mathcal{C}$ 上另一个拟一致性 $\mathcal{V}'$ 的基，并满足 ε_X 是 $(\mathcal{V},\mathcal{V}')$-连续的。那么对所有 $V' \in \mathcal{V}'_X$，存在这样的 $V \in \mathcal{V}_{GX}$，使得 $V(\varepsilon_X^{-1}(m)) \leq \varepsilon_X^{-1}(V'(m)) \Leftrightarrow \varepsilon_X(V(\varepsilon_X^{-1}(m))) \leq V'(m) \Rightarrow m \vee \varepsilon_X(V(\varepsilon_X^{-1}(m))) \leq V'(m) \Leftrightarrow V^{\sqsubset^G}{}^{,\varepsilon}(m) \leq V'(m)$。因此 $\mathcal{B}' \leq \mathcal{B}^{G,\varepsilon}$. □

命题 8. 设 (G,ε) 是 $\mathcal{C}$ 上的余带点自函子，且 $\mathcal{S}$ 是简单且余完美的综合拓扑结构，即 $\mathcal{S}_X = \{\sqsubset_X\} \in \bigwedge$–INTORD$(\mathcal{C},\mathcal{M})$，那么对所有 $m \in \mathrm{sub}X, {}_{C^{\sqsubset^{G,}}}{}^{\varepsilon}(m) = m \vee \varepsilon_X(c_{GX}^{\sqsubset}(\varepsilon_X^{-1}(m)))$ 是 $\mathcal{C}$ 上的一个幂等闭包算子。它是使每个 $\varepsilon_X : GX \longrightarrow X$ 都是 $(c, c^{G,\ \varepsilon})$-连续的最小闭包算子。

推论 5. 假设对任意 $f \in \mathcal{C}$, f^{-1} 与子对象的上确界可交换。设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个 $\mathcal{M}$-余反射子范畴，且 $\mathcal{S}$ 是一个合成拓扑 $\mathcal{A}$。那么

$$\mathcal{B}_X^{\mathcal{A}} = \{V^{\sqsubset^{\mathcal{A}}} \mid V^{\sqsubset} \in \mathcal{B}_{GX}^{\mathcal{S}}\} \ with\ V^{\sqsubset^{\mathcal{A}}}(m) = m \vee \varepsilon_X(V^{\sqsubset}(\varepsilon_X^{-1}(m))$$

这是 $\mathcal{C}$ 上最细拟一致性的一个基，使得每个余反射态射 $\varepsilon_X(\mathcal{V},\mathcal{V}^{\mathcal{A}})$ 都是连续的。

5 函子相对于拟一致结构的连续性

设 $\mathcal{A}$ 是一个赋有用于态射的 $(\mathcal{E}',\mathcal{M}')$-分解系统的范畴，且 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}'$-完备的。

定义 10. *[4]* 若函子 $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ 对每个 $\mathcal{M}'$-子对象 m 都满足 Fm 是一个 $\mathcal{M}$-子对象，则称其保子对象。若对任意 $\mathcal{A}$-态射 $f\colon X \longrightarrow Y$ 及子对象 $n \in \mathrm{sub}Y$, $m \in \mathrm{sub}X$，有 $Ff^{-1}(n) = (Ff)^{-1}(Fn)$（分别地，$(Ff)(Fm) = F(f(m))$），则称其保子对象的逆像（分别地，像）。

定义 11. 设 $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个保持子对象的函子，$\mathcal{U} \in \mathrm{QUnif}(\mathcal{A}, \mathcal{M}')$ 且 $\mathcal{V} \in \mathrm{QUnif}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$。那么，对于所有 $V \in \mathcal{V}_{FX}$，若存在 $U \in \mathcal{U}_X$，使得对于所有 $m \in \mathrm{sub}X$, $X \in \mathcal{A}$, $FU(m) \leq V(Fm)$，则称 F是 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$-连续的。

容易看出，我们对$(\mathcal{U}, \mathcal{V})$-连续性的定义是针对 F 的，它将态射的$\mathcal{U}$-连续性推广到了函子。利用定理*1*，我们可以用余完美合成拓扑结构给出$(\mathcal{U}, \mathcal{V})$-连续性的等价定义，针对 F，从而 F 是$(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$-连续的，意味着 F 相对于与 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$相关联的拟一致结构是连续的。

命题9. 设 $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个保持子对象的函子，$\mathcal{S} \in \mathrm{QUnif}(\mathcal{A}, \mathcal{M}')$ 且 $\mathcal{S}' \in \mathrm{QUnif}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$。那么，对于所有 $\sqsubset'_{FX} \in \mathcal{S}'_{FX}$，若存在 $\sqsubset_X \in \mathcal{S}_X$，使得对于所有 $m \in \mathrm{sub}X$, $X \in \mathcal{A}$, $FU^{\sqsubset}(m) \leq U^{\sqsubset'}(Fm)$，则称 F是 $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$-连续的。

配备固定闭包算子的范畴之间函子的连续性已在 *[4]*中得到研究。接下来，我们结合上述命题、推论*1* 以及 $\bigwedge -INTORD(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ 等价于简单余完全合成拓扑结构这一事实，用幂等闭包算子来刻画 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$-连续性。 F

命题10. 设 $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ 为一个保持子对象的函子，$\mathcal{S} \in \mathrm{CSYnt}(\mathcal{A}, \mathcal{M}')$ 和 $\mathcal{S} \in \mathrm{CSYnt}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$，其中 $\mathcal{S}$和 $\mathcal{S}'$是简单的，即 $\mathcal{S}_X = \{\sqsubset_X\}$ 和$\mathcal{S}'_{FX} = \{\sqsubset'_{FX}\}$。那么，当且仅当对所有 $Fc^{\sqsubset}_X(m)$，都有$\leq c^{\sqsubset'}_{FX}(Fm)$ （对所有 $m \in \mathrm{sub}X$, $X \in \mathcal{A}$ ）时， F 是 $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$- 连续的。

定义 12. *[4]* 设 $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个忠实函子。 F 若每个$g\colon A \longrightarrow FY$都有一个 F-初始（F-笛卡尔）提升，则称其为纤维化。如果要求仅当 F对 $g\colon A \longrightarrow FY$存在一个 $g \in \mathcal{M}$-笛卡尔提升时， F才称其为 $\mathcal{M}$-纤维化。

我们用 $IniF$ 表示 $\mathcal{A}$中所有 F-初始态射构成的类。那么对于一个 $\mathcal{M}$-纤维化$F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$，$(\mathcal{E}_F, \mathcal{M}_F)$，其中 $\mathcal{E}_F = F^{-1}\mathcal{E} = \{e \in \mathcal{C} \mid Fe \in \mathcal{E}\}$和 $\mathcal{M}_F = F^{-1}\mathcal{M} \bigcap IniF$是 $\mathcal{A}$ 中的一个分解系统，并且 $\mathcal{C}$ 中的 $\mathcal{M}$-子对象性质由 $\mathcal{A}$中的 $\mathcal{M}_F$-子对象继承。

特别是，

(1) 如果 $\mathcal{C}$ 有 $\mathcal{M}$-拉回，则 $\mathcal{A}$ 有 $\mathcal{M}_F$-拉回。

(2) 如果 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{M}$-完备的，那么 $\mathcal{A}$ 也是 $\mathcal{M}_F$-完备的。

(3) $\mathcal{M}_F$-像和 $\mathcal{M}_F$-逆像可通过先提升 $\mathcal{M}$-像和 $\mathcal{M}$-逆像得到。因此， F 保持子对象的像和逆像。

引理 2. *[4]* 设 $F:\ \mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{C}$ 是一个忠实的 $\mathcal{M}$-纤维化。

(1) 对任意 $X\in\mathcal{A}$，sub$X$ 和 subFX 序等价，逆向对应关系为 γ_X: $subX\longrightarrow subFX$ 和 δ_X: $subFX\longrightarrow subX$，分别由 $\gamma_X(m)=Fm$ 和 $\delta_X(n)=p$ 给出，其中 $Fp=n$ 和 $p\in IniF$。

(2) 对任意 f: $X\longrightarrow Y\in\mathcal{A}$ 以及适当的子对象 n、m、n' 和 m'。

(1) $\gamma_Y(f(m))=(Ff)(\gamma_X(m))$。
(2) $f(\delta_X(n))=\delta_Y(Ff)(n)$。(3) $f^{-1}(\delta_Y(m'))=\delta_X((Ff)^{-1}(m'))$。
(4) $\gamma_X(f^{-1}(n'))=(Ff)^{-1}(\gamma_Y(n'))$。

命题 11. 设 F: $\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{C}$ 是忠实的 $\mathcal{M}$ 纤维化，且 $\mathcal{S}$ 是关于 $\mathcal{M}$ 的 $\mathcal{C}$ 上的合成拓扑结构。那么

$$\mathcal{S}_X^F=\{\sqsubset_X^F\ \mid\ \sqsubset_{FX}\in\mathcal{S}_{FX}\}\ \ where\ \ m\sqsubset_X^F n\Leftrightarrow Fm\sqsubset_{FX}\gamma_X(n)$$

是关于 $\mathcal{M}_F$ 的 $\mathcal{A}$ 上的合成拓扑结构；若 $\mathcal{S}$ 具有相同性质，则它是插值的、余完美的。此外，若 Ff 是 $\mathcal{S}$-初始的，则 $\mathcal{A}$ 态射 f 是 $\mathcal{S}^F$-初始的。

定理 4. 设 $F:\ \mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{C}$ 是忠实的 $\mathcal{M}$ 纤维化，且 $\mathcal{B}$ 是关于 $\mathcal{M}$ 的 $\mathcal{C}$ 上拟一致结构的一个基。那么 $\mathcal{B}_X^F=\{U^F\mid U\in\mathcal{B}_{FX}\}$，其中 $U^F(m)=\delta_X(U(Fm))$ 是关于 $\mathcal{M}_F$ 的 $\mathcal{A}$ 上拟一致性的一个基。它是使 F 为 $(\mathcal{U}^F,\mathcal{U})$-连续的最粗拟一致性。若 $\mathcal{B}$ 是传递基，则 $\mathcal{B}^F$ 是传递的。此外，若 Ff 是 $\mathcal{S}$-初始的，则 $\mathcal{A}$ 态射 f 是 $\mathcal{U}^F$-初始的。

证明。显然， $\mathcal{B}^F$ 是 $\mathcal{A}$ 上一个拟一致性的基；若 $\mathcal{B}$是传递的，则该拟一致性也是传递的。 F是$(\mathcal{U}^F,\mathcal{U})$-连续的，因为对于任意 $U\in\mathcal{B}_{FX}$, $U^F(m)=\delta_X(U(Fm))\Leftrightarrow\gamma_X(U^F(m))=U(Fm)\Leftrightarrow F(U^F(m))=U(Fm)$。若 $\mathcal{B}'$是 $\mathcal{A}$上另一个拟一致性$\mathcal{U}'$的基，且 F是$(\mathcal{U}',\mathcal{U})$-连续的，则对于所有 $U^F\in\mathcal{B}_X^F$，存在 $U'\in\mathcal{B}'$使得

满足 $FU'(m) \leq U(Fm) = FU^F(m)$。因此，$U'(m) = \delta_X(FU'(m)) \leq \delta_X(FU^F(m)) = U^F(m)$，也就是说 $\mathcal{B}^F \leq \mathcal{B}'$。若 Ff是 $\mathcal{U}$-初始的且 $U^F \in \mathcal{U}^F_X$，则存在 $U' \in \mathcal{U}_{FY}$使得对于所有 $p \in$个子FX，$(Ff)^{-1}(U'(Ff)(p)) \leq U(p)$。现在，对于所有$m \in$个子$X$，$f^{-1}(U'^F(f(m)))$ $= f^{-1}(\delta_Y(U'(Ff(m))))= \delta_X((Ff)^{-1}(U'(Ff(m)))) = \delta_X((Ff)^{-1}(U'((Ff)(Fm)))) \leq \delta_X(U(Fm))$ $= U^F(m)$。 □

推论 6。 在定理 *4* 的假设下，且 F 在对象上本质满射，那么 $\mathcal{B}$是 $\mathcal{C}$上最细拟一致性的基，且该拟一致性使得 F是 $(\mathcal{U}^F, \mathcal{U})$-连续的。

证明。由 F 在对象上的本质满射性可知，对所有 $Y \in \mathcal{C}$，存在某个 $X \in \mathcal{A}$，使得 $Y \cong FX$ 。因此，若 $\mathcal{B}'$是 $\mathcal{C}$上的另一个拟一致性，且 F是（$\mathcal{U}^F$，$\mathcal{U}'$）-连续的，那么对于所有 $Y \in \mathcal{C}$和 $U' \in \mathcal{U}'_Y$，存在 $X \in \mathcal{A}$和 $U^F \in \mathcal{B}^F$，使得 $Y \cong FX$和FU^F（m）$\leq U'$（Fm）$\Leftrightarrow U$（Fm）$= F\delta_X$（U（Fm））$\leq U'$（Fm）$= U'$（Fm）。因此 $\mathcal{B}' \leq \mathcal{B}$。 □

命题 12. 设 $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个忠实的 $\mathcal{M}$-纤维化，且 $\mathcal{S}$ 是关于 $\mathcal{C}$的简单余完全合成拓扑结构，其中 $\mathcal{M}$，即 $\mathcal{S} = \{\sqcap_X\} \in \bigwedge -INTORD$。那么$c^{\sqcap^F}(m) = \delta_X(c^{\sqcap}(Fm))$ 是关于 $\mathcal{A}$的幂等闭包算子，其中 $\mathcal{M}_F$。它是 $\mathcal{A}$上使 F为 $(c^{\sqcap^F}, c^{\sqcap})$-连续的最大闭包算子。

证明. 显然，对于任意简单余完全合成拓扑结构 $\mathcal{S}$，$c^{\sqcap^F}$ 都是闭包算子。现在，$c^{\sqcap^F}(c^{\sqcap^F}$ $(m)) = c^{\sqcap^F}(\delta_X(c^{\sqcap}_{FX}(Fm))) = \delta_X(c^{\sqcap}_{FX}(F\delta_X(c^{\sqcap}(Fm)))) = \delta_X(c^{\sqcap}_{FX}(c^{\sqcap}_{FX}(Fm))) = \delta_X(c^{\sqcap}_{FX}($ $Fm)) = c^{\sqcap^F}(m)$，因此 $c^{\sqcap^F}$是幂等的。由于 $\gamma_X(c^{\sqcap^F}(m)) = c^{\sqcap}(Fm) \Leftrightarrow Fc^{\sqcap^F}(m) = c^{\sqcap}$ (Fm)，故 F是 $(c^{\sqcap^F}, c^{\sqcap})$-连续的。若 c'是 $\mathcal{A}$上的另一个闭包算子，且 F是 $(c', c^{\sqcap})$-连续的，则 $Fc'_X(m) \leq c^{\sqcap}(Fm)$。因此$c'_X(m) = \delta_X(F(c_X(m)) \leq \delta_X(c^{\sqcap}_{FX}(Fm)) = c^{\sqcap^F}_X(m)$。 □

命题 *12* 中的闭包算子 *[4]* 已在未使用合成拓扑结构方法的情况下得到。有兴趣的读者可以在本书中找到一些此类闭包的例子。

定理 5. 设 $F \dashv G: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ 为伴随函子，且 $\mathcal{B}$ 为拟一致性$\mathcal{U} \in$QUnif$(\mathcal{C}, \mathcal{M})$的一个基。假设 G和 F保子对象。则 $\mathcal{B}^\eta_X = \{U^\eta \mid U \in \mathcal{B}_{FX}\}$连同 $U^\eta(m) = \eta_X^{-1}(GU(Fm))$（对任意 $X \in \mathcal{A}$）是 $\mathcal{A}$上的一种拟一致性的基。 $\mathcal{B}^\eta$是使 F为$(\mathcal{U}^\eta, \mathcal{U})$-连续的最粗拟一致性的一个基。

证明。首先注意到，$(U1)$、$(U2)$ 和 $(U4)$ 显然由伴随性成立。对于 $(U5)$，设 $X \longrightarrow Y$ 是一个 $\mathcal{A}$-态射，并且对于任意 $U \in \mathcal{U}_Y$，$U^\eta \in \mathcal{U}^\eta$。于是存在 $V \in \mathcal{U}_X$

使得 $f(V(m)) \leq U(f(m))$。

$$\begin{aligned}
\text{Thus } f(V^\eta(m)) &= f(\eta_X^{-1}(GV(Fm))) \\
&\leq \eta_Y^{-1}(GFf)(GV(Fm))) && \text{Lemma 1} \\
&\leq \eta_X^{-1}(G(Ff)(V(Fm))) \\
&\leq \eta_Y^{-1}(GU((Ff)(Fm))) && \mathcal{U}\text{-continuity of } Ff \\
&= \eta_Y^{-1}(GU(Ff(m))) \\
&= U^\eta(f(m)).
\end{aligned}$$

F是（$\mathcal{U}^\eta$,$\mathcal{U}$）-连续的，因为对于任意 $U \in \mathcal{U}_{FX}$, $FU^\eta(m) \leq U(Fm)$，对任意 $X \in \mathcal{C}$均成立。设$\mathcal{B}'$是另一拟一致性 $\mathcal{U}$在 $\mathcal{C}$上的一个基，且 F是（$\mathcal{U}'$,$\mathcal{U}$）-连续的。那么对于任意$U^\eta \in \mathcal{B}^\eta_X$, 存在 $U' \in \mathcal{B}'_X$使得 $FU'(m) \leq U(Fm)$。因此 $\eta_X(U'(m)) \leq GFU'(m) \leq GU(Fm) \Rightarrow \eta_X(U'(m)) \leq GU(Fm)) \Leftrightarrow U'(m) \leq \eta_X^{-1}(GU(Fm)) = U^\eta(m)$，即 $\mathcal{U}^\eta \leq \mathcal{U}'$。

□

如果 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}$的反射子范畴，那么 $\mathcal{B}^\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}^\eta$ 是等价的。

命题 13. 设 $F \dashv G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ 是伴随函子，且 $\mathcal{S} \in \mathbf{CSYnt}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$。假设 G 和 F 保持子对象。

那么， $\mathcal{S}^\eta = \{\sqsubset^\eta_X \mid \sqsubset_{FX} \in \mathcal{S}_{FX}\}$ with $m \sqsubset^\eta_X n \Leftrightarrow \eta_X^{-1}(GU^\sqsubset(Fm)) \leq n$是 $\mathcal{A}$上的一个余完备合成拓扑结构。它是使 F 成为（$\mathcal{S}^\eta$,$\mathcal{S}$）-连续的最粗合成拓扑结构。

命题 14. 在命题 13 的假设下，若 $\mathcal{S} \in \mathbf{CSYnt}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ 且是简单的，即 $\mathcal{S} = \{\sqsubset_X\} \in \bigwedge - \mathbf{INTORD}(\mathcal{C}, \mathcal{M}) \cong ICL(\mathcal{C}, \mathcal{M})$。那么，$c^{\sqsubset^\eta}_X(m) = \eta_X^{-1}(Gc^\sqsubset_{FX}(Fm))$ 是 $\mathcal{A}$上的一个幂等闭包算子。它是使 F成为（$c^{\sqsubset^\eta}$,$c^\sqsubset$）-连续的最大闭包算子。

6 例子

1. 令 $\mathbf{QUnif}_o$ 为 T_o 拟一致空间及拟一致连续映射构成的范畴，其分解系统为（满射，嵌入）。已知 $\mathbf{bQUnif}_o$（例如参见 [3]），即双完备拟一致空间及拟一致连续映射构成的范畴，是 $\mathbf{QUnif}_o$的正反射子范畴。令 (F, η) 为到 $\mathbf{QUnif}_o$中的双完备化反射函子$\widetilde{\ \ }$。对于任意 $(X,\mathcal{U}) \in \mathbf{QUnif}_o$, $\eta_X : (X,\mathcal{U}) \longrightarrow (X,\mathcal{U})$ 将每个

$x \in X$ 映射到由 $\mathcal{U}$ 与其逆的并所诱导的拓扑中的邻域滤子。已知 η_X 是拟一致嵌入。有关详情可参见~ ~ ~[9]。现在，$\mathcal{B}^{F,\eta} = \{U^{F,\eta} \mid U \in \mathcal{U}_{\widetilde{X}}\}$ 其中 $U^{F,\eta} = \{(x,y) \in X \times X \mid (\eta_X(x)\ \eta_X(y)) \in U\}$ 是 X 上拟一致结构 $\mathcal{U}^{F,\eta}$ 的一个基。由于 η_X 是拟一致嵌入，$\mathcal{U}_X$ 是使 η_X 拟一致连续的初始拟一致性。因此 $\mathcal{U}^{F,\eta}{}_X = \mathcal{U}_X$。

2. 一致空间范畴 Unif 及拟一致连续映射构成 QUnif 中的余反射子范畴。令 (G,ε) 表示到 Unif 中的余反射子。对于任意 $(X,\mathcal{U}) \in$QUnif，ε_X: $(X,\mathcal{U}\bigvee\mathcal{U}^{-1}) \longrightarrow (X,\mathcal{U})$ 是恒等映射。由于 $\mathcal{U}\bigvee\mathcal{U}^{-1}$ 是 X 上使 ε_X 拟一致连续的最细拟一致性，$\mathcal{U}^{G,\varepsilon}{}_X = \mathcal{U}\bigvee\mathcal{U}^{-1}$

3. 考虑 $\mathbf{TopGrp_2}$，即由豪斯多夫拓扑群和连续群同态组成、具有（满射、单射）分解结构的范畴。由[2] 可知，完备豪斯多夫拓扑群范畴 $\mathbf{cTopGrp_2}$（即相对于双侧一致性完备的那些拓扑群）是 $\mathbf{TopGrp_2}$中的余反射子范畴。令 (F,η) 表示到 $\mathbf{TopGrp_2}$ 中的完备化反射子；对于任意 $(X,\cdot) \in$ cTopGrp，令 $\beta(e)$ 表示单位元 e的邻域滤子。对于所有 $U \in \beta(e)$，置 $U_c = \{(x,\ y) \in X \times X\colon\ y \in xU \cap Ux\}$，使得 $\mathcal{B}_X^c = \{U^c \mid U \in \beta(e)\}$ 成为 $(X;\ \cdot;\ \mathcal{T}\}$ 上的双侧一致性的一个基。由于 η_X 再次是 $(X,\cdot,\mathcal{T})$ 从 $\mathbf{TopGrp_2}$ 到其完备化 $(X;\widetilde{\cdot},\mathcal{T})$ 中的嵌入~ ~，我们有 $\mathcal{U}^{F,\eta} = \mathcal{U}_c$。

4. 遗忘函子

$$F\colon \text{拓扑群范畴} \longrightarrow \text{群范畴}$$

是单态纤维化。因此，根据命题11，群范畴上的每个合成拓扑结构都可以初始提升为拓扑群范畴上的合成拓扑结构。

5. 考虑函子 G : QUnif $\longrightarrow$ Top，它将每个拟一致空间 $(X,\mathcal{U})$ 映射为拓扑空间 $(X,G(\mathcal{U}))$，其中 $G(\mathcal{U})$ 是由 $\mathcal{U}$ 诱导的拓扑，其定义方式是在点 x 处取邻域基，即滤子 $\{U[x] \mid U \in \mathcal{U}\}$，其中 $U[x] = \{y \in X\colon (x,y) \in U\}$，以及 F: Top $\longrightarrow$ Qunif，它将每个拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 映射为 $\mathcal{U}$ 上的最细拟一致性 X，且 $G(\mathcal{U}) = \mathcal{T}$。已知（例如参见 [7]），$F$ 是 G 的左伴随。对于任意 $(X,\mathcal{T}) \in$Top，单位 η_X: $(X,\mathcal{T}) \longrightarrow (X, GF(\mathcal{T}))$ 是一个连续映射，其中 $(X,GF(\mathcal{T}))$ 是赋予了最细拟一致性 $(X,F(\mathcal{T}))$ 的拓扑的集合 X。现在，$\mathcal{S}_{(X,\mathcal{U})} = \{\sqsubset_X^U \mid U \in \mathcal{U}\}$ 其中$A \sqsubset^U B \Leftrightarrow U(A) \subseteq B$ 对任意 A，$B \subseteq X$ 是 QUnif 上的余完美合成拓扑生成结构，适用于任意 $(X,\mathcal{U}) \in$QUnif。令 $(X,\mathcal{T}) \in$Top，$A \sqsubset_X^\eta B \Leftrightarrow \eta_X^{-1}(GU(FA)) \subseteq B$

对于任意 $U \in \mathcal{U}_X$。但是 $\eta_X^{-1}(GU(FA)) = \eta_X^{-1}(GU(A))$，$\eta_X^{-1}(GU(A))$ 是 A 在 $\mathcal{T}$ 中的一个邻域。因此，$\mathcal{S}_X = \{\sqsubset_X^{\eta} \mid X \in \mathrm{Top}\}$，其中 $A \sqsubset_X^{\eta} B \Leftrightarrow V \subseteq B$，a 是 A 在 $\mathcal{T}$ 中的一个邻域，从而 $A \sqsubset_X^{\eta} B \Leftrightarrow A \subseteq O \subseteq B$ 对于某个 $O \in \mathcal{T}$。

6. 令 Top 为拓扑空间与连续映射范畴，并赋予其（满射，嵌入）分解结构。众所周知，Top_o（即 T_o-拓扑空间与连续映射范畴）是 Top 的一个正反射子范畴。定义 $\mathcal{S}_X = \{\sqsubset_{Xo} \mid Xo \in \mathrm{Top_o}\}$ 如下：$A \sqsubset_{X_o} B \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq B$ 对任意 $X_o \subseteq \mathrm{Top_o}$，$A$，$B \subseteq X_{oo}$ 令 (F, η) 为到 Top 中的反射函子。对任意 $X \in \mathrm{Top}$，$\eta_X : X \longrightarrow X/\sim$ 将每个 $x \in X$ 映射到其等价类 $[x] = \{y \in X \mid \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}\}$。因此 $\mathcal{S}_X = \{\sqsubset_X^{F,\eta} \mid X \in \mathrm{Top}\}$，其中 $A \sqsubset^{F,}{}_X{}^{\eta} B \Leftrightarrow \eta_X^{-1}(\eta_X(A)) \subseteq B$ $A, B \subseteq X$。

参考文献

[1] J. Ad ´amek、H. Herrlich 和 G. E. Strecker。《抽象范畴与具体范畴：猫之乐》。表示论与范畴应用，(17)，1–507，2006。重印自 1990 年原版[Wiley，纽约]。*[2]* N. Bourbaki。《一般拓扑学：第 1–4 章》，第 18 卷。施普林格科学与商业媒体，1998。*[3]* G. C. L. Br ¨ümmer。拟一致空间理论的范畴论方面。载于《第一届西班牙-意大利一般拓扑及其应用大会》（西班牙语）（甘迪亚，1997）论文集，第 30 卷，第 45–74 页，1999。*[4]* D. Dikrajan 和 W. Tholen。《闭包算子的范畴结构及其在拓扑学、代数和离散数学中的应用》。数学及其应用丛书第 346 卷。克吕维尔学术出版集团，多德雷赫特，1995。*[5]* D. Dikranjan。拓扑范畴中的半正则闭包算子与满态射。载于《第五届意大利拓扑学国际会议》（意大利语）（莱切，1990／奥特朗托，1990）。巴勒莫数学与物理学会纪要（第 2 辑）增刊，第 29 卷，第 105–160 页，1992。*[6]*D. Dikranjan 和 E. Giuli。闭包算子 I。《拓扑学及其应用》，27(2):129–143，1987。*[7]* D. Dikranjan 和 H.-P. K ¨ünzi。拟一致空间中的分离性与满态射。第 8 卷，第 175–207 页，2000。纪念 Bernhard Banaschewski 的论文集（开普敦，1996 ）。

[8] C. Dowker。邻近结构的映射。《一般拓扑及其与现代分析和代数的关系》，第 139–141 页，1962。*[9]* P. Fletcher 和 W. F. Lindgren。拟一致空间。《纯粹与应用数学讲义》77，Dekker，纽约，1982。*[10]* D. Holgate。拉回闭包、完美态射与完备化。博士论文，开普敦大学，1995。*[11]* D. Holgate。拉回闭包算子与完美性的推广。《应用范畴结构》，4(1):107–120，1996。*[12]* D. Holgate 和 M. Iragi。范畴上的拟一致结构与合成拓扑结构。《拓扑学及其应用》，263:16–25，2019。*[13]* D. Holgate 和 M. Iragi。由闭包算子决定的拟一致结构。《拓扑学及其应用》，295：论文编号 107669，共 9 页，2021。*[14]* D. Holgate、M. Iragi 和 A. Razafindrakoto。范畴上的拓扑生成结构与邻近结构。《应用范畴结构》，(24):447–455，2016。*[15]*D. Holgate 和 J. ˇSlapal。范畴邻域算子。《拓扑学及其应用》，158(17):2356–2365，2011。*[16]* M. Iragi。范畴上的拓扑生成结构。硕士论文，西开普大学，2016。*[17]* M. Iragi。范畴上的拟一致结构与合成拓扑结构。博士论文，西开普大学，2019。*[18]* M. Iragi 和 J. ˇSlapal。依赖于参数的传递拟一致结构。《等式数学》（2023）。https://doi.org/10.1007/s00010-022-00937-8。*[19]* L. Stramaccia。由满反射子定义的空间类。第 18 期，第 423–432 页，1988。《第三届全国拓扑学会议》（意大利语）（的里雅斯特，1986）。*[20]* S. J. R. Vorster。一般范畴中的内部算子。《数学问题》，23(4):405–416，2000。