arXiv:2302.02758v1 [physics.class-ph] 13 Jan 2023

高尔夫球反弹的测量与线性化模型。

Stanis-law W. Biber[†, 1]，Kristian M. Jones[2], Alan R. Champneys[1], Riku Green[1], 和 Robert Szalai[1]

[1]布里斯托大学工程数学系，BS8 1TW，英国[2]设备标准，R&A Rules Ltd.，圣安德鲁斯，法夫，英国

[†]通讯作者：s.biber@bristol.ac.uk

2023年2月7日

摘要

本文详细介绍了一系列实验，捕捉了高尔夫球弹跳的 1000 多种不同情形。研究采用视频分析，记录各种落地条件下每次弹跳前后瞬间的速度和旋转。文中展示了两种不同草坪上的数据：一种是人工草坪，另一种是典型发球台上的草坪。研究分析了测量误差和重复性，并将数据与带摩擦的刚性反弹模型预测进行比较，其中包括 Penner 为考虑弹塑性而提出的修正。根据数据拟合了恢复系数、摩擦系数以及 Penner 的有效接触角。结果发现，采用一种非物理的分段仿射落地至离地关系，能更好地拟合数据；这种关系区分了纯滑动弹跳与滚动弹跳的情况。尽管如此，研究通常发现，即使是发生滚动的球，离地时也处于滑动状态，并且经历了旋转反向。研究结果表明，仍需进一步努力，寻找简单的基于物理的高尔夫球反弹模型。

关键词：实验数据收集、高尔夫球反弹、弹塑性反弹

1 引言

球杆杆面与球碰撞后，高尔夫击球可分为两个主要阶段：自由飞行阶段，以及反弹与滚动阶段。虽然人们对球的飞行已有相当深入的了解 [13], ，但高尔夫球反弹仍存在许多不确定性，可用于拟合反弹模型的数据也十分匮乏。

球体弹跳的基础模型建立在牛顿恢复理论之上，该理论假设球体发生瞬时刚性反弹，动能在此过程中按一个恒定因子耗散 r^2，参见例如 [6]。在网球、足球或板球等许多球类运动中，乃至高尔夫球从球杆杆面发射的情形下，若将球建模为与刚性表面接触时间有限的弹性球，则可以改进这类方法，参见例如 [3, 4, 5, 8]。

然而，在高尔夫球与草坪的相互作用中，球仍相对刚硬，而草坪则呈现弹塑性行为。针对这类相互作用，对刚性反弹理论的一种简单修正是 Penner 提出的方法 [12]：他认为，接触期间的弹塑性作用力等效于球在旋转了 β角度的刚性表面上反弹。基于有限的数据，Penner 提出了计算该角度的通用公式，该角度与入射角和速度呈线性关系。尽管如此，这一公式背后的物理依据似乎值得质疑。

Haake [9] 提供了我们所知的公共领域中规模最大的高尔夫球反弹数据集。研究人员进行了七百多次测量，涵盖不同的入界条件以及不同的高尔夫球场。这些数据被用于检验不同高尔夫球反弹黏弹性模型的有效性。研究发现，由弹簧和阻尼器组成的双层系统与实验数据的一致性最佳，但仍无法准确预测离地过程的所有特征。此外，双层模型包含许多

参数，其中并非所有参数都具有明确的物理意义。后续模型通常只根据较少的数据进行评估，因此其预测能力受到限制。

为了加深对现代高尔夫球反弹的理解，并推动新一代更精确模型的发展（例如 [1]），该模型同时考虑切向和法向柔度），显然需要更准确的数据。因此，我们采用当时 Haake 研究中尚不可用的先进图像分析技术，针对多种入射速度、角度和旋转条件，采集了高尔夫球碰撞前后瞬间运动的新数据。我们还尝试系统地处理测量误差和变异性的影响。结果分别针对两种不同的地面类型给出：人工草坪和天然草坪。我们还将考察这些数据是否与刚性反弹模型一致，包括采用或不采用 Penner 有效坡角的模型。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍本研究的方法，包括实验装置、数据分析，以及我们如何拟合用于比较的模型。第 3 节给出结果，并在第 4 节中进行讨论。

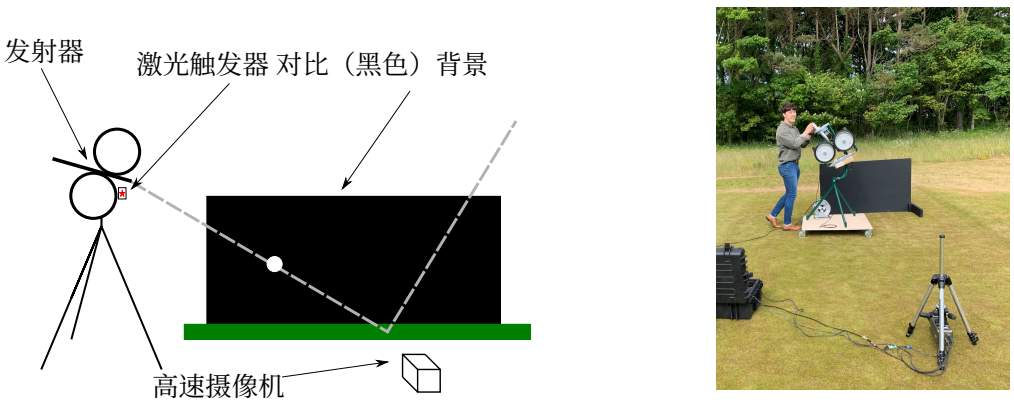
2 方法

2.1 实验装置

进行了两批实验。两种情况下，均使用经过改装的棒球发射器，将现代多层高尔夫球（职业巡回赛上使用的球）朝下发射至指定表面。球置于发射器的两个旋转轮之间，一个在上方，一个在下方。每个轮子的旋转速度均可独立控制。通过调整这些速度（包括让上方轮子可能反向旋转），可以实现高尔夫球各种真实的速度和旋转；调整发射器的倾角则可以改变着陆角。发射器的轮子经过对齐，使施加于球上的旋转轴垂直于其运动平面，从而避免球产生明显的侧旋。

第一批实验（A）中，球从一块厚 30 毫米、粘附在刚性表面（厚 38 毫米的木板）上的优质人造高尔夫发球区草坪上弹起。第二批实验（B）中，球从一处维护良好的发球区弹起。在两批实验中，每次重复实验之间都会移动发射器，使球在每次记录碰撞时都撞击表面上不同且未受损的区域。

球离开发射器时，手动触发高速摄像机，或通过激光传感器触发，以拍摄弹跳视频。录像使用 Phantom VR603 高速摄像机拍摄，帧速率为每秒 5,000 至 10,000 帧。摄像机经过调整，使图像平面与球的运动平面



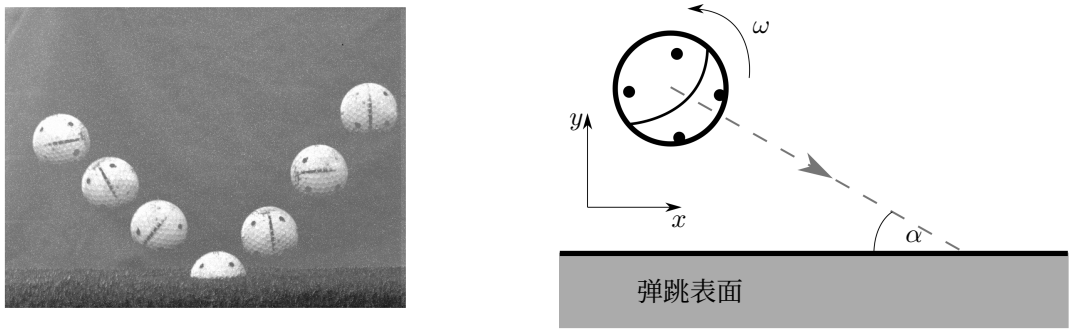
(a)

(b)

图 1：实验装置。球从改装的棒球发射器中发射出去。球离开发射器时触发了激光传感器，进而启动高速摄像机。（a）带注释的装置示意图。（b）实验过程中的照片。

对齐。每段视频片段都包含弹跳前后的一些帧。图2a 展示了其中一段视频片段的多帧叠加图。

为便于自动跟踪，弹跳是在纯黑背景下记录的。此外，每个球的接缝处都画了一条线，并沿着接缝以规则阵列排列了一圈圆点。视频是在夏季于户外拍摄的，自然光照已足够。



(a) (b)

图2：左：单次弹跳过程中记录的多个帧的组合。帧与帧之间的时间间隔并不相同，仅为便于说明而选取。右：分析数据时所用变量的定义示意图。

发射器的设置（轮速和发射角）经过选择，以涵盖高尔夫中常见的广泛条件。发射器每种设置下的球体弹跳，在 Campaign A 中重复 6 次，在 Campaign B 中重复 6 次或 12 次。Campaign A 共记录了 330 次弹跳，Campaign B 共记录了 693 次。

2.2 落地条件

用于定义球体落地条件的变量见图2b。请注意， y 是竖直向上测量的，这意味着落地速度 $\dot{y}$ 始终为负；旋转 ω 按逆时针方向测量，因此 $\omega > 0$ 表示后旋， $\omega < 0$ 表示上旋。为确保误差测量一致且可比较，我们采用缩放单位，使线速度和角速度的数值大致相当；因此， x 和 y 以球半径为单位测量，而 ω 以弧度每秒为单位测量。

表1展示了落地条件的范围，包括未缩放坐标和缩放坐标。完整的

表1：实验批次 A 和 B 的初始条件范围

Campaign A

有量纲量		
	min	max
速度 [m s^{-1}]	6.35	56.1
入射角 α [度]	18.3	76.4
旋转 [转/分钟]	-3750	9100

缩放量		
	min	max
$\dot{x}$ [s^{-1}]	74.9	2260
$\dot{y}$ [秒$^{-1}$]	-1880	-225
ω [弧度/秒$^{-1}$]	-392	953

Campaign B

有量纲量		
	min	max
速度 [米/秒$^{-1}$]	1.93	38.7
入射角 α [度]	16.4	89.5
旋转 [转/分钟]	-3880	16200

缩放量		
	min	max
$\dot{x}$ [秒$^{-1}$]	1.10	1720
$\dot{y}$ [秒$^{-1}$]	-1570	-90.0
ω [弧度/秒$^{-1}$]	-407	1670

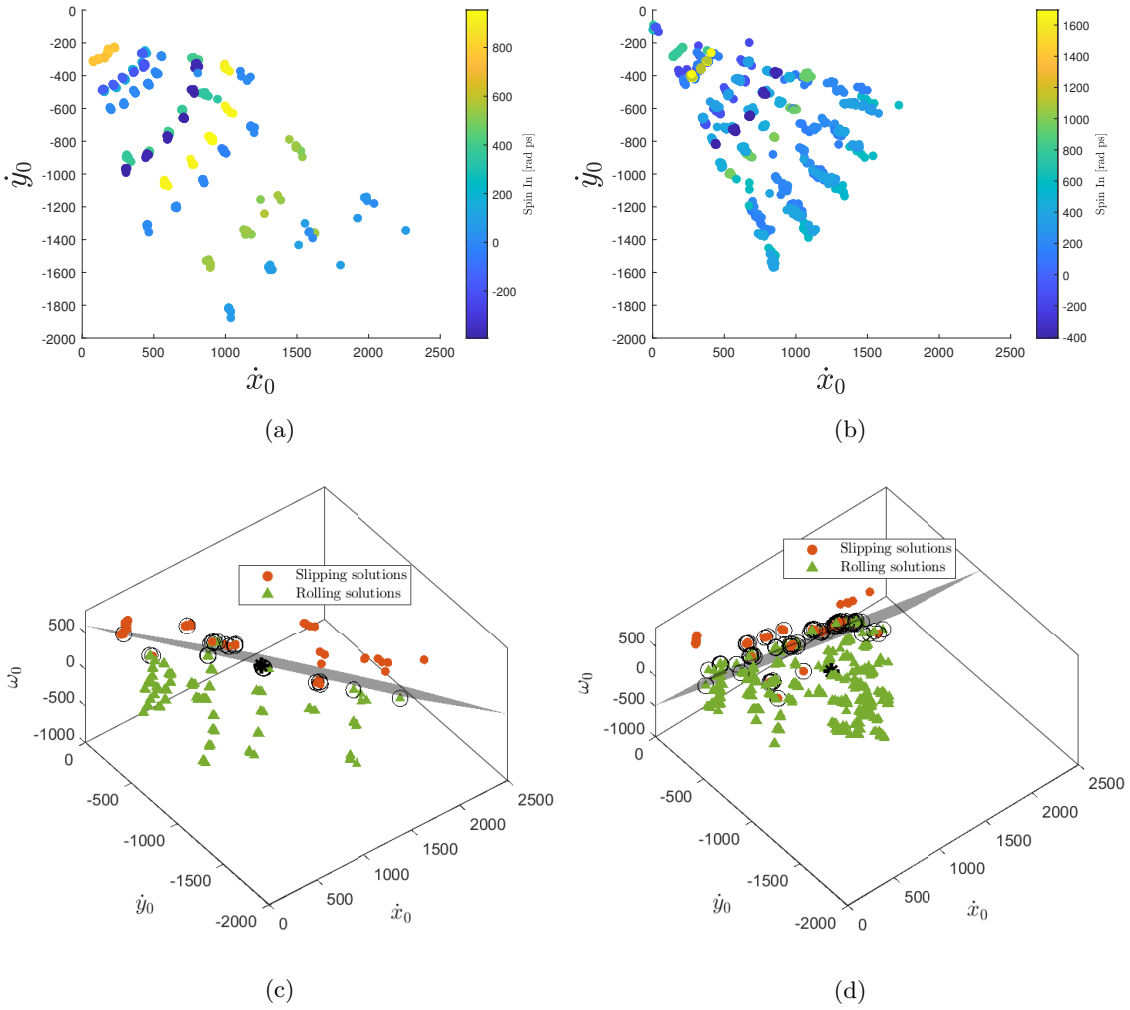


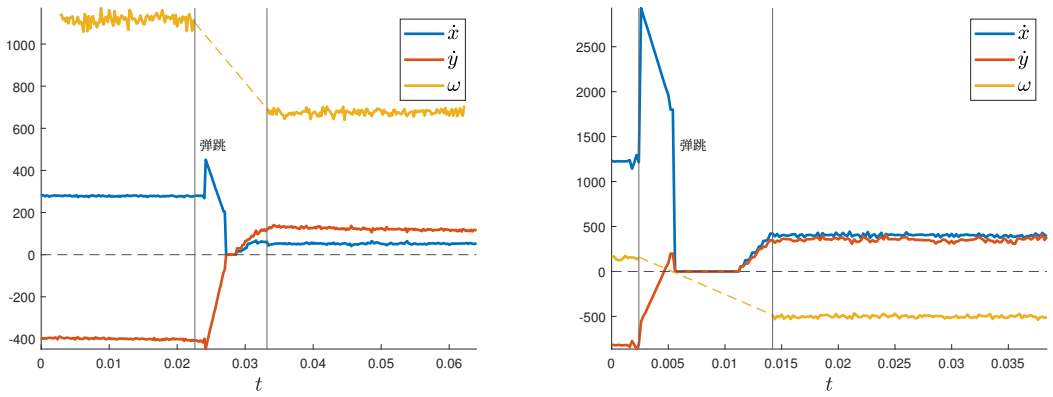
图3：(a) Campaign A 和 (b) Campaign B 的落地条件概览。(c,d) 根据离地时的切向速度，对数据进行相应分类，分类依据为初始条件：(c) Campaign A；(d) Campaign B。圈出的是用于识别分离超平面的边界数据点。黑色星号标记的是使用一号木杆从发球台击球时的典型落地条件；速度为 93.6 英尺/秒，着陆角为 37.3°，后旋为每秒 34.9 转。

初始条件空间范围可在每个实验批次的图3中看到。由于使用离散旋钮控制发射器的设置，数据呈现出聚类分布。

2.3 数据提取

我们在 MATLAB [11] 中开发了一套专门的流程，用于从视频中提取数据。首先，使用基于霍夫变换 [10]的圆检测函数 imfindcircle，在每一帧中定位球（并将未检测到球的帧排除）。根据球心在各帧之间坐标的变化，确定了 x 和 y 速度。其次，对每一帧截取一张以球为中心、周围留有少许边缘的缩减图像。随后，我们使用 MATLABS 的 extractFeatures 和 matchFeatures 函数，分别识别显著特征并在帧间匹配这些特征。由此，我们得以构建二维旋转矩阵，以估算各帧之间的旋转角度。尽管这一过程是自动化的，但通常发现球上的黑点是最常被提取并匹配的特征。

在所有情况下，连续 球与表面的接触持续了许多帧。弹跳的开始



(a) (b)

图4：不同发射条件下，球在弹跳前、弹跳期间及弹跳后的未经处理的轨迹数据。

和结束时间是根据球体最低可见点速度的骤变估算的。此外，在弹跳过程中，草坪会遮挡球体，使得在画面中定位球体并估算其旋转变得不可靠（例如见图4）。因此，我们决定将球反弹分析限制在弹跳前后的入射和出射状态。

2.4 数据分析

每次弹跳均使用六个量进行分类：触地时的水平速度、垂直速度和旋转（分别记为 $\dot{x}_0$，$\dot{y}_0$、ω_0），以及离地时的水平速度、垂直速度和旋转（分别记为 $\dot{x}_F$，$\dot{y}_F$、ω_F）。

2.4.1 测量误差

如图 4 所示，提取的数据并非每个速度和旋转各自的单点测量值，而是每个变量的一系列带噪声的测量值；测量时刻为 t_1、t_2、.....、t_N，其中时间间隔 $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ 即为帧率，且对所有 $i = 1$、$\ldots N-1$均保持不变。对于球的速度，我们对位置测量值的导数进行最佳拟合直线拟合。也就是说，对于水平速度，我们求得

$$v_x(t) = m\,t + c \tag{1}$$

使得

$$\varepsilon_x = \sum_{i=1}^{N-1} \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} - v_x(t_{i+1}) \right|^2 \tag{2}$$

最小。垂直速度估计值 $v_y(t)$ 的计算方法类似。采用线性拟合考虑了加速度可能产生的影响，例如垂直速度中的重力或水平速度中的阻力。参数 m和 c 与其 95%置信区间（CI）一并估计，进而得出在撞击时刻或离地时刻对 v_x 和 v_y 进行评估所得数值的 95%预测区间（PI）。PI 的大小为每次试验中各速度的测量误差提供了一个简约估计。

鉴于在记录的弹跳前后短时间间隔内未发现旋转存在线性变化的证据，因此有必要对旋转采用不同的处理方式。因此，我们假设每个时间间隔内记录的旋转服从正态分布，其噪声归因于测量误差。随后，对每个旋转测量值的时间序列拟合正态分布，并将该分布的均值作为测得的旋转值。因此，将均值的95%置信区间作为旋转的预测区间。

2.4.2 重复性

除了每次发射的预测区间所提供的测量误差估计值外，对每种发射设置进行6次或12次重复测量，还可以检查具有相似初始条件的测试是否得出了相似的出射测量值。对于每种测试条件，分别针对每个量（水平速度 $\dot{x}$、垂直速度 $\dot{y}$ 和旋转 ω）的入射测量值和出射测量值，计算均值及均值的95%置信区间。每个置信区间的宽度越大，表明数据围绕均值的离散程度越大，该量的重复性越低。

2.4.3 区分滑动与滚动

高尔夫球最低点的切向速度应能反映球的摩擦动力学。如果该点的速度为零，摩擦界面将处于“粘着”状态，这表明球在一段时间内处于滚动状态。相反，非零的切向速度则表明球正在表面上“滑动”。将该点记为 P，在缩放变量中， P 的切向速度为

$$v_P = \dot{x} + \omega. \tag{3}$$

我们根据触地和离地时 P 的切向速度测量值，将初始条件空间分成两组。如果触地和离地时的切向速度符号相同（且两种情况下均不为零），则认为球在整个弹跳过程中都在**滑动** 。在所有其他情况下，我们推断球必定在弹跳过程中的某个时刻进入了**滚动** 状态。

为了确定这些组之间可能存在的分界流形，我们使用序列最小优化（SMO）算法 [7]训练了一个支持向量机（SVM）分类器。训练后的 SVM 确定了两个类别边界处的数据点，并据此识别出将着陆条件空间划分为产生滚动和滑动轨迹的子空间的表面。通过实验（并借鉴了 [1] 中模型的研究结果），我们发现，在所考虑的范围内，着陆条件空间中的边界可以很好地近似为一个平面。

2.5 与现有模型的比较

本文的一个主要目标是将数据与文献中一些最常用的模型进行比较。

2.5.1 刚体反弹模型

最简单的模型（例如， [6]）假设弹跳是瞬时的，并导致法向速度按比例损失，其比值

$$r = |\dot{y}_0/\dot{y}_F|\,, \tag{4}$$

称为泊松恢复系数。此外，假设球与表面之间存在库仑摩擦，且系数 μ 为常数，因此球会

$$\text{slipping when } |\lambda_T| = \mu\lambda_N \text{ and rolling when } |\lambda_T| < \mu\lambda_N,$$

其中， λ_T 和 λ_N 分别表示作用于点 P的切向力和法向力。因此，该模型包含两个参数： μ 和 r，它们是弹跳表面的属性。通常， $0 < r < 1$, $0 < \mu < 1.5$

根据球在碰撞过程中是进入滚动状态还是始终侧滑，该模型预测的离地值很容易求得：

$$\begin{array}{lllll}
\dot{x}_F = \dot{x}_0 + \mu(1+r)\dot{y}_0, & \dot{y}_F = -r\dot{y}_0 & \omega_F = \omega_0 + \frac{5}{2}\mu(1+r)\dot{y}_0 & \text{if } -\frac{\dot{x}_0+\omega_0}{\dot{y}_0} > \frac{7}{2}\mu(1+r); \\
\dot{x}_F = \frac{5}{7}\dot{x}_0 - \frac{2}{7}\omega_0, & \dot{y}_F = -r\dot{y}_0 & \omega_F = -\frac{5}{7}\dot{x}_0 + \frac{2}{7}\omega_0 & \text{if } \left|\frac{\dot{x}_0+\omega_0}{\dot{y}_0}\right| < \frac{7}{2}\mu(1+r); \\
\dot{x}_F = \dot{x}_0 - \mu(1+r)\dot{y}_0, & \dot{y}_F = -r\dot{y}_0 & \omega_F = \omega_0 - \frac{5}{2}\mu(1+r)\dot{y}_0 & \text{if } -\frac{\dot{x}_0+\omega_0}{\dot{y}_0} < -\frac{7}{2}\mu(1+r).
\end{array} \tag{5}$$

参数 μ 和 r 采用结构化方法，根据现有数据进行拟合。首先，对每组测得的入射和出射

垂直速度采用最小二乘法求得恢复系数。其次，再次使用最小二乘估计求得 μ。随后利用方程（5）计算预测值

$$\boldsymbol{P}_F^i = [\dot{X}^i, \dot{Y}^i, \Omega^i]^\intercal \tag{6}$$

for $[\dot{x}_F, \dot{y}_F, \omega_F]$对于每个实测落地样本 i和入射值 $\boldsymbol{p}_0^i = [\dot{x}_0^i, \dot{y}_0^i, \omega_0^i]^\intercal$.

实验批次中所有 N 样本的模型误差计算如下：

$$\delta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\|\boldsymbol{p}_F^i - \boldsymbol{P}_F^i\|}{\|\boldsymbol{p}_0^i\|}, \tag{7}$$

其中， $\boldsymbol{p}_F^i = [\dot{x}_F^i, \dot{y}_F^i, \omega_F^i]^\intercal$为实测离地值， $\|\cdot\|$ 表示向量的通常欧几里得范数。请注意，要使误差度量有意义， $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_F, \boldsymbol{P}_F$的每个分量都必须处于相同的数量级，这凸显了使用缩放后的速度量的重要性。(7) 中计算的误差度量可视为相对于系统初始动能的均方根误差。

类似地，我们通过以下方式计算每个单独量 $\dot{x}, \dot{y}, \omega$ 的平均误差（统称为 q，其预测计算值为 Q）：

$$\Delta q = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{|q_F^i - Q_F^i|}{\|\boldsymbol{p}_0^i\|}. \tag{8}$$

请注意，由（8）计算出的平均量既不会相加，也不会平均得到由（7）计算出的误差——它们仅用于指示误差最大的产生位置。

通过调整参数 μ，计算出刚性反弹模型的固定恢复系数估计值 r，使得按照方程（7）定义的总误差最小。

2.5.2 倾斜表面模型

Penner模型 [12] 也以类似方式进行了考察。该模型提出，刚性球在水平柔性表面上的弹跳，可以建模为刚性球在旋转了角度 β 的刚性表面上的弹跳。 [12] 中提出的具体公式为

$$\beta = k_P s\,\phi, \quad \text{where } s = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2} \quad \text{and } \phi = \arctan\left[-\frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}\right]. \tag{9}$$

其中， s 是球的入射速度， ϕ 是其着陆角； k_P 是草皮相关常数。

除 μ 和 r 外，该模型还需要拟合参数 k_p。我们使用 Matlab 的遗传算法工具箱 ga 拟合全部三个参数，并将误差函数（7）最小化。最小化该函数时选定的容差为 10^{-15}。在每种设置下，恢复系数均在旋转了 β 的参考系中指定。

我们通过两种方式探讨了旋转参考系的概念：一种是按照 (9) 所述，由初始条件确定旋转角；另一种是假设角度 β 对所有初始条件都固定不变。

2.5.3 分段线性数据拟合

此外，在第2.4.3节中确定的滑动与滚动边界两侧的各个半空间内，我们尝试拟合一个仿射变换。也就是说，对于测得的初始条件 $\boldsymbol{p}_0$ 和出射 $\boldsymbol{p}_F$，我们用下式近似后者：

$$\boldsymbol{P}_F = A\boldsymbol{p}_0 + \boldsymbol{b}, \tag{10}$$

其中， A 是一个 3×3 矩阵， $\boldsymbol{b}$ 是一个三维向量。

为了验证拟合效果，我们将每个实验批次的数据分为两类。从每种发射器设置中随机选取一个数据点，从完整数据集中移除并放入测试集，其余数据点则用于训练模型 (10)。我们使用误差度量 (7) 和 (8)，通过测试数据集评估模型 (10) 的准确性。

3 结果

完整数据集见附录A，也可在线获取 [2]，并附有完整视频。该数据集涵盖了广泛的入射速度和旋转范围，并包含反向弹跳的示例，即水平速度 $\dot{x}$ 的符号在碰撞与离地之间发生反转。

3.1 测量误差与重复性

图5展示了预测区间（PI）宽度的直方图。这些宽度均按所有样本的平均测量值进行了缩放。也就是说，每个直方图横轴上的值为1，表示所有样本中入射或出射的平均水平速度、垂直速度或角速度。这些预测区间为通过视频分析测量速度时产生的误差提供了简洁的估计。

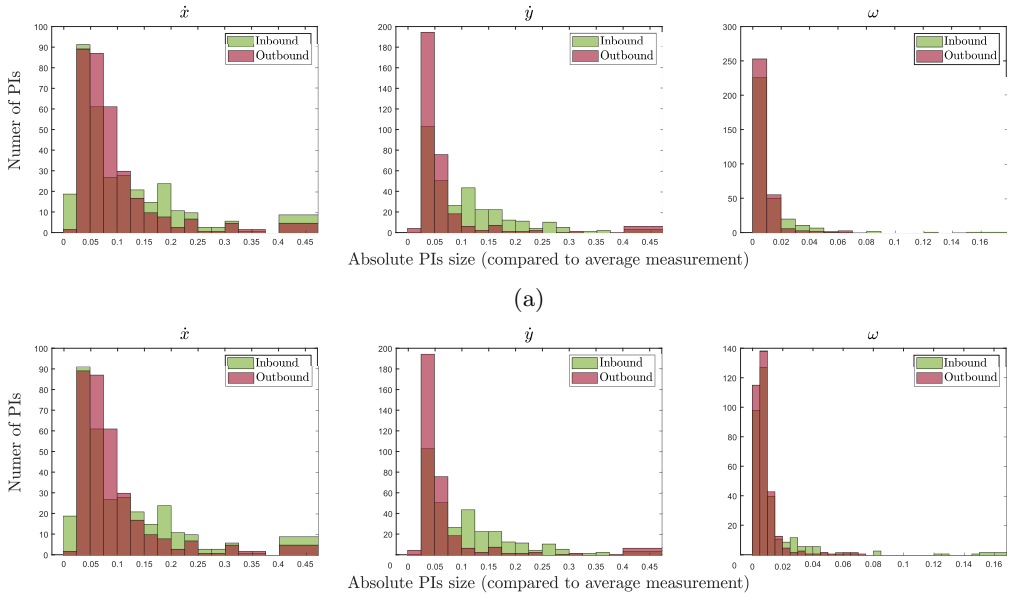


图5：预测区间宽度的直方图：（a）Campaign A；（b）Campaign B。数值按所有样本的平均测量值缩放。从左至右分别为水平速度 $\dot{x}$、垂直速度 $\dot{y}$ 和旋转 ω。绿色区间表示入射测量值，红色区间表示出射测量值。

图8展示了在相同发射器设置下进行测试的重复性。每个圆圈表示特定测试条件下相应量的平均值，误差条表示该平均值的95%置信区间。

3.2 分段线性模型：滑动与滚动

图6展示了两个实验批次中，点 P 在撞击时刻和离地时的切向速度 v_p。特别要注意，离地速度偏离了零值。也就是说，球似乎很少（如果有的话）以滚动状态离地。离地时总会存在一些侧滑。此外，请注意，以正切向速度 v_p 离地的样本与以负切向速度 v_p 离地的样本之间存在明显区别。

带有 $v_P > 0$ 的情况对应于初始后旋较高的情况。在这类情况下，球在整个碰撞过程中均发生侧滑，并再次以后旋状态离地。相反，离地时带有 $v_p < 0$ 的情况通常发生在以下情形之一：球以较高的上旋状态着地（$v_p < 0$ 在碰撞时和离地时均如此），或者球在弹跳阶段的某个时刻开始滚动（$v_p < 0$ 初始时如此，但离地时为 $v_p > 0$）。只有最后一种情况才被称为“滚动”轨迹。

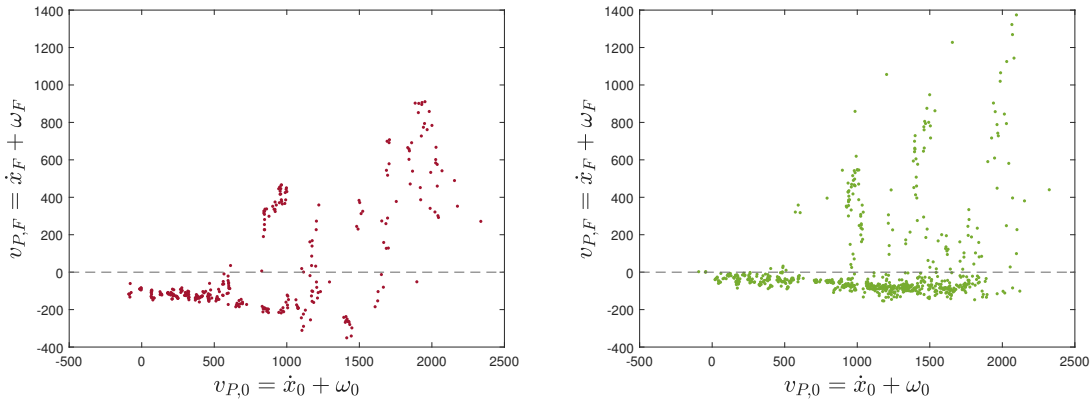


图6：着地和离地时的切向速度。(a) Campaign A；(b) Campaign B 的数值。虚线表示离地时切向速度为零。

滚动与滑动反弹之间的区别在图3的三维空间中进行了可视化。对于每个实验批次，数据被分为着陆条件空间中的不同区域，只有少数数据点被近似分割平面错误标记。边界情况通过支持向量机算法加以识别，并使用最小二乘近似，通过所识别的边界点拟合出一个平面。利用这样的平面对落地条件进行划分后，即可针对每个子集确定入射速度与出射速度之间的仿射变换。

Campaign A 的拟合结果如下：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_F\\ \dot{y}_F\\ \omega_F\end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0.536 & -0.004 & -0.205\\ 0.144 & -0.407 & -0.027\\ -0.524 & 0.091 & 0.318\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{y}_0\\ \omega_0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-111\\ 23.7\\ 39.4\end{bmatrix} & \text{if } 0.891\dot{x}_0 + 0.763\dot{y}_0 + \omega_0 < 600 \\ \begin{bmatrix} 0.674 & 0.107 & -0.005\\ 0.103 & -0.390 & 0.017\\ -0.153 & 0.277 & 1.01\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{y}_0\\ \omega_0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-154\\ 25.0\\ -267\end{bmatrix} & \text{if } 0.891\dot{x}_0 + 0.763\dot{y}_0 + \omega_0 > 600; \end{cases} \tag{11}$$

同样，Campaign B 的拟合结果如下：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_F\\ \dot{y}_F\\ \omega_F\end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0.326 & 0.222 & -0.213\\ 0.185 & -0.008 & -0.076\\ -0.333 & -0.147 & 0.224\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{y}_0\\ \omega_0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}175\\ 90.4\\ -171\end{bmatrix} & \text{if } 0.377\dot{x}_0 + 2.25\dot{y}_0 + \omega_0 < -485 \\ \begin{bmatrix} 0.606 & 0.649 & -0.007\\ 0.146 & -0.089 & -0.006\\ -0.192 & 1.01 & 0.887\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{y}_0\\ \omega_0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}117\\ 49.3\\ 35.0\end{bmatrix} & \text{if } 0.377\dot{x}_0 + 2.25\dot{y}_0 + \omega_0 > -485. \end{cases} \tag{12}$$

图3中突出显示了用于确定边界数据的支持向量。表2列出了所示拟合的误差值。我们还给出了线性近似后测试数据中分类不匹配的百分比——也就是说，在事后观察中被判定为滚动或滑动、但空间支持向量机分类器将其归入错误类别的数据样本所占的百分比。此外，图7展示了预测数据与观测数据的对比。

3.3 刚性反弹模型

表3第一列列出了两个实验批次中刚性反弹模型的最佳拟合参数。表中还列出了使用 δ 测得的拟合误差，以及使用 $\Delta\dot{x}$、$\Delta\dot{y}$ 和 $\Delta\omega$ 测得的拟合误差，测量方法详见上一节。

表2： 按照公式（11）和（12）所述，对互不相交的线性近似进行拟合时的误差 .

Campaign A		
	Roll	Slip
总体误差 δ	6.56 %	
δ	6.79 %	5.95 %
$\Delta\dot{x}$	4.13 %	3.36 %
$\Delta\dot{y}$	2.13 %	2.01 %
$\Delta\omega$	3.94 %	3.59 %
不匹配数据	7.27 %	

Campaign B		
	Roll	Slip
总体误差 δ	7.84 %	
δ	8.07 %	7.31 %
$\Delta\dot{x}$	5.33 %	3.76 %
$\Delta\dot{y}$	2.52 %	0.920%
$\Delta\omega$	4.74 %	5.41%
不匹配数据	9.59 %	

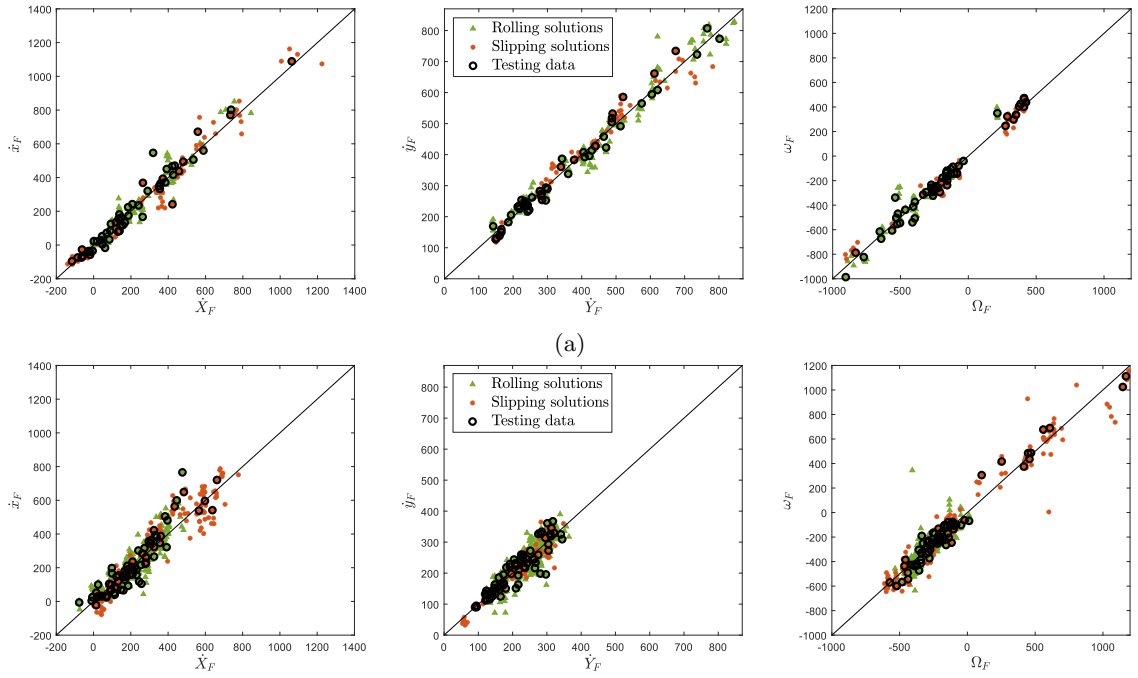


图7：预测的起飞值与观测结果的比较。实线表示预测值与观测值之间的精确拟合。三角形标记表示被分类为滚动的样本，圆形标记表示滑动反弹。黑色圆圈标记的是为测试集随机选取的数据样本，用于检验拟合优度。数据来自（a）Campaign A；（b）Campaign B。

表3：各实验批次对刚性反弹模型的参数最佳拟合结果及误差。详情请参阅方法。

Campaign A			
	刚性	变化的 β	固定的 β
β		$k_P = 1.543 \times 10^{-4}$	$\beta = 12.9°$
r	0.544	0.448	0.420
μ	0.997	0.969	0.852
δ	31.9%	25.5%	19.0%
$\Delta\dot{x}$	19.3%	14.6%	9.58%
$\Delta\dot{y}$	4.58%	4.42%	3.17%
$\Delta\omega$	18.6%	16.1%	14.2%

Campaign B			
	刚性	变化的 β	固定的 β
β		$k_P = 2.973 \times 10^{-4}$	$\beta = 18.4°$
r	0.260	0.222	0.147
μ	0.998	0.999	0.998
δ	35.0%	21.3%	19.2%
$\Delta\dot{x}$	19.8%	9.42%	9.16%
$\Delta\dot{y}$	6.32%	4.30%	4.24%
$\Delta\omega$	24.6%	16.4%	15.1%

对于 Penner 对模型的扩展，每个实验批次的拟合结果均列于表3的后两列。可以看到，其误差略小于简单刚体拟合，但仍远大于支持向量机拟合。此外，采用恒定旋转角的近似方法 β 的误差略小于 Penner 提出的近似线性关系（9）。

4 讨论

据我们所知，本研究呈现的数据是公开科学文献中最全面的高尔夫球反弹数据集。我们谨慎地介绍了数据采集、数据整理和误差分析涉及的所有步骤。借助视频分析和现代图像处理技术，我们得以捕捉两种不同草坪上着地时的速度和旋转与离地时相应状态之间的关系。我们还免费公开了这些汇总数据和原始视频，旨在推动未来对符合物理实际的高尔夫球反弹模型的开发与评估。作为这一过程的第一步，我们在此评估了三种简单模型：包含恢复系数和库仑摩擦的简易刚体反弹模型、Penner 对该模型的经验扩展，以及对数据进行的简单分段仿射拟合。

我们还仔细区分了从视频中提取各项量值时的预测区间，与各项测量的自然变异和重复性。需要注意的是，虽然少数数据点的某些预测区间看起来可能大得不切实际，但大多数预测区间约为相应量值平均值的5%。此外，在所有情况下，我们都采用这些区间内的平均值进行数据分析，因此实际误差可能要小得多。

考察测量的重复性时，值得注意的是，在大多数情况下，出射测量值的置信区间（图 8 中的水平线）比入射测量值的置信区间更宽。这表明草坪的行为并非完全由确定性因素决定，也反映出草坪响应的变异性。人造草坪（Campaign A）上也存在这种效应，但不那么明显，这正如预期。

通过考察着地和离地时的切向速度，我们得以区分侧滑与滚动；这似乎是理解高尔夫球弹跳动力学的关键。此外，我们几乎没有发现任何以纯滚动状态离地的球（见图6）。相反，在弹跳过程中开始滚动的球，会在起跳前转为朝相反方向的侧滑。鉴于这一发现，我们推测，现有模型尚未充分考虑摩擦和切向柔顺性的不同影响。

从我们的模型拟合结果中可以看出，分段仿射拟合的表现显著优于刚性弹跳模型和 Penner 模型，在每个实验批次中的总体预测误差都约小五倍。需要注意的是，分段仿射模型需要先使用支持向量机识别出将滚动弹跳与滑动弹跳分隔开的超平面。还要注意，误差的主要来源是对出射水平速度和旋转的近似。有证据表明，这些特定变量呈现非线性行为。

此外，支持向量机拟合并未揭示弹跳背后的物理原理，

而且拟合结果得出了一个不连续模型。不仅在滑动/滚动边界处，速度存在不符合物理规律的不连续，而且两种拟合结果在 $\dot{y}_F$方向上都相对于原点有正偏移。这意味着法向速度为零（即始终与平坦草坪接触）的球会自行离地。这一观察进一步表明，更好的模型应是非线性的。这种非线性可能源于一种动态转变：法向速度较低时呈现弹性行为，而速度较高时的弹跳则呈现弹塑性行为。

对于刚性反弹模型，表3显示，其对水平速度和旋转的预测平均误差超出了合理近似范围（Campaign A分别为19.3%和18.6%；Campaign B分别为19.8%和24.6%）。拟合效果不佳的原因可能是，刚性反弹模型不允许除摩擦以外的任何力在水平方向上作用。最有可能的是，地面的切向柔顺性还会产生额外的水平力。 [1]中探讨了这类影响。

尽管拟合效果略优于刚性反弹模型，表3显示，Penner模型对离地水平速度和旋转的预测仍存在不合理的较大误差（Campaign A分别为14.6%和16.1%；Campaign B分别为9.4%和16.4%）。还需注意，使用固定常数角度 β 时，对两个实验批次的拟合效果都优于Penner模型。因此，针对我们所考察的落地条件范围，数据并不能验证Penner模型。

此外，图6显示球以反向切向速度离地；这种现象在刚性反弹理论下不可能发生。Penner模型或许能够定性地解释这一现象，但我们发现，对于归类为滚动的初始条件，Penner角度（9）中的任何比例常数都无法将其映射到 v_p 的零值。我们也未发现任何常数角度 β for 能使 $v_p \approx 0$ for 对所有这类落地条件都成立。

5 结论

我们得出结论：目前仍缺乏可靠的基于物理的高尔夫球反弹模型。这样的模型需要对柔顺表面建立复杂的非线性模型。刚性反弹模型与数据之间的大部分差异体现在切向和旋转自由度上，而法向的误差小了五倍。结合这一观察以及[1], 中的一些理论结论可以看出，研究高尔夫球弹跳时，需要采用草坪与球相互作用的摩擦与切向柔顺模型。这类模型还需要解释我们在数据中发现的非线性证据。

致谢

我们谨向产业合作伙伴 R & A Rules Ltd. 致谢。所有实验工作均在 R & A 的研究设施中完成。我们特别感谢 Andrew Johnson 和 Steve Otto 提供的宝贵建议。

声明

这项工作部分由英国工程与自然科学研究委员会和产业合作伙伴 R & A Rules Ltd. 资助。作者声明，他们不存在与本文内容相关的利益冲突。

参考文献

[1] S. W. Biber, A. R. Champneys, and R. Szalai，硬质旋转球在柔性摩擦表面上的弹跳点接触模型分析。 https://arxiv.org/abs/2208.11685，2022年。

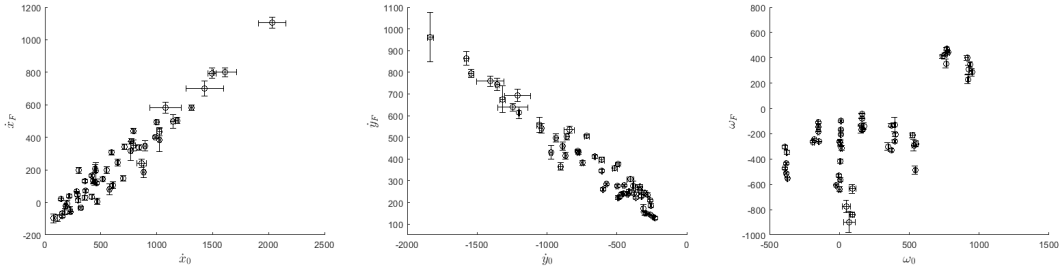
[2] S. W. Biber, K. M. Jones, and R. Green, 高尔夫球反弹测量。可从布里斯托大学数据仓库获取: https://doi.org/10.5523/bris.1cwnj42n63q5w2sc843iww7bbd，2022年。

[3] M. Brake, 解析弹性—理想塑性接触模型，《国际固体与结构杂志》49 (2012)，第 3129–3141 页。
[4] M. J. Carré, D. M. James, and S. J. Haake,非均质球体与刚性表面的碰撞，《机械工程师学会会刊》，C辑：《机械工程科学杂志》218 (2004)，第 273–281 页。[5] L. P. Cordingley, 空心运动球表面冲击的先进建模。，博士论文，拉夫堡大学，(2002)。[6] C. B. Daish, 球类运动物理学，霍德与斯托顿出版社，伦敦，1981。[7] R.-E. Fan, P.-H. Chen, C.-J. Lin, and T. Joachims, 使用二阶信息进行支持向量机训练的工作集选择。，《机器学习研究杂志》6 (2005)。[8] H. Ghaednia, X. Wang, S. Saha, Y. Xu, A. Sharma, and R. L. Jackson,弹性—塑性接触力学综述，《应用力学评论》69 (2017)。
[9] S. J. Haake,用于测量高尔夫球场草坪物理特性及其现场应用的装置，博士论文，伯明翰阿斯顿大学，(1989)。[10] P. V. C. Hough, 识别复杂模式的方法和装置，1962年12月18日。美国专利 3,069,654。
[11] MATLAB, 版本 *9.11.0 (R2021b)*，MathWorks 公司，纳蒂克，马萨诸塞州，2021。
[12] A. R. Penner, 高尔夫球滚动，《加拿大物理学杂志》80 (2002)，第 931–940 页。
[13] S. J. Quintavalla, 适用于各种情况的高尔夫球空气动力学特性模型，《科学与高尔夫 IV》，劳特利奇出版社，(2002)。

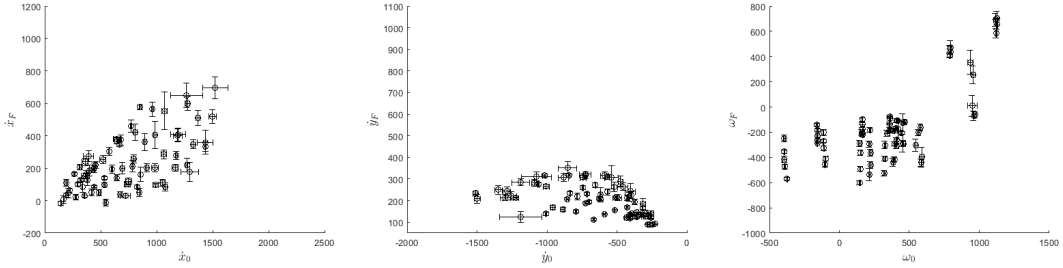
一组数据

图8汇总了每条轨迹测得的平均入射和出射速度及旋转，并以各种二维切片的形式展示，同时给出了每项测量的置信区间。

图9通过所有可能的二维切片展示了相同指标的完整数据（不含均值和误差条）。完整数据集及其来源视频可从 [2] 免费下载。

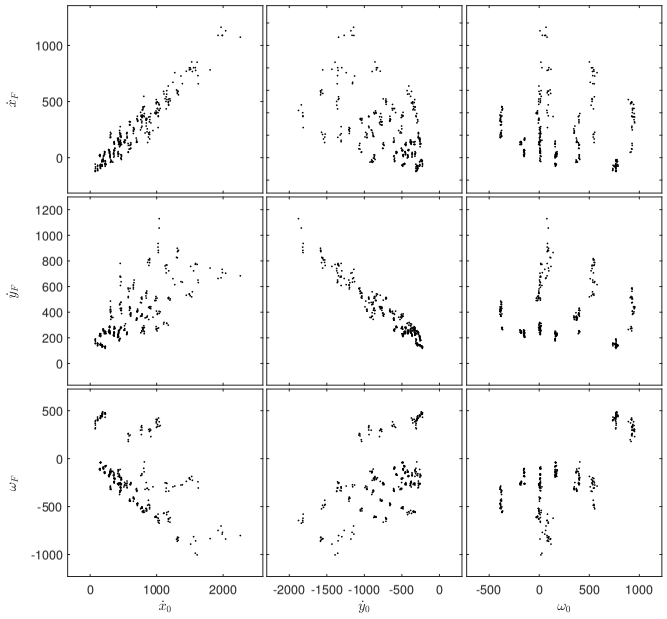


(a)

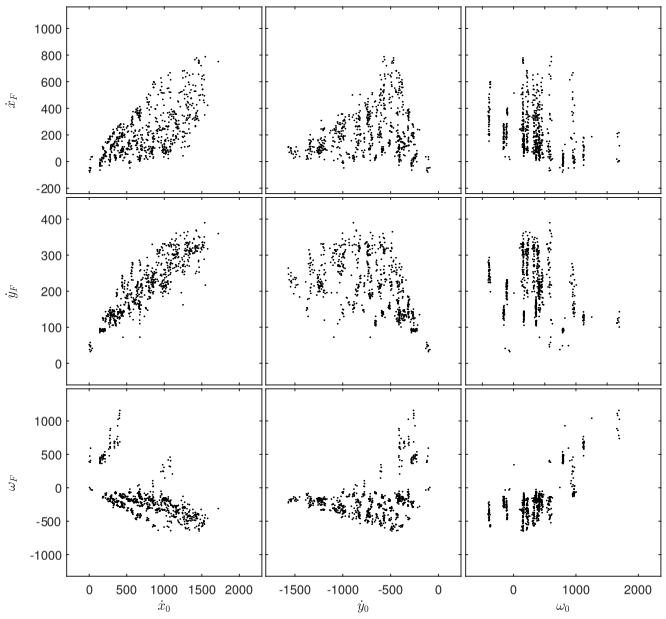


(b)

图8：发射器各项设置下的平均着地值和离地值（以圆圈表示），以及估计值的95%置信区间（以水平和垂直误差条表示）。图中展示了 (a) Campaign A 和 (b) Campaign B 的数据；两种情况下，各面板从左至右依次显示水平速度、垂直速度和旋转。



(a)



(b)

Figure 9: A full representation of all available data from (a) Campaign A; (b) Campaign B. Here, lift off values are presented as the outcome of varying the inbound quantities.