arXiv:2302.02761v1 [math.GR] 2 Feb 2023

非手征词

Shrinit Singh 和 A. SatyanarayanaReddy,
Shiv Nadar 卓越学府数学系，印度-201314（电子邮件：ss101@snu.edu.in，satya.a@snu.edu.in）。

摘要

自由群中的字 w 若对每个群 G 都满足 $G_w = G_{w^{-1}}$，其中 G_w 是字映射 w 在 G. 上的像，则称其为非手性字。我们将给出几类非手性字的例子。Cocke 和 Ho 曾提出，Engel 词是否为非手性词。我们将证明，只需应用 Whitehead 算法即可检验这一点。

关键词：自由群，字映射，手征词 AMS（2020）：
20F10

1 引言

设 F_n 是由 n 个生成元 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. 生成的自由群。非空约化词$w \in F_n$ 是一个表达式 $\prod_{j=1}^{s} x_{i_j}^{a_j}$，其中 $i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$、$a_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，且对每个$j \in \{1, 2, \ldots, s\}$，$x_{i_j} \neq (x_{i_{j+1}})$ 。$^{-1}$. 本文中，字指约化词。约化词 w 的长度定义为 $\Sigma_{j=1}^{s} |a_j|$. 对于任意群 G，令 $G^{(n)}$ 表示 n 个 G的直积。与字 w对应的字映射 w 在G 上是一个从 $G^{(n)}$ 到 G的求值映射，定义如下：

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n) \mapsto w(g_1, g_2, \ldots, g_n) = \prod_{j=1}^{s} g_{i_j}^{a_j}.$$

字映射 w 在 G 上的像记为 G_w. 显然， G_w 非空，因为单位元 $e \in G_w$. 例如，若 $w = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \in F_2$ 是一个长度为 4 的字，且 G 是阿贝尔群，则 $G_w = \{e\} = G_{w^{-1}}$.

字映射已成为深入探索群的重要工具。关于字映射在群上的应用，可参见 [2], [6], [13], [14]。特别是， [8], [9], [12], [15]研究了有限单群上的字映射的像。

容易看出，对于任意给定的字，在群 G 上对应的字映射的像在 G 的任意端同态下保持不变。若群 G 满足性质

$\mathcal{P}$，即对于 G 的每个满足 $e \in S$ 的子集 S， S 在 G 的每个自同构下都保持不变。群 G 可以看作某个字映射的像。2012 年，Alexander Lubotzky [10] 证明所有有限单群都满足性质 $\mathcal{P}$. 。Carolyn Ashurst [3], 在她的学位论文中提出：对于任意有限群 G，在任意字映射下，元素 g 的原像的基数是否与 g^{-1}. 的原像的基数相同。Cocke 和 Ho [5] 利用 Lubotzky 的结果证明这并非如此，并定义了手性词。若存在一个群 G，使得 $G_w \neq G_{w^{-1}}$，则称字 $w \in F_n$ 是手性的。我们将非手性词定义为非手性的字。若存在某个 n 和一个字 $w \in F_n$，使得 $G_w \neq G_{w^{-1}}$，则称群 G 是手性的。若 G 不是手性的，则称 G 为非手性的。设 X 是群 G 的一个子集。那么，当 $X = X^{-1}$ 时，称 X 对取逆封闭，其中 $X^{-1} = \{g^{-1} | g \in X\}$. 。显然， ${G_w}^{-1} = G_{w^{-1}}$。因此，若对于每个群 G， G_w =$(G_w)^{-1}$. ，则字 w 是非手性的。也就是说，当且仅当对于每个群 G. ， G_w 都对取逆封闭时，字 w 才是非手性的。例如，对于任意群 G，集合 $G^k = \{g^k | g \in G\}$、$k \in \mathbb{Z}$ 都对取逆封闭，因此字 $w = x_1^k$、$k \in \mathbb{Z}$ 都是非手性的。因此， F_1 中的每个字都是非手性的。设 G 是一个群，则 G 的子集 $S = \{ghg^{-1}h^{-1} | g, h \in G\}$ 对取逆封闭。因此，字 $w = x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}$ 是非手性的。如果对于每个群 G，字映射 w 都是满射，即 $G_w = G$，那么 w 就是非手性的。例如， $w = x_3x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1} \in F_3$ 和 $w = x_1x_2x_1x_2^2 \in F_2$ 都是非手性的。设

$$A_n = \{w \in F_n | \ w \text{ is achiral}\}$$

$$B_n = \{w \in F_n | \text{ for every group } G, \ G_w = G\}.$$

那么显然， $B_n \subseteq A_n$. 众所周知，Nielsen变换不会改变群中字映射的像。令 $Aut(F_n)$ 表示 F_n. 的所有自同构组成的集合。因此，若 $w \in F_n$ 且 $\sigma \in Aut(F_n)$，则 $G_w = G_{\sigma(w)}$. 由此可知，非手性词的自同构像也是非手性的。我们将在第2节中将此结果作为命题 2 的推论予以证明。这一观察将帮助我们在 B_n. 中提供一些元素。若字 $w \in F_n$ 能作为 F_n 的一个基的一部分，则称 $w \in F_n$ 为本原字。本原字总是非手性的，因为它是非手性词 x_1 的自同构像。由于 $x_1 \in B_n$，所有本原字构成的集合是 B_n. 的子集。不过， B_n 中也有并非本原字的字，例如 $x_1^2x_2^3$。Akbar Rhemtulla [16] 对 B_n 给出了完整描述，如下所示。

引理1（Akbar Rhemtulla [16]）。设 $w \in F_n$. ，则 $w \in B_n$ 当且仅当存在整数 $e_1, \ldots, e_n$，满足 $gcd(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$，使得 $w \in {x_1}^{e_1} \ldots {x_n}^{e_n} {F_n}'$，其中 ${F_n}'$ 是 F_n. 的换位子群。

众所周知，满足 $\in \mathbb{Z}^n$ 的元素 $(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$ 为 $\zeta^{1}_{k()}$ 。因此，属于 A_n 的字 $w \in F_n$ 的概率为正。在第2节中，我们给出了字 $w \in F_n$ 为非手性的充要条件。利用这一刻画，可以在 A_n. 中得到更多元素。在最后一个小节中，我们将证明，对于 Engel 词的非手性，只需应用 Whitehead 算法即可。

2 主要结果

以下结果陈述于 William Cocke 的学位论文 [4] 中。为求完整起见，我们给出证明。

Pr命题 2. 对于一个字 $w \in F_n$，以下两个陈述等价 :

1. $w \in A_n$.
2. 存在一个端同态 ψ of F_n ，使得 $\psi(w) = w^{-1}$.

证明. 令 $w \in F_n$. 。我们可以将 w 视为 F_n 上的字映射，即 $w : {F_n}^n \longrightarrow F_n$ ，并且 $w(x_1, \ldots, x_n) = w$，也就是说， $w \in (F_n)_{w\cdot}$。假设 w 是非手性的。若取 $G = F_n$，则 $w^{-1} \in (F_n)_{w^{-1}} = (F_n)_{w\cdot}$。这意味着存在 $w_1, \ldots, w_n \in F_n$，使得 $w(w_1, \ldots, w_n) = w^{-1}$。这表明，由映射 $x_i \mapsto w_i \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 定义的 F_n 的端同态 ψ 将给出 $\psi(w) = w^{-1}$.

设 ψ 是 F_n 的端同态，使得 $\psi(w) = w^{-1}$. 。设 G 是一个群，且 $g \in G_{w\cdot}$。那么存在 $g_1, \ldots, g_n \in G$，使得 $w(g_1, \ldots, g_n) = g$.。我们有

$$\psi(w(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \psi(w) = w^{-1}.$$

因此， $g^{-1} = w^{-1}(g_1, \ldots, g_n) = w((\psi(x_1) \ldots, \psi(x_n))(g_1, \ldots, g_n)) \in G_w$. □

用 $End(F_n)$ 表示 F_n. 的所有端同态构成的集合。那么，当且仅当存在 $\sigma \in End(F_n)$ 使得 $\sigma(w) = w^{-1}$. 时， $w \in F_n$ 是非手性的。以下结论可由命题 2 直接得出。

推论 3. 设 $w \in F_n$.

1. 若 w 是非手性的，则对于所有 $\sigma \in Aut(F_n)$， $\sigma(w)$ 也将是非手性的。
2. w^n 对所有 $n \in \mathbb{Z}$.都是非手性的
3. 如果 w^n 对 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 是非手性的，那么 w也是非手性的。

第 1 部分的证明。由于 w 是非手性的，存在一个将 w 映射到 w^{-1}的端同态 ϕ 。然后，由 $\sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1}$ 定义的端同态将 $\sigma(w)$ 映射到 $\sigma(w)^{-1}$.

第 2 部分的证明。设 f: $F_n \to F_n$是一个满足 $f(w) = w^{-1}$的端同态。那么 $f(w^k) = f(w)^k = w^{-k} \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

第 3 部分的证明。设 ϕ 是一个将字 w^n求逆的端同态。假设 $\phi(w) = u$，则有 $\phi(w^n) = u^n = w^{-n}$。因此， $u = w^{-1}$。

我们已经看到，非手性词的自同构像总是非手性的。Cocke 和 Ho [5] 证明了非手性群的同态像总是非手性群。但非手性词的同态像未必是非手性的。特别地，设 w是一个手性词，那么我们可以构造所需的同态 ϕ，使得 $\phi(x_1) = w$.。下面的结果说明，一个字是否为非手性与自由群无关。

命题4. 设 $w \in F_m \subseteq F_n$，其中 $m \leq n.$。如果 w 在 F_m 中是非手性（手性）的，当且仅当 w 在 F_n中是非手性（手性）的。

证明。我们先证明非手性的情形，手性的部分将自动成立。设 $x_1, \ldots, x_m$ 是 F_m 的一组基，而 $x_1, \ldots, x_n$ 是 F_n 的选定基，它们扩充了 F_m 的基。令 i 为包含映射 $F_m \overset{i}{\hookrightarrow} F_n$，令 α 为满射映射 $F_n \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} F_m$，其定义为：映射 $\alpha(x_i)$ 在 $1 \leq i \leq m$ 时取值为 x_i，否则取值为 1。

假设 w 在 $F_m.$ 中是非手性的。那么存在 F_m 的一个端同态 ϕ，使得 $\phi(w) = w^{-1}.$。我们可以将这个端同态扩展为 F_n 的一个端同态 $\bar{\phi}$，并将每个不属于 F_m 的基元素映为单位元。因此我们有 $\bar{\phi}(w) = w^{-1}.$

设 w 在 $F_n.$ 中是非手性的。那么存在 F_n 的一个端同态 ψ，使得 $\psi(w) = w^{-1}.$

$$F_m \overset{i}{\hookrightarrow} F_n \overset{\psi}{\to} F_n \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} F_m$$

这些映射的复合 $\alpha \circ \psi \circ i$ 是 F_m 的一个端同态，使得 $\alpha \circ \psi \circ i(w) = w^{-1}.$

□

若要简化证明，可以使用手性词。

注5. 事实上，上述命题的证明也表明，存在一个将字 w 反转的 F_m 自同构，当且仅当存在一个将字 $w.$ 反转的 F_n 自同构。

推论6. 存在一个将下列字反转的自同构。

1. 每个回文词都是非手性的。2. 每个类型为 $x_1^{m_1} x_2^{m_2}$ 的字，其中 $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$，都是非手性的。3. 每个类型为 $x_1^m x_2^{\epsilon_1} x_1^n x_2^{\epsilon_2}$ 的字，其中 $m, n, \epsilon_i \in \mathbb{Z}$ 和 $\epsilon_1 = \pm\epsilon_2$，都是非手性的。

第1部分的证明。设 $w \in F_n$ 是一个回文词。取由 $f(x_i) = {x_i}^{-1}$ 生成的自同构，其中 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$。于是 $f(w) = w^{-1}.$

第 2 部分的证明。这里我们证明存在一个自同构，它将F_2的字取逆。因此，根据前一个命题的注记，结论成立。只需证明 $x_1^{m_1} x_2^{m_2}$的情形。取由将 x_1 映射到 $x_2^{-m_2} x_1^{-1} x_2^{m_2}$且将 x_2映射到x_2^{-1}生成的自同构 f。那么 $f(x_1^{m_1} x_2^{m_2}) = x_2^{-m_2} x_1^{-m_1}.$

第 3 部分的证明。这里我们证明存在一个自同构，它将F_2的字取逆。因此，根据前一个命题的注记，结论成立。当 $\epsilon_1 = \epsilon_2$时，取由将 x_1 映射到 x_1^{-1}且将 x_2 映射到 $x_1^m x_2^{-1} x_1^{-m}$生成的自同构。若 $\epsilon_1 = -\epsilon_2$，取由将 x_1 映射到 x_1^{-1}且将 x_2 映射到 $x_1^m x_2 x_1^{-m}$.生成的自同构

Makanin [11] 已证明，关于自由群上的方程组是否有解是一个可算法判定的问题。以下结果表明，判断一个字是否具有非手性是一个可判定问题。

引理 7. 证明自由群 F_n 中的字 w 具有非手性，等价于求解一个方程 F_n.

证明。设 $w = \prod_{j=1}^{l} x_{i_j}^{t_j} \in F_n$ 是非手性词。根据命题 2，存在 F_n 的一个端同态 ϕ，使得 $\phi(w) = w^{-1}$.。由于自由群的端同态由其生成元的像唯一确定，设 $\phi(x_i) = w_i$。因此，$\phi(w) = \prod_{j=1}^{l} w_{i_j}^{t_j}$。所以，$w$是非手性词当且仅当

$$\prod_{j=1}^{l} x_{i_j}^{t_j} \prod_{j=1}^{l} w_{i_j}^{t_j} = 1.$$

因此，判断给定的字 $w \in F_n$ 是否为非手性词，等价于求解F_n.中的一个方程

□

2.1 F_2中的非手性词

设 F_2 是一个秩为 2、字母表为 $X = \{x_1, x_2\}$. 的自由群。若 $w \in F_2$，则 w 是一个由字母 x_1、x_2、x_1^{-1}、x_2^{-1}. 组成的约化词。我们用 $\ell(w)$ 表示字 w 的长度。令$\mathcal{W}_n$ 表示所有长度为 n 的字构成的集合，即，

$$\mathcal{W}_n = \{w \in F_2 | \ell(w) = n\}.$$

容易看出，$|\mathcal{W}_n| = 4 \cdot 3^{n-1}$.。例如，

$$\mathcal{W}_1 = \{x_1, x_2, x_1^{-1}, x_2^{-1}\}.$$

$$\mathcal{W}_2 = \{x_1^2, x_2^2, x_1^{-2}, x_2^{-2}, x_1x_2, x_1^{-1}x_2^{-1}, x_2x_1, x_2^{-1}x_1^{-1}, x_1^{-1}x_2, x_1x_2^{-1}, x_2^{-1}x_1, x_2x_1^{-1}\}.$$

Let

$$\mathcal{W}^n = \{w \in \mathcal{W}_n | \exists \sigma \in Aut(F_2), \sigma(w) = w^{-1}\}.$$

因此 $\mathcal{W}^n \subseteq A_2$. 在继续之前，给定一个自同构 $f \in Aut(F_2)$，我们定义

$$\mathcal{W}_f^n = \{w \in \mathcal{W}^n | f(w) = w^{-1}\}.$$

如果 $f(x_1) = x_1^{-1}$、$f(x_2) = x_2^{-1}$；$g(x_1) = x_2^{-1}$、$g(x_2) = x_1^{-1}$，并且 $h(x_1) = x_2$、$h(x_2) = x_1$，那么显然

$$\mathcal{W}_f^2 = \{x_1^2, x_2^2, x_1^{-2}, x_2^{-2}\}, \mathcal{W}_g^2 = \{x_1x_2, x_1^{-1}x_2^{-1}, x_2x_1, x_2^{-1}x_1^{-1}\}, \mathcal{W}_h^2 = \{x_1^{-1}x_2, x_1x_2^{-1}, x_2^{-1}x_1, x_2x_1^{-1}\}.$$

因此 $\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}^2$. 也就是说，$F_2$ 上的每个长度为 2 的字都是非手性的。根据推论 3 和 6 中列出的观察，容易看出，对于 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 和 $W_6 = A_6$，$\mathcal{W}_i = \mathcal{W}^i$，但字 $x_1^2x_2^2x_1x_2^{-1} \in \mathcal{W}_6 \setminus \mathcal{W}^6$ 是一个长度最短的非手性词，且它不能被任何自同构取逆（见注 3.7 [7], ）。简言之，上述结果与 Rhemtulla 的结果足以证明，所有长度为 6 的字都是非手性的。

2.2 测试词与非手性词

令 $w \in F_n$. 我们定义

$$End_w = \{f \in End(F_n) | f(w) = w^{-1}\} \quad Aut_w = \{f \in Aut(F_n) | f(w) = w^{-1}\}.$$

显然， $Aut_w \subseteq End_w$. 由命题 2 可知， $w \in A_n$ 当且仅当$End_w \neq \emptyset$. 设 $w \in F_n$ 为一个本原字。则可以构造一个端同态 σ满足 $\sigma \in End_w \setminus Aut_w$. 如前所述，若 $w = x^2y^2xy^{-1}$, 则 $w \in A_2$ ，即$End_w \neq \emptyset$ 但 $Aut_w = \emptyset$. 设 $D_n = \{w \in A_n | End_w = Aut_w\}$.

定义 8. 若一个字 $w \in F_n$ 具有这样的性质：每个固定 w 的端同态都是自同构，则称它为测试词。

我们将 F_n 的所有测试词组成的集合记为 T_n ，即

$$T_n = \{w \in F_n | \text{ if } \sigma \in End(F_n) \text{ with } \sigma(w) = w, \text{ then } \sigma \in Aut(F_n)\}.$$

TTurner [17] 给出了一个判据，用于判断给定的字是否为测试词。

定义 9. 若存在一个端同态ϕ ，使得 ϕ : $G \longrightarrow H$ 且具有性质 $\phi(h) = h$ 对所有 $h \in H$., 则称 G的子群 H 为收缩子群。

引理 10（Turner [17]）。字 $w \in F_n$ 是测试词，当且仅当它不属于 F_n 的任何真收缩子群。

Turner 还证明了 $T_2 = F_2{}' \setminus \{e\}$.

定理 11。如果 $n \in \mathbb{N}$，那么 $T_n \cap A_n = D_n$.

证明。令 $w \in (T_n \cap A_n) \setminus D_n$. 则存在 $\phi \in End_w \setminus Aut_w$. 这导致矛盾，即 ϕ^2 固定了 w , 因此 $\phi \in Aut_w$. 所以 $(T_n \cap A_n) \setminus D_n = \emptyset$ ，或等价地$D_n \subseteq T_n \cap A_n$. 令 $w \in T_n \cap A_n$ 和 $\phi \in End_w$. 则 ϕ^2 固定了 w. 因此 $\phi^2 \in Aut(F_n)$, 所以是 ϕ. 于是 $\phi \in Aut_w$. □

上述定理表明， $T_n \setminus D_n$ 中的所有字都是手性的。Cocke 和 Ho 给出了一个手性字的明确例子 $[x^{440}(x^{440})^{(y^{440})}x^{440}, (y^{440})^{(x^{440}y^{440})}y^{440}]$ ，它位于 F_2 中的 $T_2 \setminus D_2$ 内。他们询问 Engel 词 $e_n = [x,_n y]$ 是否为非手性。根据定理 11，只需检查是否存在一个将 e_n 求逆的自同构。对于这种情况，我们有 Whitehead 算法 [18]。

容易看出， $B_1 = \{x, x^{-1}\}$ 和 $D_1 = T_1 = F_1 \setminus \{e\}$. 。但如果 $n \geq 2$, 那么我们有 $B_n \cap T_n = \emptyset$. 。令 $w \in B_n$. 。取 $H = \langle w \rangle$. 。我们将证明 H 是 F_n的真收缩。因此， w 不能是测试词。写作 $w = x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n} c$, 其中 $c \in F_n{}'$。由于 $w \in B_n$, 我们有 $gcd\ (r_1, \ldots, r_n) = 1$.。因此存在 $m_1, \ldots,$ m_n, 使得$r_1m_1 + \ldots + r_nm_n = 1$.。定义同态 ϕ: 由 ϕ生成的 $F_n \longrightarrow H$ $(x_i) = w^{m_i}$, 对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$. 均成立。因此我们得到 ϕ $(w) = w$.。于是 H 是 F_n. 的真收缩。因此，根据 Turner 的结果， w 不能是测试词。

参考文献

[1] S. J. Benkoski, *The probability that k positive integers are relatively r-prime*, 数论杂志, 8 (1976), 第 218–223 页。[2] J. N. Bray, J. S. Wilson and R. A. Wilson *A Characterization of Finite Soluble Groups by Laws in Two Variables* , , , 37 2005 179 186 伦敦数学会通报, （）, 第 – 页。[3] A. Carolyn, *Fibres of words in finite groups, a probabilistic approach*, 博士学位论文, 2012年。[4] W. Cocke, *Idle Words:Word Maps on Finite Groups*, 博士学位论文, 2019。[5] W. Cocke and M.-C. Ho, *On the symmetry of images of word maps in groups*, 代数通讯, 46 (2018), 第 756–763 页。[6] , *The probability distribution of word maps on finite groups*, 代数杂志, 518 (2019), 第 440–452 页。[7] G. Giles, *Encoding and Detecting Properties in Finitely Presented Groups*, 博士学位论文, 2017。[8] S. Jambor, M. W. Liebeck and E. A. O'Brien *Some word maps that are non-surjective on infinitely many finite simple groups* , , , 45 2013 907 910 伦敦数学会通报, （）, 第 – 页。[9] M. Kassabov and N. Nikolov, *Words with few values in finite simple groups*, 数学季刊, 64 (2012), 第 1161–1166 页。[10] A. Lubotzky, *Images of word maps in finite simple groups*, 格拉斯哥数学杂志, 56 (2014), 第 465–469 页。[11] G. S. Makanin, *Equations in a free group*, 苏联数学学报, 21 (1983), 第 483 页。[12] M.Levy, *Word maps with small image in simple groups*, arXiv 预印本: arXiv:1206.1206, （2012）。[13] N. Nikolov and D. Segal, *On finitely generated profinite groups I: strong completeness and uniform bounds*, 数学年刊, 165 (2006), 第 171–238 页。[14] N. Nikolov and D. Segal, *A characterization of finite soluble groups*, 伦敦数学会通报, 39 (2007), 第 209–213 页。[15] O. Ore, *Some remarks on commutators*, 美国数学会会刊, 2 (1951), 第 307–314 页。[16] A. H. Rhemtulla, *A problem of bounded expressibility in free products*, 剑桥哲学会数学会刊, 64 (1968), 第 573–584 页。[17] E. C. Turner, *Test Words for Automorphisms of Free Groups*, 伦敦数学会通报, 28 (1996), 第 255–263 页。[18] J. H. C. Whitehead, *On equivalent sets of elements in a free group*, 数学年刊, 37 (1936), 第 782 页。