arXiv:2302.02773v1 [math.PR] 6 Feb 2023

编织、网与流

Nic Freeman*[1] 和 Jan Swart†[2]

[1]谢菲尔德大学数学与统计学院[2]捷克科学院信息理论与自动化研究所。

2023年2月7日

摘要

我们引入编织，它是由不交叉的 càdlàg 路径组成、覆盖时空 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$的随机集。布朗网络是编织的一个例子，但我们工作的一个关键特点是，不假设粒子运动服从任何特定分布。相反，我们提出了关于编织的结构、刻画和弱收敛的一般理论。

我们证明，编织空间具有一种格外优美的几何结构：它可划分为若干等价类，每个等价类都包含一对特殊对象，分别称为 网 和流。网是布朗网络的自然推广，而流则为随机流提供了逐路径表示。此外，编织空间上存在一种自然的偏序，用以刻画路径覆盖时空的效率；在这一偏序下，网恰好是极小编织，流恰好是极大编织。这种结构是建立一般编织弱收敛判据的关键，而这些判据基于有限组粒子运动的弱收敛。

*2010*年数学主题分类。主分类：60D05。次分类：60K99。

˘致谢。本作品由捷克科学基金会项目 22-12790S 资助。本工作始于数学科学研究所、新加坡国立大学（新加坡）举办的“相互作用粒子系统的谱系”项目期间。

*n.p.freeman@sheffield.ac.uk

†swart@utia.cas.cz

目录

1 引言 11.1 结果概述.2

2 结果 **5**

2.1 分裂实数轴.5 2.2 路径空间.6 2.3 交叉与排序.9 2.4 编织、网与流.10 2.5 讨论.14

3 预备知识 **16**

3.1 论交叉.16 3.2 论集合的偏序.21 3.3 论序与拓扑的相容性.21

4 确定性　　编织 2 **5**

4.1 编织与不交叉性质.26 4.2 双无限路径织体.30 4.3 编织中路径的延拓.33 4.4 流映射.39 4.5 网映射.42

5 随机编织 **44**

5.1 关于可测性.44 5.2 关于随机编织的偏序.46 5.3 定理 2.4.3 的证明.50 5.4 定理 2.4.4 的证明.50 5.5 定理 2.4.5 和 2.4.6 的证明.53 5.6 定理 2.4.8 的证明.54 5.7 定理 2.4.9 的证明.55

A 附录 **56**

A.1 关于豪斯多夫度量.56 A.2 关于 Π and $\mathcal{K}(\Pi)$ 的 M1 拓扑.58 A.3 关于 $\mathcal{K}(\Pi)$ 中的可测性.61 A.4 引理 2.5.1 的证明.64

1 引言

本文引入一类丰富而自然的对象，它们是布朗网络的推广。我们称这些对象为编织。粗略地说，编织是由不交叉的 c`adl`ag 路径构成的随机集，使得时空中的每个点几乎必然至少被一条路径触及。这些路径取值于 $\mathbb{R}$，且每条路径一直延伸到时间 $+\infty$，但路径可以从时空中的任意点开始。值得注意的是，本文没有要求：我们不 要求这些路径遵循任何特定的分布（例如，在布朗网络中，它们遵循合并布朗运动）。

我们将为一般编织建立一个弱收敛（即分布收敛）框架，类似于实值随机过程的现代弱收敛理论。布朗网络这一例子表明，单个编织可能呈现丰富的内部几何结构。我们将看到，编织的空间本身也具有有趣的结构。这种结构对编织的刻画有重要影响，因而也对弱收敛有重要影响。

我们将半无限用于指这样一类路径：它们从时空中的任意位置开始，持续到时间 $+\infty$。如果此类路径始于时间 $-\infty$，则称其为双无限路径。仅由双无限路径构成的编织，为（足够正则的）随机流提供了自然的逐路径表示，但也可以表示更复杂的分支合并路径结构。我们将双无限路径的编织称为流，不过形式上我们会先给出另一种定义，之后再证明二者等价。

数十年来，人们一直在研究随机流，Kunita（1997）的著作对此有详细论述。值得注意的是，尽管随机流有着悠久的历史，却始终难以建立一套关于其自身弱收敛的完善理论。一个关键问题在于，传统上随机流采用“逐点”表示：对于每一对时间$-\infty < s < t < \infty$，随机函数 $X_{s,t}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 表示粒子在$[s,t]$期间的运动。更准确地说，$X_{s,t}(x)$表示在时间 s位于位置 x的粒子在时间 t 的位置。因此，流的概念由一致性条件$X_{s,t} \overset{\text{a.s.}}{=} X_{s,u} \circ X_{u,t}$来概括，该条件要求在确定性时间成立。这种表示类似于过去将实值随机过程表示为一个无限的随机变量族（X_t）$_{t\geq 0}$的做法，其中 $X_t \in \mathbb{R}$ 表示粒子在时间 $t \geq 0$的位置。

现代观点是将随机过程视为一个单一的随机变量，其取值是一条随机路径。这种表示称为“逐路径”表示。Skorohod（1956）引入了一个适当的状态空间 $\mathcal{D}$，其元素是 c`adl`ag 路径；由此形成的理论详见如今广为人知的 Ethier 和 Kurtz（1986）以及 Billingsley（1995）的著作。从分析的角度来看，研究一条随机 c`adl`ag 路径的收敛，远比研究无穷多个取值于 $\mathbb{R}$ 的随机变量的收敛方便。为了进一步抽象这一原则，与其在一个更简单的状态空间中处理无穷多个“较小”的随机变量，不如在一个结构高度丰富的状态空间中定义一个单一的随机变量。

同一原则也适用于由 c`adl`ag 路径构成的随机集；然而，除布朗网络外，此类对象尚未发生类似的转变。本文旨在弥补这一缺憾。布朗网络是 Arratia（1979）随机流的一种逐路径表示，其中粒子彼此独立地作布朗运动，直至相遇；此后，粒子在剩余的所有时间里都保持合并状态。粗略地说，时空中的每一点都出发一颗这样的粒子。

布朗网络的现代研究始于 T´oth 和 Werner（1998年），他们率先认识到它丰富的内部结构。在此基础上，Fontes 等人（2004年）将布朗网络表示为一个（单一的）随机变量，其取值为由连续路径构成的随机集，并引入了布朗网络这一术语。在这种表示下，他们首次提出了布朗网络弱收敛的条件，这些条件基于有限集粒子随时间向前运动的情况

。此后，大量相关文献相继涌现，并促成了 Schertzer 等人（2017年）的综述中所列出的、更为精细的判据。人们以类似的方式研究了布朗网络的近亲对象，并且现已认识到，布朗网络是一个庞大而多样的普适类的标度极限。

这项成功的关键在于已有良好的刻画与弱收敛判据。这类判据必须谨慎权衡：保留信息较少的某种收敛方式通常更容易证明，也更常成立，但其意义也较小。一种可能的方法是将路径集映射为其他对象，从而诱导出可用作弱收敛基础的拓扑。对于连续凝聚路径，Berestycki 等人（2015）和 Cannizzaro 和 Hairer（2021）采用了这种方法，分别将路径集映射为“管道”集和实树。

在本研究中，我们直接处理 c`adl`ag 路径集，采用的方式与布朗网络相关文献中日益流行的做法一致。我们给出一般编织的刻画与收敛判据，不要求粒子运动遵循任何特定分布。我们还必须引入一个合适的状态空间：一个 Skorohod 空间$\mathcal{D}$ 的变体，适用于从时空任意点出发的 c`adl`ag 路径随机集。Fontes 等（2004）构造的状态空间是我们所构造空间的一个子集，且诱导的子空间拓扑与之相同。

现在让我们简要谈谈网的重要意义。对编织空间的探索将揭示一种自然的划分，使其分成若干等价类。每个等价类都包含两个特殊元素，其中一个是流（如上文所述），另一个我们称为网。我们将看到，成为网这一性质，等价于采用通常的布朗网络定义后去掉 对粒子运动具有特定分布的要求。网与流之间存在双射对应；此外，在我们即将描述的结构中，它们分别是极值点，即极小元和极大元。

关于布朗网络的许多文献中，证明都严重依赖于合并布朗运动的分布。因此，我们的论证与之大相径庭。尽管如此，我们仍要指出，关于布朗网络的已有知识对撰写本文极有帮助，而且布朗网络是编织的典型例子。事实上，即使仅考虑布朗网络这一特殊情形，我们的大多数结果也都是新的。

1.1 结果概述

在第 2 节中，我们将介绍我们的状态空间，并在此基础上严谨地陈述主要结果。构建状态空间需要进行一些重要的工作，因此我们将在此处以非严谨的方式介绍主要结果以及促成这些结果的思想。

我们要求允许 c`adl`ag 路径在其初始时刻发生跳跃。显然，这需要一些辅助结构；我们暂且推迟介绍这些结构，转而诉诸读者的直觉。我们的 c`adl`ag 路径概念与经典的 c`adl`ag 路径 f 完全等价：$[t,\infty] \to \mathbb{R}$ 即路径是右连续的，具有左极限，并且在初始时刻可能发生跳跃t。参见图 1.1.1，其中的示例说明了为何必须进行这种扩充。

实值随机过程弱收敛理论通常是在 Skorohod J1 拓扑下阐述的。我们需要的是（稍微更粗的）Skorohod M1 拓扑。其原因相当技术性，但粗略地说，由于我们使用不交叉路径，因此自然会将跳跃视为路径的一部分，而不是视为路径跃过的空间空白区域。前一种观点对应于 Skorohod 的 M1 拓扑，后一种观点对应于 J1。一个满足 $f_n \to f$ in M1 但不满足 $f_n \to f$ in J1 的 c`adl`ag 路径示例是 $f_n(t) = 0 \vee nt \wedge 1$，其极限为 $f(t) = \mathbb{1}_{\{t\geq 0\}}$，二者均对所有 $t \in \mathbb{R}$ 定义。

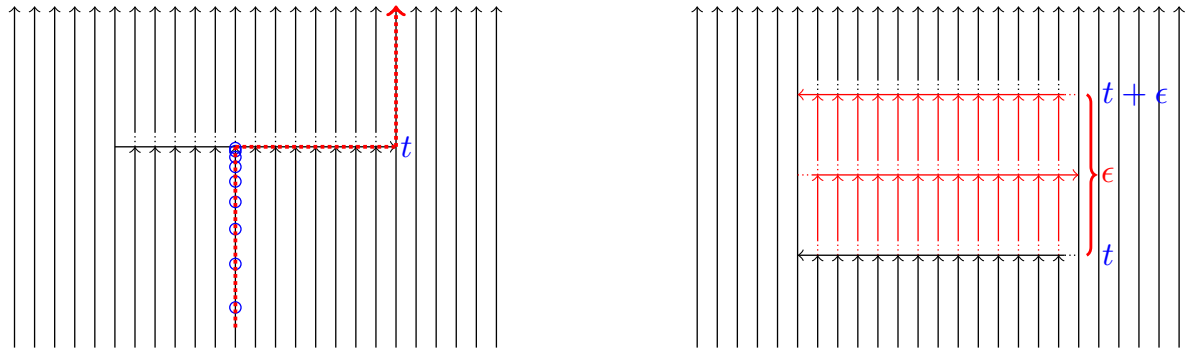

图 1.1.1：两幅图中，时间均向上延伸，空间轴均为水平轴。每幅图都用实线描绘了编织，并用相应的虚线描绘了流。

左侧：一张编织图 $\mathcal{A}$，其中有一条在初始时刻发生跳跃的 c`adl`ag 路径。请按从下到上的顺序排列蓝色圆圈。考虑从 n^{th} 蓝色圆圈内开始的粒子运动 f_n，随后沿着红色虚线运动。极限路径 f 是一条在初始时刻向右跳跃的轨迹 t。我们要求编织图是闭集，并且要求编织图具有粒子运动；因此，我们要求路径 f 存在。

右图：一个与定理 2.4.5 和 2.4.6 相关的警示性示例。图中描绘了编织 $\mathcal{A}_\epsilon$，以及相应的由不会交叉的双无限路径组成的流 $\mathcal{F}_\epsilon$ $\mathcal{A}_\epsilon$。水平箭头所示的时空点及其时间向前的延续都是分歧的。当 $\epsilon \to 0$ 趋于极限时，红色区域消失；编织 $\mathcal{A}_\epsilon$ 收敛到一个遍历路径系统，其中包含交叉（在 t处向两个方向跳跃）；流的序列 $(\mathcal{F}_\epsilon)_{\epsilon>0}$ 不相对紧（因为路径会在 t 和 $t+\epsilon$之间左右左右跳跃）；而从有限个 z 非分歧点出发的 m粒子运动 $\mathcal{A}_\epsilon|_z = \mathcal{F}_\epsilon|_z$ 则收敛到某个编织的粒子运动（其中仅包含在 t处向左跳跃）。

布朗网络的一个关键洞见是，我们应当考虑路径的随机紧致集；我们在适当版本的 M1 拓扑中进行这一研究。我们称一个 c`adl`ag 路径集是遍历的，如果每个时空点 $z = (x,\ t)$ 至少包含在一条路径中，包括发生跳跃的路径。

一个核心概念是编织的 m-粒子运动。粗略地说，如果我们在时空中选择一个点 $z = (x,\ t)$，就可以将一个粒子置于编织中的该点，然后观察它如何随时间向前运动。对于时空中的大多数确定性点（事实上，勒贝格几乎处处），这一操作都有良好定义，并且几乎必然存在唯一的时间向前运动。该运动是一条以 t 为初始时刻的单条随机 c`adl`ag 路径。如果我们同时对 $m \in \mathbb{N}$个时空点进行相同操作，就得到编织的 m-粒子运动。

显然，一对 c`adl`ag 路径可能彼此交叉。对于连续路径，其含义显而易见；目前，我们诉诸读者的直觉。待我们严谨地定义交叉时，还需要作一些澄清，以处理 c`adl`ag 路径在初始时刻彼此跳跃越过的情形。若一组路径中的任意两个元素都不交叉，我们就称这组路径为不交叉的。

现在我们可以描述关于编织的主要结果。形式上，编织是定义在半无限 c`adl`ag 路径的 M1-紧集上的概率测度，并且这些路径几乎必然不交叉且遍历。对于具有此类分布的随机变量，我们也称之为编织。我们约定用花体字母（如 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$）表示编织。还需提醒读者，在一般偏序中，一个典型元素可能位于从零个到无穷多个极大元之下；极小元的情形也类似。

1. 编织空间上存在一种自然偏序 $\preceq_{\mathrm{d}}$。非正式地说，命题$\mathcal{A} \preceq_{\mathrm{d}} \mathcal{B}$ 的含义是：存在一种耦合，使得 $\mathcal{B}$ 比 $\mathcal{A}$ 更高效地覆盖时空，即路径更少和/或更长。

根据定义，如果一种编织相对于 $\preceq_{\mathrm{d}}$ 是极小的（在所有编织组成的空间内），我们就称它为网。如果一种编织是极大的，我们就称它为流。

2. 编织空间被划分为等价类，每个等价类都以一个流作为其唯一极大元，并以一个网作为其唯一极小元。我们将此等价关系记为 $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$。同一等价类中的元素不一定是$\preceq_{\mathrm{d}}$可比较的。

3. 存在一对确定性函数 web(·) 和 flow(·)，具有以下性质。

(a) 编织 $\mathcal{A}$ 是网，当且仅当 web($\mathcal{A}$) $\overset{\text{a.s.}}{=} \mathcal{A}$。(b) 编织 $\mathcal{A}$ 是流，当且仅当 flow($\mathcal{A}$) $\overset{\text{a.s.}}{=} \mathcal{A}$。

此外，编织是流，当且仅当它仅由双无限路径构成。因此，流是随机流的自然路径式表示。

网运算是算子 $\mathcal{W} \mapsto \mathcal{W}(D)$ 的略微推广，该算子在布朗网络的标准刻画中广为人知。根据定义，flow($\mathcal{A}$) 是一组不与 $\mathcal{A}$ 相交的双无限 càdlàg 路径。映射 flow(·) 是连续的，但 web(·) 不是。

4. 两个编织 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 满足 $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$，当且仅当 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的 m-粒子运动具有相同的分布。

5. 流的弱极限必然是一个流。此外，对于流，弱收敛等价于紧性加上 m-粒子运动的弱收敛。

对于一般编织，在等价类层面也有类似的结果。这里必须加入一个假设：弱极限点是不交叉的。

6. 每个网 $\mathcal{W}$ 都对应一个对偶网 $\widehat{\mathcal{W}}$，由逆时间方向运行的右连续有左极限路径组成，使得 $\mathcal{W}$ 和 $\widehat{\mathcal{W}}$ 几乎必然不交叉。

三元组 $(\mathcal{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \mathcal{F})$ 可由 $\mathcal{W}$, $\widehat{\mathcal{W}}$和 $\mathcal{F}$中的任意一个重构。如果这三者中任何一个仅由连续路径构成，那么它们全都如此。

所有这些结果的基础，是一项精巧的操作：它将编织中的一条半无限路径向逆时间方向延伸为一条双无限路径，同时不引入交叉并保持右连续有左极限。此外，这种延伸可以应用于编织中的所有路径，而不会破坏其紧致性，从而得到相应的流。请注意，根据定义，编织是闭集，因此这项操作并非通过对编织中的适当路径取极限来实现。下面简要说明它具体涉及什么。

在（单独的）c`adl`ag 路径上存在一个偏序 $\subseteq$，其对应的思想是：当且仅当路径 f 可以沿正向和/或逆时间方向延伸，从而得到 g 时，$f \subseteq g$。编织中的路径一直延续到时间 $+\infty$，因此对于编织而言，只有向逆时间方向延伸才有意义。给定一个编织 $\mathcal{A}$，令 $\mathcal{A}_{\max}$ 表示 $(\mathcal{A}, \subseteq)$ 的极大元集合。

事实证明，$\mathcal{A}_{\max}$ 的戴德金分割与不交叉 $\mathcal{A}$的双无限路径之间存在一种自然的双射。这种关系令人想起戴德金著名的从 $\mathbb{Q}$构造 $\mathbb{R}$ 的方法，但在我们的情形中，将 $\mathcal{A}_{\max}$ 连接到流($\mathcal{A}$)的运算并非拓扑闭包。粗略地说，我们可以取一条不交叉 $\mathcal{A}$的双无限路径 h，相应的戴德金分割就是所有严格位于 h左侧的路径 $f \in \mathcal{A}_{\max}$。这种对应关系的反函数定义起来较为复杂，我们暂不在此描述

处。为了将半无限路径沿逆时间方向延伸，我们注意到，可以用同样的方法，从任意不交叉 $\mathcal{A}$的 c`adl`ag 路径（不一定是双无限路径）构造一个戴德金分割，然后利用该反函数生成相应的双无限路径。

半无限路径与双无限路径之间这一关系的证明依赖于精细的分析。这需要对 c`adl`ag 路径作出一种表述，将初始时刻可能出现的跳跃视为路径不可或缺的一部分，而不是在其他方面采用经典定义后再附加考虑。我们在第 2.1 节介绍这种表述，随后在第 2.2 节描述状态空间。接着，我们在第 2.3 节引入有关路径交叉与排序的关键记号，由此得以在第 2.4 节严谨地陈述主要结果。我们在第2.5.1节讨论与布朗网络的联系，并在第 2.5.2 节讨论与相关状态空间的联系。

证明见第3至5节。在第3节，我们建立处理一般 c`adl`ag 路径以及初始时刻发生跳跃的路径所需的工具。第 4 节探讨编织的内部结构及其对编织空间的影响；编织空间最好（至少在初期）在确定性背景下研究。其中包括关于路径延拓的关键结果。在第 5 节，我们给出主要结果的证明。

2 结果

2.1 分裂实数轴

如果一个函数是右连续且存在左极限，就称它为$c\grave{}adl\grave{}ag$；这个词源自法语“continue `a droit, limite `a gauche”。Kolmogorov（1956）指出，一个实值 c`adl`ag 函数及其左连续修正，可以视为某个特殊拓扑空间上的连续函数；这个空间由 Alexandroff 和 Urysohn（1929 年）引入。这将为我们的结果提供一种优雅的表述方式，也是更具技术性的证明中不可或缺的组成部分。这里我们简要介绍这个空间。

令 $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$ 表示扩展实数轴。根据定义，对于任意子集 $I \subseteq \mathbb{R}$，令

$$I_{\mathfrak{s}} = \big\{(t, \star)\,;\, t \in I \text{ and } \star \in \{-, +\}\big\}.$$

我们几乎总是用 $t\star$ 代替形式记号 $(t, \star)$。我们称 $\mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$ 为**分裂实数轴**，称 $\overline{\mathbb{R}}_{\mathfrak{s}}$ 为**扩展分裂实数轴**。粗略地说，要从 $\mathbb{R}$构造出 $\mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$，每个 $t \in \mathbb{R}$ 都被分成两部分：左侧部分 $t-$ 和右侧部分 $t+$。我们在 $\mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$ 上赋予从左向右的字典序，也就是说，$t_1\star_1 < t_2\star_2$ 当且仅当 $t_1 < t_2$，或者 $t_1 = t_2$ 且 $\star_1 = -$，$\star_2 = +$。我们使用与扩展实数轴的通常记法类似的区间记法来表示 $\mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$：

$$(t_1\star_1, t_2\star_2) = \{t\star \in \overline{\mathbb{R}}_{\mathfrak{s}} : t_1\star_1 < t\star < t_2\star_2\} \tag{2.1}$$

$$[t_1\star_1, t_2\star_2] = \{t\star \in \overline{\mathbb{R}}_{\mathfrak{s}} : t_1\star_1 \le t\star \le t_2\star_2\}, \tag{2.2}$$

半开区间的情况也类似，例如 $(t_1\star,\ t_2\star]$ 或 $[t_1\star_1, t_2\star_2)$。注意，这种记法存在一些冗余，例如 $(s-, t+) = [s+, t-]$。若存在某个 $T < \infty$使得 $A \subseteq [-T, T]_{\mathfrak{s}}$，我们就称集合 $A \subseteq \mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$是有界的。

我们在 $\mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$ 和 $\overline{\mathbb{R}}_{\mathfrak{s}}$ 上赋予序拓扑。回顾一下，在全序空间（$S,\ <$）中，序拓扑由开区间 $(a,\ b) = \{x \in S$ 生成；$a < x < b\}$ 其中$a < b$。因此，$\mathbb{R}$ 上的序拓扑与通常的欧几里得拓扑一致。下面的引理概述了我们需要了解的关于 $\mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$ 上序拓扑的全部内容。第 1 部分和第 4 部分分别见 Freeman and Swart（2023）的引理 2.1 和命题 2.3。第 2 部分和第 3 部分是第 1 部分的直接推论。

引理 2.1.1 以下结论成立。

1. 序列 $t_n\star_n$ 收敛到极限 $t+$ （分别为 $t-$）当且仅当，对于所有充分大的 n， $t_n \to t$ 属于 $\mathbb{R}$ 且$t_n\star_n \geq t+$ （分别为 $t_n\star_n \leq t-$）。*2.* 形如 $(t_1\star_1, t_2\star_2)$ 的区间是开集，形如 $[t_1\star_1, t_2\star_2]$ 的区间是闭集。*3.* $\mathbb{R}_\mathfrak{s}$ 关于关系 $s\star \sim t\star \Leftrightarrow s = t$ 的商空间与 $\mathbb{R}$同胚。*4.* 空间 $\mathbb{R}_\mathfrak{s}$ 是豪斯多夫拓扑空间。它是可分的，但不可度量化。对于 $C \subseteq \mathbb{R}_\mathfrak{s}$，以下三个陈述等价：（*i*） C 是紧致的；（*ii*） C 是序列紧的；（*iii*） C 是闭且有界的。

$\mathbb{R}_\mathfrak{s}$ 上的拓扑可以优雅地描述 $\mathbb{R}$ 上的 c`adl`ag 函数，这一描述由 Freeman and Swart（2023）第 2.2 节提出。我们只需要这一刻画在闭区间上实值 c`adl`ag 函数的情形，具体如下。设 $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ 为一个闭区间， $f : I_\mathfrak{s} \to \mathbb{R}$ 为一个函数。以下陈述等价：

1. f 作为 $\mathbb{R}_\mathfrak{s}$ 的子集，在 $I_\mathfrak{s}$ 上的拓扑下是连续的；2. 由 $[a, b] \mapsto \mathbb{R}$ 定义的函数 $t \mapsto f(t+)$ 右连续且具有左极限，并且由 $(a, b] \to \mathbb{R}$ 定义的$t \mapsto f(t-)$ 是其左连续修改；3. 由 $[a, b] \mapsto \mathbb{R}$ 定义的函数 $t \mapsto f(t-)$ 左连续且具有右极限，并且由 $[a, b)$ 定义的 $t \mapsto f(t-)$ $\to \mathbb{R}$ 是其右连续修改。

定义 2.1.2 我们将满足这些条件（中的任意一项）的函数 $f : [a, b]_\mathfrak{s} \to \mathbb{R}$ 称为*c`adl`ag* 路径。

定义 2.1.2 是对实数集 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ 上经典的 c`adl`ag 函数概念的一种小幅扩展。具体而言，我们为 $a-$ 处的“左极限”赋予了正式的含义和值，而经典定义中并未包含这一点。它可以取任意值，也就是说， $f(a-)$ 的值不受 $f(t\star)$（ $t\star > a-$）的值限制。这就引入了 $f(a-) \neq f(a+)$ 的可能性，对应于初始时刻处的跳跃。

给定定义域为 $[a, b]_\mathfrak{s}$ 的 c`adl`ag 路径 f，我们记 $I(f) = [a, b] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ 和 $I(f)_\mathfrak{s} = [a, b]_\mathfrak{s} \subseteq \overline{\mathbb{R}}_\mathfrak{s}$。我们用 $\sigma_f = a$ 表示初始时刻，用 $\tau_f = b$ 表示 f 的终止时刻。类似地，我们分别称 $(f(\sigma_f-), \sigma_f)$ 和 $(f(\tau_f+), \tau_f)$ 为 f 的初始点 和终止点。我们说 f始于其初始点，并终于其终止点。

我们称 f 在 $t \in [\sigma_f, \tau_f]$ 处发生跳跃，如果 $f(t-) \neq f(t+)$。如果 $f(t+) < f(t-)$，则称该跳跃向左；如果 $f(t+) > f(t-)$，则称其向右。如前所述，c`adl`ag 路径可能在其初始时刻和终止时刻，或中间的任意时刻发生跳跃。这类跳跃至多是可数的。如果 $f(t-) = f(t+)$，则称 f 在 t 处连续；在这种情况下（且仅在这种情况下），我们写作 $f(t) = f(t-) = f(t+)$。

2.2 路径空间

本节介绍空间 Π，其元素是在$\mathbb{R}_\mathfrak{s}$的闭区间上定义的 c`adl`ag 路径，以及空间 $\mathcal{K}(\Pi)$，其元素是 Π 的紧子集。我们将参考 Freeman and Swart（2023）；该文考虑了更一般的设定，同时也是一篇配套文章，为本文提供拓扑基础。令

$$\Pi = \left\{ f : I_\mathfrak{s} \to \overline{\mathbb{R}};\ f \text{ is a càdlàg path and } I \subseteq \overline{\mathbb{R}} \text{ is a closed interval} \right\}. \tag{2.3}$$

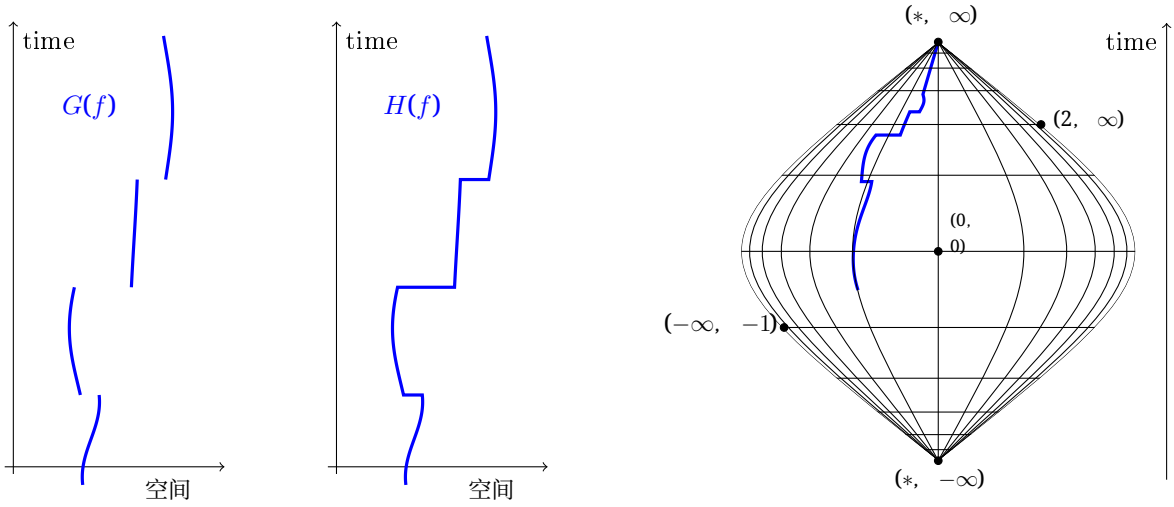

图 2.2.1：左侧是路径 f 的闭图 $G(f)$ 和插值图 $H(f)$。右侧是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 的紧化 $\mathbb{R}_c^2$，其中包含路径 f 的插值图，并为方便起见标记了一些点。在 Freeman and Swart（2023）中，$\mathbb{R}_c^2$ 被称为挤压空间。

若两个元素在时间$\pm\infty$之外取值相同，我们就将它们 $f,\ g\in\Pi$ 视为等价。形式上，定义等价关系

$$f \overset{\Pi}{\sim} g \quad\Leftrightarrow\quad I(f)=I(g) \text{ and } f(t\pm)=g(t\pm) \text{ for all } t\in I(f)\cap\mathbb{R}, \tag{2.4}$$

并隐式地使用 Π 的等价类。我们稍微滥用一下记号，继续用 $f\in\Pi$ 表示一条 c`adl`ag 路径，但采用记号约定[1] ，即$f(t\star)=*$，只要 $t=\pm\infty$。

我们的主要结果需要在 Π 上使用 Skorohod 的 M1 拓扑，下面将对此进行介绍。我们也会同时介绍 J1 拓扑，因为它的应用更广泛，读者或许希望对此进行比较。我们将 c`adl`ag 路径 $f\in\Pi$ 的闭图 $G(f)$ 和插值图 $H(f)$定义为

$$G(f)=\big\{(x,t)\in\overline{\mathbb{R}}^2;\, t\in I(f),\ x\in\{f(t-),f(t+)\}\big\},$$
$$H(f)=\big\{(x,t)\in\overline{\mathbb{R}}^2;\, t\in I(f),\ x\in[f(t-),f(t+)]\big\},$$

其中，我们采用约定 $[s,t]:=[s\wedge t,s\vee t]$ 表示 $s,\ t\in\mathbb{R}$。图 2.2.1 展示了 $G(f)$ 与 $H(f)$ 之间差异的示意图：在路径发生跳跃的时刻 $t\in\mathbb{R}$，连接 $(f(t-)\ t)$ 和 $(f(t+)\ t)$ 的线段会画在 $H(f)$ 中，但不会画在 $G(f)$ 中。

式 (2.4) 的原因在于，我们打算将 $G(f)$ 和 $H(f)$ 视为某个适当空间中的紧子集，而这又将使我们能够描述 J1 和 M1 拓扑。有鉴于此，我们定义

$$\mathbb{R}_c^2:=\big(\overline{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}\big)\cup\big\{(*,-\infty),(*,\infty)\big\}$$

并为 $\mathbb{R}_c^2$赋予一个可度量化拓扑，使得 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上的诱导子空间拓扑为积拓扑，并且，作为 $n\to\infty$，

$$(x_n,t_n)\to(*,\pm\infty)\quad\text{if and only if}\quad t_n\to\pm\infty.$$

[1]准确地说：Freeman and Swart（2023）采用的紧化过程与式 (2.4) 略有不同，它允许 càdlàg 路径的定义域是非区间集合，并将 $\mathbb{R}_s$ 定义为 $\mathbb{R}_s$的双点紧化。详情请参见 Freeman and Swart（2023）中的第 2.1 节。本文中的空间 Π在该文中记作 $\Pi^{\downarrow}$。

Freeman and Swart（2023）的方程（2.26）给出了一个具有这些性质的显式度量 $d_{\mathbb{R}_c^2}$，在该度量下，$\mathbb{R}_c^2$ 是紧致的。图 2.2.1 展示了 $G(f)$、$H(f)$ 以及紧致化。我们赋予 $\mathbb{R}_c^2$ 以 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}_c^2$上的二维勒贝格测度，并在 $(*,\ \pm\infty)$ 处赋予零测度。

设 $f\in\Pi$。在 $G(f)$ 和 $H(f)$ 上都有一个自然的全序，我们记作 $\sqsubseteq$。对于 $G(f)$，当 $t_1\star_1\le t_2\star_2$ 时，该全序由 $(f(t_1\star_1)\ t_1)\ \sqsubseteq(f(t_2\star_2)\ t_2)$ 给出。对于 $H(f)$，则需要更加谨慎：当 $t_1<t_2$ 时，或者当 $t_1=t_2$ 且 x_1 到 $f(t_1-)$ 的距离不严格大于 x_2 时，我们称 $(x_1,t_1)\sqsubseteq(x_2,t_2)$。

非正式地说，Π 上的 J1 拓扑对应于闭图的收敛，而 M1 拓扑对应于插值图的收敛，但需要注意的是，在这两种情况下，全序 $\sqsubseteq$ 都会在收敛过程中得到保持。下一步是将这一直觉形式化，并给出这两种拓扑的定义。

对于度量空间 $(M,\ d_M)$，令 $\mathcal{K}(M)$ 表示 M 的所有非空紧子集组成的空间，并赋予由 d_M 诱导的豪斯多夫度量。附录 A.1 简要介绍了豪斯多夫度量。我们将路径 $f\in\Pi$ 的二阶闭图 $G^{(2)}(f)$和二阶插值图 $H^{(2)}(f)$定义为

$$G^{(2)}(f)=\big\{(z_1,z_2);\ z_i\in G(f)\text{ and }z_1\sqsubseteq z_2\big\},$$
$$H^{(2)}(f)=\big\{(z_1,z_2);\ z_i\in H(f)\text{ and }z_1\sqsubseteq z_2\big\},$$

其中，$\sqsubseteq$ 如上所定义。Freeman 和 Swart（2023）的引理 3.1 表明，集合 $G(f)$ 和 $H(f)$ 是 $\mathbb{R}_c^2$ 的紧子集；此外，集合 $G^{(2)}(f)$ 和 $H^{(2)}(f)$ 是 $(\mathbb{R}_c^2)^2$ 的紧子集。注意，$G^{(2)}(f)$ 和 $H^{(2)}(f)$ 保留了关于 $\sqsubseteq$ 的全序信息，而$G(f)$ 和 $H(f)$ 则没有保留。可以看出，$G^{(2)}(f_n)\to G^{(2)}(f)$ 蕴含 $G(f_n)\to G(f)$，但反之不成立。$H^{(2)}$ 和 H 的情形类似。如果 $G(f_n)\to G(f)$，则 $H(f_n)\to H(f)$，但反之不成立。$G^{(2)}$ 和 $H^{(2)}$ 的情形类似。

命题 2.2.1 在每种情形下，关于所列度量 Π 都是波兰空间。

1. J1 拓扑：$d_{\mathrm{J1}}(f,g)=d_{\mathcal{K}((\mathbb{R}_c^2)^2)}\left(G^{(2)}(f)\ G^{(2)}(g)\right)$。*2.* M1 拓扑：$d_{\mathrm{M1}}(f,g)=d_{\mathcal{K}((\mathbb{R}_c^2)^2)}\left(H^{(2)}(f)\ H^{(2)}(g)\right)$。

我们还提到，$d_{\mathrm{J2}}(f,g)=d_{\mathcal{K}(\mathbb{R}_c^2)}(G(f)\ G(g))$ 和 $d_{\mathrm{M2}}(f,g)=d_{\mathcal{K}(\mathbb{R}_c^2)}(H(f)\ H(g))$ 分别对应于Skorohod的J2拓扑和 M2 拓扑。Freeman and Swart（2023年）证明，每种此类度量都等价于实数集 $\mathcal{D}_{[a,b]}=\{f\in\Pi$ 上相应的经典 Skorohod 度量；$I(f)=[a,b],\ f(a-)=f(a+)\}$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$。有关这些事实的详情和证明，请参阅该文章的第 2.4、3.2 和 3.4 节。

现在我们专门讨论与本文相关的情形：

从现在起，空间 Π （隐式地）赋予 *M1* 拓扑。

Π 的子集也同样如此。我们记 $d_\Pi=d_{\mathrm{M1}}$，它在 Π 上生成 M1 拓扑；但要指出的是，度量空间 $(\Pi,\ d_\Pi)$ 并不完备。在附录A.2中，我们汇总了 Freeman and Swart（2023）中关于 M1 拓扑的一些结果，包括相对紧性和紧性的判据。

令 $\Pi^\uparrow=\{f\in\Pi;\ \tau_f=\infty\},\Pi^\downarrow=\{f\in\Pi;\ \sigma_f=-\infty\}$ 和 $\Pi^\updownarrow=\Pi^\uparrow\cap\Pi^\downarrow$ 分别为向前和向后的半无限路径以及双无限路径的子空间。注意，Π 和$\Pi^\updownarrow$ 在时间反演下都具有对称性。对于所有 $t\in I(f)\}$，我们用 $\Pi_c=\{f\in\Pi;\ f(t-)=f(t+)$ 表示连续路径的子空间。我们记作 $\Pi_c^\updownarrow:=\Pi^\uparrow\cap\Pi_c$，依此类推。非正式地说，$\Pi_c$ 上的诱导拓扑可描述为起始时刻和终止时刻的收敛，以及局部

连续路径的一致收敛。事实上， $\Pi_{\mathrm{c}}^{\uparrow}$ 是 Fontes 等（2004）为布朗网络引入的状态空间。详情请参见 Freeman and Swart（2023）的命题 3.4。

我们的主要结果将涉及半无限 c`adl`ag 路径系统，我们倾向于陈述时间向前的结果，也就是说，主要研究 $\Pi^{\uparrow}$ 或其子空间 $\Pi^{\updownarrow}$。只有涉及对偶性的结果才需要 $\Pi^{\downarrow}$。我们用 $\mathcal{K}(\Pi)$ 表示 Π 的紧子集所构成的度量空间，其中 Π 上的底层度量来自命题 2.2.1。由命题 2.2.1 很容易看出， $\Pi^{\uparrow}$、 $\Pi^{\downarrow}$ 和 $\Pi^{\updownarrow}$ 是 Π 的闭子集，由此可知， $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$、 $\mathcal{K}(\Pi^{\updownarrow})$ 和 $\mathcal{K}(\Pi^{\downarrow})$ 是 $\mathcal{K}(\Pi)$ 的闭子集。

2.3 交叉与排序

现在我们引入与 Π 和 $\Pi^{\uparrow}$ 相关的符号和术语。若一条 c`adl`ag 路径 g 延伸一条 c`adl`ag 路径 f，则称前者延伸后者，当且仅当 $H^{(2)}(f) \subseteq H^{(2)}(g)$。我们注意到，除 $\sigma_f = \tau_f$ 或 $\sigma_g = \tau_g$ 的平凡情形外，这等价于更直观的条件 $H(f) \subseteq H(g)$。关键在于， $H(f)$ 的全序（见第 2.2 节）应当与其作为 $H(g)$ 子集时所继承的诱导序一致。

我们用 $f \subseteq g$ 表示 g 是 f的延伸。显然， $\subseteq$ 是 Π上的偏序，我们将相应的严格序关系记作 $\subset$。对于 $A \subseteq \Pi$，我们记作

$$A_{\max} = \{g \in A\,;\, \text{for all } f \in A,\ \text{if } g \subseteq f \text{ then } g = f\} \tag{2.5}$$

$$A_{\uparrow} = \{g \in \Pi^{\uparrow}\,;\, g \subseteq f \text{ for some } f \in A\}. \tag{2.6}$$

换言之， $A_{\max}$ 表示 $(A,\ \subseteq)$ 的极大元集，而 $A_{\uparrow}$ 表示可延伸至某个 $f \in A$的半无限路径集。

对于路径集 $A,\ B \subseteq \Pi^{\uparrow}$，我们定义关系

$$A \preceq B \quad \Leftrightarrow \quad A_{\uparrow} \cap B \subseteq A \subseteq B_{\uparrow}, \tag{2.7}$$

由引理 3.2.2 可知，该关系是 $\Pi^{\uparrow}$的子集（组成的集合）上的偏序。相应的严格序关系记作 $\prec$。(2.7) 背后的直观含义是对时空进行高效覆盖：粗略地说， $A \prec B$ 意味着 B 通过更长和/或更少的路径覆盖了更多时空，而 A则不然。

注意，如果 A 和 B 是定义在同一概率空间上的随机变量，那么我们可以通过 (2.7) 来定义事件 $\{A \preceq B\}$。如果 A 和 B 是取值于 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 的随机变量，且没有隐含的耦合，那么稍微滥用一下记号，我们进一步扩展 $\preceq$：当且仅当存在 A 和 B 的一个耦合，使得 $\mathbb{P}[A \preceq B] = 1$时，记作 $A \preceq_{\mathrm{d}} B$。如果 $A \preceq_{\mathrm{d}} B$，且 A 和 B 的边缘分布不同，我们记作 $A \prec_{\mathrm{d}} B$。在引理 5.2.3 中，我们证明 $\preceq_{\mathrm{d}}$ 是取值于 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 的随机变量（的分布）所构成空间上的偏序。

定义 2.3.1 如果存在路径 $f', g' \in \Pi^{\updownarrow}$，使得 $f \subseteq f'$、 $g \subseteq g'$ 和 $f(t\star) \leq g(t\star)$ 对所有 $t\star \in \mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$ 都成立，则称路径 $f, g \in \Pi$ 不交叉 。

定义 2.3.1 的精确表述，是为了应对一对 càdlàg 路径可能具有相同的起始（或终止）时间，并且可能都在该时刻发生跳跃，且跳跃或许彼此重叠这一复杂情况。读者不妨先看图 3.1.1，其中展示了其中一些复杂情况。如果路径集合 $A \subseteq \Pi$ 中的任意两个元素都不交叉，就称该集合为不交叉的。如果 $A \cup B$ 不交叉，就称 A 和 B 不交叉。

如果 $f \in \Pi$ 和 $z \in H(f)$，那么我们称 f 经过时空点 z。对于$f \in \Pi^{\uparrow}$，如果 f 经过 $z \in \mathbb{R}_{\mathrm{c}}^2$，那么我们定义限制

$$f|_z \in \Pi^{\uparrow} \text{ to be the unique } g \subseteq f \text{ such that } (g(\sigma_g-), \sigma_g) = z. \tag{2.8}$$

更一般地，如果 f 经过集合 $D \subseteq \mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$ 中的某个点（x，t）$\in D$，我们就称 f 经过集合 $D \subseteq \mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$。对于（无序）集合 $D \subseteq \mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$ 和 $A \subseteq \Pi^{\uparrow}$，我们记作

$$A(D) = \big\{ f \in A : f \text{ passes through } D \big\} \tag{2.9}$$

表示经过 D 的 $\mathcal{A}$ 中路径的集合。为方便起见，对于 $z \in \mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$，我们记作 $A(z) = A(\{z\})$。同理，我们定义

$$A|_D = \{ f|_z \in \Pi^{\uparrow} ; f \in \mathcal{A}(z) \text{ and } z \in D \} \tag{2.10}$$

表示 A 中经过某个 $z \in B$ 的路径集合，并去掉 z 之前的部分。对于$z \in \mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$，我们记作 $A|_z = A|_{\{z\}}$。

2.4 编织、网与流

我们关注的是不交叉路径系统，它们触及每一个时空点。更严格地说，若对所有 $z \in \mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$ 都有 $A(z) \neq \emptyset$，则称 $A \subseteq \Pi^{\uparrow}$ 是遍历的。我们指出，根据引理 A.2.2，若 $A \in \mathcal{K}(\Pi)$，那么只需检验 $A(z) \neq \emptyset$ 在 $z \in \mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$ 的一个稠密子集上成立。本文研究的主要对象如下。

定义 2.4.1 编织是一个取值于 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 的随机变量的分布，且几乎必然是遍历的并且不交叉。令 $\mathscr{W}$ 表示编织的集合。相对于 $\preceq_{\mathrm{d}}$，$\mathscr{W}$ 中的极小元称为<测试 id='10'>网</测试>。相对于 $\preceq_{\mathrm{d}}$，$\mathscr{W}$ 中的极大元称为<测试 id='14'>流</测试>。

编织是 $\mathcal{K}(\Pi)$ 上的概率测度；不过，我们按照惯常的方式稍微滥用了术语（参见“布朗运动”），称一个取值于 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 的随机变量为编织，若其分布满足定义 2.4.1。网和流的情况类似。我们记作

$$\mathscr{W}_{\mathrm{det}} = \{ \mathcal{A} \in \mathcal{K}(\Pi^{\uparrow}) ; \mathcal{A} \text{ is non-crossing and pervasive} \}. \tag{2.11}$$

若 $\mathcal{A}$ 是编织，则 $\mathbb{P}[\mathcal{A} \in \mathscr{W}_{\mathrm{det}}] = 1$。$\mathscr{W}_{\mathrm{det}}$ 的元素称为<测试 id='4'>确定性编织</测试>。虽然 $\mathscr{W}_{\mathrm{det}}$ 在形式上并非 $\mathscr{W}$ 的子集，但可以将 $\mathcal{A} \in \mathscr{W}_{\mathrm{det}}$ 与在 $\mathcal{A}$ 处集中的点质量概率测度等同，从而将其视为子集。以下概念对于确定性编织和随机编织都起着核心作用。

定义 2.4.2 设 $\mathcal{A}$ 是一个编织，$z \in \mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$ 是一个可能随机的时空点。我们称 z 是 $\mathcal{A}$ 的分叉点，如果存在 $f, g \in \mathcal{A}(z)$，使得 $f \subseteq g$ 和 $g \subseteq f$ 均不成立。否则，称 $z \in \mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$ 在 $\mathcal{A}$ 中是非分歧的。

如果 z 在 $\mathcal{A}$ 中是非分歧的，且 $f, g \in \mathcal{A}(z)$，那么 $f \subseteq g$ 或 $g \subseteq f$。宽泛地说，分叉点刻画了编织呈现非典型路径行为的位置，例如路径的分支或聚合，或者两者兼有。我们强调，“z 在 $\mathcal{A}$ 中是非分歧的”是一个事件，具有相应的概率，而非确定性陈述。如果上下文已明确所指的编织，我们也可以简单地说 $z \in \mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$ 是非分歧的。如果所有 $z \in D$ 都是非分歧的，我们就称 $D \subseteq \mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$ 是非分歧的。

我们的结果反复体现出一个主题：非分歧点处的行为决定了编织的完整行为。这表明非分歧点应当十分常见。在引理 5.4.1 中，我们证明，对于任意编织 $\mathcal{A}$，确定性集合

$$\{ z \in \mathbb{R}^2_{\mathrm{c}} ; \mathbb{P}[z \text{ is ramified in } \mathcal{A}] > 0 \}$$

的勒贝格测度为零。因此，如果随机点 $z \in \mathbb{R}^2_c$ 按照某种无原子分布独立于 $\mathcal{A}$ 抽取，那么 z 在 $\mathcal{A}$ 中几乎必然是非分歧的。

令 $A \in \mathcal{K}(\Pi)$ 并令 $D \subseteq \mathbb{R}^2_c$。我们定义如下的一对关键确定性运算：

$$\mathrm{web}_D(A) = \overline{(A|_D)_\uparrow} \tag{2.12}$$

$$\mathrm{flow}(A) = \{f \in \Pi^\updownarrow;\ f \text{ does not cross } A\}. \tag{2.13}$$

我们简要评论一下网$_D(\cdot)$运算。$(\cdot)$ 的使用表示在 $\mathcal{K}(\Pi^\uparrow)$ 中取闭包。在引理 4.5.3 中，我们将看到，对于 $\mathcal{A} \in \mathscr{W}_{\mathrm{det}}$，网$_D(\mathcal{A})$ 的值不取决于所选取的稠密且非分歧的 $D \subseteq \mathbb{R}^2$。因此，(2.12) 定义了一个定义域为 $\mathscr{W}_{\mathrm{det}}$ 的确定性函数 web$(\cdot)$，我们记作 web$(\cdot)$，不显式指定 D。

现在可以陈述我们的第一个主要结果了。它表明，$(\mathscr{W}, \preceq_{\mathrm{d}})$ 的极值点可以刻画为网算子和 flow 算子的不动点。这为 $\mathscr{W}$ 的结构提供了一个特别简洁的描述。

定理 2.4.3 令 $\mathcal{A}$ 为一个编织。

1. 以下各项等价：*(a)* $\mathcal{A}$ 是一个网；*(b)* $\mathcal{A} \overset{\text{a.s.}}{=} \mathrm{web}(\mathcal{A})$。*2.* 以下各项等价：*(a)* $\mathcal{A}$ 是一个流；*(b)* $\mathcal{A} \overset{\text{a.s.}}{=} \mathrm{flow}(\mathcal{A})$；*(c)* $\mathcal{A} \subseteq \Pi^\updownarrow$ 几乎必然成立。*3.* 几乎必然地，$\mathrm{web}(\mathcal{A}) \preceq \mathcal{A} \preceq \mathrm{flow}(\mathcal{A})$。*4.* 存在唯一的（按分布计）网 $\mathcal{W}$ 和唯一的流 $\mathcal{F}$，使得 $\mathcal{W} \preceq_{\mathrm{d}} \mathcal{A} \preceq_{\mathrm{d}} \mathcal{F}$，其中 $\mathcal{W} \overset{\mathrm{d}}{=} \mathrm{web}(\mathcal{A})$ 以及 $\mathcal{F} \overset{\mathrm{d}}{=} \mathrm{flow}(\mathcal{A})$。

因此，编织空间被等价关系划分

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{web}(\mathcal{A}) \overset{\mathrm{d}}{=} \mathrm{web}(\mathcal{B}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{flow}(\mathcal{A}) \overset{\mathrm{d}}{=} \mathrm{flow}(\mathcal{B}), \tag{2.14}$$

在该等价关系下，每个等价类都有一个网作为其唯一的极小元，并有一个流作为其唯一的极大元。

关系 $\sim$ 也可以用有限组粒子运动来刻画，下面我们将为此引入正式记号。考虑一个编织 $\mathcal{A}$、一个流 $\mathcal{F}$ 和一个非分歧点 $z \in \mathbb{R}^2_c$。集合 $\mathcal{A}|_z$ 仅包含一条路径，它始于 z。类似地，$\mathcal{F}(z)$ 仅包含一条路径，该路径经过 z。因此，自然可以定义 (2.9) 和 (2.10) 的特定版本，使其适用于非分歧点的有序集合。

设 $m \in \mathbb{N}$。给定一个编织 $\mathcal{A}$ 和一个几乎必然非分歧的 $\boldsymbol{z} = (z_i)_{i=1}^m \in (\mathbb{R}^2_c)^m$，我们记作 $\mathcal{A}|_{\boldsymbol{z}} = (f_1, \ldots\ldots, f_m)$，其中 $\{f_i\} \overset{a.s}{=} \mathcal{A}|_{z_i}$。类似地，给定一个流 $\mathcal{F}$ 和一个几乎必然非分歧的 $\boldsymbol{z} = (z_i)_{i=1}^m \in (\mathbb{R}^2_c)^m$，我们记作 $\mathcal{F}(\boldsymbol{z}) = (f'_1, \ldots\ldots, f'_n)$，其中 $f'_i \in \Pi^\updownarrow$ 是 $\mathcal{F}(z_i)$ 中几乎必然唯一的元素。我们称 $\mathcal{A}|_{\boldsymbol{z}}$ 为 $\mathcal{A}$ 从 $\boldsymbol{z}$ 出发的（时间向前）m 粒子运动。它们在几乎处处等价的意义下定义。

粗略地说，关系 $\sim$ 还刻画了两个编织何时具有相同的时间向前 m-粒子运动（按分布计）。鉴于此，我们需要作出涉及多个编织且关注非分歧点的陈述。我们约定，对于相应陈述中涉及的所有编织，均默认非分歧是相对于它们而言的。现在，我们已经准备好陈述第二个主要结果。

定理 2.4.4 设 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ 为编织。

1. 假设 使得 $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$。若 $\boldsymbol{z} \subseteq \mathbb{R}^2_c$ 是有限的且几乎必然非分歧，则 $\mathcal{A}|_{\boldsymbol{z}} \overset{\mathrm{d}}{=} \mathcal{B}|_{\boldsymbol{z}}$.

2. 以下各项等价:

(a) $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$; *(b)* 存在 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的一个耦合，使得 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ 几乎必然不交叉; *(c)* 存在一个（确定性的）可数稠密 $D \subseteq \mathbb{R}^2$，它几乎必然非分歧，使得对于所有有限的 $z \subseteq D$，$\mathcal{A}|_z \overset{\mathrm{d}}{=} \mathcal{B}|_z$ 。

定理 2.4.3 和 2.4.4 引出了一个颇具吸引力的编织极限理论，下面我们将对其进行阐述。我们用$\overset{\mathrm{d}}{\to}$表示弱收敛（即依分布收敛）。我们在第 2.2 节中看到，$\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 是一个波兰空间，因此，以 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 为值的随机变量的弱收敛，或者等价地，$\mathcal{K}(\Pi)$ 上的概率测度的弱收敛，可以按照标准方式定义，例如 Ethier 和 Kurtz（1986）第 3.3 节中的定义。这为考察编织的弱收敛提供了一个自然的意义。

下一个定理表明，流的弱收敛等价于紧性加上 m-粒子运动的弱收敛，并探讨了在编织等价类背景下的同一命题。注意，m-粒子运动的收敛是关于以 $\mathbb{R}^m$ 为值的随机过程的弱收敛的陈述，这属于经典理论的范畴，例如 Ethier 和 Kurtz（1986）中的相关理论。

定理 2.4.5 设 $\mathcal{F}_n$，$\mathcal{F}$ 为流。

1. 若 $\mathcal{F}_n \overset{d}{\to} \mathcal{F}$，则对任意 $m \in \mathbb{N}$ 以及非分歧的 $z \in (\mathbb{R}^2_{\mathrm{c}})^m$，有 $\mathcal{F}_n(z) \overset{d}{\to} \mathcal{F}(z)$。*2.* $(\mathcal{F}_n)$ 的任一弱极限点都是流。若 $(\mathcal{F}_n)$ 是紧的，且对任意 $m \in \mathbb{N}$ 以及几乎必然非分歧的 $z \in (\mathbb{R}^2)^m$，有 $\mathcal{F}_n|_z \overset{d}{\to} \mathcal{F}|_z$，则 $\mathcal{F}_n \overset{d}{\to} \mathcal{F}$。*3.* 设 $\mathcal{A}_n$、$\mathcal{A}$ 是编织，且满足 $\mathcal{A}_n \sim \mathcal{F}_n$ 和 $\mathcal{A} \sim \mathcal{F}$。若 $\mathcal{A}_n \overset{d}{\to} \mathcal{A}$，则 $\mathcal{F}_n \overset{d}{\to} \mathcal{F}$。反之，若 $\mathcal{F}_n \overset{d}{\to} \mathcal{F}$，则 $(\mathcal{A}_n)$ 的任一弱极限点 $\mathcal{B}$ 都是编织，并满足 $\mathcal{B} \sim \mathcal{F}$。

引理 4.4.3 表明，函数 flow(·) 在 $\mathscr{W}_{\mathrm{det}}$ 上连续，由此得到定理 2.4.5 第 3 部分的正向蕴含。函数 web(·) 并不连续，如图 2.5.1 中的例子所示：该图描绘了一个网序列 $(\mathcal{W}_n)$ 收敛到编织 $\mathcal{A}$，而这个编织既不是网也不是流。这表明，就收敛而言，流比网更适合作为其等价类的代表元。

现在我们给出定理 2.4.5 第 1 部分和第 2 部分对一般编织的类似结论。在定理 2.4.5 第 3 部分中，流为编织提供了一个总体结构，在该结构中，取路径的极限会保留不交叉性质。取双无限路径的极限时，不交叉性质会得到保留，但取半无限路径的极限时则未必如此。因此，如果我们希望证明编织收敛，同时又希望避免处理与之相关的流，就有必要检查极限点是否不交叉。相关的警示性示例见图 1.1.1。

定理 2.4.6 设 $\mathcal{A}_n$，$\mathcal{A}$ 是编织。

1. 若 $\mathcal{A}_n \overset{\mathrm{d}}{\to} \mathcal{A}$，则对于任意 $m \in \mathbb{N}$ 以及非分歧的 $z \in (\mathbb{R}^2_{\mathrm{c}})^m$，我们有 $\mathcal{A}_n|_z \overset{\mathrm{d}}{\to} \mathcal{A}|_z$。
2. 若 $(\mathcal{A}_n)$ 的弱极限点 $\mathcal{B}$ 不交叉，则 $\mathcal{B}$ 是一种编织。此外，若对于任意 $m \in \mathbb{N}$ 以及几乎必然非分歧的 $z \in (\mathbb{R}^2)^m$，我们有 $\mathcal{A}_n|_z \overset{\mathrm{d}}{\to} \mathcal{A}|_z$，则 $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$。

接下来的结果涉及时间反演对偶性，为此我们必须引入一些额外的记号。给定 $f \in \Pi^{\uparrow}$，定义 $f^{\circlearrowleft} \in \Pi^{\downarrow}$ 如下： $f^{\circlearrowleft}(t\pm) = -f(-t\mp)$。此操作对应于空间旋转 180 度，并逐点作用于路径集，如下所示：$\mathcal{A}^{\circlearrowleft} = \{f^{\circlearrowleft}; \ f \in \mathcal{A}\}$。显然，$(A^{\circlearrowleft})^{\circlearrowleft} = A$。注意， $\cdot^{\circlearrowleft}$ 是 Π 和 $\Pi^{\updownarrow}$ 的自同构，且 $(\Pi^{\uparrow})^{\circlearrowleft} = \Pi^{\downarrow}$。命题 A.2.1 表明， $A \subseteq \Pi$ 相对紧当且仅当 $A^{\circlearrowleft}$ 相对紧；而且不难看出，遍历性和不交叉性质也同样成立。对于 $B \subseteq \Pi^{\downarrow}$，我们记作

$$B_{\downarrow} = \{g \in \Pi^{\downarrow}; \, g \subseteq f \text{ for some } f \in B\} \tag{2.15}$$

与（2.6）类似。

$\Pi^{\downarrow}$ 中紧致、遍历且不交叉的随机子集称为对偶编织。因此，当且仅当 $\mathcal{A}^{\circlearrowleft}$ 是编织时， $\mathcal{A}$ 才是对偶编织。当且仅当 $\mathcal{A}^{\circlearrowleft}$ 是网时，我们称 $\mathcal{A} \subseteq \Pi^{\downarrow}$ 为对偶网。等价地，我们可以在 $\mathcal{K}(\Pi^{\downarrow})$ 上定义一个类似于（2.7）但时间反向的关系（即用$\cdot\downarrow$ 代替$\cdot\uparrow$），那么对偶网就是关于此关系的极小对偶编织。注意，当且仅当 $\mathcal{F}^{\circlearrowleft}$ 是流时， $\mathcal{F}$ 才是流。

ˆ定义 2.4.7 若一对（$\mathcal{W}$， $\mathcal{W}$）由一个网 $\mathcal{W}$ 和一个与之耦合的对偶网 $\mathcal{W}$ 构成，且 $\mathcal{W} \cup \mathcal{W}$ 不交叉，则称其为双重网 。

ˆ 我们的下一个结果表明，每个网都会产生一个相应的双重网，其中 $\mathcal{W}$本质上包含了构造 $\mathcal{F}$ 所需的额外路径线段，而 $\mathcal{F}$ 是直接从ˆ$\mathcal{W}$构造的。不过，这里有一个微妙之处：当我们将 $\mathcal{W}$ 与其对偶 $\mathcal{W}$ 连接起来以构造$\mathcal{F}$时，必须小心，避免引入交叉。尤其要注意分叉点，在这些点上，多个入射轨迹和出射轨迹必须以恰当的方式重新连接，使它们进入和离开 z 时彼此不交叉。

回顾一下我们的术语：路径 $f \in \Pi$始于点（$f(\sigma_f-)$ σ_f） $\in \mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$，终于点（$f(\tau_f+)$ τ_f）。给定 $D \subseteq \mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$，如果 f始于 D中的某一点，我们就说 f始于 D；如果 f 终于 D 中的某一点，我们就说 f 终于 D。对于 $f \in \Pi^{\uparrow}$， $g \in \Pi^{\downarrow}$，若它们不交叉，且$\tau_g = \sigma_f$与 $g(\tau_g+) = f(\sigma_f-)$，则我们定义 $h = g_{\hookrightarrow} f \in \Pi^{\updownarrow}$为

$$h(t\star) = \begin{cases} g(t\star) & \text{for } t\star \le \sigma_f- \\ f(t\star) & \text{for } t\star \ge \sigma_f+ . \end{cases}$$

因此， $g_{\hookrightarrow} f \in \Pi^{\updownarrow}$ 是路径 $f \in \Pi^{\uparrow}$ 与路径 $g \in \Pi^{\downarrow}$ 的串接，它们分别从时空中的同一点出发并终止于该点。

定理 2.4.8 设 $\mathcal{A}$ 是一个编织，且 $\mathcal{W} = $ 网$(\mathcal{A})$， $\mathcal{F} = $ 流$(\mathcal{A})$。存在同一概率空间上的一个对偶网 $\mathcal{W}$，使得 $(\mathcal{W}, \mathcal{W})$ 是一个双重网，并且 $\mathcal{W}$ 在几乎处处等价意义下唯一。对于任意稠密且几乎必然非分歧的 $D \subseteq \mathbb{R}^2$，

$$\widehat{\mathcal{W}} = \overline{\{g \in \Pi^{\downarrow}; \, g \textit{ does not cross } \mathcal{A} \textit{ and } g \textit{ begins in } D\}_{\downarrow}} \tag{2.16}$$

$$\mathcal{F} = \overline{\{g_{\hookrightarrow} f \in \Pi^{\updownarrow}; \, g \in \widehat{\mathcal{W}} \textit{ ends and } f \in \mathcal{W} \textit{ begins at the same point of } D\}}. \tag{2.17}$$

由定理 2.4.3 和定理 2.4.8 可知，若 $(\mathcal{W}, \mathcal{W}, \mathcal{F})$ 是一个包含双重网和流线的三元组，且它们耦合后两两不交叉，那么给定该三元组中的任意一个元素，我们都可以重构另外两个。

回想一下， $\Pi_c = \{f \in \Pi; \ f$ 是连续的$\}$。我们以记录如下事实作为本节的结尾：路径的连续性在上述建立的各种关系中均得以保持。若 $\mathcal{A}$ 是连续的 $\mathcal{A} \subseteq \Pi_c^{\updownarrow}$，则称编织为连续的；对偶编织也类似。

定理 2.4.9 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是满足 $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$的编织。那么， $\mathcal{A}$ 连续，当且仅当 $\curlywedge\mathcal{B}$ 连续。如果 $\mathcal{W}$ 是一个网，那么 $\mathcal{W}$ 连续，当且仅当 $\mathcal{W}$ 连续。

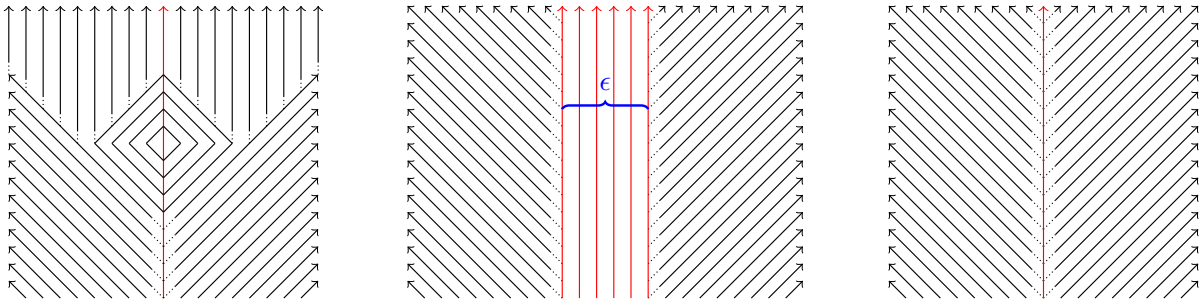

图 2.5.1：在这三幅图中，时间均向上延伸，空间轴为水平轴。每幅图都用实线描绘了一个编织，并用虚线描绘了相应的流。

左图：一个编织 $\mathcal{A}$，使得 $\mathcal{A}(D)$ 包含这条双向无限红色路径，而 $\mathcal{A}|_D$ 不包含。这里，$D \subseteq \mathbb{R}^2$ 必须关于编织 $\mathcal{A}$ 稠密且非分歧。在这种情况下，我们有 web$(\mathcal{A}) = (\mathcal{A}|_D)_\uparrow \prec \mathcal{A}(D)\uparrow$。

中间和右侧：一个与流$(\cdot)$映射的连续性和网$(\cdot)$映射的不连续性相关的例子，也涉及流和一般编织中的孤立点的存在性。中间展示了编织 $\mathcal{A}_\epsilon$ 及其对应的流 $\mathcal{F}_\epsilon = 流(\mathcal{A}_\epsilon)$。右侧展示了极限编织 $\mathcal{A} = \lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{A}_\epsilon$，并再次通过加入虚线来展示 $\mathcal{F} = 流(\mathcal{A})$。红色路径在极限中收缩为一条双无限路径。注意，根据定理 2.4.5 的第 3 部分，$\mathcal{F}_\epsilon \to \mathcal{F}$。在此情形下，$\mathcal{W}_\epsilon = 网(\mathcal{A}_\epsilon)$等于 $(\mathcal{A}_\epsilon)\uparrow$。因此，$\mathcal{W}_\epsilon \to \mathcal{A}_\uparrow$。在右侧，注意 $\mathcal{W} = 网(\mathcal{A})$不包含这条双向无限红色路径，而且这条路径上的每个点都是分歧的。因此 $\lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{W}_\epsilon \neq \mathcal{W}$，这表明映射网$(\cdot)$在 $\mathcal{W}$处不连续。注意，右侧的双向无限红色路径是 $\mathcal{A}$ 的一个孤立点，但不是 $\mathcal{F}$的孤立点。

2.5 讨论

本节首先讨论与布朗网络相关的各种对象如何纳入编织的框架。随后讨论针对路径集及密切相关对象所引入的其他拓扑，并在行文中提及一些未解决问题。

2.5.1 布朗网络的等价类

我们用 $\mathcal{W}_\mathrm{b}$ 表示布朗网络，其定义见 Schertzer 等人（2017）综述文章中的定理 2.3（例如）。首先来消除一个表面上的符号冲突。与相关文献中的惯例一致，Schertzer 等人（2017）将 $\mathcal{W}_\mathrm{b}(D)$ 定义为 $\mathcal{W}_\mathrm{b}$ 中从某个 $z \in D$ 开始的路径集，其中 $D \subseteq \mathbb{R}^2_\mathrm{c}$。根据（2.9），我们将 $\mathcal{W}_\mathrm{b}(D)$ 保留用于表示经过某个 $z \in D$ 的路径集。乍看之下这似乎存在冲突，但实际上并无冲突，下面我们将对此作出解释。

对于布朗网络，当 $D \subseteq \mathbb{R}^2_\mathrm{c}$ 是确定性且可数的时，广泛使用记号 $\mathcal{W}_\mathrm{b}(D)$，例如在著名的恒等式 $\mathcal{W}_\mathrm{b} \overset{\mathrm{a.s.}}{=} \mathcal{W}_\mathrm{b}{}^\mathrm{s}(D)$ 中。对于布朗网络，几乎必然地，对每个 $z \in D$，集合 $\mathcal{W}_\mathrm{b}(z) = \{f \in \mathcal{W}_\mathrm{b};\ 经过\ z\}$ 的 f 由一条始于 z 的路径组成。因此，对于布朗网络，$\mathcal{W}_\mathrm{b}(z) \overset{\mathrm{a.s.}}{=} \mathcal{W}_\mathrm{b}|_z{}^\mathrm{s}$，且 $\mathcal{W}_\mathrm{b}(D) \overset{\mathrm{a.s.}}{=} \mathcal{W}_\mathrm{b}|_D{}^\mathrm{s}$。一般而言，$\mathcal{A}(D)$ 与 $\mathcal{A}|_D$ 之间的区别确实重要，而构造 web$(\mathcal{A})$ 需要用到包含后者的 (2.12)。相关示例见图 2.5.1 左侧。

引理 2.5.1 可以证明 $\mathcal{W}_\mathrm{b}$ 是一个网。

引理 2.5.1 的一个简短证明见附录 A.4。该证明结合了定理 2.4.3 与关键性质 $\mathcal{W}_\mathrm{b} \overset{\mathrm{a.s.}}{=} \mathcal{W}_\mathrm{b}{}^\mathrm{s}(D)$，由此我们可以推导出 $\mathcal{W}_\mathrm{b} \overset{\mathrm{a.s.}}{=} {}^\mathrm{s}\mathrm{web}(\mathcal{W}_\mathrm{b})$。我们将布朗网的等价类称为布朗编织类；这一概念在本文中首次提出。定理 2.4.3 中的双布朗网络 $(\mathcal{W}_\mathrm{b}, \mathcal{W}_\mathrm{b})$

Schertzer 等人（2017）定理 2.4 中定义的对象由一对耦合随机变量组成，其中 $(\widehat{\mathcal{W}_{\mathrm{b}}})^{\circlearrowleft}$ 和 $\mathcal{W}_{\mathrm{b}}$ 具有相同的边缘分布，且 $\mathcal{W}_{\mathrm{b}}$ 与 $\widehat{\mathcal{W}_{\mathrm{b}}}$ 不交叉。$\widehat{\ }$由定理 2.4.8 可知，$(\mathcal{W}_{\mathrm{b}}, \mathcal{W}_{\mathrm{b}})$ 在我们的框架中是一个双重网。

现在让我们评论一下布朗网络中特殊点与编织中的分叉点所扮演的角色。在布朗网络中，每个时空点 $z = (x,\ t)$ 都被赋予一个以 $(z_{\mathrm{in}},\ z_{\mathrm{out}})$ 表示的“类型”。这里，z_{in} 是 $z = (x,\ t)$ 的入射路径的等价类数量；根据这样的关系，若两条路径在某个时间区间 $[t-\epsilon, t]$（其中 $\epsilon > 0$）上相等，则称它们等价，并据此判断这些路径是否不同。类似地，对于 z_{out}，使用出射路径和 $[t, t+\epsilon]$。有关更多细节，请参见 Schertzer 等人（2017）的第 2.5 节。请注意，z_{in} 和 z_{out} 是 z 在时空中的局部性质，而 z 的分叉并不是局部性质，因为分叉取决于路径在 $\mathcal{A}(z)$ 内对所有时间的行为。这两个概念彼此相关，但用途不同。

Schertzer 等人（2017）的定理 2.11 描述了 $\mathcal{W}_{\mathrm{b}}$ 中特殊点的各种类型，以及它们对应的局部几何和豪斯多夫维数。这为深入理解 $\mathcal{W}_{\mathrm{b}}$ 的微观结构提供了极为详尽的依据。在布朗网络中，(0,1) 类型的点在 $\mathbb{R}^2$ 中具有全测度，且是非分歧的。所有其他类型的点都被视为 $\mathcal{W}_{\mathrm{b}}$ 中的“特殊”点，并且在 $\mathcal{W}_{\mathrm{b}}$ 中是分歧的。这多少有些巧合：对于一般编织，(0,1) 类型的点可能是分歧的（例如，当它们位于某个分支点的上游时），而 (1,1) 类型的点也可能是非分歧的（例如，图 1.1.1 中那些不与跳跃相互作用的常值路径）。此外，对于一般编织，数量最丰富的类型不一定是 (0,1)。在图 1.1.1 和 2.5.1 中所描绘的所有编织中，(1,1) 类型的点都具有全测度。

Fontes 和 Newman（2006年）探讨了布朗编织的两个例子。他们考察了完整布朗网络，按我们的术语来说，它恰好就是与布朗编织相关联的流 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}$；以及完整正向布朗网络，按我们的术语来说，它是 $(\mathcal{F}_{\mathrm{b}})^{\uparrow}$，是一个既非流也非网的布朗编织例子。路径在逆时间方向上的延伸也见于 Fontes 和 Newman（2006年）的研究。他们的处理完全依赖于布朗网络的结构，运用了 Soucaliuc 等人（ 2000 年）建立的布朗路径正反向反射。我们自己的定理 2.4.8 中与 $(\mathcal{W}_{\mathrm{b}}, \mathcal{W}_{\mathrm{b}})$ 和 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}$ 相对应的特例，本质上就是 Fontes 和 Newman（2006年）的命题 2.5。他们还改编了 Fontes 等人（2004年）的结果以及 Piterbarg（1998年）较早的工作，为 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}$ 给出了弱收敛判据。

Sun 和 Swart（2008）提出的布朗网不是一种编织，因为它包含彼此交叉的路径。一个有趣的问题是，是否存在网的一种广义形式，可表示为与一般编织相对应的一族取值于 $\mathcal{K}(\Pi)$ 的随机变量；但本文不打算回答这个问题。另一个有趣的问题是，我们的结果能否推广到允许交叉的普遍系统，例如 Mountford 等人（2019）提出的 α-稳定网络；然而，目前这类系统的非平凡实例还寥寥无几。

2.5.2 相关拓扑

我们已经提到，Fontes 等人（2004）构造的状态空间 $\mathcal{K}(\Pi_c^{\uparrow})$ 是我们自己的状态空间 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 的一个拓扑子空间；近期关于布朗网络的大多数研究都以该状态空间为基础。本节将讨论其他一些近期有关路径集上诱导拓扑的研究。

Berestycki 等人（2015）将路径集映射为一组“管道”。粗略地说，管道是时空的一个子集，具有底面、侧面和顶面。所谓的 管拓扑 则根据路径穿过哪些管道（即随着时间推移，从底面到顶面，同时始终保持在侧面范围内）来诱导。它仅适用于连续聚合路径集，

但允许路径交叉。

Berestycki 等人（2015）定义的状态空间是紧致的，这带来了显著的技术优势（尤其是紧性会自动成立），但代价是细节有所损失：管拓扑比 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow}_{c})$ 的拓扑更粗糙，而且从路径集到管集的映射不是单射。事实上，在管拓扑下，集合 A and $A_{\uparrow}$ 被视为相同，其中 $f \in \Pi^{\uparrow}$，对于所有满足 $A_{\uparrow} \preceq A' \preceq A$ 的 A'，情况也类似，这意味着定理 2.4.3 中展现的许多结构都丢失了。不过，这种较弱的表示方式使刻画和收敛更容易。

在 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 中得以保留、但在管拓扑下被舍弃的另一处细节，是路径起始时刻附近的行为。这可能会影响普适性。例如，Berestycki 等人（2015）证明，具有重尾跳跃的聚合随机游走者系统（经线性插值）在管拓扑下将依分布收敛到布朗网络；此前 Newman 等人（2005）曾证明，这种收敛在 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow}_{c})$ 中并不成立，因为在某些路径的初始时刻，极限中会出现跳跃。我们猜想，如果将这类系统视为 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 的元素，它们会收敛，但不会收敛到布朗网络 。大致而言，我们预期这类系统的极限将是一个布朗网络，并在路径的初始时刻适当地增添跳跃。

除了管道之外，另一种可能的视角是将布朗网络看作一棵实树，其自然根是时间为 $+\infty$ 的一个点，所有路径都会在此聚合。粗略地说，在这种表示中，布朗网络内某条路径上的每个时空点都会成为相应实树中的一个点，并由此诱导出一种度量，既能反映自然的树结构，也能反映沿着布朗网络内各条路径时间向前行进、直至聚合点的距离。当然，并非所有路径集都适合这种表示；包含分支的系统就不适合。

Cannizzaro 和 Hairer（2021）确定了 $\mathcal{K}$（$\Pi^{\uparrow}_{c}$）的一个子集，该子集可以自然地表示为实树。Depperschmidt 等人（2011）提出的标记度量测度空间框架也以类似的主题为基础。与管拓扑类似，Cannizzaro 和 Hairer（2021）的设定不区分 $A_{\uparrow}$ 和 A，具体做法是将实树与形如 $A_{\uparrow}$（即关于 $\subseteq$ 的递减集）的路径集关联起来。他们构造了一种波兰拓扑，并证明它比 $\mathcal{K}$（Π）的拓扑更精细；特别是，该拓扑确保在取极限时保留路径的聚合时间。

3 预备知识

现在我们开始证明。本节将介绍编织理论所需的一些基础概念，这些概念与 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 的结构有关。在第 3.1 节中，我们将交叉的概念与一种关系 $\lhd$ 联系起来，该关系描述了一条路径何时位于另一条路径的左侧。在第 3.2 节中，我们将证明关系 $\preceq$ 是一种偏序。最后，在第 3.3 节中，我们将考察序关系与拓扑之间的相互作用，包括关系 $\subseteq$、$\lhd$ 和 $\preceq$ 在多大程度上能在取极限时保持不变。这些结果在本质上属于技术性内容。希望略过技术细节的读者，可以先了解关键结果和定义（至少包括定义 3.1.1 和引理 3.1.6），然后继续阅读第 4 节。

3.1 关于交叉

本节研究交叉与一条路径始终位于另一条路径左侧（或右侧）这一概念之间的相互作用。本节的结果可以直接推广到 Π，但为简洁起见，我们只陈述涵盖 $\Pi^{\uparrow}$ 的结果。因此，我们必须处理初始

时刻 σ_f 的 $f \in \Pi^\uparrow$ 处的跳跃，但我们对时空进行的紧化（见图 2.2.1）意味着跳跃不会发生在时间 $\tau_f = +\infty$。

定义 3.1.1 对于 $f,\ g \in \Pi^\uparrow$，如果存在 $f',\ g' \in \Pi^\updownarrow$，满足 $f \subseteq f'$ 且 $g \subseteq g'$，使得对所有 $t\star \in \mathbb{R}_\mathfrak{s},\ f'(t\star) \le g'(t\star)$，则记作 $f \lhd g$。如果此性质不成立，则记作 $f \not\lhd g$。

陈述 $f \lhd g$ 应理解为“g位于 f 的左侧”。这里有一些微妙之处。如果 $f \lhd g$，那么对所有 $t\star \ge \sigma+,\ f(t\star) \le g(t\star)$；但对于 $g(\sigma-)$ 和 $f(\sigma-)$，则无法保证这一点。图 3.1.1 的 (i) 展示了一个满足 $g(\sigma-) < f(\sigma-)$ 的 $f \lhd g$ 示例。

关系 $\lhd$ 在 $\Pi^\uparrow$上不构成偏序。反对称性不成立，因为若 $g \subseteq f$且 $g \ne f$，那么 $g \lhd f$ 和 $f \lhd g$ 同时成立。传递性也不成立，例如，若 $f(t\star) = -\frac{1}{2} + \mathbb{1}\{t\star = \sigma_f-\}$、$g(t\star) = 0$、$h(t\star) = \frac{1}{2} - \mathbb{1}\{t\star = \sigma_f-\}$，且 $\sigma_f = \sigma_h = 0$和 $\sigma_g = 1$，那么$f \lhd g$ 和 $g \lhd h$ 成立，但 $f \not\lhd h$ 不成立（留给读者自行构造一个传递性不成立且 $\{f, g, h\}$ 也不交叉的例子！）。因此，本文不会使用符号 $\rhd$ 和 $\not\rhd$：我们可以将它们定义为与$\lhd$ 和 $\not\lhd$ 类似的概念，只是互换左右两侧的角色；但这样的记号不够直观，因为$\not\lhd$ 和 $\rhd$ 并不等价。在引理 3.1.6 中，我们将确立一个限制更多的情形，在该情形下 $\lhd$ 的性质会更好。

定义 3.1.1 直观易懂，且与定义 2.3.1 配合良好，但明确刻画一条路径何时位于另一条路径左侧会很有帮助。我们定义 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_\mathfrak{s}$ 的子集 $L(f)$ 和 $R(f)$，以及 $\mathbb{R}$ 的子集 $L_{t\star}(f)$ 和 $R_{t\star}(g)$，如下：

$$L_{t\star}(f) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } t\star < \sigma_f-, \text{ or if } t\star = \sigma_f- \text{ and } f(\sigma_f-) \le f(\sigma_f+), \\ [-\infty, f(t\star)) & \text{if } t\star \ge \sigma_f+, \text{ or if } t\star = \sigma_f- \text{ and } f(\sigma_f+) < f(\sigma_f-), \end{cases}$$

$$R_{t\star}(f) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } t\star < \sigma_f-, \text{ or if } t\star = \sigma_f- \text{ and } f(\sigma_f+) \le f(\sigma_f-), \\ (f(t\star), \infty] & \text{if } t\star \ge \sigma_f+, \text{ or if } t\star = \sigma_f- \text{ and } f(\sigma_f-) < f(\sigma_f+), \end{cases}$$

$$L(f) = \bigcup_{t\star \in \mathbb{R}_\mathfrak{s}} L_{t\star}(f) \times \{t\star\}, \qquad R(f) = \bigcup_{t\star \in \mathbb{R}_\mathfrak{s}} R_{t\star}(f) \times \{t\star\}. \tag{3.1}$$

注意，$L(f)$ 和 $R(f)$ 是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_\mathfrak{s}$ 的子集。$L(f)$ 的重要性在于，如果 $g(t\star) \in L_{t\star}(f)$，那么 g 必须始终位于 f 的“左侧”，以免与其交叉。同理，如果 $g(t\star) \in R_{t\star}(g)$，则必须位于右侧。我们将在引理 3.1.4 中将这一直观理解形式化。示意图见图 3.1.1。

对于 $t \ge \sigma_f+$，集合 $L_{t\star}(f)$ 和 $R_{t\star}(f)$ 分别是严格位于 $f(t\star)$ 左侧和右侧的点的集合。然而，对于 $t = \sigma_f$，我们必须考虑在时间 σ_f 发生跳跃的情况及其方向。注意，根据图 2.2.1 中的时空紧化，$t\star$（其中 $t = \pm\infty$）不包含在 $L(f)$ 和 $R(f)$ 中。

引理 3.1.2 设 $f,\ g \in \Pi^\uparrow$。则 $f \lhd g$ 当且仅当 $L(f) \cap R(g) = \emptyset$。

Proof: 我们依次证明正向和反向蕴含，先从前者开始。假设 $f \lhd g$。则存在 $f',\ g' \in \Pi^\updownarrow$，满足 $f \subseteq f'$ 且 $g \subseteq g'$，使得对于所有 $t\star \in \mathbb{R}_\mathfrak{s},\ f'(t\star) \le g'(t\star)$。由 (3.1) 可知，$L(f') \cap R(g') = \emptyset$，而由于 $L(f) \subseteq L(f')$ 且 $R(g) \subseteq R(g')$，因此可推出 $L(f) \cap R(g) = \emptyset$。

对于逆向蕴含，设 $f, g \in \Pi^\uparrow$满足 $L(f) \cap R(g) = \emptyset$。设 $\sigma = \sigma_f \vee \sigma_g$。由 (3.1) 可立即得出，对于所有 $t\star \ge \sigma+,\ f(t\star) \le g(t\star)$。我们将构造显式的 $f', g' \in \Pi^\updownarrow$，使得 $f \subseteq f', g \subseteq g'$，并且对于所有 $t\star \in \mathbb{R}_\mathfrak{s},\ f'(t\star) \le g'(t\star)$。注意，如果 $\sigma_f = \sigma_g = -\infty$，则无需证明任何内容；对于 $t = \pm\infty$，我们也无需在 $t\star$ 处定义 f' 或 g'。我们分三种情况讨论，其中至少有一种必然成立。

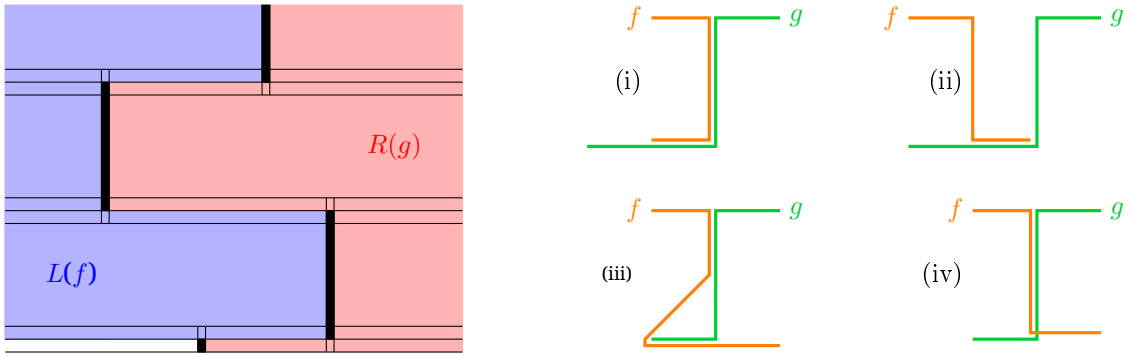

图 3.1.1：左图：对子集 $L(f)$ 和 $R(f)$（均为 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$ 的子集）的示意图。时间向上延伸，$f(t\star)$ 的取值以粗黑线表示。为便于观察，当 f 在时间 t 发生跳跃时，我们用细水平线将时间划分为 $t-$ 和 $t+$。路径 f 在其起始时间 σ_f 发生跳跃，位置在图的最底部。注意，$L_{\sigma_f-}(f)=\emptyset$，而 $R_{\sigma_f-}(f)=(f(\sigma_f-)\ \infty]$，因为在 σ_f 处的跳跃向右发生。
右侧包含两条路径。在每个例子中，g 的初始点位于 f 的初始点左侧。(i) 中的路径满足 $f\lhd g$，且不交叉；但在例子 (ii)–(iv) 中，f 从右向左交叉 g。

1. 考虑 $L_{\sigma-}(f)=\emptyset$ 的情况。根据 (3.1)，我们有 $\sigma=\sigma_f\geq\sigma_g$ 以及 $f(\sigma-)\leq f(\sigma+)$。在此情况下，令

$$f'(t\star)=\begin{cases}f(t\star) & \text{if } t\star\geq\sigma_f+\\ -\infty & \text{if } t\star\leq\sigma_f-\end{cases}\qquad g'(t\star)=\begin{cases}g(t\star) & \text{if } t\star\geq\sigma_g+\\ g(\sigma_g-) & \text{if } t\star\leq\sigma_g-\end{cases}.$$

2. 考虑 $R_{\sigma-}(g)=\emptyset$ 的情况。根据 (3.1)，我们有 $\sigma=\sigma_g\geq\sigma_f$ 以及 $g(\sigma+)\leq g(\sigma-)$。在此情况下，令

$$f'(t\star)=\begin{cases}f(t\star) & \text{if } t\star\geq\sigma_f+\\ f(\sigma_f-) & \text{if } t\star\leq\sigma_f-\end{cases}\qquad g'(t\star)=\begin{cases}g(t\star) & \text{if } t\star\geq\sigma_g+\\ \infty & \text{if } t\star\leq\sigma_g-\end{cases}.$$

3. 考虑 $L_{\sigma-}(f)=[-\infty,f(\sigma-)$ 且 $R_{\sigma-}(g)=(g(\sigma-)\ \infty]$ 的情况。利用 $L(f)\cap R(g)=\emptyset$，我们有 $f(\sigma-)<g(\sigma-)$。若 $\sigma=\sigma_f\geq\sigma_g$，则令

$$f'(t\star)=\begin{cases}f(t\star) & \text{if } t\star\geq\sigma_f+\\ f(\sigma_f-)+g(t\star)-g(\sigma_f-) & \text{if } t\star\in[\sigma_g+,\sigma_f-]\\ f(\sigma_f-)+g(\sigma_g-)-g(\sigma_f-) & \text{if } t\star\leq\sigma_g-\end{cases}\qquad g'(t\star)=\begin{cases}g(t\star) & \text{if } t\star\geq\sigma_g+\\ g(\sigma_g-) & \text{if } t\star\leq\sigma_g-\end{cases}.$$

注意，f' 复制了 g' 在 $t\star\in[\sigma_g+,\sigma_f-]$ 期间的增量，从条件 $f'(\sigma_f)=f(\sigma_f-)<g(\sigma_f-)=g'(\sigma_f)$ 出发沿逆时间方向进行；随后从时间 σ_g- 开始，两条路径均保持不变。这确保了对所有 $t\star$，$f'(t\star)\leq g'(t\star)$。若 $\sigma=\sigma_g\geq\sigma_f$，则我们可以采用类似的策略，其中 g 复制了 f 在 $[\sigma_f+,\sigma_g-]$ 期间的增量，从 $g(\sigma_g-)$ 出发沿逆时间方向进行。

在所有情况下，很明显，对于所有 $t\star\in\mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$，$f\subseteq f'$、$g\subseteq g'$ 和 $f'(t\star)\leq g'(t\star)$。 ■

引理 3.1.3 设 f、$g\in\Pi^{\uparrow}$。以下陈述等价：*(i)* f 和 g 不交叉；*(ii)* $L(f)\cap R(g)=\emptyset$ 或 $R(f)\cap L(g)=\emptyset$；*(iii)* $f\lhd g$ 或 $g\lhd f$。

Proof: 由定义 2.3.1 和引理 3.1.2 可立即得出 (ii) 与 (iii) 等价。由定义 2.3.1 和 3.1.1 可直接得出 (iii) 蕴含 (i)。现在我们来证明

（i）蕴含（ii）。若 f和 g不交叉，则存在 f'，$g' \subseteq \Pi^{\updownarrow}$使得 $f \subseteq f'$、$g \subseteq g'$，并且对所有 $t\star \in \mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$，均有 $f'(t\star) \leq g'(t\star)$；或者对所有 $t\star \in \mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$，均有 $g'(t\star) \leq f'(t\star)$。在前一种情况下，由 (3.1) 可得 $L(f') \cap R(g') = \emptyset$，这蕴含 $L(f) \cap R(g) = \emptyset$。在后一种情况下，由 (3.1) 可得 $L(g') \cap R(f') = \emptyset$，这蕴含 $L(g) \cap R(f) = \emptyset$。因此得到 (ii)。■

根据引理 3.1.3，如果 f 和 g 交叉，那么必定存在 $t_1\star_1 \neq t_2\star_2$，使得 $R_{t_1\star_1}(\pi) \cap L_{t_1\star_1}(\pi') \neq \emptyset$ 且 $L_{t_2\star_2}(\pi) \cap R_{t_2\star_2}(\pi') \neq \emptyset$。如果这种情况发生于 $t_1\star_1 < t_2\star_2$（分别地，$t_1\star_1 > t_2\star_2$），那么我们称 f 从左向右交叉 g 从左向右（分别地，从右向左）。当然，f 可能既从左向右交叉 g，也从右向左交叉。图 3.1.1 展示了一个示意图。

引理 3.1.4 假设 $f, g \in \Pi^{\uparrow}$不交叉，并令 $I_{\mathfrak{s}} = I(f)_{\mathfrak{s}} \cap I(g)_{\pm}$。如果存在$t\star \in I_{\mathfrak{s}}$，使得 $(f(t\star)\ t\star) \in L(g)$，那么 $f \lhd g$。如果存在 $t\star \in I_{\mathfrak{s}}$，使得 $(f(t\star)\ t\star) \in R(g)$，那么 $g \lhd f$。此外，在这两种情况下，$f \neq g$。

Proof: 我们先证明第一个断言：设 f、g 如给定，并假设 $(f(t\star)\ t\star) \in L(g)$。因此，$(f(t\star)\ t\star) \in L_{t\star}(g)$，所以 $L_{t\star}(g) = [-\infty, g(t\star))$，且 $f(t\star) < g(t\star)$。令 $\sigma = \sigma_f \vee \sigma_g$。考察 $s\bullet \geq \sigma+$ 的情形：对于某个 $s\bullet \geq \sigma-$，$f(\sigma\bullet) < g(s\bullet)$。那么，根据定义 3.1.1，有 $L_{s\bullet}(g) = [-\infty, g(s\bullet))$，且 $R_{s\bullet}(f) = (f(s\bullet)\ \infty]$，这意味着 $L(g) \cap R(f) \neq \emptyset$。于是，引理 3.1.3 意味着 $L(f) \cap R(g) = \emptyset$，由此引理 3.1.2 给出 $f \lhd g$。特别地，如果 $t\star \geq \sigma_f+$，那么 $f \lhd g$。

现在只需考虑 $t\star = \sigma_f-$ 的情形。根据上段所证明的内容，在此情形下，不失一般性地假设对所有 $s\bullet \geq \sigma+$，$f(s\bullet) \leq g(s\bullet)$。我们有 $f(\sigma_f-) < g(\sigma_f-)$，且 $L_{\sigma_f-}(g) = [-\infty, g(t\star))$. 若 $f(\sigma_f-) < f(\sigma_f+)$，则$R_{\sigma_f-}(f) = [-\infty, f(\sigma_f-))$，因此 $L(g) \cap R(f) \neq \emptyset$，所以此处同样可由引理 3.1.3 和引理 3.1.2 推出$f \lhd g$。否则，$f(\sigma_f+) \leq f(\sigma_f-)$，此时由定义 3.1.1 可立即得出$f \lhd g$。

关于情形 $(f(t\star)\ t\star) \in R(g)$ 的第二个断言由对称性可得（考虑关于原点反射的空间$\overline{\mathbb{R}}$）。最后，注意到形如 $(g(t\star)\ t\star) \in \mathbb{R}_{\mathrm{c}}^2$ 的点不是 $L(g)$ 或 $R(g)$ 的元素，即可得出 $f \neq g$。■

引理 3.1.5 以下结论成立：

1. 设 $f, g \in \Pi^{\uparrow}$，其中 $f \lhd g$，并记为 $\sigma = \sigma_f \vee \sigma_g$。以下情形恰有一种成立：

   (i) $f \subseteq g$ *or* $g \subseteq f$;
   (ii) $f(t\star) < g(t\star)$ *for some* $t\star \geq \sigma+$;
   (iii) $f(t\star) = g(t\star)$ *for all* $t\star \geq \sigma+$, $f(\sigma-) < f(\sigma+) = g(\sigma+) < g(\sigma-)$;
   (iv) $f(t\star) = g(t\star)$ *for all* $t\star \geq \sigma+$, $f(\sigma-) < g(\sigma-) \leq f(\sigma+) = g(\sigma+)$ *and* $\sigma_g < \sigma_f = \sigma$;
   (v) $f(t\star) = g(t\star)$ *for all* $t\star \geq \sigma+$, $f(\sigma+) = g(\sigma+) \leq f(\sigma-) < g(\sigma-)$ *and* $\sigma_f < \sigma_g = \sigma$.

   在情形 *(ii)-(v)* 中，我们有 $g \not\lhd f$。

2. 设 $f, g \in \Pi^{\uparrow}$。那么 $f \lhd g$ 且 $g \lhd f$，当且仅当 $f \subseteq g$ 或 $g \subseteq f$。

Proof: 我们先证明第一个陈述。显然，这五种情形两两不同。假设 (ii)、(iii)、(iv) 和 (v) 均不成立，并设法证明 (i) 成立。由于 (ii) 不成立，对于所有 $t\star \geq \sigma+$，我们有 $g(t\star) \leq f(t\star)$。又由于 $f \lhd g$，对于所有这样的 $t\star$，我们也有 $f(t\star) \leq g(t\star)$，因此实际上当 $t\star \geq \sigma+$ 时等号成立，特别是在 $t\star = \sigma+$ 处。由于 (iii) 不成立，$f(t-)$ 和$g(t-)$ 位于 $f(t+) = g(t+)$ 的同一侧（可以相切）。

先考虑它们都位于左侧的情况，即 $f(t-) \vee g(t-) \leq f(t+) = g(t+)$。根据 $\sigma_f = \sigma_g$、$\sigma_f < \sigma_g$ 或 $\sigma_g < \sigma_f$，我们分三种情况讨论。

- 如果 $\sigma_f = \sigma_g$，那么 $\sigma_f = \sigma_g = \sigma$，此时情况 (i) 成立。
- 若 $\sigma_f < \sigma_g$，则 $\sigma_g = \sigma$，因此我们有 $L_{\sigma-}(f) = [-\infty, f(\sigma-))$，并且 $R_{\sigma-}(g) = (g(\sigma-) \ \infty]$。由引理 3.1.2 可知 $L_{\sigma-}(f) \cap R_{\sigma-}(g) = \emptyset$，所以 $f(\sigma-) \le g(\sigma-)$。因此 $g \subseteq f$。
- 若 $\sigma_g < \sigma_f$，则 $\sigma_f = \sigma$，并且由于 (iv) 不出现，我们必有 $g(\sigma-) \le f(\sigma-)$，这意味着 $f \subseteq g$。

在这三种情形中，我们都有 (i) 出现。剩下要考虑的是 $f(\sigma-)$ 和 $g(\sigma-)$ 都位于 $f(\sigma+) = g(\sigma+)$ 的右侧的情形。对称地论证，将 (vi) 替换为 (v)，可知 (i) 也会出现。注意，在情形 (ii) 中，我们有 $L_{t\star}(f) \cap R_{t\star}(g) \neq \emptyset$。在情形 (iii)、(vi) 和 (v) 中，我们有 $L_{\sigma-}(g) \cap R_{\sigma-}(f) \neq \emptyset$。因此，在情形 (ii)–(v) 中，引理 3.1.2 给出 $g \not\lhd f$。对于本引理的第二个断言，逆向蕴含由定义 3.1.1 直接得出，而正向蕴含则由本引理第 1 部分得出。■

引理 3.1.5 的第 1 部分明确指出了路径在初始时刻可能发生跳跃所固有的困难。我们常会使用一些论证，特别关注路径的初始时刻。集合 $L(f)$ $R(g)$ 和关系 $\lhd$ 使我们无需依次讨论情形 (i)–(v)，便能做到这一点。

引理 3.1.6 设 $A \subseteq \Pi^{\uparrow}$ 不交叉。那么 $(A_{\max}, \lhd)$ 是一个全序空间。

PROOF: 回顾一下，$A_{\max}$ 已在 (2.5) 中定义。根据引理 3.1.3，所有的数对 $f, g \in A$ 都满足 $f \lhd g$ 或 $g \lhd f$；特别地，$A_{\max}$ 也满足这一点。从定义 3.1.1 可清楚看出，对所有 $f \in \Pi^{\uparrow}$，都有 $f \lhd f$，因此对所有 $f \in A_{\max}$ 也成立。若 $f, g \in A_{\max}$ 满足 $f \lhd g$ 和 $g \lhd f$，则引理 3.1.5 告诉我们，$f \subseteq g$ 或 $g \subseteq f$。根据极大性，这意味着 $f = g$。至此，我们已证明 $\lhd$ 是自反且反对称的，并且任意两个元素都可比较。剩下只需证明 $\lhd$ 是传递的。

设 $f, g, h \in A_{\max}$，其中 $f \lhd g$ 且 $g \lhd h$。若 $f = g$ 或 $g = h$，则显然有 $f \lhd h$。若 $f = h$，则有 $f \lhd g$ 且 $g \lhd h = f$，因此由引理 3.1.5 可得 $f \subseteq g$ 或 $g \subseteq f$；由极大性可知 $f = g$，进而也有 $f \lhd g$。因此不失一般性，我们可以假设 f, g, h 是 $\mathcal{A}_{\max}$ 中互不相同的元素。由引理 3.1.2 可得 $L(f) \cap R(g) = \emptyset$，且 $L(g) \cap R(h) = \emptyset$；我们必须证明 $L(f) \cap R(h)$ 也为空。

我们用矛盾法证明。假设 $(x, t\star) \in L(f) \cap R(h)$，这意味着$L_{t\star}(f) = [-\infty, f(t\star))$，$R_{t\star}(h) = (h(t\star) \ \infty]$ 且 $h(t\star) < x < f(t\star)$。先考虑 $t\star \ge \sigma_g-$ 的情形。若$g(t\star) \le x$，则 $g(t\star) \in L_{t\star}(f)$；由引理 3.1.4 可得 $g \lhd f$。此时，根据引理 3.1.5 第 2 部分及极大性可得 $g = f$，这与我们的假设矛盾。类似地，若 $g(t\star) \ge x$，则 $g(t\star) \in R_{t\star}(h)$；由引理 3.1.4 可得 $g \lhd h$，进而根据引理 3.1.5 第 2 部分及极大性可得 $g = h$，这又导致矛盾。

剩下的情况是 $t < \sigma_g$。此时 $\sigma_f \vee \sigma_h < \sigma_g$。因此，根据定义 3.1.1，对于所有 $s\star \ge \sigma_g+$，我们有 $f(s\star) \le g(s\star) \le h(s\star)$。将引理 3.1.5 的第 1 部分应用于 $f \lhd g$和 $g \lhd h$，并注意到它们是不同的极大路径（因此该引理的情形 (i) 不可能出现），可得存在某个 s、$s' \ge \sigma_g$，使得 $f(s-) < g(s-)$ 且 $g(s'-) < h(s'-)$。如果 $s = s' = \sigma_g$，那么 $f(s-) < g(s-) < h(s-)$。如果 $s > \sigma_g$，那么 $f(s-) < g(s-) \le h(s-)$；同理，如果 $s' > \sigma_g$，那么 $f(s'-) \le g(s'-) < h(s'-)$。在这三种情况下，我们都有 $u \ge \sigma$，使得 $f(u-) <h(u-)$。我们有 $\sigma_f \vee \sigma_h < \sigma_g \le s$，所以 $L_{u-}(h) = [-\infty, h(u-))$ 且 $R_{u-}(f) = (f(u-) \ \infty]$，也就是说，$L(h) \cap R(f) \neq \emptyset$。然而，此时 $L(f) \cap R(h)$ 和 $L(h) \cap R(f)$ 都非空；由引理 3.1.3 可知，f 和 h 交叉，这就产生了矛盾。■

引理 3.1.7 设 A 不交叉，且 B 不交叉，它们都是 $\Pi^{\uparrow}$的子集。假设$A \preceq B$。那么 $A \cup B$ 不交叉。

PROOF: 设 $f \in A$、 $g \in B$，并假设 $A \preceq B$。由于 $A \subseteq B_{\uparrow}$，存在 $h \in B_{\uparrow}$，使得 $f \subseteq h$。我们有 $g,\ h \in B$，且 B不交叉，因此 $\{g, h\}$ 不交叉，从而$\{f, h\}$ 也不交叉。结论得证。■

3.2 集合的偏序

在第 3.2 节中，我们用 $(E,\ \leq)$ 表示一个偏序集。现在回顾一些与偏序相关的标准记号。对于 $A \subseteq E$，我们记作 $A_{\leq} := \{e \in E :\ e \leq e' \text{ 对于某个 } e' \in A\}$，表示 A 的下集。注意 $(A_{\leq})_{\leq} = A_{\leq}$。$A$ 的上集 $A_{\geq}$ 定义方式相同，只是采用反向序。子集 $A \subseteq E$ 的一个极大元 是指满足以下条件的元素 $e \in A$: 不存在 $e' \in A$ 使得 $e < e'$。我们记作$A_{\max} = \{e \in A : e \text{ 是 } A\}$ 的极大元。极小元 的定义方式相同，只是采用反向序。与通常一样，如果 $e \leq e'$ 且 $e \neq e'$，我们记作 $e < e'$。

注 3.2.1 对于 $A \in \mathcal{K}(\Pi)$，我们已在 (2.5) 中说明，$A_{\max}$ 指的是 $(A,\ \subseteq)$ 的极大元。在 (2.6) 中，我们将集合 $A_{\uparrow}$定义为 $(\Pi^{\uparrow},\ \subseteq)$ 中 $A \subseteq \Pi^{\uparrow}$ 的下集。在注 3.3.4 中，我们将指出，当 A 是紧致空间时，$A \subseteq (A_{\max})_{\downarrow}$，也就是说，$A$ 中的每条路径都可以延伸至至少一个 $A_{\max}$ 中的元素。请注意，(2.15) 中的 $B_{\downarrow} \subseteq \Pi^{\downarrow}$ 是 $(\Pi^{\downarrow},\ \subseteq)$ 中 B 的下集。

下面的引理将 (2.7) 中引入的关系 $\preceq$ 纳入一个更广泛的框架。这是一个自然的概念，或许在其他地方已有研究，但我们未能找到相关文献。稍微放宽记号的用法，我们将在更抽象的情形下简要使用记号 $\preceq$。我们在第 2.3 节提到，$\preceq$ 在 Π 上的性质与路径覆盖空间的效率有关。在抽象情形下，这一概念的解释更为清晰。具体而言，在 $\leq$ 下，以下两种操作都会使集合 $A \subseteq E$ 严格增大：向 A 中插入一个新元素，使其（插入后）成为一个 $\leq$-极大元；移除一个已有元素，而该元素（移除前）不是 $\leq$-极大元。

引理 3.2.2 设$(E, \leq)$ 是一个偏序集。对于 $A, B \subseteq E$，记 $A \preceq B$ 表示$A_{\leq} \cap B \subseteq A \subseteq B_{\leq}$。那么，$\preceq$ 是 E的所有子集组成的集合上的一个偏序。

PROOF: 显然，$A \preceq A$。此外，$A \preceq B \preceq A$ 蕴含 $A \subseteq B_{\leq} \cap A \subseteq B$，并且根据对称性，同样有 $B \subseteq A$，因此要完成证明，我们必须证明关系 $\preceq$ 是传递的。关系 $A \preceq B \preceq C$ 表明

$$\text{(i) } A_{\leq} \cap B \subseteq A, \quad \text{(ii) } A \subseteq B_{\leq}, \quad \text{(iii) } B_{\leq} \cap C \subseteq B, \quad \text{(iv) } B \subseteq C_{\leq}.$$

应用这些事实之一时，我们会在相应的 $\subseteq$上方用上标注明所用的事实。这意味着 (v) $A_{\leq} \overset{\text{(ii)}}{\subseteq} B_{\leq}$，(vi) $B_{\leq} \overset{\text{(iv)}}{\subseteq} C_{\leq}$，以及 (vii) $B_{\leq} \cap C \overset{\text{(iii)}}{\subseteq} B_{\leq} \cap B$，由此可得

$$A_{\leq} \cap C \overset{\text{(v),(vii)}}{\subseteq} A_{\leq} \cap B \overset{\text{(i)}}{\subseteq} A \quad \text{and} \quad A \overset{\text{(ii)}}{\subseteq} B_{\leq} \overset{\text{(vi)}}{\subseteq} C_{\leq},$$

证明 $A \preceq C$。■

若集合 A 满足 $A = A_{\leq}$，则称其为递减集；若满足 $A = A_{\geq}$，则称其为递增集。如果 A 和 B 是递减集，那么 $A \preceq B$ 当且仅当 $A \subseteq B$。证明很简单，留给读者。

3.3 序与拓扑的相容性

现在我们来关注偏序与极限之间的相互作用。我们已经引入了若干与 c`adl`ag 路径相关的偏序：‘路径延拓’序 $\subseteq$ on Π、‘覆盖

效率'序 $\preceq$ on $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$，以及"位于左侧"关系 $\lhd$；引理 3.1.6 已证明，当 A 为闭集时，该关系在 $A_{\max}$上构成全序。一般而言，$\lhd$ 甚至不是偏序。鉴于这些情况，我们给出以下一般定义。

定义 3.3.1 设 $(E, \mathscr{T})$ 是一个拓扑空间。如果二元关系 $\leq$ 在 E 上是**相容的**，则称其为**相容的**，即 $\{(e,f) \in E^2 : e \leq f\}$ 是 E^2的闭子集（在积拓扑中）。稍微滥用记号，我们也将这一术语应用于度量空间 (E, d_E)，其中 d_E 是生成 E上拓扑的度量。

关键在于，相容性意味着：如果 $e_n \to e$ 和 $f_n \to f$ 满足 $e_n \leq f_n$，且 E中的所有元素都满足该条件，那么我们可以得出 $e \leq f$。我们希望在上面列出的三种情形中研究这一概念；但正如我们上面的评论所述，我们并不总是希望假设（尤其对于 $\lhd$）$(E, \trianglelefteq)$ 是偏序的。我们在这一方向上的第一个结果是否定的：

注 3.3.2 不难看出，$(\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})\ d_{\mathcal{K}(\Pi)}, \preceq)$ 并不相容。例如，设 $f(t\pm) = 0$，满足 $\sigma_f = 0$，并设 $g_n(t\pm) = 1/n$，满足 $\sigma_{g_n} = 1$。于是 $\{f\} \prec \{f, g_n\}$且 $\{f, g\} \prec \{f\}$。还有一些例子满足 $A_n \prec B_n$，但 (A_n) 和 (B_n) 的极限不可比较；我们把它留给读者作为练习。从纯粹抽象的角度来看，$\preceq$ 与在 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 中取极限之间的非平凡相互作用，是编织空间中有趣结构的主要来源。

引理 3.3.3 偏序 $\subseteq$ 与(Π, d_{Π})相容。

Proof: 命题 2.2.1 表明，d_{Π} 中的收敛等价于度量 $(f,g) \mapsto d_{\mathcal{K}((\mathbb{R}^2_{\leq})^2)}(H^{(2)}(f)\ H^{(2)}(g))$下的收敛。根据定义（见第 2.3 节），$f \subseteq g$表示$H^{(2)}(f) \subseteq H^{(2)}(g)$。有了这些事实，所述结果便可由引理 A.1.4 得出；该引理断言，集合包含偏序与豪斯多夫度量相容。■

注 3.3.4 利用引理 3.3.3，很容易验证：若 $A \in \mathcal{K}(\Pi)$，则对所有$f \in A$，都存在 $g \in A_{\max}$ 使得 $f \subseteq g$。从现在起，我们将反复使用这一事实，而不再回引本注。

现在我们来考察关系 $\lhd$，这需要更多的工作。下面的引理表明，$\lhd$ 与（$\Pi^{\uparrow}$，d_{Π}）之间的任何不相容，都必然涉及极限路径在初始时刻发生跳跃。读者应牢记诸如 $g_n(t\star) = \mathbb{1}\{t\star \geq \frac{1}{n}+\}$，
g $(t\star)$ $-$ $= \mathbb{1}\{t\star \geq 0+\}$, $f(t) = \mathbb{1}\{t\star = 0-\}$这样的例子，其中$\sigma_{g_n} = \frac{1}{n}$和 $\sigma_f = \sigma_g = 0$。注意，$f \lhd g_n$和 $g_n \to g$，但 f 和 g 在时间 0 朝相反方向相互跳过，从而交叉。这个例子表明，$\lhd$ 与（$\Pi^{\uparrow}$，d_{Π}）不相容。

引理 3.3.5 设 $f, g, f_n, g_n \in \Pi^{\uparrow}$满足 $f_n \to f$和 $g_n \to g$。记 $\sigma_n = \sigma_{f_n} \vee \sigma_{g_n}$和$\sigma = \sigma_f \vee \sigma_g$。假设对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $s\bullet \geq \sigma_n+$，$L_{s\bullet}(f_n) \cap R_{s\bullet}(g_n) = \emptyset$。那么，对所有 $s\bullet \geq \sigma+$，也有$L_{s\bullet}(f) \cap R_{s\bullet}(g) = \emptyset$。

Proof: 我们用反证法。假设对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $s\bullet \geq \sigma_n+$，都有 $L_{s\bullet}(f_n) \cap R_{s\bullet}(g_n) = \emptyset$，并且 $L_{t\star}(f) \cap R_{t\star}(g) \neq \emptyset$，其中 $t\star \geq \sigma+$。根据 f 和 g 的 c`adl`ag 性质，不失一般性，我们可以令 $t > \sigma$，并假设 f 和 g 在 t 处都连续。令 $\epsilon \in (0, t-\sigma)$，并取足够大的 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq N$，都有 $|(\sigma_{f_n} \vee \sigma_{g_n}) - \sigma| \leq \epsilon/2$。根据假设，$L_{s\bullet}(f_n) \cap R_{s\bullet}(g_n) = \emptyset$，可知对所有 $s\bullet \geq \sigma_n+$，都有 $f_n(s\bullet) \leq g_n(s\bullet)$；特别地，当 $N \geq n$ 时，这包括所有 $s\bullet \geq (t-\epsilon/2)+$。

令 $t_n\star_n \to t\star$。由引理 2.1.1 可知，对于所有充分大的 n，都有 $t_n\star_n \geq (\sigma \vee \sigma_n)+$；因此我们取一个子序列，并假设对所有 $n \in \mathbb{N}$ 这一结论都成立。由引理 A.2.3 以及 f 的连续性，g在 t 处的连续性，可得 $f_n(t_n\star_n) \to f(t\star)$ 且 $g_n(t_n\star_n) \to g(t\star)$。由于 $g(t\star) < f(t\star)$，我们得到存在 $\delta > 0$，使得 $g_n(t_n\star_n) \leq f_n(t_n\star_n) - \delta$。对于充分大的 n，有 $|t_n - t| < \epsilon/2$，这意味着 $t_n\star_n \geq (t - \epsilon/2)+$。这与上一段的结论矛盾。■

引理 3.3.6 关系 $\lhd$ 与 $(\Pi^{\updownarrow}, d_\Pi)$相容。此外，设 $f_n, g_n, f, g \in \Pi^{\updownarrow}$满足$f_n \to f$和 $g_n \to g$。若对每个 $n \in \mathbb{N}$，$\{f_n, g_n\}$ 都不交叉，则 $\{f, g\}$ 不交叉。

Proof: 第一个断言由引理 3.3.5 和 3.1.2 得出；注意，对于 $f, g \in \Pi^{\updownarrow}$，关系 $f \lhd g$等价于要求对所有 $s \in \mathbb{R}$，$L_{s+}(f) \cap R_{s+}(g) = \emptyset$。对于第二个断言，根据引理 3.1.5 的第 2 部分，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $f_n \lhd g_n$ 或 $f_n \lhd g_n$。这两种可能中至少有一种对无穷多个 n成立。由我们已经证明的内容可知，$f \lhd g$ 或 $g \lhd f$；由此，利用引理 3.1.3 可得 f 和 g 不交叉。■

引理 3.3.7 关系 $\lhd$ 与$(\Pi_c^{\uparrow}, d_\Pi)$相容。此外，设 $f_n, g_n, f, g \in \Pi_c^{\uparrow}$满足$f_n \to f$和 $g_n \to g$。若对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$\{f_n, g_n\}$ 都不交叉，则 $\{f, g\}$ 不交叉。

Proof: 第一个结论由引理 3.3.5 和 3.1.2 得出，注意到所有 $f \in \Pi_c^{\uparrow}$都满足 $f(\sigma_f-) = f(\sigma_f+)$，因此 $L_{\sigma_f-}(f) = R_{\sigma_f-}(f) = \emptyset$。第二个结论的证明与引理 3.3.6 的证明基本相同。■

本节其余部分讨论在什么条件下，对于半无限 c`adl`ag 路径，$\lhd$ 在极限$f_n \lhd g_n$ 中保持不变，其中 $f_n \to f$ 和 $g_n \to g$ 成立。我们将在引理 3.3.10 中看到，关键的（额外）条件是 $\{f, g\}$ 必须不交叉。根据引理 3.3.5，如果这样的极限中出现交叉，它必定发生在时间 $\sigma = \sigma_f \vee \sigma_g$。引入另一种关系会有所帮助，它量化了「$f$ 与 g 在 σ处交叉的程度」，同时 f 和 g 在其他方面不交叉。

定义 3.3.8 设 $\epsilon > 0$。设 f，$g \in \Pi^{\uparrow}$ 并记为 $\sigma = \sigma_f \vee \sigma_g$。若 $\sigma \in \mathbb{R}$且对所有 $s\bullet \geq \sigma+$都有 $L_{s\bullet}(f) \cap R_{s\bullet}(g) = \emptyset$，并且 $g(\sigma-) + \epsilon \leq f(\sigma-)$ 和 $f(\sigma+) + \epsilon \leq g(\sigma+)$，其中 $g(\sigma-) + \epsilon \leq g(\sigma+)$ 且 $f(\sigma+) + \epsilon \leq f(\sigma-)$，则记为 $f \blacktriangleleft_\epsilon g$。

引理 3.3.9 设 f、$g \in \Pi^{\uparrow}$，并设 $\sigma = \sigma_f \vee \sigma_g$。

1. 若对某个 $\epsilon > 0$ 有 $f \blacktriangleleft_\epsilon g$，则 f 与 g 交叉。
2. 假设 $f_n, g_n \in \Pi^{\uparrow}$ 满足 $f_n \to f$ 和 $g_n \to g$。若对所有 n 和 $f \not\lhd g$，都有 $f_n \lhd g_n$，则存在 $\epsilon > 0$ 使得 $f \blacktriangleleft_\epsilon g$。

Proof: 我们依次证明这两个断言。对于第一个，假设 $f \blacktriangleleft_\epsilon g$。那么 $g(\sigma-) < g(\sigma+)$，$f(\sigma+) < f(\sigma-)$，且 $g(\sigma-) < f(\sigma-)$。因此 $L_{\sigma-}(f) \cap R_{\sigma-}(g) \neq \emptyset$。由于 $f(\sigma+) < g(\sigma+)$，我们有 $L_{\sigma+}(g) \cap R_{\sigma+}(f) \neq \emptyset$。由引理 3.1.3，$f$和 g交叉。

对于第二个断言，设 $f_n \to f$, $g_n \to g$ 满足 $f_n \lhd g_n$ 和 $f \not\lhd g$。由引理 3.3.5，我们有 $L_{t\star}(f) \cap R_{t\star}(g) = \emptyset$ 以及 $f(t\star) \leq g(t\star)$，对所有 $t\star \geq \sigma+$均成立。由于 $f \not\lhd g$，由引理 3.1.2可知 $L(f) \cap R(g) \neq \emptyset$，这意味着 $L_{\sigma-}(f) \cap R_{\sigma-}(g) \neq \emptyset$。因此$L_{s-}(f) = [-\infty, f(\sigma-))$，$R_{\sigma-}(g) = (g(\sigma-) \ \infty]$满足 $g(\sigma-) < f(\sigma-)$。

如果 $g(\sigma+) \leq g(\sigma-)$，那么 $f(\sigma+) \leq g(\sigma+) \leq g(\sigma-) < f(\sigma-)$，这意味着 $f \lhd g$，因此这种情况不可能发生。同理，如果 $f(\sigma-) \leq f(\sigma+)$，那么 $g(\sigma-) < f(\sigma-) \leq f(\sigma+) \leq g(\sigma+)$，这意味着$f \lhd g$，因此这种情况也不可能发生。因此，$g(\sigma-) < g(\sigma+)$，且 $f(\sigma+) < f(\sigma-)$。

剩下只需证明 $f(\sigma+) < g(\sigma+)$。回想一下，我们有 $f(\sigma+) \le g(\sigma+)$，所以只需排除 $f(\sigma+) = g(\sigma+)$ 这种情况。我们将用反证法。于是我们假设$g(\sigma-) < g(\sigma+) = f(\sigma+) < f(\sigma-)$。我们的策略是证明 (f_n) 或 (g_n) 不满足紧致性，因为为了避免彼此交叉，路径 f_n 和 g_n 在 σ 附近的一个短时间区间内必定变得过于不规则。

Let

$$\kappa = \min\{g(\sigma+) - g(\sigma-), f(\sigma-) - f(\sigma+)\} \tag{3.2}$$

由 f 和 g 在 $\sigma+$ 处的右连续性，存在 $\delta > 0$ 使得

$$|f(t\star) - f(\sigma+)| \vee |g(t\star) - g(\sigma+)| \le \kappa/4 \qquad \text{for all } t\star \in [\sigma+, (\sigma+\delta)+]. \tag{3.3}$$

由引理 A.2.4，存在 $s_n\bullet_n$ 和 $t_n\star_n$，使得 $s_n \to \sigma$、$t_n \to \sigma$，且 $f_n(s_n\bullet_n) \to f(\sigma-)$ 和 $g_n(t_n\star_n) \to g(\sigma-)$。不失一般性（或者考虑交换 f_n 和 g_n 角色后的以下论证），我们可以假设对无限多个 $n \in \mathbb{N}$，$s_n\bullet_n \le t_n\star_n$ 成立，并令我们取一个满足对所有 n 都有 $s_n\bullet_n \le t_n\star_n$ 的子序列。特别地，$\sigma_n - \le s_n\bullet_n$。不失一般性，我们可以再取一个子序列，并假设对所有 $n \in \mathbb{N}$，$s_n\bullet_n \le t_n\star_n \le (\sigma + \delta/3)+$。令 $u = \sigma + \delta.$。由引理 A.2.4，存在 $u_n\diamond_n$ 使得 $u_n \to u$ 且 $f_n(u_n\diamond_n) \to f(u+)$。不失一般性，我们可以再取一个子序列，并假设 $u_n \ge \sigma + 2\delta/3$，这意味着

$$s_n\bullet_n \le t_n\star_n < u_n \diamond_n . \tag{3.4}$$

同样，不失一般性，我们可以进一步取一个子序列，并假设

$$\begin{aligned} |f_n(s_n\bullet_n) - f(\sigma-)| &\le \kappa/4 \\ |g_n(t_n\star_n) - g(\sigma-)| &\le \kappa/4 \\ |f_n(u_n\diamond_n) - f(u+)| &\le \kappa/4 \end{aligned}$$

对所有 n 均成立。由上述方程、(3.2) 和 (3.3) 可得

$$f_n(s_n\bullet_n) \ge f(\sigma+) + 3\kappa/4 \tag{3.5}$$

$$g_n(t_n\star_n) \le f(\sigma+) - 3\kappa/4 \tag{3.6}$$

$$|f_n(u_n\diamond_n) - f(\sigma+)| \le \kappa/2 \tag{3.7}$$

对所有 n 均成立。

现在我们需要简要分两种情况讨论。若 $g_n(t_n-) < g_n(t_n+)$，则 $L_{t_n-}(g_n) = [-\infty, g_n(t_n-))$，由引理 3.1.4 可得 $f_n(t_n-) \le g_n(t_n-) < g_n(t_n+)$。或者，若 $g_n(t_n+) \le g_n(t_n-)$，则有 $f_n(t_n+) \le g_n(t_n+) < g_n(t_n-)$。无论哪种情况，都存在 $\circ \in \{-, +\}$，使得$f_n(t_n\circ_n) \le g_n(t_n-) \wedge g_n(t_n+) \le g_n(t_n\star_n)$。因此，由 (3.6) 可得

$$f_n(t_n\circ_n) \le f(\sigma+) - 3\kappa/4. \tag{3.8}$$

我们还需要简要分两种情况讨论。若 $\star_n = -$，则 (3.4) 给出 $s_n < t_n$，因此显然有 $s_n\bullet_n \le t_n\circ_n \le u_n\diamond_n$。或者，若 $\star_n = +$，则有 $f_n(t_n\star_n) \le g_n(t_n\star_n)$；由 (3.5) 和 (3.6) 可知 $s_n\bullet_n \ne t_n\star_n$。因此，由 (3.4) 可得 $s_n\bullet_n \le t_n-$，所以在这种情况下我们也有

$$s_n\bullet_n \le t_n\circ_n < u_n \diamond_n . \tag{3.9}$$

由命题 A.2.1 以及 (3.5)、(3.7)、(3.8)、(3.9)，我们得到序列（f_n）不是相对紧的。这是一个矛盾，从而证明完毕。■

引理 3.3.10 如果 $A \subseteq \Pi^\uparrow$ 是不交叉且闭的，则关系 $\lhd$ 与$(A、 d_\Pi)$相容。此外，设 $f_n \to f$和 $g_n \to g$，其中对所有n， f、 g、 f_n、 $g_n \in \Pi^\uparrow$和 $f_n \lhd g_n$。如果 f 和 g 彼此不交叉，则 $f \lhd g$。

Proof: 注意，第二个断言比第一个更强。第二个断言允许序列 (f_n) 中的路径彼此交叉，也允许序列 (g_n) 中的路径彼此交叉，只要求对每个 $n \in \mathbb{N}$， $f_n \lhd g_n$。我们将证明第二个断言。设 $f_n \to f$ 和 $g_n \to g$，其中 f， g， f_n， $g_n \in \Pi^\uparrow$，并且对所有 n 都有 $f_n \lhd g_n$。根据引理 3.3.9（两部分），若 $f \not\lhd g$，则 f 和 g 交叉。结论得证。■

我们在定义 3.1.1 下方指出，关系 $\lhd$ （一般而言）不是偏序。在引理 3.1.6 中，我们证明了只要 $A \subseteq \Pi^\uparrow$ 不交叉， $\lhd$ 就是 $A_{\max}$ 上的全序。然而，即使 A 是 $\Pi^\uparrow$ 的闭子集，集合 $A_{\max}$ 通常也不是 $\Pi^\uparrow$ 的闭子集。例如，考虑 A 包含路径 $f(t) = k$（对 $k \in [0,1]$ 和 $t \geq \sigma_f = 0$）以及单条路径 $g(t) = 0$ （对 $t \geq \sigma_g = -1$）的情形。因此，引理 3.1.6 和引理 3.3.10 对我们都很重要，但同时使用它们时必须谨慎。以下技术引理将在第 5.1 节中用于帮助证明 $\mathscr{W}_{\det}$ 是可测的。

引理 3.3.11 设 $\epsilon > 0$。假设 $f_n \to f$和 $g_n \to g$，其中 f、 g、 f_n、 $g_n \in \Pi^\uparrow$，且 $\sigma_f \vee \sigma_g \in \mathbb{R}$。如果对所有 n 都有 $f_n \blacktriangleleft_\epsilon g_n$，那么 $f \blacktriangleleft_\epsilon g$。

Proof: 我们指出，条件 $\sigma_f \vee \sigma_g \in \mathbb{R}$ 是必要的；事实上，正是它阻止了$\blacktriangleleft_\epsilon$与（$\Pi^\uparrow$、 d_Π）相容。设 f、 g、 f_n、 $g_n \in \Pi^\uparrow$如上所给，并记 $\sigma = \sigma_f \vee \sigma_g$。假设对所有 n都有 $f_n \blacktriangleleft_\epsilon g_n$。由引理 3.3.5 可得，对所有 $s\bullet \geq \sigma+$， $L_{s\bullet}(f) \cap R_{s\bullet}(g) = \emptyset$。注意到 $\sigma_n \to s$，对于所有充分大的 n，都有 $\sigma_n \in \mathbb{R}$。取一个子序列，并假设对所有 n都有 $\sigma_n \in \mathbb{R}$。

我们有 $g_n(\sigma_n-) + \epsilon \leq g_n(\sigma_n+)$。由引理 A.2.2 可得 $g(\sigma-) + \epsilon \leq g(\sigma+)$。类似地，由 $f_n(\sigma_n+) + \epsilon \leq f_n(\sigma_n-)$ 可得 $f(\sigma+) + \epsilon \leq f(\sigma-)$。由 $g_n(\sigma_n-) + \epsilon \leq f_n(\sigma_n-)$ 得到

$$\liminf_{n\to\infty} g_n(\sigma_n-) + \epsilon \leq \limsup_{n\to\infty} f_n(\sigma_n-). \tag{3.10}$$

由引理 A.2.2 可知 $\liminf_{n\to\infty} g_n(\sigma_n-)$ 介于 $g(\sigma-)$ 和 $g(\sigma+)$ 之间。我们已经证明 $g(\sigma-) < g(\sigma+)$，因此实际上 $g(\sigma-) \leq \liminf_{n\to\infty} g_n(\sigma_n-)$。类似地，引理 A.2.2 表明 $\limsup_{n\to\infty} f_n(\sigma_n-)$ 介于 $f(\sigma-)$ 和 $f(\sigma+)$ 之间。我们已经证明 $f(\sigma+) < f(\sigma-)$，因此实际上 $\limsup_{n\to\infty} f_n(\sigma_n-) \leq f(\sigma-)$。由这些事实和 (3.10) 得到 $g(\sigma-) + \epsilon \leq f(\sigma-)$。

根据紧致性和引理 A.2.3，序列 $(f_n(\sigma_n+))$ 在 $f(\sigma-)$ 和 $f(\sigma+)$ 之间有一个极限点 a。我们已证明， f 在 σ 处向左跳跃，因此 $f(\sigma+) \leq a$。类似地，$(g_n(\sigma_n+))$ 在 $g(\sigma-)$ 和 $g(\sigma+)$ 之间有一个极限点 b。我们已证明， g 在 σ 处向右跳跃，因此 $b \leq g(\sigma+)$。利用 $f_n(\sigma_n) + \epsilon \leq g_n(\sigma_n+)$，我们得到 $a + \epsilon \leq b$，从而 $f(\sigma+) + \epsilon \leq g(\sigma+)$。证明完毕。■

4 确定性编织

回顾在 (2.11) 中引入的空间 $\mathscr{W}_{\det}$。 $\mathscr{W}_{\det}$ 中的一个元素称为确定性编织，根据定义，它是 $\mathcal{K}(\Pi^\uparrow)$ 中一个具有遍历性且不交叉的确定性元素。本节研究确定性编织，不过有些结果的证明会涉及概率。本节中的结果将用于证明我们的主要结果，见第 5 节。我们的长期策略是确定关于确定性编织的

内部结构一般可以得出哪些结论，将这些信息转化为关于 $\mathscr{W}_{\mathrm{det}}$ 的几何结构的陈述，最后再将这类结果提升到 $\mathscr{W}$ 中。

定义 2.4.1 将网和流分别定义为编织空间 $\mathscr{W}$ under $\preceq_{\mathrm{d}}$ 中的极小元和极大元。回顾一下，$\mathscr{W}$ 的元素在形式上是 $\mathcal{K}(\Pi)$ 上的概率测度。我们将 $\mathscr{W}_{\mathrm{det}}$ 视为由点质量测度构成的 $\mathscr{W}$ 子集。对于确定性编织，定义 2.4.1 的含义并非一目了然：$(\mathscr{W}_{\mathrm{det}}, \preceq)$ 的极值点未必是 $(\mathscr{W}, \preceq_{\mathrm{d}})$ 的极值点，反之亦然。我们将在引理 5.2.4 中解决这些困难。该引理表明，随机编织 $\mathcal{W}$ 是网（分别是流），当且仅当 $\mathbb{P}[\mathcal{W}$ 在 $(\mathcal{W}_{\mathrm{det}}, \preceq)] = 1$ 中几乎必然极小（分别是极大）。引理 5.2.4 的证明将依赖于第 4 节中建立的关键结果。因此，在证明引理 5.2.4 之前，我们将避免把 $\mathcal{K}(\Pi)$ 中任何确定性或随机元素称为“网”或“流”。

不过，从现在开始，我们将使用式 (2.12) 和 (2.13) 中定义的确定性映射 $A \mapsto$ 网$_D(A)$ 和 $A \mapsto$ 流(A)。这些映射在 $\mathscr{W}_{\mathrm{det}}$ 上的含义是显而易见的；在前一种情形中，$D \subseteq \mathbb{R}^2$ 也被视为确定性的。

4.1 编织与不交叉性质

编织提供了一种结构，使得 c`adl`ag 路径在其中的表现远好于在 $\mathcal{K}(\Pi)$ 的任意子集中。我们指出，若 $f \in \Pi^{\uparrow}$ 不与编织 $\mathcal{A}$ 交叉，那么显然 $\mathcal{A} \cup \{f\}$ 也是一种编织。结合这两个事实，在一定程度上，编织能够控制不与其交叉的路径的行为。本节将开始探讨这一思想。我们先介绍一个关键的技术引理，它用到了编织的所有定义性质：紧致性、遍历性和不交叉性质。该引理刻画了这样一种情形：我们用较早时刻开始的路径来逼近一次跳跃的中间部分。

引理 4.1.1 设 $\mathcal{A}$ 是一个确定性编织，且 $f \in \Pi^{\uparrow}$ 是一条不与 $\mathcal{A}$交叉的路径。

1. 假设 $f(t-) < f(t+)$。那么存在 $h \in \mathcal{A}$，使得 $h(t-) \le f(t-)$ 且 $f \lhd h$。
2. 假设 $f(t+) < f(t-)$。那么存在 $h \in \mathcal{A}$，使得 $f(t-) \le h(t-)$ 且 $h \lhd f$。

Proof: 第二个陈述可通过考虑关于原点反射的空间由第一个陈述推出（为清晰起见，这里将其完整写出），因此我们只证明第一个陈述。假设$f(t-) < f(t+)$。现在我们将说明，只需证明

$$\text{for any } x \in (f(t-), f(t+) \text{ there exists } h \in \mathcal{A} \text{ such that } h(t-) \le f(t-) \text{ and } f \lhd h. \tag{4.1}$$

有了 (4.1)，记 $h^{(x)}$ 为由 x生成的路径 h，并注意到 $\mathcal{A}$ 的紧致性蕴含存在一个子列极限 $h^{(x)} \to h'$，当 $x \searrow f(t-)$ 时取得。由于 $f \lhd h^{(x)}$，我们有$h^{(x)}(t-) \le f(t-) < f(t+) \le h^{(x)}(t+)$，因此引理 A.2.2 保证 $h'(t-) \le f(t-)$。引理 3.3.10 保证 $f \lhd h'$。因此 h' 具有所需的性质。

还需证明 (4.1)。设 $x' \in \mathbb{R}$ 使得 $f(t-) < x < f(t+)$，并假设 f 与 $\mathcal{A}$ 不交叉。设 $(a_n) \subseteq (0, \infty)$ 满足 $a_n \to 0$。设 $z_n = (x, t - a_n)$，并由普遍性可知 $h_n \in \mathcal{A}(z_n)$。由 $\mathcal{A}$ 的紧致性，取一个子序列，不失一般性地假设 $h_n \to h \in \mathcal{A}$。由引理 A.2.3 可得

$$h(t-) \wedge h(t+) \le x \le h(t-) \vee h(t+). \tag{4.2}$$

我们有 f 和 $h_n \in \mathcal{A}$ 不交叉。根据引理 3.1.3，这意味着 $f \lhd h_n$ 或 $h_n \lhd f$。现在我们分两种情况讨论。

首先考虑 $f \lhd h_n$ 对无穷多个 $n \in \mathbb{N}$成立的情形。于是引理 3.3.10 表明 $f \lhd h$。在这种情况下， $f(t+) \leq h(t+)$，因此 $x < h(t+)$，由 (4.2) 可推出 $h(t-) \leq x'$。所以 $h(t-) \leq y$，我们便证明了 h所需的全部性质。

如果上述情况没有发生，那么存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对于所有 $n \geq N$，都有 $h_n \lhd f$。不失一般性，我们可以取一个子序列，并假设对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $h_n \lhd f$。由于$\sigma_{h_m} < t$且 $L_{t-}(f) = [-\infty, f(t-))$，引理 3.1.4 蕴含 $h_n(t-) \leq f(t-)$。此外，我们还有 $h_n((t-a_n)-) \vee h_n((t-a_n)+) \geq x$。显然，对于所有 n，都有 $(t-a_n)\pm < t-$。因此，由引理 A.2.3 可得 $h(t-) \geq x > f(t-) \geq h(t+)$，而由于 $f(t-) < f(t+)$，这意味着 f与 h交叉（根据定义 2.3.1）。这是一个矛盾，因此实际上这种情况不会发生。证明完毕。■

引理 4.1.2 设 $\mathcal{A}$ 是一个确定性编织。设 f、$h \in \Pi^{\uparrow}$ 满足 $\mathcal{A} \cup \{f\}$ 不交叉，且 $\mathcal{A} \cup \{h\}$ 不交叉。设 $\sigma = \sigma_f \vee \sigma_h$。假设对某个 $t\star \geq \sigma+$，有 $f(t\star) < h(t\star)$。那么对所有 $\epsilon > 0$，都存在 $g \in \mathcal{A}$，使得 $\sigma_g \leq t + \epsilon$，且 $f \lhd g$ 和 $g \lhd h$。

此外，我们可以选择 g，使得 $g \not\subseteq f$、$f \not\subseteq g$、$g \not\subseteq h$ 和 $h \not\subseteq g$。

Proof: 根据 f 和 h 的 càdlàg 性质，对于任意 $\epsilon > 0$，存在 t'，使得 $|t - t'| < \epsilon/2$，且 $f(t'+) < h(t'+)$。因此，我们可以选择足够小的 $\epsilon > 0$，使得对所有 $s \in [t', t' + \epsilon/2)$，都有 $f(s\pm) < h(s\pm)$，其中 $|t - t'| < \epsilon/2$ 且 $t' > \sigma$。根据 f 和 h 的 càdlàg 性质，选取 $s \in (t', t' + \epsilon)$，使得 f 和 h 在 s 处均连续。注意 $s \leq t + \epsilon$。回顾一下，当 f 在 s 处连续时，我们记作 $f(s) = f(s\pm)$。令 $x \in (f(s)\ h(s))$，并利用 $\mathcal{A}$ 的普遍性，令 $g \in \mathcal{A}(x, s)$。因此， $g(s-) \wedge g(s+) \leq x \leq g(s-) \vee g(s+)$。由于 f 在 s 处连续，我们有 $L_{s-}(f) = L_{s+}(f) = [-\infty, f(s))$。注意， $f(s) < h(s)$ 意味着 $g(s-)$ 和 $g(s+)$ 中至少有一个严格大于 $f(t\star)$。因此，由引理 3.1.4 可得 $f \lhd g$；又由于 $\sigma_f < s$，这意味着 $f \not\subseteq g$ 和 $g \not\subseteq f$。对称地（将空间关于原点反射）可得 $g \lhd h$，其中 $g \not\subseteq h$ 且 $h \not\subseteq g$。■

引理 4.1.3 设 $\mathcal{A} \subseteq \Pi^{\uparrow}$ 是一个确定性编织。若 B、$C \subseteq \Pi^{\uparrow}$ 满足 $\mathcal{A} \cup B$ 不交叉，且 $\mathcal{A} \cup C$ 不交叉，则 $\mathcal{A} \cup B \cup C$ 不交叉。

Proof: 注意，我们的条件蕴含 B 不交叉，且 C 不交叉。只需证明 $\mathcal{B} = \{f\}$ 和 $\mathcal{C} = \{h\}$ 为单元素集合的情形，一般情形可立即由此推出。为此，设 f，$g \in \Pi^{\uparrow}$ 满足 $\mathcal{A} \cup \{f\}$ 不交叉且 $\mathcal{A} \cup \{h\}$ 不交叉。

我们将用矛盾法进行论证。假设 $\mathcal{A} \cup \{f\} \cup \{h\}$ 中有一对路径交叉。根据我们的假设，唯一可能的情况是 f 与 h 交叉。由引理 3.1，3 f 与 h 交叉，当且仅当 $L(g) \cap R(f) \neq \emptyset$ 且 $L(f) \cap R(h) \neq \emptyset$。因此，存在 $t\star$， $s\bullet \in \mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$ 使得 $t\star < s\bullet$，其中

$$L_{t\star}(h) = [-\infty, h(t\star)), \qquad R_{t\star}(f) = (f(t\star), \infty],$$
$$L_{s\bullet}(f) = [-\infty, f(s\bullet)), \qquad R_{s\bullet}(h) = (h(s\bullet), \infty],$$

$f(t\star) < h(t\star)$ 和 $h(s\bullet) < f(s\bullet)$。设 $\sigma = \sigma_f \vee \sigma_h$。

首先，考虑 $t\star \geq \sigma+$ 的情形。在这种情况下，由引理 4.1.2 可知，存在 $g \in \mathcal{A}$，使得 $f \lhd g$ 和 $g \lhd h$，其中 $\sigma_g < s\bullet$。由于 $s\bullet \geq \sigma+$，这意味着 $f(s\bullet) \leq g(s\bullet) \leq h(s\bullet)$，这与 $h(s\bullet) < f(s\bullet)$ 矛盾。

还需考虑 $t\star = \sigma-$ 的情形。在这种情况下，$\sigma_f = \sigma$ 或 $\sigma_h = \sigma$。不妨设（或者考虑关于原点反射后的空间）$\sigma_f = \sigma$。由于$R_{\sigma-} = (f(\sigma-)\ \infty]$且$\sigma_f = \sigma$，由 (3.1) 可得 $f(\sigma-) < f(\sigma+)$。引理 4.1.1 表明

存在 $g \in \mathcal{A}$，使得 $f \lhd g$ 且 $g(\sigma-) < f(\sigma+)$。因此 $g(\sigma-) < h(\sigma-)$。如果$\sigma_h < \sigma$，那么由引理 3.1.4 可立即推出 $g \lhd h$。另一方面，如果 $\sigma_h = s$，那么$L_{t\star}(h) = [-\infty, h(\sigma-)$，所以在这种情况下我们同样有 $g \lhd h$。现在我们有 $f \lhd g$ 且 $g \lhd h$。由于$s\bullet \geq \sigma+$，这意味着 $f(s\bullet) \leq g(s\bullet) \leq h(s\bullet)$，这与 $h(s\bullet) < f(s\bullet)$ 相矛盾。■

引理 4.1.4 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 是确定性编织，并假设 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ 不交叉。设 $C \subseteq \Pi^{\updownarrow}$ 不交叉。那么 $\mathcal{A} \cup C$ 不交叉，当且仅当 $\mathcal{B} \cup C$ 不交叉。

Proof: 只需考虑 $C = \{f\}$ 的情形，其中 $f \in \Pi^{\updownarrow}$，一般情形可立即由此推出。假设 $f \in \Pi^{\updownarrow}$ 不与 $\mathcal{A}$ 交叉。设 $b \in \mathcal{B}$。根据假设，b 不与 $\mathcal{A}$ 交叉。由引理 4.1.3 可知，$\mathcal{A} \cup \{b\} \cup \{f\}$ 不交叉，因此特别是 f 和 b 彼此不交叉。由于 $b \in \mathcal{B}$ 是任意的，f 不与 $\mathcal{B}$ 交叉。■

在引理 4.1.3 的证明中，我们看到引理 4.1.2 是引理 4.1.1 的自然对应。其基本原理如下：若两条路径 f 和 g 满足 $f \not\subseteq g$ 和 $g \not\subseteq f$，那么或者：$f(t+) \neq g(t+)$，对某个 t 成立；或者至少有一条路径 f 和 g 在初始时刻发生了跳跃，且跳跃方向背离另一条路径。引理 4.1.2 用于前一种情形，引理 4.1.1 用于后一种情形，由此得到一条位于 f 和 g 之间的路径 h。这一主题的变体将在若干后续结果的证明中出现，包括下一个引理。

下面的引理针对不与编织 $\mathcal{A}$ 交叉的路径 $f, h \in \Pi^{\uparrow}$ 来陈述，但在这个阶段，或许最好通过考虑特殊情形 $f, h \in \mathcal{A}_{\max}$ 来理解。注意，对于极大路径，条件 $f \not\subseteq h$ and $h \not\subseteq f$ 只要求 $f \neq h$。在这种情况下，引理 4.1.5 提供了有关 $(\mathcal{A}_{\max}, \lhd)$ 的几何结构的一条关键信息，即在全序中，任意两个不同的点之间总会有另一个严格位于其间的点。这个引理将是第 4.3 节中的一项关键工具。

引理 4.1.5 设 $\mathcal{A}$ 是一个确定性编织。假设 $f, h \in \Pi^{\uparrow}$ 不与 $\mathcal{A}$ 交叉，且 $f \lhd h$,$f \not\subseteq h$ 和 $h \not\subseteq f$。那么存在 $g \in \mathcal{A}_{\max}$，使得 $f \lhd g$ 和 $g \lhd h$，并且 $f \not\subseteq g$, $g \not\subseteq f$,$g \not\subseteq h$, $h \not\subseteq g$。

Proof: 令 f, h 如引理所述，并设 $\sigma = \sigma_f \vee \sigma_h$。根据引理 3.1.5 的第 2 部分，我们对 f 和 h 的条件蕴含 $h \not\lhd f$。因此，由引理 3.1.2 可得 $L(h) \cap R(f) \neq \emptyset$。特别地，存在 $t\star \geq \sigma-$ 使得 $L_{t\star}(h) = [-\infty, h(t\star))$ 且 $R_{t\star}(f) = (f(t\star) \ \infty]$ with$f(t\star) < h(t\star)$。

首先考虑 $t\star \geq \sigma+$的情形。此时，引理 4.1.2 蕴含 $g \in \mathcal{A}$ 的存在，其中 $f \lhd g$ 且$g \lhd f$，此外还有 $f \not\subseteq g$, $g \not\subseteq f$, $g \not\subseteq h$和 $h \not\subseteq g$。不失一般性，可取 $g \in \mathcal{A}_{\max}$，这就完成了此情形的证明。

还需考虑 $t\star = \sigma-$的情况。在此情况下，我们有$\sigma = \sigma_f$ 或 $\sigma = \sigma_h$。不妨设$\sigma = s_f$（或考虑关于原点反射的空间）。由于$R_{\sigma-}(f)$ 非空，这意味着 $f(t-) < f(t+)$。

注记 4.1.6 我们简要说明一下证明余下部分所采用的策略。尽管f 在 σ处跳跃，但引理 4.1.1 并不适用于这里，因为（若用它来构造 g）它允许出现 $g \subseteq f$的可能性。因此，我们需要采用比证明引理 4.1.1 时更精细的逼近方案；不过，我们在这里寻找的路径并非极限路径，而是某条与极限足够接近的路径。我们需要一条具备若干不同性质的路径。为找到它，我们将反复证明：某一所需性质至多会对有限多个 n不成立；然后（不失一般性）取一个子序列，使该性质对其中所有 n都成立。

由于 $t\star = \sigma-$ 我们有 $f(\sigma-) < h(\sigma-)$，因此

$$f(\sigma-) \ < \ f(\sigma+) \wedge h(\sigma-). \tag{4.3}$$

令 $\epsilon > 0$ 满足 $f(\sigma-) + 2\epsilon \leq f(\sigma+) \wedge h(\sigma-)$，并令 $(a_n) \subseteq (0, \infty)$ 满足 $a_n \to 0$。令 $(y, s_n) = (f(\sigma-) + \epsilon, \sigma - a_n)$，并注意到 $(y, s_n) \to (y, \sigma)$，其中 $y = f(\sigma-) + \epsilon$。由 $\mathcal{A}$ 的普遍性，令 $g_n \in \mathcal{A}((y, s_n))$，使得

$$g_n(s_n-) \wedge g_n(s_n+) \ \leq \ y \ \leq \ g_n(s_n-) \vee g_n(s_n+). \tag{4.4}$$

不妨设 $g_n \in \mathcal{A}_{\max}$。由 $\mathcal{A}$ 的紧致性，我们可以取一个子序列，并设 $g_n \to g \in \mathcal{A}$。

考虑对无穷多个 n，$f \subseteq g_n$ 是否成立。对于这样的 n，由 (4.3) 注意到 f 在 σ 处向右跳跃，我们有 $g_n(\sigma-) \leq f(\sigma-)$。由 (4.4) 得到 $g_n(s_n-) \vee g_n(s_n+) \geq y = f(\sigma-) + \epsilon$，并且 $s_n \pm < \sigma-$ 且 $s_n \to \sigma$，因此根据引理 A.2.3，g 在 σ 处向左跳跃，从 $f(\sigma-) + \epsilon$ 的右侧跳至 $f(\epsilon)$ 的左侧。这将使 f 与 $g \in \mathcal{A}$ 交叉，从而产生矛盾。因此，实际上 $f \subseteq g_n$ 仅对有限多个 n 成立，所以我们可以取一个子序列，并设对所有 n 都有 $f \nsubseteq g_n$ 。如果 $g_n \subseteq f$ ，那么我们将有 $\sigma_{g_n} \geq \sigma_f$；但由于 $\sigma_{g_n} \leq s_n < \sigma_f$，情况并非如此。因此，对所有 n，我们还有 $g_n \nsubseteq f$。

考虑是否对无穷多个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $g_n \lhd f$ 。对于这样的 n，注意到我们有 $f \nsubseteq g_n$ 和 $g_n \nsubseteq f$，由引理 3.1.5 的第 2 部分可得 $f \not\lhd g_n$。因此，对于这样的 n，利用 $R_{\sigma-}(f) = (f(\sigma-) \infty]$，由引理 3.1.4 必有 $g_n(\sigma-) \leq f(\sigma-)$。由 (4.4) 可得 $y \leq g_n(s_n-) \vee g_n(\sigma_n+)$，其中 $s_n < \sigma$ 且 $s_n \to \sigma$。由引理 A.2.3，沿着这样的 n 的一个子序列取极限，将得到 $g(\sigma-) \geq y > f(\sigma-) \geq g(\sigma+)$，在这种情况下，$f$ 和 g 会交叉（在时间 σ彼此向相反方向跳过对方）。这不可能发生。因此，事实上只有有限多个 n 满足 $g_n \lhd f$。由引理 3.1.3，对所有 n ，我们都有 $f \lhd g_n$ 或 $g_n \lhd f$。因此，我们可以转而考察一个子序列，并假设对所有 n 都有 $f \lhd g_n$ 。

现在我们有 $f \lhd g_n$、$f \nsubseteq g_n$ 和 $g_n \nsubseteq f$。接下来，我们将证明 g_n在 h下的性质。这里分两种情况讨论，取决于 $h(\sigma-) \leq h(\sigma+)$还是 $h(\sigma+) < h(\sigma-)$。

- 首先，考虑 $h(\sigma+) < h(\sigma-)$的情况。

  考虑对于无穷多个 n，是否有 $h(\sigma-) \leq g_n(\sigma-)$。由（4.4）可知，$g_n(s_n-) \wedge g_n(s_n+) \leq y$ 以及 $s_n \pm < \sigma-$ 满足 $s_n \to \sigma$，因此根据引理 A.2.3，我们得到 g 在 σ处向右跳跃，从 y 左侧跳到 $h(s-)$ 右侧。这意味着 $g \in \mathcal{A}$ 与 h交叉，产生了矛盾。因此，我们可以取一个子序列，并假设对所有 n，都有 $g_n(\sigma-) < h(\sigma-)$。

  我们有 $\sigma_g \leq s_n < \sigma$ 和 $\sigma_h \leq \sigma$。如果 $h \subseteq g_n$ ，那么注意到 h 在 σ 处向左跳跃，我们将有 $h_n(\sigma-) \leq g_n(\sigma-)$，这就产生了矛盾。因此， $h \nsubseteq g_n$。类似地，如果 $g_n \subseteq h$ ，那么 $\sigma_h \leq \sigma_g < \sigma$，所以我们将有 $g_n(\sigma-) = h_n(\sigma-)$，这就产生了矛盾，因此 $g_n \nsubseteq h$。

  考虑 $h \lhd g_n$ 的情况。我们已经看到 $h \nsubseteq g_n$ 和 $g_n \nsubseteq h$，因此根据引理 3.1.5 的第 2 部分，有 $g_n \not\lhd h$。我们有 $L_{\sigma-}(h) = [-\infty, h(\sigma-))$，所以引理 3.1.4 表明 $h(\sigma-) \leq g_n(\sigma-)$，这同样不可能发生。因此实际上 $g_n \lhd h$。

- 其次，考虑 $h(\sigma-)$ 是否 $\leq h(\sigma+)$。

  我们的假设 $f \lhd h$ 意味着，对所有 $s\bullet \geq \sigma+$，都有 $f(\sigma\bullet) \leq h(s\bullet)$；因此，根据我们已经证明的结果（在 $t\star \geq \sigma+$ 的情形下），不失一般性地，我们可以假设对所有 $s\bullet \geq \sigma+$，都有$f(s\bullet) = h(s\bullet)$。利用 $h(\sigma-) \leq h(\sigma+)$，我们必然有 $\sigma_h < \sigma$，否则根据 (4.3) 就会得到 $h \subseteq f$。

由 h 在 $\sigma-$ 处的左连续性可知，存在某个 $\delta>0$，使得对所有 $s\bullet\in[\sigma-,(\sigma-\delta)+]$，都有 $h(s\bullet)\geq h(\sigma-)-\epsilon/2$。由 (4.4) 可知，对所有充分大的 n，都有 $s_n\in(\sigma-\delta,\ s)$，并且

$$g_n(s_n-)\wedge g_n(s_n+)\ \leq\ y\ <\ h(\sigma-)-\epsilon/2\ \leq\ h(s_n\pm). \tag{4.5}$$

由此可立即得出，对于这样的 n、$g_n\not\subseteq h$ 和 $h\not\subseteq g_n$。当 n 足够大时，我们还有 $s_n>\sigma_h$，此时 (4.5) 给出 $g_n(s_n-)\in L_{s_n-}(h)$ 或 $g_n(s_n+)\in L_{s_n+}(h)$。因此，引理 3.1.4 给出 $g_n\lhd h$。于是我们可以转而取一个子序列，并假设对于所有 n，都有 $g_n\not\subseteq h$、$h\not\subseteq g_n$ 和 $g_n\lhd h$。

在这两种情况下，我们现在都已证明：对于所取子序列中的所有 g_n，都有 $f\lhd g_n$、$g_n\lhd h$，并且 f、g_n、h 中任意两个都不具有 $\subseteq$-可比性。因此，任何这样的 g_n 都具有所需的性质，本引理的证明至此完成。■

4.2 双无限路径的编织

本节将确立完全由双无限路径构成的确定性编织的一些几何性质。一个关键结果是，若 $\mathcal{A}\subseteq\Pi^{\updownarrow}$ 是确定性编织，则 $\mathcal{A}$ 的分叉点集合的（二维）勒贝格测度为零。稍后将在引理 4.4.6 中把这一结果推广到所有确定性编织。本节中凡提及勒贝格测度，均指 $\mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$ 上的二维勒贝格测度。

引理 4.2.1 对每个 $f\in\Pi$，集合 $H(f)$ 的勒贝格测度均为零

Proof: 这个引理几乎不言自明，但鉴于存在勒贝格测度为正的乔丹曲线这一例子，我们还是给出一个简短的证明。由于 càdlàg 函数只有可数个不连续点，因此，对于 $H(f)$ 中对应于 f 的跳跃的部分，结论成立。利用富比尼定理可以证明，$H(f)$ 的其余部分的勒贝格测度为零。细节留给读者。■

引理 4.2.2 设 $\mathcal{A}\subseteq\Pi^{\updownarrow}$ 是一个确定性编织，且 $h\in\mathcal{A}$。

1. 若 $h(t\star)>-\infty$ 对某个 $t\star\in\mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$ 成立，则存在一个严格单调序列 (f_n)，满足 $f_n\lhd f_{n+1}$，且 $f_n\to h$。 *2.* 若 $h(t\star)<\infty$ 对某个 $t\star\in\mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$ 成立，则存在一个严格单调序列 (g_n)，满足$g_{n+1}\lhd g_n$，且 $g_n\to h$。

Proof: 我们只证明 (f_n) 的存在性和性质。关于 (g_n) 的相应结论可由对称性推出。根据引理 3.1.6，$(\mathcal{A},\lhd)$ 是全序。设 $h\in\mathcal{A}$，并令$L=\{f'\in\mathcal{A}:\ f'\lhd h, f'\neq h\}$。由于 $h(\star)>-\infty$，根据 $h\in\Pi^{\updownarrow}$ 的 càdlàg 性质，存在某个 $s\in\mathbb{R}$，使得 h 在 s 处连续，且 $h(s)>-\infty$。取 $g\in\mathcal{A}((h(s)/2,s))$ 得到$g\in L$，因此 L 非空。由 $\mathcal{A}$ 的紧致性，集合 L 是紧致的；根据引理 3.3.10，这意味着 $(L,\lhd)$ 含有唯一极大元 f。根据引理 3.3.10，我们有 $f\lhd h$。

为使用反证法，假设 $f\neq h$。由于 f，h 都为双无限，因此存在 $t\in\mathbb{R}$ 使得 $f(t+)<h(t+)$。根据引理 4.1.2，并利用 $\mathcal{A}\subseteq\Pi^{\updownarrow}$，存在 $g\in\mathcal{A}$ 使得 $f\neq g$ 且 $g\neq h$。这与 L中 f 的极大性矛盾。

因此我们有 $f=h$，根据 L 的定义，这意味着存在 $(f_n)\subseteq L$ 使得$f_n\to h$，且对所有 n 都有 $f_n\neq h$。不失一般性，我们可以选取一个严格单调子列，由此完成证明。■

引理 4.2.2 对一般的确定性编织并不成立，因为其中可能包含从左侧、右侧或两侧都是孤立点的路径。例如，参见图 2.5.1 右侧的编织 $\mathcal{A}$ 。我们很快将根据引理 4.2.4 证明，如果一个确定性编织完全由双无限路径构成，那么它不含任何孤立点。

引理 4.2.3 设 $\mathcal{A} \subseteq \Pi^{\updownarrow}$ 是一个确定性编织。由全序 $\lhd$ 在 $\mathcal{A}$ 上诱导的序拓扑，与 $\mathcal{A}$ 作为 Π 的子空间时的拓扑一致。

PROOF: 根据引理 3.1.6，$(\mathcal{A}, \lhd)$ 是全序的。回忆一下， $\mathcal{A}$ 上的序拓扑由以下开射线生成

$$R_f = \{g \in \mathcal{A}\,;\, g \lhd f \text{ and } f \neq g\},$$
$$R'_f = \{g \in \mathcal{A}\,;\, f \lhd g \text{ and } f \neq g\}$$

其中 $f \in \mathcal{A}$。我们将证明 R_f 在 $\mathcal{A}$ 上的 M1 拓扑中是开集。对称地可得 R'_f 的相同结论。注意，若 f 是在 $-\infty$ 处取常值的双无限路径，则 $R_f = \emptyset$ 和 $R'_f = \mathcal{A} \setminus \{f\}$，它们自动是开集。类似的考虑也适用于 f 是取常值 ∞ 的双无限路径的情形。因此，我们可以只考虑满足 $f(t\star) > -\infty$ 的 $f \in \mathcal{A}$，其中某个 $t\star \in \mathbb{R}_{\mathfrak{s}\circ}$

由引理 3.1.6 $\mathcal{A}$ 是全序，因此可得 $\mathcal{A} \setminus R_g = \{f \in \mathcal{A}\,;\ g \lhd f\}$。由引理 3.3.10 可知，这是 M1 拓扑下 $\mathcal{A}$ 的一个闭子集，因此 R_g 是 M1 拓扑下 $\mathcal{A}$ 的一个开子集。由此可知， $\mathcal{A}$ 中任何在序拓扑下开集的子集，在 M1 拓扑下也开；接下来只需证明反向结论。

只需证明：若 $B \subseteq \mathcal{A}$ 在 M1 拓扑下是闭的，那么它在序拓扑下也闭。记 $\overset{M1}{\to}$ 表示在 M1 拓扑下收敛， $\overset{\lhd}{\to}$ 表示在序拓扑下收敛。设 $B \subseteq \mathcal{A}$ 在 M1 拓扑下是闭的，也就是说，若 $f_n \in B$ 且 $f_n \overset{M1}{\to} f \in \mathcal{A}$，则 $f \in B$。假设 $h_n \in B$ 且$h_n \overset{\lhd}{\to} h \in \mathcal{A}$。根据引理 4.2.2，存在 f_n，$g_n \in \mathcal{A}$，使得对所有 n，都有 $f_n \lhd f_{n+1}$、 $g_{n+1} \lhd g_n$ ，并且当 $n \to \infty$时， $f_n \overset{M1}{\to} h$、$g_n \overset{M1}{\to} h$ 。对每个 $m \in \mathbb{N}$ ，集合

$$O_m = \{h' \in \mathcal{A}\,;\, f_m \lhd h', h' \lhd g_m, f_m \neq h', h' \neq g_m\}$$

是序拓扑中的一个开区间，因此存在 $N_m \in \mathbb{N}$ ，使得对于所有 $n \geq N_m$，都有 $h_n \in O_{N_m}$。不失一般性，我们可以假设 $N_m \to \infty$ ，因为 $m \to \infty$。因此，对于所有 $n \geq N_m$，我们有

$$f_m \lhd h_n \quad \text{and} \quad h_n \lhd g_m. \tag{4.6}$$

设 h' 是 (h_n) 在 M1 拓扑中的任意极限点，因此 $h' \in \Pi^{\updownarrow}$ 。将 $m \to \infty$ 代入 (4.6)，由引理 3.3.10 可得 $h \lhd h'$ 和 $h' \lhd h$。由于二者都是双无限的，我们有 $h = h'$。由此可得 $h_n \overset{M1}{\to} h$；这又表明（因为 B 在 M1 拓扑中是闭的） $h \in B$，从而完成证明。■

引理 4.2.4 设 $\mathcal{A} \subseteq \Pi^{\updownarrow}$ 是一个确定性编织。存在一个保序同胚 ϕ ，它在全序空间 $(\mathcal{A}, \lhd)$ 与 $([0,1], \leq)$ 之间建立映射。

PROOF: 请注意，引理 4.2.3 的结论已隐含在本引理的陈述中。在整个证明过程中，我们将使用引理 3.1.6 的结论，即 $(\mathcal{A}, \lhd)$ 是全序。对于$f \in \Pi^{\updownarrow}$ ，我们定义

$$H^-(f) = \{(x,t)\,;\, t \in x < f(t-) \wedge f(t+)\},$$
$$H^+(f) = \{(x,t)\,;\, t \in x > f(t-) \vee f(t+)\}.$$

请注意， $\overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}}=H^-(f)\cup H(f)\cup H^+(f)$，且这个并是不相交的。回想一下， $d_{\mathbb{R}^2_c}$ 是生成 $\mathbb{R}^2_c$ 上拓扑的度量；并且回想一下，对于 $A\subset\mathbb{R}^2_c$， A 的开 ϵ-扩张定义为 $A^{(\epsilon)}=\{z\in\mathbb{R}^2_c\colon \mathrm{dist}^{\mathbb{R}^2_c}(z,A)<\epsilon\}$，其中 $\mathrm{dist}(z,A)=\inf_{a\in A}d_{\mathbb{R}^2_c}(z,a)$。设 μ 是 $\mathbb{R}^2_c$ 上的一个测度，它关于勒贝格测度绝对连续且具有全支撑。令 $\phi(f)=\mu(H^-(f))$。

显然， ϕ 是非递减的，并且 $\phi(f_{-\infty})=0,\phi(f_\infty)=1$，其中 $f_{\pm\infty}$ 是在 $\pm\infty$ 处的常值路径（显然可验证 $f_{\pm\infty}\in\mathcal{A}$）。接下来证明 ϕ 是连续的。设 $f_n,f\in\mathcal{A}$ 且 $f_n\to f$。由上文命题 2.2.1 之前的讨论可知，在由 d诱导的豪斯多夫度量下，$H(f_n)\to H(f)$。因此，对每个 $\epsilon>0$，当 n 充分大时，以下两式均成立： $H^-(f_n)\subseteq H^-(f)^{(\epsilon)}$ 以及 $H^+(f_n)\subseteq H^+(f)^{(\epsilon)}$。于是

$$\limsup_{n\to\infty}\mu\big(H^-(f_n)\big)\le\mu\big(H^-(f)^{(\epsilon)}\big)\quad\text{and}\quad\limsup_{n\to\infty}\mu\big(H^+(f_n)\big)\le\mu\big(H^+(f)^{(\epsilon)}\big).$$

令 $\epsilon\downarrow0$，并利用引理 4.2.1 中的事实 $\phi_\mu(\pi)=\mu\big(H^-(\pi)\big)=1-\mu\big(H^+(\pi)\big)$，可知当 $n\to\infty$时，$\phi_\mu(\pi_n)\to\phi_\mu(\pi)$。

我们的下一个目标是证明 ϕ_μ 是一个双射。根据我们已经证明的内容， ϕ 是满射且非递减的，因此只需证明：若 $f\lhd g$ 且 $f\neq g$，则 $\phi(f)<\phi(g)$。如果$f\lhd g$ 不相等，那么由于二者都是双无限的，存在 $t\in\mathbb{R}$ 使得 $f(t+)<g(t+)$。由右连续性可知，集合 $O=\{(x,s);\ f(t+)<x<g(t+)\}$ 的内部非空，因此其勒贝格测度为正。由于 $O\subseteq H^-(g)\setminus H^-(f)$，且 μ 关于勒贝格测度绝对连续，我们有 $\phi(f)<\phi(g)$，证毕。

现在我们已经证明， ϕ 是从紧空间 $\mathcal{A}$ 到（豪斯多夫拓扑空间） $[0,1]$，的连续双射，这意味着 ϕ 是一个同胚。 ϕ 非递减且为双射这一事实意味着 ϕ 保序。■

引理 4.2.5 函数 $(\mathcal{A},z)\to\mathbb{1}\{z\text{ 在 }\mathcal{A}\text{ 中是分歧的，}\ \mathcal{K}\text{到 }\Pi)\times\mathbb{R}^2_c\to\{0,1\}$是可测的。 此外，对于任意确定性编织 $\mathcal{A}\subseteq\Pi^{\updownarrow}$， $\mathcal{A}$ 的分叉点集合的勒贝格测度为零。

Proof: 令 $\mathscr{A}=\{B\in\mathcal{K}(\Pi);\ \exists f\in A\text{满足 }B\subseteq\{f\}_\uparrow\}$，并令 $\mathrm{ram}(\mathcal{A})\subseteq\mathbb{R}^2_c$表示 $\mathcal{A}$的分叉点集合。注意，当且仅当 $A(z)\in\mathscr{A}$时， $z\in\mathbb{R}^2_c$ 是非分歧的。根据引理 A.2.2，可以直接验证 $\mathscr{A}\subseteq\mathcal{K}(\Pi)$ 是闭集。由引理 A.3.1，从 $\mathcal{K}(\Pi)$ 到 $\Pi(\Pi)$ 的映射 $(A,z)\mapsto A(z)$ 是可测的。我们有$\mathbb{1}\{z\in\mathrm{ram}(\mathcal{A})\}=\mathbb{1}\{\mathcal{A}(z)\in\mathscr{A}\}$，因此映射 $(\mathcal{A},z)\mapsto\mathbb{1}\{z\in\mathrm{ram}(A)\}$ 是可测的。由此立即可知，对于任意 $\mathcal{A}\in\mathscr{W}_{\mathrm{det}}$，$\mathrm{ram}(\mathcal{A})$ 是 $\mathbb{R}^2_c$的可测子集。

还需证明 $\mathrm{ram}(A)$ 的测度为零。取 $\phi:\overline{\mathcal{A}}\to[0,1]$，如引理 4.2.4 的陈述所示，并令 $z\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\text{5}}$。根据引理 A.2.2，集合 $\mathcal{A}(z)$ 是闭集。根据 $\overline{\lhd}$的定义（以及 $\mathcal{A}\subseteq\Pi^{\updownarrow}$这一事实），我们有 $\mathcal{A}(z)$ 是全序空间 $(\mathcal{A},\lhd)$ 中的一个区间。因此 $\mathcal{A}(z)$ 是 $(\mathcal{A},\lhd)$ 中的一个闭区间，而 $\phi(\mathcal{A}(z))$ 是 $[0,1]$的一个闭区间。

设 U 在 $[0,1]$上均匀分布。注意到，当且仅当闭区间 $\mathcal{A}(z)$ 不仅仅是一个点时， $z\in\mathbb{R}^2_c$ 才是分歧的；而这当且仅当 $\mathbb{P}[U\in\phi(\mathcal{A}(z))]>0$ 时发生。设 μ 是 $\mathbb{R}^2_c$ 上的一个相对于勒贝格测度绝对连续的测度。设 Z 是一个分布为 μ、且独立于 U 的随机变量。根据引理 A.3， $1\ \mathcal{A}(Z)$ 是一个取值于 $\mathcal{K}(\Pi)$ 的随机变量。于是 $\mathbb{P}[U\in\phi(\mathcal{A}(Z))]=\mathbb{P}[\phi^{-1}(U)\in\mathcal{A}(Z)]$ 表示随机路径 $\phi^{-1}(U)$ 经过随机点 Z 的概率。回顾 μ 相对于勒贝格测度绝对连续，根据引理 4.2.1，该概率为零。因此， Z 几乎必然不是分歧的，这意味着分叉点集合的勒贝格测度为零。■

引理 4.2。 6 设 $\mathcal{A}\subseteq\Pi^{\updownarrow}$ 是一个确定性编织。若 $h\in\Pi^{\updownarrow}$ 不与 $\mathcal{A}$ 交叉，则 $h\in\mathcal{A}$.

PROOF: 我们用反证法。假设 $h \in \Pi^{\updownarrow}$ 不与 $\mathcal{A}$ 交叉，且$h \notin \mathcal{A}$。由于 $\mathcal{A}$ 是闭的，这意味着 h 是 $\mathcal{A} \cup \{h\}$ 的一个孤立点。由于 h 不与 $\mathcal{A}$ 交叉，不难验证 $\mathcal{A} \cup \{h\}$ 是一个确定性编织。因此，根据引理 4.2.4， $\mathcal{A} \cup \{h\}$ 不含任何孤立点。这就产生了矛盾，证明完毕。■

注记 4.2.7 根据引理 4.2.6，确定性编织 $\mathcal{A} \subseteq \Pi^{\updownarrow}$ 总是在空间位置 $-\infty$包含一条常值路径，在 $+\infty$处也同样如此。这些分别是 $(\mathcal{A}, \lhd)$ 的极小元和极大元。

引理 4 .2.8 设 $\mathcal{A} \subseteq \Pi^{\updownarrow}$ 是一个确定性编织。若 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 是稠密的，则 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(D)^{\overline{\quad}}$.

PROOF: 显然， $\mathcal{A}(D) \subseteq \mathcal{A}$。因此，$\overline{\mathcal{A}(D)}$ 是紧致的。由于 D 是稠密的，由引理 A.2.2 可容易看出， $\mathcal{A}(D)$ 是遍历的；又由于 $\mathcal{A}(D) \subseteq \mathcal{A}$ ，它也不交叉。因此， $\mathcal{A}(D)$ 是一个确定性编织。若 $h \in \mathcal{A}$ ，则由于 $\mathcal{A}(D) \subseteq \mathcal{A}$ ，可知 h 不与 $\mathcal{A}(D)$ 交叉。因此，根据引理 4.2.6，可得 $h \in \mathcal{A}(D)$。于是 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(D)$。■

4.3 编织中路径的延拓

我们关于编织的结果，根本上依赖于这样一个事实：在编织中，半无限路径可以延拓为双无限路径，而不会造成交叉。我们还要求这样的延拓保持紧致性；这一点将在稍后的引理 4.4.2 中讨论。正如人们所预期的，路径的双无限延拓与路径延拓偏序下的极大路径密切相关。由引理 3.1.6 可知，若 $\mathcal{A}$ 是编织，则 $(\mathcal{A}_{\max}, \lhd)$ 是全序。人们很容易认为，可以通过对 $\mathcal{A}$ 中的路径取适当的极限来构造路径的双无限延拓，但一般而言这是行不通的，因为确定性编织是闭集。为此需要采用更精细的操作。

定义 4.3.1 设 $\mathcal{A}$ 是一个确定性编织。若子集 $X \subseteq \mathcal{A}_{\max}$ 满足 (i) 对于任意 f， $g \in \mathcal{A}_{\max}$ ，若 $f \lhd g$ 且 $g \in X$ ，则有 $f \in X$ ；并且 (ii) X 没有极大元，则称 $X \subseteq \mathcal{A}_{\max}$ 是 $\mathcal{A}_{\max}$ 的一个戴德金分割 。

下面概述本节的主要结果。回顾一下，flow($\mathcal{A}$) 表示不与 $\mathcal{A}$ 相交的双无限 c`adl`ag 路径集合。戴德金分割最广为人知的用途，是戴德金用它从 $\mathbb{Q}$ 构造 $\mathbb{R}$ 。这里也有一种相关情形，其中 $\mathcal{A}_{\max}$ 扮演 $\mathbb{Q}$ 的角色，而 flow($\mathcal{A}$) 扮演 $\mathbb{R}$ 的角色。具体而言，在引理 4.3.2 中，我们证明：如果 $h \in \Pi^{\uparrow}$ 不与 $\mathcal{A}$ 相交，那么 $\mathcal{A}_{\max}$ 中严格位于 h 左侧的路径构成 $\mathcal{A}_{\max}$ 的一个戴德金分割。在定理 4.3.9 中（该定理将在几个引理中证明），我们证明 $\mathcal{A}_{\max}$ 的戴德金分割与不和 $\mathcal{A}$ 相交的双无限路径之间存在双射对应。因此，每个 $f \in \Pi^{\uparrow}$ 都会产生一个戴德金分割，而该分割又会产生一条双无限路径 h，它延伸 f 且不与 $\mathcal{A}$ 相交。

引理 4.3.2 设 $\mathcal{A}$ 是一个确定性编织， $h \in \Pi^{\uparrow}$ 是一条不与 $\mathcal{A}$ 交叉的路径。那么

$$X_h = \{f \in \mathcal{A}_{\max} ; f \lhd h, \ f \not\subseteq h, \ h \not\subseteq f\} \tag{4.7}$$

是 $\mathcal{A}_{\max}$ 的一个戴德金分割。如果 h、$h' \in \Pi^{\uparrow}$ 不与 $\mathcal{A}$ 交叉，且满足 $h \not\subseteq h'$ 和 $h' \not\subseteq h$，那么 $X_h \neq X_{h'}$。

PROOF: 我们首先检查 X_h 是 $\mathcal{A}_{\max}$ 的一个戴德金分割。我们必须检查 X_h 是否满足定义 4.3.1 的条件 (i) 和 (ii)。对于 (i)，假设 $f \in X$ 和 $g \in \mathcal{A}_{\max}$，且 $g \lhd f$。我们有 $f \lhd h$。引理 3.1.6（其中包含 $\lhd$ 是传递的这一点）给出 $g \lhd h$，正如所需。对于 (ii)，令 $f \in X_h$。引理 4.1.5 意味着存在 $g \in \mathcal{A}_{\max}$，使得 $f \not\subseteq g$、$g \not\subseteq h$、$g \not\subseteq h$、$h \not\subseteq g$，且 $f \lhd g$ 和 $g \lhd h$。由于 f，g，$h \in \mathcal{A}_{\max}$，这意味着 f，g，h 彼此不同。因此，f 不是 X 的极大元，正如所需。

剩下需要验证的是：$X_h \neq X_{h'}$ 当 h，$h' \in \Pi^{\uparrow}$ 不交叉 $\mathcal{A}$ 且满足 $h \not\subseteq h'$和 $h' \not\subseteq h$时。注意到 h 和 h' 都不与 $\mathcal{A}$交叉，由引理 4.1.3 h ， h' 也彼此不交叉。由引理 3.1.3 可知，$h \lhd h'$ 或 $h' \lhd h$。不失一般性，设 $h \lhd h'$。那么由引理 4.1.5，存在 $g \in \mathcal{A}_{\max}$ 使得 $g \not\subseteq h$、$h \not\subseteq g$、$g \not\subseteq h'$、$h' \not\subseteq g$，且 $h \lhd g$ 和 $g \lhd h'$。由此可得 $g \in X_h$ 和 $g \notin X_{h'}$，证毕。■

现在我们考虑 (4.7) 的逆映射，也就是试图从相应的戴德金分割重构一条双无限路径。这一部分相当技术性，会涉及第 2.1 节在 $\mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$ 上引入的拓扑。我们请读者此时回顾一下。特别地，回忆引理 2.1.1：$t_n\star_n \to t+$ 当且仅当 $t_n \to t$ ，并且对所有充分大的 n，$t_n\star_n \geq t+$ ；类似地，$t_n\star_n \to t-$ 当且仅当 $t_n \to t$ ，并且对所有充分大的 n，$t_n\star_n \leq t-$ 。

若 $\mathcal{A}$ 是一个编织，且 X 是 $\mathcal{A}_{\max}$ 的戴德金分割，则定义

$$\mathscr{L}(X) = \bigcup_{f \in X} L(f) \tag{4.8}$$

其中 $L(f)$ 按 (3.1) 定义。注意，$\mathscr{L}(X)$ 是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$ 的一个子集，我们在其上赋予积拓扑。另请回忆，$L_{t\star}(f) = \{x \in \mathbb{R}\,;\, (x,\ t\star) \in \mathscr{L}(X)\}$，根据 (3.1)，它要么为空，要么等于 $[-\infty, f(t\star))$。粗略地说，我们的策略是证明 $\mathscr{L}(X)$ 的右侧边界是一个 càdlàg 路径在（时空 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$）中的图。基于此，给定 $\mathcal{A}_{\max}$ 的一个戴德金分割 X，令 $\mathscr{P}_X : \mathbb{R}_{\mathfrak{s}} \to \mathbb{R}$ 为

$$\mathscr{P}_X(t\star) = \sup\left\{x \in \overline{\mathbb{R}}\,;\, (x, t\star) \in \overline{\mathscr{L}(X)}\right\}. \tag{4.9}$$

对 (4.9) 中 $\mathscr{L}(X)$ 取闭包至关重要，因为是 c`adl`ag 路径，就相当于是在 $\mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$ 上的连续函数；而连续函数就意味着其图是闭的。

引理 4.3.3 设 $\mathcal{A}$ 是一个确定性编织，X 是 $\mathcal{A}_{\max}$ 的一个戴德金分割。若 $(y, t\star) \in \mathscr{L}(X)$ 且 $x \leq y$，则 $(x, t\star) \in \mathscr{L}(X)$。

PROOF: 设 $(y, t\star) \in \mathscr{L}(X)$ 且 $x < y$。由 (4.8) 可知，存在 $f_n \in X$，以及 $(y_n, t_n\star_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$，使得 $(y_n, t_n\star_n) \to y$ 且 $y_n \in L_{t_n\star_n}(f_n)$。因此，对所有充分大的 $n \in \mathbb{N}$，都有 $x \leq y_n$。对于这样的 n，有 $x_n \in L_{t_n\star_n}(f_n)$，这意味着 $(x_n, t_n\star_n) \in \mathscr{L}(X)$，进而 $(x, t\star) \in \mathscr{L}(X)$。■

引理 4.3.4 设 $\mathcal{A}$ 为一个确定性编织，且 X 为 $\mathcal{A}_{\max}$的戴德金分割。则以下结论成立：

1. 设 $f \in X$ 和 $g \in \mathcal{A}_{\max} \setminus X$。则 $f \lhd g$。
2. 假设 $(x, t\star) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathfrak{s}}) \setminus \mathscr{L}(X)$。那么对所有 $\epsilon > 0$，都存在 $t' \in \mathbb{R}$ 和 $g \in \mathcal{A}_{\max} \setminus X$，使得 $|t - t'| \leq \epsilon$ 且 $g \in \mathcal{A}((x, t'))$。

PROOF: 对于第一部分，取 $f \in X$ 和 $g \in \mathcal{A}_{\max} \setminus X$。注意 $f, g \in \mathcal{A}$，因此 f 和 g 可能不交叉；由引理 3.1.3 可知，$f \lhd g$ 或 $g \lhd f$。若 $f \subseteq g$ 或 $g \subseteq f$，则由极大性可得 $f = g$，此时 $f \lhd g$。另一种情况是，若 $f \not\subseteq g$ 和 $g \not\subseteq f$ 都成立，则 $g \lhd f$ 将推出 $g \in X$，因为 X 是一个戴德金分割；因此必有 $f \lhd g$。所以，无论哪种情况，都有 $f \lhd g$。

现在来考虑第二个断言。先考虑 $t\star = t+$ 的情形。令 $\epsilon > 0$。由于 $(x, t+) \notin \mathscr{L}(X)$，存在 $\epsilon_0 > 0$ 使得

$$\big([x - \epsilon_0, x + \epsilon_0] \times [t+, (t + \epsilon_0)+]\big) \cap \overline{\mathscr{L}(X)} = \emptyset. \tag{4.10}$$

不失一般性，假设 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$。由 $\mathcal{A}$ 的普遍性，存在 $g \in \mathcal{A}((x, t'))$，其中 $t' = t + \epsilon/2$。不失一般性，我们可以取 $g \in \mathcal{A}_{\max}$。显然，$|t - t'| \leq \epsilon$。

考虑 $g \in X$ 的情形。注意到我们有 $g(t'+) \vee g(t'-) \geq x$。若 $g(t'+) \geq x$，则 $[-\infty, x) \subseteq L_g(t'+)$，这将意味着 $(x, t'+) \in L(g) \subseteq \mathscr{L}(X)$，与 (4.10) 矛盾，因此这种情况不可能发生。剩下的情形是 $g(t'+) < x \leq g(t'-)$，此时 $[-\infty, x) \subseteq L_{t'-}(g)$，这意味着 $(x, t') \in L(g) \subseteq \mathscr{L}(X)$，与 (4.10) 矛盾，因此这种情况也不可能发生。由此可得 $g \notin X$。这就完成了 $t\star = t+$ 情形的证明。$t = t-$ 的情形类似，只需用以下事实代替 (4.10)：对于某个 $\epsilon_0 > 0$，有 $[x - \epsilon_0, x + \epsilon_0] \times [(t - \epsilon_0)-, t-] \cap \mathscr{L}(X) = \emptyset$.■

引理 4.3.5 设 $\mathcal{A}$ 是一个确定性编织，且 X 是 $\mathcal{A}_{\max}$的一个戴德金分割。那么 $\mathscr{P}_X$是一个双无限 *càdlàg* 路径。

PROOF: 在本证明中，我们记 $h = \mathscr{P}_X$。我们必须证明 h 是从 $\mathbb{R}_\mathfrak{s}$ 到 $\mathbb{R}$的连续映射。根据闭图定理，函数 $h : \mathbb{R}_\mathfrak{s} \to \mathbb{R}$ 连续，当且仅当其图 $\mathscr{H} = \{(h(t\star)\ t\star);\ t\star \in \mathbb{R}_\mathfrak{s}\}$ 是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_\mathfrak{s}$的闭子集。设 $t_n\star_n \to t\star$ 属于 $\mathbb{R}_\mathfrak{s}$。由$\mathbb{R}$ 的紧致性，序列$(h(t_n\star_n)\ t_n\star_n)$相对紧。设$(x, t\star)$是该序列的一个极限点，并且（稍微滥用一下记号）令我们取一个子序列，使得 $h(t_n\star_n) \to x$。为证明当前引理，我们必须证明$x = h(t\star)$。

由 (4.9)，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个序列 $(x_{n,m}, t_{n,m}\star_{n,m})_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}(X)$，使得当 $m \to \infty$ 时，$(x_{n,m}, t_{n,m}\star_{n,m}) \to (h(t_n\star_n)\ t_n\star_n)$。根据对角线论证，存在一个严格递增函数 $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得 $(x_{n,m(n)}, t_{n,m(n)}\star_{n,m(n)}) \to (x, t\star)$。因此，$(x, t\star) \in \mathscr{L}(X)$，这意味着 $x \leq h(t\star)$。如果 $h(t\star) = -\infty$，那么现在我们有 $x = h(t\star)$，所以在下文中可以假设 $-\infty < h(t\star)$。

现在我们通过反证法进行论证：假设 $x < h(t\star)$。令 $\epsilon > 0$ 满足$x + 3\epsilon \leq h(t\star)$，并注意到 $x + \epsilon < h(t\star) - \epsilon$。我们依次考虑 $t\star = t+$ 和 $t\star = t-$ 两种情况。

首先，假设 $t\star = t+$。我们先简要概述一下策略。我们将构造一个由 $f_n \in X$组成的序列，它们趋近于时空点（$h(t+)\ t+$），再构造一个由 $g_n \in \mathcal{A}_{\max} \setminus X$组成的序列，它们趋近于（$h(t_n\star_n)\ t_n\star_n$）$\approx (x,\ t+)$。注意，$x < h(t+)$，而引理 4.3.4 给出$f_j \lhd g_k$ 对所有 $j,\ k \in \mathbb{N}$都成立。这种组合会使（f_n）和（g_n）彼此纠缠，以至于它们的极限点 $f,\ g \in \mathcal{A}$ 会在时间 t沿相反方向相互跳跃越过，从而发生交叉，导致矛盾。现在我们继续证明。

由引理 2.1.1，$t_n\star_n \to t+$ 这一事实意味着，当 n 足够大时，我们必有$t_n\star_n \geq t+$。由于 $h(t_n\star_n) \to x < h(t+)$，事实上，当 n 足够大时，我们有 $t_n\star_n > t+$，并且还有 $h(t_n\star_n) \leq x + \epsilon$。不妨取一个子序列，并假设这两个性质对所有 n 都成立。

由 (4.9) 可知，存在 $(y_n, s_n\bullet_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}(X)$，使得 $(y_n, s_n\bullet_n) \to (h(t+)\ t+)$。$s_n\bullet_n \to t+$ 这一事实意味着，当 n 足够大时，我们必有 $s_n\bullet_n \geq t+$；并且当 n 足够大时，我们还有 $y_n \geq h(t\star) - \epsilon$。因此，不妨取一个子序列，并假设这两个性质对所有 n都成立。

考虑

$$h(t+) = \sup\{x\,;\,(x, t+) \in \mathscr{L}(X)\}. \tag{4.11}$$

在这种情况下，存在 $f \in X$，使得 $L_{t+}(f) = [-\infty, f(t+))$，且 $0 < h(t+) - f(t+) \leq \epsilon$，因此$f(t+) \geq x + 2\epsilon$。由 f 的右连续性（即时间向前）可知，对于所有充分大的 n，都有 $h(t_n\star_n) \geq x + \epsilon$，这与 $h(t_n\star_n) \to x$ 矛盾。因此，这种情况不可能发生。

因此，$h(t+) \neq \sup\{x;\ (x,\ t+) \in \mathscr{L}(X)\}$，这意味着当 n 充分大时，我们有 $s_n\bullet_n \neq t+$（因为 $(y_n,\ s_n\bullet_n) \to (h(t+)\ t+)$，且 $(y_n,\ s_n\bullet_n) \in \mathscr{L}(X)$）。我们已经知道 $s_n\bullet_n \geq t+$，因此不失一般性，可取一个子序列，并假设对所有 n 都有$s_n\bullet_n > t+$。

由于 $(y_n, s_n\bullet_n) \in \mathscr{L}(X)$，存在 $f_n \in X$使得 $(y_n, s_n\bullet_n) \in L(f_n)$。因此 $f_n(s_n\bullet_n) \geq y_n \geq h(t\star) - \epsilon$。由 $\mathcal{A}$ 的紧致性，不妨取一个子序列，并假设 $f_n \to f \in \mathcal{A}$。

令 $x_n = h(t_n\star_n) + 2^{-n}$。由于 $h(t_n\star_n) \to x$，不妨取一个子序列，并假设对所有 n 都有 $x_n \leq x + \epsilon$。引理 4.3.3 得出 $(x_n, t_n\star_n) \notin \mathscr{L}(X)$。因此，根据引理 4.3.4 的第二部分，对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $t'_n \in \mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$ 和 $g_n \in \mathcal{A}_{\max} \setminus X$，使得 $|t_n - t'_n| \leq 2^{-n}$、$t'_n\star_n > t+$，且 $g_n \in \mathcal{A}((x_n, t'_n))$。由 $\mathcal{A}$ 的紧致性，不妨取一个子序列，并假设 $g_n \to g \in \mathcal{A}$。根据引理 4.3.4 的第一部分，对所有 $i, j \in \mathbb{N}$，都有 $f_i \lhd g_j$。

$t'_n\star_n$ 和 $s_n\bullet_n$ 都严格大于 $t+$，且当 $n \to \infty$时都趋于 $t+$。因此，进一步取子序列后，存在一个严格递增函数 $n \mapsto n'$，使得

$$s_{n+1}\bullet_{n+1} < t'_{n'}\star_{n'} < s_n\bullet_n \tag{4.12}$$

对所有 n均成立。

现在我们考察序列 (g_n) 在 $n \to \infty$时的情形。我们将证明

$$g_{n'}(t'_{n'}-) \vee g_{n'}(t'_{n'}+) \leq x_{n'} \leq x + \epsilon, \tag{4.13}$$

$$g_{n'}(s_n\bullet_n) \geq y_n \geq h(t\star) - \epsilon. \tag{4.14}$$

方程 (4.13) 成立，因为 $g_{n'} \in \mathcal{A}((x_{n'},\ t'_{n'}))$。为说明方程 (4.14)：我们有 $f_n \lhd g_{n'}$，且 $[-\infty, y_n) \subseteq L_{s_n\bullet_n}(f_n)$。引理 3.1.2 表明 $L(f_n) \cap R(g_{n'}) = \emptyset$，并且 $\sigma_{g_{n'}} < s_n\bullet_n$，所以必有 $g_{n'}(s_n\bullet_n) \geq y_n$。

由引理 A.2.2，结合 (4.12)、(4.13) 和 (4.14)，我们得到极限 g 在时间 t发生向右跳跃：在时间 $t-$ 低于 $x + \epsilon$，在时间 $t+$高于 $h(t\star) - \epsilon$。

现在我们以类似的方式转而关注 (f_n)。在这里，我们证明

$$f_{n+1}(s_{n+1}\bullet_{n+1}) \geq y_{n+1} \geq h(t\star) - \epsilon \tag{4.15}$$

$$f_{n+1}(t'_{n'}-) \wedge f_{n+1}(t'_{n'}+) \leq x_n \quad \leq x + \epsilon \tag{4.16}$$

方程 (4.15) 源于以下事实：$(y_n, s_n\bullet_n) \in L(f_n)$。为说明方程 (4.16)，我们有 $f_{n+1} \lhd g_{n'}$。如果 $g_{n'}(t'_{n'}+) \leq g_{n'}(t'_{n'}-)$，那么我们有 $f_{n+1}(t'_{n'}+) \leq g_{n'}(t'_{n'}+) \leq x_n$。另一方面，如果 $g_{n'}(t'_{n'}-) < g_{n'}(t'_{n'}+)$，那么我们有 $[-\infty, x_n) \subseteq R_{t'_{n'}-}(g_{n'})$，而引理 3.1.2 给出 $L(f_{n+1}) \cap R(g_{n'}) = \emptyset$，这意味着 $f_{n+1}(t'_{n'}-) \leq x_n$。在两种情况下，我们都有 (4.16)。

由引理 A.2.2 结合 (4.12)、(4.15) 和 (4.16)，我们得到极限 f 在时间 t向左跳跃，从时间 $t-$ 的 $h(t\star) - \epsilon$ 之上跳到时间 $t+$的 $x + \epsilon$ 之下。因此

f 和 g 交叉（在时间 t彼此向相反方向跳跃而越过对方）。由于二者均 $f,\ g \in \mathcal{A}$，这就产生了矛盾。至此，情形 $t\star = t+$ 的证明完成。

剩下需要考虑的是情形 $t\star = t-$。论证基本相同，只是引理 2.1.1 要求我们现在从左侧（即逆时间方向）趋近 $t-$，而不是从右侧趋近 $t+$。概括而言：构造一个趋近空间—时间点 $(h(t-)\ t-)$ 的 $f_n \in X$ 序列，以及一个趋近 $(h(t_n\star_n)\ t_n\star_n) \approx (x,\ t-)$ 的 $g_n \in \mathcal{A}_{\max}$ 序列。注意，$x < h(t-)$，而引理 4.3.4 给出对所有 $j,\ k \in \mathbb{N}$ 都有 $f_j \lhd g_k$。这一组合使 (f_n) 与 (g_n) 彼此纠缠，因此，它们的极限点 $f,\ g \in \mathcal{A}$ 再次会交叉——从而导致矛盾。

有一点出现了值得一提的差异。这涉及 (4.11)。如果 $h(t-) = \sup\{x; (x,\ t-) \in \mathscr{L}(X)\}$，那么存在 $f \in X$，使得 $L_{t-}(f) = [-\infty, f(t-))$，且 $0 < h(t-) - f(t-) \le \epsilon$。

- 如果 $\sigma_f < t$，那么可以采用与（4.11）所在同一段中的论证类似的论证，使用 f 的左连续性而非右连续性；这将导致矛盾。
- 如果 $\sigma_f = t$，那么我们需要在论证中加入一个新的步骤；由于 $L_{t\star}(f)$在 $t\star = \sigma_f-$时表现出“额外”的行为，这一步仅在此处出现，见（3.1）。特别地，对于$t = \sigma_f,\ L_{t-}(f) = [-\infty, f(t-))$这一事实意味着 $f(t+) < f(t-)$。随后，我们像之前一样构造 $g \in \mathcal{A}$，使得 $g(t-) \le x + \epsilon$ 且 $g(t+) \ge h(t-) - \epsilon$。因此，$f$和$g$ 交叉，从而得到矛盾。

如果 $h(t-) \ne \{x;\ (x,\ t-) \in \mathscr{L}(X)\}$，那么我们可以（而且只能）使用 $\mathscr{L}(X)$中的时间严格小于 $t-$的时空点来逼近 $(h(t-)\ t-) \in \mathscr{L}(X)$。在这种情况下，我们可以像之前一样继续。这就完成了证明。■

引理 4.3.6 设 $\mathcal{A}$ 是一个确定性编织，且 X 是 $\mathcal{A}_{\max}$的戴德金分割。那么，$\mathscr{P}_X$不会与 $\mathcal{A}$交叉。此外，若 $f \in X$，则 $f \lhd \mathscr{P}_X$；若 $g \in \mathcal{A}_{\max} \setminus X$，则 $\mathscr{P}_X \lhd g$。

Proof: 在本证明中，我们记 $h = \mathscr{P}_X$。由引理 4.3.5 可得$h \in \Pi^{\updownarrow}$。注意，h 与 $\mathcal{A}$ 交叉，当且仅当 h 与 $\mathcal{A}_{\max}$交叉。我们将依次证明 (a)$f \in X \Rightarrow f \lhd h$ 以及 (b) $g \in \mathcal{A}_{\max} \setminus X \Rightarrow h \lhd g$。由此，根据引理 3.1.3 可知，$h$ 不会与 $\mathcal{A}_{\max}$交叉，因此 h 不会与 $\mathcal{A}$交叉。

我们先证明 (a)。设 $f \in X$和 $t\star \ge \sigma_f-$。若 $L_{t\star}(f) = [-\infty, f(t\star))$，则 $(f(t\star)\ t\star) \in \mathscr{L}(X)$，于是 $f(t\star) \le h(t\star)$，这意味着 $L_{t\star}(f) \cap R_{t\star}(h) = \emptyset$。或者，若 $L_{t\star}(f) = \emptyset$，则显然 $L_{t\star}(f) \cap R_{t\star}(h) = \emptyset$。因此 $L(f) \cap R(g) = \emptyset$，由引理 3.1.4 可得 $f \lhd h$。

现在我们继续讨论 (b)。令 $g \in \mathcal{A}_{\max} \setminus X$。我们将用反证法进行论证。假设$h \not\lhd g$。那么根据引理 3.1.2，我们有 $L(h) \cap R(g) \ne \emptyset$。特别地，对于某个 $t\star \ge \sigma_g-$，我们有 $L_{t\star}(h) = [-\infty, h(t\star))$，并且 $R_{t\star}(g) = (g(t\star)\ \infty]$，其中 $g(t\star) < h(t\star)$。

首先考虑 $t\star \ge \sigma_g+$ 的情形。接着，利用 g 和 h 的 c`adl`ag 性质，存在 $\epsilon > 0$ 一个区间 $[a+, b-]$，满足 $a < b$，使得

$$g(s\bullet) + \epsilon \le h(\sigma\bullet) \tag{4.17}$$

对所有 $s\bullet \in [a-, b+]$（证明如下：若 $\star = +$，取 $a = t$；若 $\star = -$，取 $b = t$）。简要说明一下我们在此采用的策略：我们将使用 (4.17) 证明 g 位于 X中的某条路径左侧。固定一个满足 $a+ < s\bullet < b-$的 $s\bullet \in \mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$。由 (4.9) 可知，存在 $(y_n,\ s_n\bullet_n) \in \mathscr{L}(X)$，使得 $(y_n,\ s_n\bullet_n) \to (h(s\bullet)\ s\bullet)$，当 $n \to \infty$时成立。对于所有充分大的 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$h(s\bullet) - \epsilon/2 \le y_n \qquad \text{and} \qquad a- \le s_n\bullet_n \le b+. \tag{4.18}$$

由引理 4.3.5 可知 $h(s_n\bullet_n) \to h(s\bullet)$，因此对于所有充分大的 n，我们也有

$$|h(s\bullet) - h(s_n\bullet_n)| \le \epsilon/2. \tag{4.19}$$

固定足够大的 $n \in \mathbb{N}$，使得 (4.18) 和 (4.19) 均成立。由 (4.8)，存在 $f_n \in X$，使得 $(y_n, s_n\bullet_n) \in L_{s_n\bullet_n}(f)$，这意味着 $y_n < f(s_n\bullet_n)$。将此不等式与 (4.17)、(4.18) 和 (4.19) 结合，得到

$$g(s_n\bullet_n) \;\le\; h(s_n\bullet_n) - \epsilon \;\le\; h(s\bullet) - \epsilon/2 \;\le\; y_n \;<\; f_n(s_n\bullet_n).$$

因此 $g(s_n\bullet_n) \in L_{s_n\bullet_n}(f)$，由引理 3.1.4 可知 $g \lhd f_n$。由于 X 是戴德金分割且 $f_n \in X$，所以我们有 $g \in X$，这就产生了矛盾。

剩下的情形是 $t\star = \sigma_g-$。在这种情形下，由 (3.1) 可得 $R_{\sigma-}(g) = (g(\sigma-)\ \infty]$且 $g(\sigma-) < g(\sigma+)$。此外，我们还有 $g(\sigma-) < h(\sigma-)$。由 (4.9)，存在 $(y_n, s_n\bullet_n) \in \mathscr{L}(X)$，使得 $(y_n, s_n\bullet_n) \to (h(\sigma-)\ \sigma-)$，并且存在 $f_n \in X$，使得 $y_n \in L_{s_n\bullet_n}(f) = [-\infty, f_n(s_n\bullet_n))$。由 $\mathcal{A}$ 的紧致性，我们可以取一个子序列，并假设 $f_n \to f \in \mathcal{A}$。不失一般性，我们可以假设 $s_n\bullet_n \le s-$，因此 $\sigma_{f_n} \le \sigma_g$。

假设 $f_n(\sigma-) \ge g(\sigma-)$：那么 $f_n(\sigma-) \in R_{\sigma-}(g)$，由引理 3.1.4 可得$g \lhd f_n$；又因为 X 是一个戴德金分割，因此可得 $g \in X$，这是错误的。因此，实际上$f_n(\sigma-) < g(\sigma-)$。现在我们有 $s_n\bullet_n \le \sigma-$，且 $\sigma_n\bullet_n \to \sigma-$，以及 $f_n(s_n\bullet_n) \ge y_n$ 和$f_n(\sigma-) \le g(\sigma-)$。由引理 A.2.3 可知，$f$ 在 σ处向左跳跃，从$h(\sigma-)$的右侧跳到 $g(\sigma-)$的左侧。这意味着 g 和 f 交叉，它们如 σ般沿相反方向相互跳过；这与矛盾，因为二者都 f，$g \in \mathcal{A}$。证明至此完成。■

引理 4.3.7 设 $\mathcal{A}$ 是一个确定性编织，并假设 $h \in \Pi^{\updownarrow}$ 不与 $\mathcal{A}$交叉。按照(4.7)定义$X = X_h$。那么 $\mathscr{P}_X = h$。

Proof: 在本次证明中，记 $h' = \mathscr{P}_X$。我们必须证明 $h = h'$。我们将通过反证法进行论证。注意到 h 是双无限的，若 $h \ne h'$，则存在 $t+ \in \mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$，使得 $h(t+) \ne h'(t+)$。不失一般性（或考虑关于原点反射的空间），我们可以假设 $h(t+) < h'(t+)$。因此 $h \lhd h'$。根据引理 4.1.2，再次利用 h 和 h'是双无限的这一事实，存在 $g \in \mathcal{A}$，使得 $h \lhd g$ 和 $g \lhd h'$，其中 $g \not\subseteq h$ 和 $g \not\subseteq h'$。不失一般性，我们可以取 $g \in \mathcal{A}_{\max}$。因此，$g \in X$ 或 $g \in \mathcal{A}_{\max} \setminus X$。我们分别考虑这两种情况。

若 $g \in X$，那么回想起 $X = \{f \in \mathcal{A}_{\max};\ f \lhd h$ 且 $f \not\subseteq h\}$，我们有 $g \lhd h$。由引理 3.1.3，注意到 h 是双无限的，因此得到 $g \subseteq h$，这就产生了矛盾。若$g \in \mathcal{A}_{\max} \setminus X$，则由引理 4.3.6 可得 $h' \lhd g$。由引理 3.1.3，注意到 h' 是双无限的，因此得到 $g \subseteq h'$，这就产生了矛盾。两种情形下都得到了矛盾，因此我们得出，实际上 $h = h'$。■

引理 4.3.8 设 $\mathcal{A}$ 是一个确定性编织，且 X 是 $\mathcal{A}_{\max}$的一个戴德金分割。存在 $h \in \Pi^{\updownarrow}$ 使得 $X = X_h$，其中 X_h 由 (4.7) 给出。

Proof: 在本证明中，我们记 $h = \mathscr{P}_X$。由引理 4.3.5 可得 $h \in \Pi^{\updownarrow}$。按 (4.7) 定义 X_h，即 $X_h = \{f \in \mathcal{A}_{\max};\ f \le h$ 且 $f \not\subseteq h\}$。注意，由于 $h \in \Pi^{\updownarrow}$，我们可以舍去条件 $h \not\subseteq f$，因为若 $h \subseteq f$，则 $f = h$，因此也有 $f \subseteq h$。我们必须证明 $X = X_h$。

设 $f \in X$。引理 4.3.6 给出 $f \lhd h$。此外，引理 4.3.6 还给出，对所有$g \in X$，都有 $g \lhd h$。因此，如果 $f \subseteq h$，那么对所有 $g \in X$，也会有 $g \lhd f$，这将使 f 成为一个

X 的极大元；这与 X 是一个戴德金分割相矛盾。因此 $f \not\subseteq h$。于是我们有$X \subseteq X_h$。现在转而证明反向包含。

设 $f \in X_h$，因此我们有 $f \in \mathcal{A}_{\max}$、 $f \lhd h$ 和 $f \not\subseteq h$。若 $f \notin X$，则由引理 4.3.6 可得$h \lhd f$；由此，引理 3.1.5 的第 2 部分推出 $f \subseteq h$ 或 $h \subseteq f$；这就产生了矛盾。因此 $X_h \subseteq X$，所以如所需，$X = X_h$。■

定理 4.3.9 设 $\mathcal{A}$ 是一个确定性编织。令 $\mathscr{X}$ 表示$\mathcal{A}_{\max}$的戴德金分割集合。

1. 由(4.7) 给出的映射 $h \mapsto X_h$ 是流$(\mathcal{A})$ 与 $\mathscr{X}$ 之间的双射。逆映射$X \mapsto \mathscr{P}_X$ 由(4.9)给出。
2. 对于任意不与 $\mathcal{A}$ 交叉的 $f \in \Pi^{\uparrow}$，存在 $h \in$ 流$(\mathcal{A})$ 使得 $f \subseteq h$。

Proof: 回顾 (2.13)，根据定义，流$(\mathcal{A}) = \{h \in \Pi^{\updownarrow}$； h 与 $\mathcal{A}\}$ 不交叉。引理 4.3.2 表明，映射 $h \mapsto X_h$ （定义域为流$(\mathcal{A})$）的值域包含于 $\mathscr{X}$，且该映射是单射。引理 4.3.8 表明， $h \mapsto X_h$ 的值域为 $\mathscr{X}$。引理 4.3.5 和 4.3.6 确保映射 $X \mapsto \mathscr{P}_X$ （定义域为 $\mathscr{X}$）的值域包含于流$(\mathcal{A})$，因此引理 4.3.7 得出， $h \mapsto X_h$ 和 $X \mapsto \mathscr{P}_X$ 互为逆映射，分别连接流$(\mathcal{A})$与 $\mathscr{X}$。这就证明了本定理的第一个断言。

为证明第二个断言，设 $f \in \Pi^{\uparrow}$，并假设 f 与 $\mathcal{A}$ 不交叉。由引理 4.3.2 可知 $X_f \in \mathscr{X}$，由此根据本定理的第 1 部分可得，流$(\mathcal{A})$ $h = \mathscr{P}_{X_f} \in$ 不与 $\mathcal{A}$ 交叉。还需证明 $f \subseteq h$。我们将用矛盾法论证。

假设 $f \not\subseteq h$，由 $h \in \Pi^{\updownarrow}$可知 $h \not\subseteq f$。我们有 $\mathcal{A} \cup \{f\}$不交叉，且 $\mathcal{A} \cup \{h\}$ 不交叉。由引理 4.1.3可知 $\mathcal{A} \cup \{f, h\}$ 不交叉，因此特别地， f 不与 h交叉。由引理 3.1.3可知 $f \lhd h$ 或 $h \lhd f$。我们依次讨论这两种情况。

首先考虑 $f \lhd h$的情况。于是引理 4.1.5给出 $g \in \mathcal{A}_{\max}$，使得 $f \lhd g$、 $g \lhd h$，并且f， g， h在 $\subseteq$下均不可比较。因此 $g \in \mathcal{A}_{\max} \setminus X_f$，由引理 4.3.6可得 $h \lhd g$。于是由引理 3.1.6可知 $g \subseteq h$ 或 $h \subseteq g$，这与矛盾。

$h \lhd f$ 的情形论证类似。现在，引理 4.1.5 给出 $g \in \mathcal{A}_{\max}$，使得 $h \lhd g$、$g \lhd f$ 满足 f， g， h在 $\subseteq$ 下都不可比较。因此 $g \in X_f$，由引理 4.3.6 可得 $g \lhd h$，而再次运用引理 3.1.6便得到矛盾。证明至此完成。■

4.4 流映射

本节将确立式 (2.13) 中定义的流运算的更多性质，包括引理 4.4.3，该引理表明 $\mathcal{A} \mapsto$ flow$(\mathcal{A})$ 在 $\mathscr{W}_{\det}$ 上连续。引理 4.4.1 包含另一项重要结果：定理 4.3.9 的路径延拓保持紧致性。在这里，我们首次看到本文所有主要概念之间的相互作用： $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 中的相对紧性、路径延拓，以及编织的普遍性和不交叉性质。

引理 4.4.1 设 $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 是 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$的一个相对紧子集，其中每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{A}$都是确定性编织。假设 $\mathscr{A}$的任意极限点都是不交叉的。那么 $\{$流$(\mathcal{A})$； $\mathcal{A} \in \mathscr{A}\}$是 $\mathcal{K}(\Pi^{\updownarrow})$的一个相对紧子集。

Proof: 由于 $\Pi^{\updownarrow}$ 是 $\Pi^{\uparrow}$的闭子集，因此 $\mathcal{K}(\Pi^{\updownarrow})$ 也是 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 的闭子集。因此，只需考虑 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 中的相对紧性。根据引理 A.1.1，集合 $\{$flow$(\mathcal{A})$; $\mathcal{A} \in \mathscr{A}\}$

是 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 的相对紧子集，当且仅当 $\mathcal{F}=\bigcup_{\mathcal{A}\in\mathscr{A}}\mathsf{flow}(\mathcal{A})$ 是 $\Pi^{\uparrow}$ 的相对紧子集。我们将用反证法进行论证。

假设 $\mathcal{F}$ 不是相对紧的。那么，根据命题 A.2.1，存在 T，$\kappa>0$以及序列 $(\delta_n)\subseteq(0,1)$、$(f_n)\subseteq\mathcal{F}$，使得 $\delta_n\searrow 0$ 且 $w_{T,\,\delta_n}(f_n)\geq\kappa$。为方便起见，回顾一下 (A.2)：

$$w_{T,\delta}(f)=\sup\big\{d_{\overline{\mathbb{R}}}\big(f(t_2\star_2),[f(t_1\star_1),f(t_3\star_3)]\big)\,;t_1\star_1,t_2\star_2,t_3\star_3\in I_{\mathfrak{s}}(f),\\ -T<t_1<t_2<t_3<T,\ t_3-t_1<\delta\big\}.$$

因此，我们有 $t_i^n\star_i^n\in I_{\mathfrak{s}}(f_n)$，使得 $-T<t_1^n<t_2^n<t_3^n<T$ 且 $t_3^n-t_1^n<\delta$，其中

$$d_{\overline{\mathbb{R}}}\left(f_n(t_2^n\star_2^n),[f_n(t_1^n\star_1^n),f(t_3^n\star_3^n)]\right)\geq\kappa. \tag{4.20}$$

由双无限路径 f_n 的 càdlàg 性质，不妨设（必要时缩小 $\kappa>0$），使得 f_n 在 $t_i^n\star_i^n$处连续，其中 $i=1,2,3$。由于 $\mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$ 是紧致的，不妨转而取一个子序列，并额外假设 $f_n(t_i^n)\to y_i\in\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$中。由于 $\dashv[-T,T]$ 是紧致的，我们可以进一步取一个子序列，并额外假设 $t_i^n\to t_i$，其中 $t_i\in[-T,T]$。由于 $0\leq t_3^n-t_1^n<\delta_n$ 实际上 $t_1=t_2=t_3=t$。总而言之，我们得到

$$t_1^n<t_2^n<t_3^n\text{ for all }n\text{ and }t_i^n\to t\in[-T,T]\text{ as }n\to\infty. \tag{4.21}$$

不失一般性（或者考虑将空间关于原点反射后的相同情形），我们再取一个子序列，并额外假设 $f_n(t_1^n)\leq f_n(t_2^n)$，由 (4.20) 可知

$$f_n(t_i^n)+\kappa\leq f_n(t_2^n)\quad\text{ for }i=1,3. \tag{4.22}$$

注意，对于某个 $\mathcal{A}\in\mathscr{A}$，$f_n\in\mathcal{A}$，我们将这样的 $\mathcal{A}$记作 $\mathcal{A}_n$。由 $\mathcal{A}_n$ 的普遍性可知，存在

$$g_n\in\mathcal{A}_n\left((t_1^n,f_n(t_1^n)+\tfrac{\kappa}{3})\right)\quad\text{and}\quad h_n\in\mathcal{A}_n\left((t_2^n,f_n(t_2^n)-\tfrac{\kappa}{3})\right). \tag{4.23}$$

由于 $\mathcal{A}_n$ 是一种编织，g_n 与 h_n 不交叉。由引理 A.1.1，$\mathscr{A}$ 的相对紧性可知，$\mathcal{B}=\bigcup_{\mathcal{A}\in\mathscr{A}}\mathcal{A}$ 是 $\Pi^{\updownarrow}$ 的相对紧子集。因此，我们可以再取一个子序列，并额外假设 $g_n\to g\in\mathcal{B}$ 且 $h_n\to h\in\mathcal{B}$。序列 $(\mathcal{A}_n)$ 是 $\mathscr{A}$ 的子集，因此相对紧，所以我们可以取一个子序列，并假设 $\mathcal{A}_n\to\mathcal{A}$。因此 g，$h\in\mathcal{A}$。集合 $\mathcal{A}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个极限点，因此（作为本引理的一个假设）$\mathcal{A}$ 不交叉。因此，g 与 h 不可能交叉。

我们简要说明证明剩余部分的策略：我们将通过证明 g 和 h 在时间 t交叉来导出矛盾；届时它们将朝相反方向跳过彼此。根据引理 3.1.3，g_n,h_n 在 $\lhd$ 下与 f_n可比较。由于 f_n 在 t_i^n 处连续，由 (4.23) 和引理 3.1.2 可知 $f_n\lhd g_n$和 $h_n\lhd f_n$。因此，$f_n(t_2^n)\leq g_n(t_2^n\pm)$ 且 $h_n(t_3^n\pm)\leq f_n(t_3^n)$。根据 g_n,h_n的定义，我们有$g_n(t_1^n-)\wedge g_n(t_1^n+)\leq f_n(t_1^n)+\frac{\kappa}{3}$且 $f_n(t_2^n)-\frac{\kappa}{3}\leq h_n(t_2^n-)\vee h_n(t_2^n+)$。结合这些事实与 (4.22)，我们便有 $t_i^n\bullet_i^n$使得

$$\begin{aligned}&g_n(t_1^n\bullet_1^n)+\tfrac{2\kappa}{3}\leq f_n(t_1^n)+\kappa\leq f_n(t_2^n)\leq g_n(t_2^n\bullet_2^n)\\&h_n(t_3^n\bullet_3^n)+\kappa\leq f_n(t_n^3)+\kappa\leq f_n(t_2^n)\leq h_n(t_2^n\bullet_2^n)+\tfrac{\kappa}{3}.\end{aligned}$$

因此，

$$g_n(t_1^n\bullet_1^n)+\tfrac{\kappa}{6}\leq f_n(t_2^n)-\tfrac{\kappa}{2}\leq g_n(t_2^n\bullet_2^n)-\tfrac{\kappa}{2}$$

$$h_n(t_3^n \bullet_3^n) + \tfrac{\kappa}{2} \le f_n(t_2^n) - \tfrac{\kappa}{2} \le h_n(t_2^n \bullet_2^n) - \tfrac{\kappa}{6}.$$

利用 $[-T-, T+] \subseteq \mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$是紧致的这一事实（由引理 2.1.1 可知），我们可以取一个子序列，并假设对于 $i = 1$，2，3，序列 $(t_i^n \bullet_i^n)$ 收敛于 $n \to \infty$。现在令 $n \to \infty$趋于无穷。回想 $f_n(t_2^n) \to y_2$，由引理 A.2.2 和 (4.21) 可得

$$g(t-) < y_2 - \tfrac{\kappa}{2} < g(t+)$$
$$h(t+) < y_2 - \tfrac{\kappa}{2} < h(t-),$$

这意味着 g 与 h 交叉。这与 g，$h \in \mathcal{A}$矛盾。 ■

M1 拓扑以及 $w_{T,\ \delta}$ 的特殊形式对上述论证至关重要。我们不知道 J1 拓扑下是否有类似结果。

引理 4.4.2 设 $\mathcal{A}$ 是一个确定性编织。那么，流($\mathcal{A}$) 是一个确定性编织，并且流($\mathcal{A}$) $\subseteq \Pi^{\updownarrow}$。

Proof: 注意，方程 (2.13) 表明 flow($\mathcal{A}$) $\subseteq \Pi^{\updownarrow}$。我们先证明 flow($\mathcal{A}$) 是紧致的。根据引理 4.4.1（取 $\mathscr{A} = \{\mathcal{A}\}$），我们有 flow($\mathcal{A}$) 是相对紧的。我们将证明 flow($\mathcal{A}$) 是闭的（因而是紧致的）。设 $g_n \to g$，其中 $g_n \in$ flow($\mathcal{A}$)。对于任意 $f \in \mathcal{A}$，存在 $f' \in$ flow($\mathcal{A}$)，使得 $f \subseteq f'$。因此，对所有n，f' 与 g_n 不交叉。由引理 3.3.6 可知，f' 与 g 不交叉，这意味着 f 与 g 不交叉。因此，f 与 $\mathcal{A}$不交叉，这意味着 $f \in$flow($\mathcal{A}$)。

要验证 flow($\mathcal{A}$) 是一个编织，只需证明 flow($\mathcal{A}$) 是遍历的且不交叉。如果 g，$h \in$ flow($\mathcal{A}$)，那么根据 (2.13)，我们有 $\mathcal{A} \cup \{g\}$ 不交叉，且 $\mathcal{A} \cup \{h\}$ 不交叉。因此，由引理 4.1.3 可知 $\{g, h\}$ 不交叉，事实上，flow($\mathcal{A}$) 不交叉。如果 $z \in \mathbb{R}_c^2$，那么 $\mathcal{A}$ 的普遍性意味着存在某个 $f \in \mathcal{A}$，使得$f \in H(f)$。定理 4.3.9 意味着存在 $f' \in$flow($\mathcal{A}$)，其中 $f \subseteq f'$，因此 $z \in H(f')$。由此，flow($\mathcal{A}$) 是遍历的。■

引理 4.4。 3 设 $\mathcal{A}_n$、$\mathcal{A}$ 是满足 $\mathcal{A}_n \to \mathcal{A}$的确定性编织。那么 flow($\mathcal{A}_n$) $\to$ flow($\mathcal{A}$) .

Proof: 集合 $\mathscr{A} = \{\mathcal{A}_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 的相对紧子集。$\mathscr{A}$的唯一极限点是 $\mathcal{A}$，它是不交叉的。因此，根据引理 4.4.1，集合 {flow($\mathcal{A}_n$)；$n \in \mathbb{N}$} 是 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 的相对紧子集。假设我们沿某个子序列有 $\mathcal{A}_n \to \mathcal{F}$，并略微滥用记号，将其替换为该子序列。为证明本引理，我们必须证明 $\mathcal{F}$ =flow($\mathcal{A}$)。

根据引理 4.4.3，我们有 flow($\mathcal{A}$) 是一个确定性编织。下面证明 $\mathcal{F}$ 也是一个确定性编织，其中 $\mathcal{F} \subseteq \Pi^{\updownarrow}$。由上一段可知 $\mathcal{F} \in \mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$。由于 $\mathcal{A}_n \to \mathcal{F}$，且每个 $\mathcal{A}_n$ 都是闭集 $\Pi^{\updownarrow}$的子集，因此有 $\mathcal{F} \subseteq \Pi^{\updownarrow}$。如果 f，$g \in \mathcal{F}$ 那么有 f_n，$g_n \in$ flow($\mathcal{A}_n$)，使得 $f_n \to f$ 且 $g_n \to g$。我们知道 f_n 和 g_n 不交叉，因此根据引理 3.3.6 f，g 也不交叉。于是 $\mathcal{F}$ 是不交叉的。对于所有 $z \in \mathbb{R}_c^2$，都存在$f_n \in \mathcal{A}_n$，使得 $z \in H(f_n)$。根据引理 A.1.1，($\mathcal{A}_n$)的相对紧性蕴含 (f_n) 的相对紧性，因此我们可以取一个子序列，并假设 $f_n \to f \in \mathcal{F}$。引理 A.2.2 给出 $z \in H(f)$。因此 $\mathcal{F}$ 是遍历的。至此，我们已证明 $\mathcal{F} \subseteq \Pi^{\updownarrow}$ 是一个确定性编织。

我们的下一个目标是证明 $\mathcal{F}$ 和流($\mathcal{A}$)不交叉。设 $f \in \mathcal{F}$ 和 $g \in \mathcal{A}$。那么存在 $f_n \in$ 流($\mathcal{A}_n$) 和 $g_n \in \mathcal{A}_n$，使得 $f_n \to f$ 和 $g_n \to g$。根据定理 4.3.9，存在 $g_n' \in$ 流($\mathcal{A}_n$)，使得 $g_n \subseteq g_n'$。我们有流($\mathcal{A}_n$) $\to \mathcal{F}$，因此根据引理 A.1.1，集合

$\mathcal{F} \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$流$(\mathcal{A}_n))$ 是紧致的，这意味着 $\{g'_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ 是相对紧的。因此存在 $g' \in \mathcal{F}$，使得 $g'_n \to g'$。根据引理 A.2.2，我们有 $g \subseteq g'$。 f_n 和 g'_n 都是 $\mathcal{A}_n$的元素，因此它们彼此不交叉。根据引理 3.3.6， f 和 g' 彼此不交叉。由于 $g \subseteq g'$，这意味着 f 和 g 不交叉。

现在我们知道， $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{A}$ 不交叉，并且二者都是完全由双无限路径构成的确定性编织。由引理 4.2.6 可知， $\mathcal{F} = \mathcal{A}$。■

引理 4.4.4 设 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$ 是确定性编织，并假设 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ 不交叉。那么$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ 是确定性编织，并且流$(\mathcal{A})$ $=$ 流$(\mathcal{B})$。

Proof: 显然可以验证， $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ 是确定性编织。由引理 4.4.2 可知，流$(\mathcal{A})$和流$(\mathcal{B})$是确定性编织，且完全由双无限路径构成。由引理 4.1.4 可知，路径 $f \in \Pi^{\updownarrow}$ 与 $\mathcal{A}$ 交叉，当且仅当它与 $\mathcal{B}$ 交叉，因此根据引理 4.2.6，我们有流$(\mathcal{A})$ $=$流$(\mathcal{B})$。■

引理 4.4.5 设 $\mathcal{A}$ 是确定性编织。那么流$(\mathcal{A})$ 是$(\mathscr{W}_{\det}, \preceq)$的一个极大元，并且 $\mathcal{A} \preceq$流$(\mathcal{A})$。

Proof: 读者可以查阅（2.7）以了解偏序 $\preceq$ 的定义。注意，引理 4.4.2 给出 $\mathsf{flow}(\mathcal{A}) \in \mathscr{W}_{\det}$。我们先证明 $\mathcal{A} \preceq \mathsf{flow}(\mathcal{A})$。定理 4.3.9 给出 $\mathcal{A} \subseteq (\mathsf{flow}(\mathcal{A}))^{\uparrow}$。现在考虑 $f \in \mathcal{A}_{\uparrow} \cap \mathsf{flow}(\mathcal{A})$。对于这样的 f，我们有 $f \in \Pi^{\updownarrow}$，这意味着 $f \in \mathcal{A}$。因此 $\mathcal{A} \preceq \mathsf{flow}(\mathcal{A})$。

接下来还需证明 $\mathsf{flow}(\mathcal{A})$ 是 $\mathscr{W}_{\det}$ 的一个极大元。引理 4.4.2 给出 $\mathsf{flow}(\mathcal{A}) \in \mathscr{W}_{\det}$。假设 $\mathcal{B} \in \mathscr{W}_{\det}$ 在 $\preceq$ 下与 $\mathsf{flow}(\mathcal{A})$ 可比较。我们必须证明 $\mathcal{B} \preceq \mathsf{flow}(\mathcal{A})$。由引理 3.1.7 可知，$\mathsf{flow}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{B}$ 不交叉。根据我们已经证明的内容，有 $\mathcal{A} \preceq \mathsf{flow}(\mathcal{A})$，因此再次应用引理 3.1.7 可得 $\mathcal{A} \cup \mathsf{flow}(\mathcal{A})$ 不交叉。于是由引理 4.1.3 可知， $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ 不交叉。引理 4.4.4 给出 $\mathsf{flow}(\mathcal{A})$ $= \mathsf{flow}(\mathcal{B})$。根据我们已经证明的内容，现在有 $\mathcal{B} \preceq \mathsf{flow}(\mathcal{B}) = \mathsf{flow}(\mathcal{A})$，这正是所需的结论。证明至此完成。■

引理 4.4.6 设 $\mathcal{A}$ 是一个确定性编织。 $\mathcal{A}$ 的分叉点集合的勒贝格测度为零。

Proof: 由引理 4.4.2 可知，流运算$(\mathcal{A})$ $= \{f \in \Pi^{\updownarrow};\ f$ 不与 $\mathcal{A}\}$ 交叉，是一个编织。引理 4.2.5 表明，流运算$(\mathcal{A})$ 的分叉点集合的测度为零。根据定理 4.3.9， $\mathcal{A}$ 的任意分叉点也是 $\mathcal{F}$ 的分叉点。结论得证。■

根据引理 4.4.6，对于任意确定性编织 $\mathcal{A}$，都存在一个稠密可数子集$D \subseteq \mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$，其中不含分叉点。在引理 5.4.1 中，我们将讨论对于随机波，如何将这样的子集选为一个随机变量。

4.5 网映射

本节研究式 (2.12) 中定义的网运算的性质。本节中的一些结果类似于第 4.4 节中关于流运算已证明的性质。我们还将讨论式 (2.12) 对集合 D 的依赖性，或者更确切地说，讨论其不依赖于该集合的性质。网运算涉及“下集”运算 $A_{\uparrow} = \{f \in \Pi^{\uparrow};$ 对于某些 $g \in A\}$，还要在 $\Pi^{\uparrow}$ 中取闭包，因此我们先考察这两种运算之间的相互作用。

引理 4.5。 **1** 若 $A \subseteq \Pi^{\uparrow}$ 相对紧，则 $A_{\uparrow}$ 相对紧，且 $(A)^{\uparrow} = (A_{\uparrow}$ $\overline{}$ $\overline{})$.

PROOF: 第一个结论可由命题 A.2.1 立即得出。还需证明 $(A)\uparrow = (A_\uparrow)$。为此，假设 $f \in (A)\uparrow$。于是存在 $(g_n) \subseteq A$，使得$g_n \to g \in \Pi^\uparrow$ 且 $f \subseteq g$。令 $z \in \mathbb{R}^2_c$ 表示 f的初始点。根据引理 A.2.2 $z \in \cup_n H(g_n)$。因此，我们可以取 (g_n) 的一个子序列，并选取 $z_n \in H(g_n)$，使得 $z_n \to z$。由引理 A.2.2 可知 $g_n|_{z_n} \to g|_z = f$，故 $f \in (A_\uparrow)$。于是 $(A)\uparrow \subseteq (A_\uparrow)$。

为证明反向包含关系，我们先说明：若 $B \subseteq \Pi$ 是紧致的，则 $B_\uparrow$ 是闭的。取这样一个 B，并令 $(f_n) \subseteq \mathcal{B}_\uparrow$ 满足 $f_n \to f$。我们有 $(g_n) \subseteq B$ 使得$f_n \subseteq g_n$。由紧致性，取 (g_n) 的一个子序列后，可得 $g_n \to g \in B$。由引理 3.3.3 可知 $f \subseteq g$，因此 $f \in B_\uparrow$，这就证明了 $B_\uparrow$ 是闭的。

现在我们证明反向包含关系。设 $f \in (A_\uparrow)$。那么存在 $(g_n) \subseteq A$ 和$f_n \subseteq g_n$ 使得 $f_n \to f$。特别地，$g_n \in A$，这意味着 $f_n \in (A)\uparrow$。由上一段可知 $(A)\uparrow$ 是闭的，因此 $f \in (A)\uparrow$。于是 $(A)_\uparrow \supseteq (A_\uparrow)$，证毕。■

引理 4.5.2 设 $\mathcal{A}$ 是一个确定性编织。则 $\mathcal{A}_\uparrow$ 是一个确定性编织，并且 $\mathcal{A}_\uparrow \preceq \mathcal{A}$。

PROOF: 根据引理 4.5.1， $\mathcal{A}_\uparrow$ 具有相对紧性。由于 $\mathcal{A}$ 是一个编织， $\mathcal{A}$ 是闭的，因此由引理 4.5.1可知， $\mathcal{A}_\uparrow$ 是闭的，从而推出紧致性。根据定义 2.3.1， $\mathcal{A}_\uparrow$ 的非交叉性质继承自 $\mathcal{A}$ 。利用 $\mathcal{A}_\uparrow =(\mathcal{A}_\uparrow)\uparrow$ ，可以直接验证 (2.7) 给出 $\mathcal{A}_\uparrow \preceq \mathcal{A}$。■

引理 4.5.3 设 $\mathcal{A}$ 是一个确定性编织，且 D、D' 是 $\mathbb{R}^2$ 的稠密非分支子集。按照 (2.12) 定义网 $_D(\mathcal{A})$ 。则 网 $_D(\mathcal{A}) =$ 网 $_{D'}(\mathcal{A})$。

PROOF: 设 $\mathcal{A}$ 为一个编织，并设 D、 D' 为 $\mathbb{R}^2$的稠密非分歧子集。我们注意到，只需证明

$$(\mathcal{A}|_D)_\uparrow \subseteq \overline{(\mathcal{A}|_{D'})_\uparrow}. \tag{4.24}$$

有了 (4.24)，由对称性我们还得到 $(\mathcal{A}|_{D'})_\uparrow \subseteq (\mathcal{A}_D)\uparrow$。取闭包可知，$\overline{\text{网}_D(\mathcal{A})} =\text{网}_{D'}(\mathcal{A})$。

设 f 为 (4.24) 左端的一个元素。那么存在 $z \in D$ 和 $g \in \mathcal{A}(z)$，使得 $f \subseteq g|_z$。利用 D' 的稠密性，取 $z_n \in D'$ 使得 $z_n \to z$；再利用 $\mathcal{A}$ 的遍历性，取 $g'_n \in \mathcal{A}(z_n)$。由 $\mathcal{A}$ 的紧致性，我们可以转而取一个子序列，并假设 $g'_n \to g \in \mathcal{A}(z)$；根据引理 A.2.2，这意味着 $g'_n|_{z_n} \to g|_z$。

由于 $g, g' \in \mathcal{A}(z)$ 且 z 是非分歧的，我们有 $g|_z = g'|_z$。因此 $f \subseteq g'|_z$。令 w表示 f的初始点。利用 $g'_n|_{z_n} \to g'|_z$，由引理 A.1.1 可得

$$w \in H(g'|_z) \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H(g'_n|_{z_n})}.$$

如果对于某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $w \in H(g'_n|_{z_n})$，那么我们便有 $f \subseteq g'_n|_{z_n} \in \mathcal{A}|_{D'}$，结论得证。否则，存在 n 的一个子序列，使得 $w_n \in H(g'_n|_{z_n})$ 且 $w_n \to w$，不妨设我们取的就是这个子序列。因此有 $g'_n|_{w_n} \subseteq g'_n|_{z_n}$，故 $g'_n|_{w_n} \in (\mathcal{A}_{D'})\uparrow$。注意到 $w_n \to w$ 和 $g'_n \to g$，由引理 A.2.2 可知 $g'_n|_{w_n} \to f$。因此 $f \in (\mathcal{A}_{D'})\uparrow$。这就证明了 (4.24)，并完成了证明。■

注 4.5.4 从这里开始，我们将经常通过写作 $\text{web}_D(\mathcal{A}) = \text{web}(\mathcal{A})$ 来隐式地使用引理 4.5.3。引理 4.4.6 和引理 4.5.3 结合起来表明，web : $\mathscr{W}_{\text{det}} \to \mathscr{W}_{\text{det}}$ 是一个确定性函数。

引理 4.5.5 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 是确定性编织，并假设 $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ 不交叉。则$\mathrm{web}(\mathcal{A}) = \mathrm{web}(\mathcal{B})$。

Proof: 由于 $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ 不交叉，显然可以验证 $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ 是一个编织。根据引理 4.4.6，存在 $D\subseteq\mathbb{R}^2$，其相对于 $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$是稠密且非分歧的。注意，这意味着 D 相对于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$也都是非分歧的。固定某个 $z\in D$，并考虑$f\in\mathcal{A}(z)$ 和 $g\in\mathcal{B}(z)$。注意，$(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})(z) = \mathcal{A}(z)\cup\mathcal{B}(z)$。我们有 f，$g\in(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})(z)$，且 z是非分歧的，因此有 $f|_z = g|_z$。由于 z，f，g是任意的，根据 (2.12)，这意味着网$_D(\mathcal{A})$ =网$_D(\mathcal{B})$。■

引理 4.5.6 </style}令 为一个确定性编织。那么 网(*A) </style}*是一个确定性编织 e.

Proof: 固定一个稠密的非分歧 $D\subseteq\mathbb{R}^2$。根据引理 4.5.3，只需验证 $\mathcal{W}$ =网$_D(\mathcal{A})$ 是一个编织。注意到 $(\mathcal{A}|_D)_\uparrow\subseteq A_\uparrow$，由 $\mathcal{A}$ 的紧致性和引理 4.5.1 可知 $\mathcal{W}$ 是紧致的。同理，根据引理 4.5.2，$\mathcal{W}$ 继承了 $\mathcal{A}$ 的不交叉性质。最后，对于任意 $z\in\mathbb{R}^2$，存在 $(z_n)\subseteq D$，使得 $z_n\to z$。取 $f_n\in\mathcal{A}(z)$ 并注意$g_n = f_n|_{z_n}\in\mathcal{W}$。由紧致性，$g_n$ 有一个子列极限点 $g\in\mathcal{W}$; 根据引理 A.2.2，我们有 $g\in\mathcal{W}(z)$。因此，$\mathcal{W}$ 是遍历的，所以 $\mathcal{W}$ 是一个编织。■

引理 4.5.7 设 $\mathcal{A}$ 是一个确定性编织。那么 网$(\mathcal{A})$ 是 $(\mathscr{W}_{\mathrm{det}},\preceq)$ 的一个极小元，并且 网$(\mathcal{A})\preceq\mathcal{A}$。

Proof: 设 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 相对于 $\mathcal{A}$ 是非分歧的，并记 $\mathcal{W} =$ 网$_D(\mathcal{A})$。注意到引理 4.5.6 给出 $\mathcal{W}\in\mathscr{W}_{\mathrm{det}}$。我们首先证明 $\mathcal{W}\preceq\mathcal{A}$。由 (2.12) 立即得到$\mathcal{W}\subseteq(\mathcal{A}_\uparrow)$，因此根据引理 4.5.1 以及 $\mathcal{A}$ 的紧致性，我们有 $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{A}_\uparrow$。命题 A.2.1 蕴含 $\mathcal{A}|_D$ 是相对紧的，因此由引理 4.5.1 和 (2.12) 得到 ~~$\mathcal{W}_\uparrow = ((\mathcal{A}|_D)\uparrow)\uparrow = (\mathcal{A}|_D)_\uparrow = \mathcal{W}$~~，所以显然有 $\mathcal{W}_\uparrow\cap\mathcal{A}\subseteq\mathcal{W}$。根据 (2.7)，现在有 $\mathcal{W}\preceq\mathcal{A}$。

设 $\mathcal{B}$ 是一个确定性编织，可与网$(\mathcal{A})$比较。我们必须证明 web$(\mathcal{A})\preceq\mathcal{B}$。论证与引理 4.4.5 的论证类似。由引理 3.1.7 可知，web$(\mathcal{A})\cup\mathcal{B}$ 是不交叉的。根据我们已经证明的结果，有 web$(\mathcal{A})\preceq\mathcal{A}$，因此再次使用引理 3.1.7 可得，$\mathcal{A}\cup$ web$(\mathcal{A})$ 是不交叉的。于是由引理 4.1.3 可知，$\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$是不交叉的。现在由引理 4.5.5 得到，web$(\mathcal{A})$ =web$(\mathcal{B})$。根据我们已经证明的结果，有 web$(\mathcal{A})$ = web$(\mathcal{B})\preceq\mathcal{B}$，正如所要求的。■

5 随机编织

现在我们将注意力转向随机编织。我们将在第 5.3–5.7 节中给出主要结果（陈述于第 2.4 节）的证明。在能够严谨地研究随机编织之前，我们需要先处理一些技术问题，其中大部分与可测性有关。对于希望了解后续章节中主要结果证明的读者来说，第 5.1 节和第 5.2 节中的证明并非必读内容。

5.1 关于可测性

为了理解第 2.4 节主要结果的表述，我们要求若干对象是可测的。例如，如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是随机编织，那么我们需要 $\{\mathcal{A}\preceq\mathcal{B}\}$ 是一个事件，并且需要 web$(\mathcal{A})$ 和 flow$(\mathcal{A})$ 是随机变量。在附录 A.3 中我们证明

与空间 $\mathcal{K}(\Pi^\uparrow)$ 相关的若干基本映射是可测的，而在这里我们关注编织所特有的可测性。我们还在引理 4.4.3 中看到，映射 $\mathcal{A} \mapsto \mathsf{flow}(\mathcal{A})$ 是从 $\mathscr{W}_{\mathrm{det}}$ 到其自身的连续映射。如图 2.5.1 中的示例所示，映射 $\mathsf{web}(\cdot)$ 在 $\mathscr{W}_{\mathrm{det}}$ 上并不连续。我们将 web 和 flow 定义为定义域为 $\mathscr{W}_{\mathrm{det}}$ 的映射，但我们根据 $\mathcal{K}(\Pi^\uparrow)$ 上的拓扑来检验可测性，因此下面的引理在技术上是必要的。

引理 5.1.1 可知，$\mathscr{W}_{\mathrm{det}}$ 是 $\mathcal{K}$（$\Pi^\uparrow$）的一个可测子集。

Proof: 我们有 $\mathscr{W}_{\mathrm{det}} = \{A \in \mathcal{K}(\Pi^\uparrow);\ A \text{ 是遍历的}\} \cap \{A \in \mathcal{K}(\Pi^\uparrow);\ A \text{ 不交叉}\}$。利用引理 A.2.2，可以直接验证 $\{A \in \mathcal{K}(\Pi^\uparrow);\ A \text{ 是遍历的}\}$ 是闭的。剩下要证明 $\{A \in \mathcal{K}(\Pi^\uparrow);\ A \text{ 不交叉}\}$ 是可测的。

考虑满足 $A_n \to A$ 的 $A_n,\ A \in \mathcal{K}(\Pi)$，并且对每个 $n,\ A_n$ 都不交叉。假设 A 不是不交叉的，特别地，假设 $f,\ g \in A$ 彼此交叉。我们有$f_n,\ g_n \in \mathcal{A}_n$，使得 $f_n \to f$ 且 $g_n \to g$。由引理 3.1.3 可知，$f_n \lhd g_n$ 或 $g_n \lhd f_n$，其中至少一个对无穷多个 n成立。由引理 3.3.9 的第 2 部分可知，$\mathcal{A}$包含一对路径 $f',\ g'$，使得 $f' \blacktriangleleft_\epsilon g'$，其中某个 $\epsilon > 0$。写作

$$
\begin{aligned}
N &= \{A \in \mathcal{K}(\Pi^\uparrow)\,;\, A \text{ is non-crossing}\},\\
M_\epsilon &= \{A \in \mathcal{K}(\Pi^\uparrow)\,;\, \text{there exists } f, g \in A \text{ with } f \blacktriangleleft_{1/n} g\}\\
L &= \{A \in \mathcal{K}(\Pi^\uparrow)\,;\, \text{there exists } f \in A \text{ with } \sigma_f = -\infty \text{ or } \sigma_f = +\infty\}.
\end{aligned}
$$

由此得到 $N = N \cup \left(N \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_{1/n}\right)$. 根据引理 3.3.9 的第 1 部分，我们有 $N \cap M_\epsilon = \emptyset$，因此 $N = N \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_{1/n}\right)$. 引理 3.3.11 表明，对于每个 $n \in \mathbb{N},\ M_{1/n} \cup L$ 是闭的；注意到 L 也闭，因此我们得到 $M_{1/n} = (M_{1/n} \cup L) \setminus L$ 是可测的。因此，N 是可测的。证明完毕。■

引理 5.1.2 映射 $\mathcal{A} \mapsto$网$(\mathcal{A})$ 从 $\mathscr{W}_{\mathrm{det}}$ 到其自身是可测的。

Proof: 由引理 5.1.1 可知，$\mathscr{W}_{\mathrm{det}}$ 是可测的。回顾注 4.5.4，其中我们指出，对于 $\mathcal{A} \in \mathscr{W}_{\mathrm{det}}$，只要 $D \subseteq \mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$是稠密且非分歧的，$\mathsf{web}_D(\mathcal{A})$ 的值就不依赖于 D。因此，我们记 $\mathsf{web}(\mathcal{A}) = \mathsf{web}_D(\mathcal{A})$。

设 μ 是 $\mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$ 上具有全支撑且无原子的测度。设 $(z_i)_{i=1}^\infty$ 是定义在概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ 上、分布为 μ 的一列独立随机变量。下面的论证有些特别，因此我们先概述一下。我们将证明，从 $\mathcal{A} \in \mathscr{W}_{\mathrm{det}}$ 到 $\mathsf{web}_D(\mathcal{A})$ 的分布的映射是可测映射，并且该分布恰好是一个在 $\mathsf{web}(\mathcal{A})$ 处具有点质量的概率测度。利用从点质量测度到其对应点的映射是可测映射这一事实，即可得到所述结论。

由引理 A.3.2，映射 $(A,\ \omega) \mapsto A|_{z_i}(\omega)$ 是从 $\mathcal{K}(\Pi) \times \Omega \to \mathcal{K}(\Pi)$ 到.....的可测映射。由引理 A.3.3 可知

$$
(A, \omega) \mapsto M_n(A, \omega) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A|_{z_i(\omega)}\right)_\uparrow \tag{5.1}
$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$，它作为函数 $M_n : \mathscr{W}_{\mathrm{det}} \times \Omega \to \mathscr{W}_{\mathrm{det}}$ 都是可测的。

对于所有 $\mathcal{A} \in \mathscr{W}_{\mathrm{det}}$ 和 $\omega \in \Omega$，我们有 $M_n(\mathcal{A},\ \omega) \subseteq M_{n+1}(\mathcal{A},\ \omega) \subseteq \mathcal{A}_{\uparrow\circ}$ 引理 4.5.1 表明，$\mathcal{A}_\uparrow$ 是 Π的一个紧子集，这意味着序列 $(M_n(\mathcal{A},\ \omega))_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{K}(\Pi)$的一个相对紧子集。令 $\mathcal{B}$ 为 $(M_n(\mathcal{A},\ \omega))$ 在 $\mathcal{K}(\Pi^\uparrow)$ 中的一个极限点，当 $n \to \infty$时。

我们旨在证明 $\mathbb{P}[B = \text{网}(\mathcal{A})] = 1$。对于每个 $\mathcal{A} \in \mathscr{W}_{\text{det}}$，我们有

$$\mathbb{P}[(z_i) \text{ is dense in } \mathbb{R}^2 \text{ and non-ramified in } \mathcal{A}] = 1. \tag{5.2}$$

我们记为 $D = (z_i(\omega))_{i\in\mathbb{N}}$。现在假设 (5.2) 中的事件发生。那么，如果 $g \in B$我们有 $z_{i_n} \subseteq \mathbb{R}^2$，$f_n \in \mathcal{A}(z_{i_n})$，以及 $g_n \in \Pi^{\uparrow}$，使得 $g_n \subseteq f_n|_{z_{i_n}}$ 且 $g_n \to g$。立即可得 $g \in \text{网}_D(\mathcal{A})$，因此 $B \subseteq \text{网}_D(\mathcal{A})$。类似地，如果 $g \in \text{网}_D(\mathcal{A})$，那么存在$z_i \in \mathbb{R}^2$、$f_i \in A(z_n)$和 $g_i \in \Pi^{\uparrow}$，使得 $g_i \subseteq f_i$ 且 $g_i \to g$。因此，对所有 i，都存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $g_i \in M_n(\mathcal{A}, \omega)$。于是 $g \in B$ 且 $B = \text{网}_D(\mathcal{A})$，根据引理 4.5.3，这等于网$_D(\mathcal{A})$。因此我们有 $\mathbb{P}[B = \text{网}(\mathcal{A})] = 1$。

令 $\mathscr{P}(\mathscr{W}_{\text{det}})$ 表示 $\mathscr{W}_{\text{det}}$ 上概率测度构成的空间，并令 $\mathscr{P}_0(\mathscr{W}_{\text{det}})$ 表示点质量概率测度构成的闭子空间。令 $\delta_A \in \mathscr{P}_0(\mathscr{W}_{\text{det}})$ 为在 $A \in \mathscr{W}_{\text{det}}$ 处具有点质量的概率测度。令 $\mathscr{L}_n^{\mathcal{A}} \in \mathscr{P}(\mathscr{W}_{\text{det}})$ 表示随机变量 $\omega \mapsto M_n(\mathcal{A}, \omega)$ 的分布。由我们已证明的结果可知，$\mathscr{L}_n^{\mathcal{A}}$弱收敛到 $\delta_{\text{web}(\mathcal{A})}$ 定义在 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 上、在网$(\mathcal{A})$ 处具有点质量的概率测度。

对于可测的 $S \subseteq \mathscr{W}_{\text{det}}$，我们有

$$\mathcal{L}_n^{\mathcal{A}}(S) = \mathbb{P}[M_n(\mathcal{A}, \cdot) \in S] = \int_{\omega\in\Omega} \mathbb{1}_S(M_n(\mathcal{A}, \omega))\, d\mathbb{P}(\omega),$$

由此可知，$\mathcal{A} \mapsto \mathcal{L}_n^{\mathcal{A}}$ 是从 $\mathscr{W}_{\text{det}}$ 到 $\mathscr{P}_0(\mathscr{W}_{\text{det}})$ 的可测函数。因此，$\mathcal{A} \mapsto \delta_{\text{web}(\mathcal{A})}$ 也可测。容易看出，映射 $m : \mathscr{P}_0(\mathscr{W}_{\text{det}}) \to \mathscr{W}_{\text{det}}$，由 $\delta_A \mapsto A$ 给出，是连续的，因而也是可测的。可测函数的复合仍然可测，因此映射 $A \mapsto m(\delta_{\text{web}\,A}) = \text{网}(\mathcal{A})$ 是可测的。■

Le引理 5.1.3 集合 $\{(A, B) \in \mathcal{K}(\Pi)^2 ;\ A \preceq B\}$ 是 $\mathcal{K}(\Pi)$ 的可测子集 ^{2}.

Proof: 回顾 (2.7) 中 $\preceq$ 在 $\mathcal{K}(\Pi)$ 上的定义。只需证明 t

$$C_1 = \{(A, B) \in \mathcal{K}(\Pi)^2 ;\ A \subseteq B_{\uparrow}\}$$
$$C_2 = \{(A, B) \in \mathcal{K}(\Pi)^2 ;\ B \cap A_{\uparrow} \subseteq A\}$$

都是 $\mathcal{K}(\Pi)^2$, 的可测子集，其中 $\mathcal{K}(\Pi)^2$ 配备了积拓扑及相应的博雷尔 σ-域。注意，只要 $A \in \mathcal{K}(\Pi)$ 是闭集，$A_{\uparrow}$ 就是闭集。利用引理 A.2.2，可以直接验证集合 $C_1 = \{(A, B) \in \mathcal{K}(\Pi)^2 ;\ \forall f \in A\ \exists g \in B$ 使得 $f \subseteq g\}$ 为闭集。现在我们继续讨论 C_2。为此，注意到 $B \cap A_{\uparrow} \not\subseteq A$ 当且仅当存在 $f \in A_{\uparrow}$ 和 $g \in B$，使得 $g \subseteq f$ 且 $f \notin A$。条件 $f \notin A$ 等价于 $d_{\mathcal{K}(\Pi)}(\{f\}, A) > 0$；由于 A 是闭集，这又等价于对某个 $\epsilon > 0$，有 $d_{\mathcal{K}(\Pi)}(\{f\}, A) \geq \epsilon$。因此我们有 $C_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{1/n}$，其中

$$S_\epsilon = \left\{(A, B) \in \mathcal{K}(\Pi)^2 ; \exists f \in A_{\uparrow}, g \in B \text{ such that } g \subseteq f \text{ and } d_{\mathcal{K}(\Pi)}(\{f\}, A) \geq \epsilon\right\}.$$

与上文类似，利用引理 A.2.2 可以直接验证，对于任意$\epsilon > 0$，S_ϵ 是闭的。因此，C_2 是可测的。■

5.2 随机编织的偏序

本节将证明，正如我们在下文（2.7）之前所定义的，$\preceq_{\text{d}}$ 是随机编织（的分布）上的偏序。更确切地说，回顾一下，$\mathcal{P}(M)$表示度量空间 M上的概率测度空间。我们已在引理 3.2.2 中证明，由（2.7）给出的 $\preceq$ 定义了一个偏序

在 $\mathcal{K}(\Pi^\uparrow)$上。在第 2.3 节中，我们将 $\preceq$ 扩展到了 $\mathcal{P}(\mathcal{K}(\Pi^\uparrow))$；也就是说，若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$是取值于 $\mathcal{K}(\Pi^\uparrow)$的随机变量，则当存在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$的一个耦合使得 $\mathbb{P}[\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}] = 1$时，我们记作 $\mathcal{A} \preceq_{\mathrm{d}} \mathcal{B}$ 。我们的目标是证明， $\preceq_{\mathrm{d}}$ 是 $\mathcal{P}(\mathcal{K}(\Pi^\uparrow))$上的偏序。

如果按照定义 3.3.1 的含义， $\preceq$ 与（$\mathcal{K}$（Π） d_Π）相容，那么我们可以使用经典结果，例如 Liggett（1985）中的定理 2.4，得到向 $\mathcal{P}$（$\mathcal{K}$（Π））的扩展。然而，正如我们在注 3.3.2 中所看到的，在这种情况下相容性并不成立。因此，我们需要一个使用紧致性和（2.7）精确形式的原创论证。我们首先给出一个预备引理。

引理 5.2.1 设 $\mathcal{D}$、$\mathcal{D}'$ 是取值于 $\mathcal{K}$（$\Pi^\uparrow$） 的随机变量，具有相同的边缘分布，并以如下方式耦合： $\mathbb{P}[\mathcal{D} \preceq \mathcal{D}'] = 1$。则 $\mathbb{P}[\mathcal{D} = \mathcal{D}'] = 1$.

Proof: 根据命题 2.2.1，度量空间 $\Pi^\uparrow$ 是可分的，这意味着其拓扑具有一个可数基：存在一个由 $\Pi^\uparrow$ 的非空开子集组成的族（U_i）$_{i\in\mathbb{N}}$ ，使得任意开子集 $O \subseteq \Pi$ 都可以写成 $O = \cup_{i\in I} U_i$ ，其中 $I \subseteq \mathbb{N}$。

假设引理中关于 $\mathcal{D}$、$\mathcal{D}'$ 的条件成立。证明分为两部分，分别对应不等式 $\mathbb{P}[\mathcal{D}' \setminus \mathcal{D} \neq \emptyset] > 0$ 和 $\mathbb{P}[\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}' \neq \emptyset] > 0$；我们将通过反证法证明这两个不等式各自都不可能成立。

第 1 部分。 假设 $\mathbb{P}[\mathcal{D}' \setminus \mathcal{D} \neq \emptyset] > 0$。读者或许可以看看紧接在本证明之后的注5.2.2，其中有一个简单示例，用来说明我们在此采用的策略。对于$A \subseteq \Pi$，我们写作

$$A^\circ = \{b \in \Pi^\uparrow ; \text{ there exists } a \in A \text{ such that } a \subseteq b\}. \tag{5.3}$$

在事件 $\{\mathcal{D}' \setminus \mathcal{D}\}$ 发生时，令 $d' \in \mathcal{D}' \setminus \mathcal{D}$ ，并令 $\mathcal{B}_\epsilon(d')$ 表示 $\Pi^\uparrow$ 中以 d' 为中心、半径为ϵ 的开球。现在我们将证明，几乎必然地，对于充分小的$\epsilon > 0$， $\mathcal{B}_\epsilon(d')^\circ \cap \mathcal{D}$ 为空。假设对所有 $\epsilon > 0$，都有 $\mathcal{B}_\epsilon(d')^\circ \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ 。于是，取 $\epsilon = 1/n$，得到序列$f_n \in \mathcal{B}_{1/n}(d')$ 和 $g_n \in \mathcal{B}_{1/n}(d')^\circ \cap \mathcal{D}$，且 $f_n \subseteq g_n$。由 $\mathcal{D}$ 的紧致性，我们可以取一个子序列，并假设其收敛到 $f_n \to d' \in \mathcal{D}'$ 和 $g_n \to d \in \mathcal{D}$。根据引理 A.2.2，便有 $d' \subseteq d$，因此 $d' \in \mathcal{D}_\uparrow$。我们有 $\mathbb{P}[\mathcal{D} \preceq \mathcal{D}'] = 1$ ，在该事件上 $\mathcal{D}_\uparrow \cap \mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$，所以 $d' \in \mathcal{D}$，这就产生了矛盾。因此，几乎必然地，存在某个（随机的） $\epsilon > 0$，使得 $\mathcal{B}_\epsilon(d')^\circ \cap \mathcal{D} = \emptyset$。显然， $d' \in \mathcal{B}_\epsilon(d')$ 也成立。

Let

$$O = \begin{cases} \mathcal{B}_\epsilon(d') & \text{on the event that } \mathcal{D}' \setminus \mathcal{D} \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由上一段可知 $O^\circ \cap \mathcal{D} = \emptyset$ ，且 $d' \in O$ 具有正概率。由于 O 是开集，几乎必然可以将 $O = \cup_{i\in I} U_i$ 写成某个随机的 $I \subseteq \mathbb{N}$。集合 I 以正概率非空，因此存在某个确定性的 $i \in I$ ，使得 $d' \in U_i \subseteq O$ 具有正概率。我们将这样的 i 记作 $U = U_i$ 。

在事件 $d' \in U \subseteq O$ 发生时，我们有 $U^\circ \subseteq O^\circ$，这意味着 $U^\circ \cap \mathcal{D} = \emptyset$（因为 $O^\circ \cap \mathcal{D} = \emptyset$），且 $U^\circ \cap \mathcal{D}' \neq \emptyset$（因为它包含 d'）。因此，事件 $\{U^\circ \cap \mathcal{D}' \neq \emptyset$ 和 $U^\circ \cap \mathcal{D} = \emptyset\}$ 具有正概率。于是我们有

$$\begin{aligned} 0 < \mathbb{P}\left[U^\circ \cap \mathcal{D}' \neq \emptyset \text{ and } U^\circ \cap \mathcal{D} = \emptyset\right] &= \mathbb{P}\left[U^\circ \cap \mathcal{D}' \neq \emptyset\right] - \mathbb{P}\left[U^\circ \cap \mathcal{D}' \neq \emptyset \text{ and } U^\circ \cap \mathcal{D} \neq \emptyset\right] \\ &= \mathbb{P}\left[U^\circ \cap \mathcal{D} \neq \emptyset\right] - \mathbb{P}\left[U^\circ \cap \mathcal{D}' \neq \emptyset \text{ and } U^\circ \cap \mathcal{D} \neq \emptyset\right] \\ &= \mathbb{P}\left[U^\circ \cap \mathcal{D} \neq \emptyset \text{ and } U^\circ \cap \mathcal{D}' = \emptyset\right]. \end{aligned} \tag{5.4}$$

(5.4) 的第二行成立，是因为 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 具有相同的边缘分布，其他步骤都是初等的。

考虑事件 $\{U^\circ \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$和 $U^\circ \cap \mathcal{D}' = \emptyset\}$发生的情形，根据 (5.4)，该事件具有正概率。于是我们有 $h \in U^\circ \cap \mathcal{D}$，但 $\mathbb{P}[\mathcal{D} \preceq \mathcal{D}'] = 1$，在此事件下我们有 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'_{\uparrow}$，因此存在 $h' \in \mathcal{D}'$使得 $h \subseteq h'$。由 (5.3) 可得 $h' \in U^\circ$，这与 $U^\circ \cap \mathcal{D}' = \emptyset$矛盾。因此实际上 $\mathbb{P}[\mathcal{D}' \setminus \mathcal{D} \neq \emptyset] = 0$，这正是所需的。

第 2 部分。 设 $\mathbb{P}[D \setminus D' \neq \emptyset] > 0$。论证与情形 1 类似，但稍简单一些，其中我们会用到情形 1。注意，由于 $\mathbb{P}[\mathcal{D} \preceq \mathcal{D}'] = 1$ 中固有的奇偶性，我们应当预期论证会是不对称的。为使比较清晰，我们将沿用许多记号。

在事件 $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}' \neq \emptyset$ 上，取 $d \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'$。设对所有 $\epsilon > 0$， $B_\epsilon(d) \cap \mathcal{D}' \neq \emptyset$。取$\epsilon = 1/n$，则存在 $f_n \in \mathcal{D}' \cap B_{1/n}(d)$。由紧致性，我们可以取一个子序列，并假设 $f_n \to f \in \mathcal{D}'$ 收敛。这意味着 $f = d$，但这与 $f \in \mathcal{D}'$ 矛盾。因此，存在一个随机的 $\epsilon > 0$，使得 $B_\epsilon(d) \cap \mathcal{D}' = \emptyset$。

令 O在事件 $\{\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}' \neq \emptyset\}$发生时等于 $B_\epsilon(d)$，否则等于 $O = \emptyset$。因此， $O \cap \mathcal{D}' = \emptyset$，且 $d \in O$以正概率成立。按照第 1 部分中的同一论证，存在确定性 $i \in \mathbb{N}$，使得 $d \in U_i \subseteq O$以正概率成立。因此，令 $U = U_i$，可知 $d \in U \cap (\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}')$以正概率成立。我们有 $\mathbb{P}[\mathcal{D} \preceq \mathcal{D}'] = 1$，在该事件上 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'_{\uparrow}$。因此，当 $d \in U \cap (\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}')$时，存在 $d' \in \mathcal{D}'$使得 $d \subseteq d'$，这意味着 $U^\circ \cap (\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \neq \emptyset$和 $U^\circ \cap \mathcal{D}' \neq \emptyset$同时成立。由第 1 部分可知， $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$几乎必然成立。因此， $U^\circ \cap (\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \neq \emptyset$和 $U^\circ \cap (\mathcal{D}' \cap \mathcal{D}) \neq \emptyset$以正概率同时成立。因此，注意到 $\mathcal{D} = (\mathcal{D} \cap \mathcal{D}') \cup (\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}')$，

$$\begin{aligned} 0 < \mathbb{P}\left[U^\circ \cap (\mathcal{D} \cap \mathcal{D}') \neq \emptyset\right] &< \mathbb{P}\left[U^\circ \cap \mathcal{D} \neq \emptyset\right] \\ &= \mathbb{P}\left[U^\circ \cap \mathcal{D}' \neq \emptyset\right]. \end{aligned}$$

这里，第二行成立是因为 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 具有相同的分布，而 U 是确定性的。因此 $\mathbb{P}[U^\circ \cap (\mathcal{D}' \setminus \mathcal{D}) \neq \emptyset] > 0$，但根据第 1 部分，我们知道 $\mathbb{P}[\mathcal{D}' \setminus \mathcal{D} = \emptyset] = 1$，所以得出了矛盾。证明至此完成。■

注5.2.2 引理 5.2.1 的证明虽然技术性较强，但其核心思想很简单。来看一个简单示例：取两个均匀随机变量 X， X'，它们取值于 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，并假设 X 和 X' 以满足 $\mathbb{P}[X \leq X'] = 1$的方式耦合。我们的目标是证明$\mathbb{P}[X = X'] = 1$。对于 $k \in S$，

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X = k, X' \neq k] &= \mathbb{P}[X = k] - \mathbb{P}[X = k, X' = k] \\ &= \mathbb{P}[X' = k] - \mathbb{P}[X' = k, X = k] \\ &= \mathbb{P}[X' = k, X \neq k]. \end{aligned} \tag{5.5}$$

注意（5.5）与（5.4）的相似之处。取 $k = 1$ 并利用 $\mathbb{P}[X \leq X'] = 1$，我们得到 $\mathbb{P}[X = 1, X' > 1, X \leq X'] = \mathbb{P}[X' = 1, X > 1, X \leq X']$，这就变成了 $\mathbb{P}[X = 1, X' > 1] = 0$，因此 $\mathbb{P}[X = 1] = \mathbb{P}[X = 1, X' = 1]$。这显然是朝着正确方向迈出的一步，其风格也与下文（5.4）中涉及 $\preceq$ 的更复杂推理相似。 S 的有限性在这里也很有帮助，而在引理 5.2.3 中，我们必须依赖 $\Pi^\uparrow$的第二可数性。留给读者完成这个简单示例，并推导出 $\mathbb{P}[X = X'] = 1$。

引理 5.2.3 $\preceq_{\mathrm{d}}$ 是 $\mathcal{K}(\Pi^\uparrow)$ 值随机变量空间上的偏序。

Proof: 我们将依次验证 $\preceq_{\mathrm{d}}$ 在 $\mathcal{P}(\mathcal{K}(\Pi^\uparrow))$上是自反、传递且反对称的。引理 3.2.2 已经证明，这些性质在确定性情形下成立，即 $\preceq_{\mathrm{d}}$ 是 $\mathscr{W}_{\mathrm{det}}$上的偏序。

由 $\preceq$ 在 $\mathcal{W}_{\mathrm{det}}$ 上的自反性可知，对于任意取值于 $\mathcal{K}(\Pi^\uparrow)$ 的随机变量 $\mathcal{A}$，都有 $\mathbb{P}[\mathcal{A} \preceq \mathcal{A}] = 1$，因此 $\preceq_{\mathrm{d}}$是自反的。对于传递性，假设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$、$\mathcal{C}$是取值于 $\mathcal{K}(\Pi^\uparrow)$ 的

随机变量，并且存在耦合（$\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$）和（$\mathcal{B}$、$\mathcal{C}$），使得 $\mathbb{P}[\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}] = 1$，且（在一个可能不同的概率空间上） $\mathbb{P}[\mathcal{B} \preceq \mathcal{C}] = 1$。由此可知，存在一个联合耦合（$\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$、$\mathcal{C}$），在该耦合下 $\mathbb{P}[\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ 且 $\mathcal{B} \preceq \mathcal{C}] = 1$。在事件 $\{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B} \preceq \mathcal{C}\}$ 上，$\preceq$ 在 $\mathcal{W}_{\mathrm{det}}$ 上的传递性意味着 $\mathcal{A} \preceq \mathcal{C}$，因此得到所需的 $\mathbb{P}[\mathcal{A} \preceq \mathcal{C}] = 1$。

剩下要证明反对称性。设 $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 是取值于 $\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow})$ 的随机变量，满足 $\mathbb{P}[\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}] = 1$ 和 $\mathbb{P}[\mathcal{B}' \preceq \mathcal{A}'] = 1$，其中 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 具有相同的边缘分布，且 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 具有相同的边缘分布。我们必须证明存在一种耦合，使得 $\mathbb{P}[\mathcal{A} = \mathcal{B}] = 1$。由于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 具有相同的边缘分布，因此存在一种耦合 $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{B}, \mathcal{B}')$，使得 $\mathbb{P}[\mathcal{A} = \mathcal{A}',\ \mathcal{A} \preceq \mathcal{B},\ \mathcal{B}' \preceq \mathcal{A}'] = 1$。由 $\preceq$ 在 $\mathscr{W}_{\mathrm{det}}$ 上的传递性可知，$\mathbb{P}[\mathcal{B}' \preceq \mathcal{B}] = 1$。根据引理 5.2.1，我们有 $\mathbb{P}[\mathcal{B} = \mathcal{B}'] = 1$，这意味着 $\mathbb{P}[\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}, \mathcal{B} \preceq \mathcal{A}] = 1$；再由 $\preceq$ 在 $\mathcal{W}_{\mathrm{det}}$ 上的反对称性可得 $\mathbb{P}[\mathcal{A} = \mathcal{B}] = 1$，证毕。■

引理 5.2.4 设 $\mathcal{A}$ 是一个编织。那么，$\mathcal{A}$ 是一个网，当且仅当 $\mathbb{P}[\mathcal{A}$ 是 $\mathscr{W}_{\mathrm{det}}] = 1$ 的极小元。类似地，$\mathcal{A}$ 是一个流，当且仅当 $\mathbb{P}[\mathcal{A}$ 是 $\mathscr{W}_{\mathrm{det}}] = 1$ 的极大元。

Proof: 我们先给出关于网的论证。设 $\mathcal{A}$ 是一个编织。我们必须证明，$\mathcal{A}$ 是一个网，当且仅当 $\mathbb{P}[\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{W}_{\mathrm{det}}] = 1$ 的极小元。显然，几乎必然的遍布性和不交叉性质会从「当且仅当」陈述的一边传递到另一边，因此只需处理极小性。具体来说，对于随机编织 $\mathcal{A}$，我们必须证明以下陈述等价：

1. 若 $\mathcal{B}$ 是一个编织，且 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 之间存在一种耦合，使得 $\mathbb{P}[\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}] = 1$ 或 $\mathbb{P}[\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}] = 1$，那么 $\mathbb{P}[\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}] = 1$。
2. $\mathbb{P}[\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{W}_{\mathrm{det}}] = 1$的极小元。

根据下方定义 (2.7)，第一条陈述恰好是指 $\mathcal{A}$ 的分布在 $\mathcal{P}(\mathcal{K}(\Pi^{\uparrow}))$中是极小的。

我们先证明 (2) 蕴含 (1)。如果 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{W}_{\mathrm{det}}$ 中几乎必然极小，那么对于将 $\mathcal{A}$ 与另一个编织 $\mathcal{B}$进行任意耦合，$\{\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是可比较的$\} \subseteq \{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}\}$，其中左右两边都是事件。因此 (1) 成立。

反过来，假设 (1) 成立。令

$$\mathcal{A}' = \begin{cases} \mathcal{A} & \text{on the event } \{\mathrm{web}(\mathcal{A}) \prec \mathcal{A}\}, \\ \mathrm{web}(\mathcal{A}) & \text{on the event } \{\mathcal{A} \preceq \mathrm{web}(\mathcal{A})\}. \end{cases}$$

引理 5.1.2 和 5.2.3 结合起来表明 $\mathcal{A}'$ 是一个随机变量。根据引理 4.5.6，我们有$\mathbb{P}[$网$(\mathcal{A}) \preceq \mathcal{A}'] = 1$，由 (1) 可推出 $\mathbb{P}[\mathcal{A}' \preceq$ 网$(\mathcal{A})] = 1$，因此事实上 $\mathbb{P}[\mathcal{A} \preceq$网$(\mathcal{A})] =$1。由引理 4.5.6，我们于是有 $\mathbb{P}[\mathcal{A} =$ 网$(\mathcal{A})$ $] = 1$，再由引理 4.5.7 得到 (2)。

对于流的情形，我们可以采用类似的论证，将 $\preceq$ 的符号方向反转。引理 4.5.6 由引理 4.4.2 替代，而引理 4.5.7 由引理 4.4.5 替代。细节留给读者。■

注 5.2.5 假设 $\mathcal{A}$ 是一种编织。我们在第 5.1 节和第 5.2 节中的结果表明，web$(\mathcal{A})$ 和 flow$(\mathcal{A})$ 是随机变量，并且，如果 $\mathcal{B}$ 是某个与 $\mathcal{A}$ 耦合的其他随机编织，那么 $\{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}\}$ 是一个事件。此外，$\preceq_{\mathrm{d}}$ 通过如下关系为随机编织的分布定义了一个偏序：$\mathcal{A} \preceq_{\mathrm{d}} \mathcal{B}$ 当且仅当存在 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的一个耦合，使得 $\mathbb{P}[\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}] = 1$。从现在起，我们将直接运用这些结果；在证明中用到时不再一一引用。

5.3 定理 2.4.3 的证明

现在我们可以着手确立关于随机编织的主要结果，以下将随机编织简称为编织。这些结果已在第 2.4 节陈述，证明则分布在第 5.3–5.7 节中。定理 2.4.3–2.4.6 的陈述包含若干（编号）部分。我们会用粗体（例如见下一段）标明各部分的证明进展。我们在第 4 节中的大部分工作都是为这些证明做准备。我们从定理 2.4.3 开始，依次证明该定理的四个陈述。设 $\mathcal{A}$ 是一种编织。

第 1 部分。 首先假设 (a)，即 $\mathcal{A}$ 是一个网。由引理 5.2.4 $\mathcal{A}$ 几乎必然是 $\mathscr{W}_{\det}$ 的一个极小元。由引理 4.5.7 可得 $\mathsf{web}(\mathcal{A}) \preceq \mathcal{A}$，由此根据极小性可知 $\mathcal{A} = \mathsf{web}(\mathcal{A})$，从而得到 (b)。反过来，假设 (b)，即 $\mathcal{A} \overset{\text{a.s.}}{=} \mathsf{web}(\mathcal{A})$。因此，引理 4.5.7 表明，$\mathcal{A}$ 几乎必然是 $\mathscr{W}_{\det}$ 的一个极小元；由引理 5.2.4 可知 $\mathcal{A}$ 是一个网。因此 $(a) \Leftrightarrow (b)$。

第 2 部分。 同样，设 $\mathcal{A}$ 是一个编织。我们将证明 $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$。首先假设 (a)，即 $\mathcal{A}$ 是一个流。由引理 5.2.4 $\mathcal{A}$ 几乎必然是 $\mathscr{W}_{\det}$ 的一个极大元。由引理 4.4.5 可得 $\mathcal{A} \preceq \mathsf{flow}(\mathcal{A})$，由此根据极大性可知 $\mathcal{A} = \mathsf{flow}(\mathcal{A})$，从而得到 (b)。现在假设 (b)，即 $\mathcal{A} \overset{\text{a.s.}}{=} \mathsf{flow}(\mathcal{A})$。由 (2.13) 可立即得出 $\mathsf{flow}(\mathcal{A}) \subseteq \Pi^{\updownarrow}$，因此得到 (c)。

最后，假设 (c)，即 $\mathcal{A} \subseteq \Pi^{\updownarrow}$。设 $\mathcal{B}$ 是一个编织，且与 $\mathcal{A}$ 存在耦合，使得 $\mathbb{P}[\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}] = 1$。为了证明 $\mathcal{A}$ 是一个流，我们必须证明这意味着 $\mathbb{P}[\mathcal{A} = \mathcal{B}] = 1$。利用 $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ 几乎必然成立，由 (2.7) 可得，几乎必然有 $\mathcal{A}_{\uparrow} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_{\uparrow\circ}$。由于 $\mathcal{A} \in \Pi^{\updownarrow}$，因此我们有几乎必然 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$。我们还需要证明反向包含，因此设 $f \in \mathcal{B}$。在 $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$这一几乎必然发生的事件上，由引理 3.1.7 可知，f 不会与 $\mathcal{A}$ 交叉；因此由定理 4.3.9，存在 $f' \in$流$(\mathcal{A})$，使得 $f \subseteq f'$。由引理 4.2.6 可得 $f' \in \mathcal{A}$，这意味着 $f \in \mathcal{A}_{\uparrow} \cap \mathcal{B}$。因此 $\mathcal{A} \overset{\text{a.s.}}{=} \mathcal{B}^{\text{s}}$，如所需。

第 3 部分。 引理4.4.5和4.5.7给出 $\mathbb{P}[$网$(\mathcal{A}) \preceq \mathcal{A} \preceq$ 流$(\mathcal{A})] = 1$。

第4部分。 存在性主张由本证明的第 3 部分确立。剩下要证明唯一性主张，我们将依次针对网和流给出证明。

设 $\mathcal{W}$，$\mathcal{W}'$ 是网，并假设 $\mathcal{W} \preceq_{\text{d}} \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{W}' \preceq_{\text{d}} \mathcal{A}$。那么存在（两两）耦合，使得 $\mathbb{P}[\mathcal{W} \preceq \mathcal{A}] = 1$和 $\mathbb{P}[\mathcal{W}' \preceq \mathcal{A}] = 1$。我们要证明 $\mathcal{W} \overset{\text{d}}{=} \mathcal{W}'$。由此可知，存在 $\mathcal{W}$，$\mathcal{W}'$ 和 $\mathcal{A}$ 的三方耦合，使得 $\mathbb{P}[\mathcal{W} \preceq \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{W}' \preceq \mathcal{A}] = 1$。由引理 3.1.7可知，$\mathcal{W} \cup \mathcal{A}$ 几乎必然不交叉，且 $\mathcal{W}' \cup \mathcal{A}$ 几乎必然不交叉。由引理 4.1.3可知，$\mathcal{W} \cup \mathcal{W}'$ 几乎必然不交叉。因此，由引理 4.5.5可得，网$(\mathcal{W})$ 几乎处处等于网$(\mathcal{W}')$。因此，由本证明的第 2 部分可得 $\mathcal{W} \overset{a.s}{=} \mathcal{W}'$，从而特别地，$\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{W}'$ 具有相同的边缘分布，证毕。

剩下的工作是证明流的相应结论。设 $\mathcal{F}$，$\mathcal{F}'$为流，并假设$\mathcal{A} \preceq_{\text{d}} \mathcal{F}$和 $\mathcal{A} \preceq_{\text{d}} \mathcal{F}'$。那么，与上文一样，存在 $\mathcal{F}$，$\mathcal{F}'$和 $\mathcal{A}$的三方耦合，使得 $\mathbb{P}[\mathcal{A} \preceq \mathcal{F}$ 和 $\mathcal{A} \preceq \mathcal{F}'] = 1$。按照上文的相同论证，再次使用引理 3.1.7 和 4.1.3，以引理 4.4.4 代替引理 4.5.5，并以本证明的第 1 部分代替第 2 部分，可得 $\mathcal{F} \overset{\text{a.s.}}{=} \mathcal{F}'^{\text{s}}$。因此，特别是 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 具有相同的边缘分布，证毕。

5.4 定理 2.4.4 的证明

在给出定理 2.4.4 的证明之前，我们需要先准备一些引理。

下一个引理使我们能够使用一个由（随机）编织构成的时空点非分歧稠密集确定性。这是引理 4.4.6 的直接推论，只是推迟到现在才提出，因为陈述引理 4.4.6 时，我们关注的是确定性编织。

引理 5.4.1 设 $\mathcal{A}$ 是一个编织。那么集合 $\{z \in \mathbb{R}^2_c;\ \mathbb{P}[z \text{ 在 } \mathcal{A}] > 0\}$ 中是分歧的，且具有零勒贝格测度。

Proof: 令 ram($\mathcal{A}$) 表示某个（确定性或随机）编织$\mathcal{A}$的分叉点集合。我们在引理 4.4.6 中证明了映射 $(\mathcal{A},\ z) \mapsto \mathbb{1}\{z \in \text{ram}(\mathcal{A})\}$ 是从$\mathscr{W}_{\text{det}} \times \mathbb{R}^2_c \to \{0,1\}$到可测空间的可测映射，并且对于所有确定性编织，ram($\mathcal{A}$) 都是勒贝格零集。根据富比尼定理，对于任意编织 $\mathcal{A}$，都有 $\int_{\mathbb{R}^2_c} \mathbb{P}[z \in \text{ram}(\mathcal{A})]\, dz = \mathbb{E}\big[\int_{\mathbb{R}^2_c} \mathbb{1}\{z \in \text{ram}(\mathcal{A})\}\, dz\big] = 0$，结论得证。■

引理 5.4.2 令 $A \subseteq \Pi^{\updownarrow}$ 为不交叉且遍历的，令 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为稠密的。令 $f, h \in A$满足 $f \lhd h$，并假设 $t\star \in \mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$ 满足 $f(t\star) < h(t\star)$。那么对于所有 $\epsilon > 0$，存在 $(x, s) \in D$ 以及 $g \in A((x, s))$，使得 $f, h \notin A((x, s))$、$f \lhd g$, $g \lhd h$ 以及 $|t - s| < \epsilon$。此外，如果 $\star = -$，则可以取 $s < t$；如果 $\star = +$，则可以取 $s > t$。

Proof: 根据 f的 càdlàg 性质，h 以及 D的稠密性，存在 $(x,\ s) \in D$ 使得$|s - t| < \epsilon$，其符号与 $t - s$ 所需的符号一致，并且 $f(s-) \vee f(s+) < x < h(s-) \wedge h(s+)$。由于$\mathcal{A}$是遍历的，存在 $g \in A((x,\ s))$。显然，$f,\ h \notin A((x,\ s))$，并且 $\{f, g, h\}$不交叉。由引理 3.1.3 和引理 3.1.4，我们有 $f \lhd g$ 和 $g \lhd h$。■

引理 5.4.2 是用于证明下一个引理的技术引理。回顾引理 4.4.6，我们证明了：如果 $\mathcal{A} \in \mathscr{W}_{\text{det}}$，那么 ram($\mathcal{A}$)（即 $\mathcal{A}$的分叉点集合）是 $\mathbb{R}^2_c$的可测零测子集。下面的引理作为确定性编织的结果陈述，从而无需为随机零测集寻找合适的状态空间。

引理 5.4.3 设 $\mathcal{A}$ 是一个确定性编织。那么 $\mathcal{A}$、流($\mathcal{A}$) 和 网($\mathcal{A}$) 具有相同的分叉点。

Proof: 记 $\mathcal{W}$ =网($\mathcal{A}$) 和 $\mathcal{F}$ = 流($\mathcal{A}$)。由定理 2.4.3，应用于分布在 $\mathcal{A}$ 处为点质量的编织，可得 $\mathcal{W} \preceq \mathcal{A} \preceq \mathcal{F}$。注意，若 $\mathcal{B},\ \mathcal{B}' \in \mathscr{W}_{\text{det}}$ 且 $\mathcal{B} \preceq \mathcal{B}'$，那么对任意 $b \in B$，都存在 $b' \in B'$ 使得 $b \subseteq b'$。由此可得 ram($\mathcal{W}$) $\subseteq$ ram($\mathcal{A}$) $\subseteq$ ram($\mathcal{F}$)。有了这一点，只需证明对任意确定性编织 $\mathcal{A}$，都有

$$\text{ram}(\mathcal{F}) \subseteq \text{ram}(\mathcal{W}). \tag{5.6}$$

为此，设 $D \subseteq \mathbb{R}^2_c$ 稠密且非分歧。假设 $(x,\ t) \in \mathbb{R}^2_c$ 在 $\mathcal{F}$ 中分歧。因此存在双无限的 $f,\ g \in \mathcal{F}(z)$，它们在 $\subseteq$ 下不可比较。由此可知，存在$s\star \in \mathbb{R}_{\mathfrak{s}}$ 使得 $f(s\star) \neq g(s\star)$；不失一般性，可设 $f(s\star) < g(s\star)$。

- 首先考虑 $s\star \geq t+$ 的情况。取一个序列 $z_n = (x_n, t_n) \in D$，使得 $z_n \to z$ 且$x_n \leq f(t_n-) \wedge f(t_n+)$；再取一个序列 $w_n = (y_n, s_n) \in D$，使得 $w_n \to z$ 且$y_n \geq g(t_n-) \vee g(t_n+)$。容易验证这样的序列确实存在。取$f_n \in \mathcal{F}(z_n)$和 $g_n \in \mathcal{F}(w_n)$。由紧致性，取一个子序列后，不妨设 $f_n \to f'$且 $g_n \to g'$，其中 $f', g' \in \mathcal{F}$。由引理 A.2.2，得到 $f', g' \in \mathcal{F}(z)$。回忆引理 3.1.6，$(\mathcal{F}, \lhd)$ 是全序的。由引理 4.2.4，得到 $f' \lhd f \lhd g \lhd g'$，这意味着 $f'(s\star) < g'(s\star)$。由引理 A.2.2，得到 $f_n|_{z_n} \to f'|_z$且 $g_n|_{w_n} \to g'|_z$。注意，根据 (2.12)，$f'|_z$, $g'|_z \in \mathcal{W}$，并且二者都经过 z。由于$f'|_z(s\star) = f'(s\star) < g'(s\star) = g'|_z(s\star)$，它们在 $\subseteq$下不可比较。因此，在这种情况下，我们有 $z \in$ram($\mathcal{W}$)。

- 接下来，考虑 $s\star \leq t-$是否成立。我们可以假设，对于所有 $u\bullet \geq t+$，都有 $f(u\bullet) = g(u\bullet)$（否则，适用上面的情形）。根据引理 5.4.2，存在 $z \in D$ 和 $h \in \mathcal{A}(z)$，使得

f，$g \notin \mathcal{F}(z)$、$f \lhd h \lhd g$ 和 $\sigma_z < t$。对于所有 $u\bullet \geq t+$，都有 $f(u\bullet) = g(u\bullet)$，并且 $f \lhd h \lhd g$，这意味着对于所有这样的 $u\bullet$，都有 $f(u\bullet) = h(u\bullet) = g(u\bullet)$。由于 $f(t-) \leq h(t-) \leq g(t-)$，我们有$h \in \mathcal{A}(z)$。引理 5.4.2 中给出的 h 的性质保证 h 不等于 f 或 g，因此存在某些 $v_1\bullet_1$、$v_2\bullet_2 \leq t-$，使得 $f(v_1\bullet_1) < h(v_1\bullet_1)$ 且 $h(v_2\bullet_2) < g(v_2\bullet_2)$。

我们再将引理 5.4.2 应用两次，分别应用于 $v_1\bullet_1$ 处的 (f, h) 和 $v_2\bullet_2$ 处的 (h, g)。因此，对于 $i = 1,2$, $z_i \in D$ 和 $h_i \in \mathcal{A}(z_i)$，我们分别得到 $f \lhd h_1 \lhd h \lhd h_2 \lhd g$，其中 $f, h \notin \mathcal{F}(z_1)$、$h, g \notin \mathcal{F}(z_2)$ 且 $\sigma_{z_1}, \sigma_{z_2} < t$。与上面相同的论证表明 $h_1, h_2 \in \mathcal{F}(z)$。显然，$h_1|_{z_1}$ 和 $h_2|_{z_1}$ 都是 $\mathcal{W}$ 的元素，且都经过 z。为完成证明，我们将证明它们在 $\subseteq$ 下不可比较。

假设 $h_1|_{z_1} \subseteq h_2|_{z_2}$。那么 $\sigma_{z_2} \leq \sigma_{z_1}$，而由 $h_1 \lhd h \lhd h_2$ 可知 $h \in \mathcal{A}(z_1)$，这就产生了矛盾。同理，$h_2|_{z_2} \subseteq h_1|_{z_1}$ 也不可能成立，因此在这种情况下，我们也有 $z \in \mathrm{ram}(\mathcal{W})$。

引理 5.4.3 的证明至此完成。 ■

现在我们可以给出定理 2.4.4 的证明了。我们依次证明定理的两个部分，先证明第 2 部分。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是编织。

第 1 部分。假设 $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$。由定理 2.4.3 可得 $\mathrm{flow}(\mathcal{A}) \overset{\mathrm{d}}{=} \mathrm{flow}(\mathcal{B})$，这意味着存在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的一个耦合，使得 $\mathbb{P}[\mathrm{flow}(\mathcal{A}) = \mathrm{flow}(\mathcal{B})] = 1$。记 $\mathcal{F} = \mathrm{flow}(\mathcal{A}) \overset{\text{a.s.}}{=} \mathrm{flow}(\mathcal{B})$。假设 $\boldsymbol{z} \subseteq \mathbb{R}^2_c$ 有限，并且在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 中几乎必然非分歧。由引理 5.4.3 可得，几乎必然，$\boldsymbol{z}$ 在 $\mathcal{F}$ 中非分歧。

我们要证明 $\mathcal{A}|_{\boldsymbol{z}} \overset{\mathrm{a.s.}}{=} \mathcal{F}|_{\boldsymbol{z}}$。记 $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots\ldots, z_m)$，并固定 $i \leq m$。令 $f = \mathcal{A}|_{z_i}$。由定理 4.3.9，存在 $f' \in \mathcal{F}$，使得 $f \subseteq f'$。因此 $f'|_{z_i} = f$。由于 z 在 $\mathcal{F}$ 中几乎必然非分歧，且 $\mathcal{F} \subseteq \Pi^{\updownarrow}$，实际上 $\mathcal{F}(z_i) \overset{\mathrm{a.s.}}{=} \{f'\}$，这意味着几乎必然 $f'|_{z_i} = \mathcal{F}|_{z_i} = f$。因此我们有 $\mathcal{A}|_{z_i} \overset{\mathrm{a.s.}}{=} \mathcal{F}|_{z_i}$。

对称地论证可得 $\mathcal{B}|_{z_i} \overset{\mathrm{a.s.}}{=} \mathcal{F}|_{z_i}$，因此事实上 $\mathcal{A}|_{z_i} \overset{\mathrm{d}}{=} \mathcal{B}|_{z_i}$。特别地，$\mathcal{A}|_{z_i}$和 $\mathcal{B}|_{z_i}$ 具有相同的边缘分布，因此 $\mathcal{A}|_{z_i} \overset{\mathrm{d}}{=} \mathcal{B}|_{z_i}$，如所需。

第 2 部分。我们先证明 (a) 和 (b) 等价。假设 (a)，即 $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$。定理 2.4.3 表明 $\mathrm{flow}(\mathcal{A}) \overset{\mathrm{d}}{=} \mathrm{flow}(\mathcal{B})$，这意味着存在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的一个耦合，使得 $\mathbb{P}[\mathrm{flow}(\mathcal{A}) = \mathrm{flow}(\mathcal{B})] = 1$。记 $\mathcal{F} = \mathrm{flow}(\mathcal{A}) \overset{\mathrm{a.s.}}{=} \mathrm{flow}(\mathcal{B})$。由 (2.13) 可知，$\mathbb{P}[\mathcal{A} \cup \mathcal{F}$ 不交叉且 $\mathcal{B} \cup \mathcal{F}$ 不交叉$] = 1$。由引理 4.1.3 可得$\mathbb{P}[\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ 不交叉$] = 1$，从而得到 (b)。

反过来，假设 (b)，即 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$是耦合的编织，且 $\mathbb{P}[\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$不交叉。由引理 4.4.4 可得 $\mathbb{P}[$流$(\mathcal{A}) =$流$(\mathcal{B})] = 1$。特别地，流$(\mathcal{A})$和流$(\mathcal{B})$具有相同的边缘分布，因此 $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$。

接下来我们将证明 (a) 与 (c) 等价。假设 (a)，即 $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$。引理 5.4.1 蕴含存在一个确定性的稠密可数 $D \subseteq \mathbb{R}^2$，使得 D 在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$中几乎必然非分歧。若 $\boldsymbol{z} \subseteq D$ 有限，则由本证明第 1 部分可知，$\mathcal{A}|_{\boldsymbol{z}}$ 和 $\mathcal{B}|_{\boldsymbol{z}}$ 具有相同的边缘分布，从而得出 (c)。

反过来，假设 (c) 成立。注意，$\mathcal{A}' \mapsto$网$_D(\mathcal{A}')$ 这一（确定性）运算只取决于 $\mathcal{A}'|_D$。枚举 $D = (z_i)_{i\in\mathbb{N}}$，并写作 $\boldsymbol{z}_m = (z_1$、……、$z_m)$。由 (c) 可知，$\mathcal{A}|_{\boldsymbol{z}_m}$ 和 $\mathcal{B}|_{\boldsymbol{z}_m}$ 具有相同的边缘分布，因此由 D 的可数性可知，$\mathcal{A}|_D$ 和$\mathcal{B}|_D$ 实际上具有相同的边缘分布。由此可得，网$_D(\mathcal{A})$和网$_D(\mathcal{B})$具有相同的边缘分布。于是根据引理 4.5.3，我们有网$(\mathcal{A}) \overset{\mathrm{d}}{=}$网$(\mathcal{B})$，所以 $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$，这就证明了 (a)。证明至此完成。

5.5 定理 2.4.5 和 2.4.6 的证明

我们先证明**定理 2.4.6**，再证明定理 2.4.5，因为定理 2.4.5 的第 2 部分将作为定理 2.4.6 第 2 部分的特例来证明。假设 $\mathcal{A}_n$，$\mathcal{A}$ 是编织。我们依次证明定理 2.4.6 的第 1 部分和第 2 部分。

第 1 部分。假设 $\mathcal{A}_n \to \mathcal{A}$，且 $\boldsymbol{z}_n, \boldsymbol{z} \in (\mathbb{R}_c^2)^m$ 是非分歧的。根据斯科罗霍德表示定理，我们可以（改变概率空间，同时保持每个 $\mathcal{A}_n$ 和 $\mathcal{A}$ 的边缘分布不变），并假设 $\mathcal{A}_n$ 几乎必然 $\to \mathcal{A}$。记 $\boldsymbol{z}_n = (z_{n,1}, \ldots, z_{n,m})$，以及 $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_m)$。由于非分歧，对每个 i，集合 $\mathcal{A}_n|_{z_{n,i}}$ 和 $\mathcal{A}|_{z_i}$ 几乎必然各自只包含一条双无限路径，我们分别将其记为 $f_{n,i}$ 和 f_i。由引理 A.1.1，集合 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ 几乎必然相对紧。因此，我们可以取一个子序列，并假设对所有 i，当 $n \to \infty$ 时，$f_{n,i}$ 几乎必然 $\to g_i \in \Pi^{\updownarrow}$。由于 $\mathcal{A}_n$ 几乎必然 $\to \mathcal{A}$，我们有 $g_i \in \mathcal{A}$。由引理 A.2.2，我们有 $g_i \in \mathcal{A}(z_i)$，这意味着 $g_i \overset{a.s.}{=} f_i$。因此，在由斯科罗霍德表示定理生成的概率空间上，$\mathcal{A}_n|_{\boldsymbol{z}_n}$ 几乎必然 $\to \mathcal{A}|_{\boldsymbol{z}}$，这意味着依分布收敛。

第 2 部分。令 $\mathcal{B}$ 为$(\mathcal{A}_n)$的一个弱极限点，即 $\mathcal{A}_n \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{B}$ 沿着 n的一个子序列成立。不失一般性，令我们转而考察这个子序列。此外，假设 $\mathcal{B}$ 几乎必然不交叉。由斯科罗霍德表示定理可知，注意到我们要证明的是 $\mathcal{B}$的分布性质，不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{A}_n$ 几乎必然。必然$\to \mathcal{B}$。由于假设 $\mathcal{B}$几乎必然不交叉，要证明 $\mathcal{B}$ 是一个编织，只需证明$\mathcal{B}$ 几乎必然是遍历的。令 $z \in \mathbb{R}_c$。几乎必然地，对所有 n，存在 $f_n \in \mathcal{A}_n(z_n)$。根据引理 A.1.1，集合 $\mathcal{B} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n)$是紧致的，因此存在 $f \in \Pi^{\uparrow}$ 使得 $f_n \to f$。由于 $\mathcal{A}_n$ 几乎必然。必然$\to \mathcal{B}$，我们有 $f \in \mathcal{B}$。根据引理 A.2.2，我们有 $f \in \mathcal{B}(z)$。因此 $\mathcal{B}$ 是遍历的，所以 $\mathcal{B}$ 是一个编织。

此外，假设对于所有几乎必然非分歧的 $\boldsymbol{z} \in (\mathbb{R}^2)^m$，$\mathcal{A}_n|_{\boldsymbol{z}} \to \mathcal{A}|_{\boldsymbol{z}}$。根据引理 5.4.1，集合 $R = \{z \in \mathbb{R}^2 ;\ \mathbb{P}[z \text{ 在 } \mathcal{A}\text{中，} \mathcal{B} \text{ 是分歧的，或者 } \mathcal{A}_n] > 0\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的勒贝格零测集。对于 $D = \mathbb{R}^2 \setminus R$ 中任意有限个点构成的序列 $\boldsymbol{z}$，我们有（根据假设）$\mathcal{A}_n|_{\boldsymbol{z}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{A}|_{\boldsymbol{z}}$。由于 R 是零测的，D 在 $\mathbb{R}^2$ 中稠密。由本定理第 1 部分，我们还有 $\mathcal{A}_n|_{\boldsymbol{z}} \overset{a.s}{\to} \mathcal{B}|_{\boldsymbol{z}}$，这意味着依分布收敛。因此，对于所有有限的 $\boldsymbol{z} \subseteq D$，$\mathcal{A}|_{\boldsymbol{z}} \overset{\mathrm{d}}{=} \mathcal{B}|_{\boldsymbol{z}}$。由此，定理 2.4.4 得出 $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$。定理 2.4.6 的证明至此完成。

现在我们给出**定理 2.4.5**的证明，并依次证明其中三个部分。设 $\mathcal{F}_n$，$\mathcal{F}$ 是流。

第 1 部分。注意，若 $z \in \mathbb{R}_c$ 是非分歧的，则 $\mathcal{F}(z)$ 只包含一条双无限路径。有了这一事实，论证便与定理 2.4.6 第 1 部分（从本节开头起）的论证基本相同，留给读者完成。

第 2 部分。假设 $\mathcal{F}'$ 是 $(\mathcal{F}_n)$ 的一个弱极限点。引理 3.3.6 表明，$\mathcal{F}'$ 几乎必然不交叉。因此，根据定理 2.4.6 第 2 部分，$\mathcal{F}'$ 是一个编织。由于 $\Pi^{\updownarrow}$ 是 Π 的闭子集，我们有 $\mathcal{F}' \subseteq \Pi^{\updownarrow}$ 几乎必然成立，因此根据定理 2.4.3 $\mathcal{F}'$ 是一个流。

此外，假设 $(\mathcal{F}_n)$ 是紧的，并且对于所有非分歧的 $\boldsymbol{z} \in (\mathbb{R}^2)^m$，都有 $\mathcal{F}_n|_{\boldsymbol{z}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{F}|_{\boldsymbol{z}}$。因此，定理 2.4.6 第 2 部分表明 $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}'$。根据定理 2.4.3，特别是每个等价类都包含唯一极大元这一事实，我们有 $\mathcal{F} \overset{\mathrm{d}}{=} \mathcal{F}'$。现在，$(\mathcal{F}_n)$ 是紧的，并且 $(\mathcal{F}_n)$ 的任一弱极限点在分布上都等于 $\mathcal{F}$，因此我们有 $\mathcal{F}_n \to \mathcal{F}$。

第 3 部分。假设 $\mathcal{F}_n \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{F}$ 且 $\mathcal{A}_n \sim \mathcal{F}_n$。根据定理 2.4.4，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个从 $\mathcal{F}_n$ 到 $\mathcal{A}_n$ 的耦合，使得 $\mathcal{A}_n \cup \mathcal{F}_n$ 几乎必然不交叉。因此$\mathcal{A}_n \subseteq (\mathcal{F}_n)^{\uparrow}$。由命题 A.2.1 可知，$(\mathcal{F}_n)$ 的紧性蕴含 $(\mathcal{A}_n)$ 的紧性。

令 $\mathcal{A}'$ 为 $(\mathcal{A}_n)$ 的弱极限点。因此，我们有 $(\mathcal{F}_n, \mathcal{A}_n) \xrightarrow{\mathrm{d}} (\mathcal{F}, \mathcal{A}')$。我们应用 Skoro-

hod 表示定理（用于成对序列 $(\mathcal{F}_n,\ \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$），因此不失一般性地假设 $\mathcal{F}_n$ 几乎必然。$\mathrm{s}\to\mathcal{F}$ 且 $\mathcal{A}_n$ 几乎必然。$\mathrm{s}\to\mathcal{A}'$。注意，这保留了 $(\mathcal{F}_n,\ \mathcal{A}_n)$ 的边缘分布，对每个 n 均成立。因此，我们有 $\mathcal{A}_n\subseteq(\mathcal{F}_n)^{\uparrow}$ 几乎必然。

若 $f\in\mathcal{A}$，则（几乎必然）存在 $f_n\in\mathcal{A}_n$，使得 $f_n\to f$。因此，也存在 $g_n\in\mathcal{F}_n$，使得 $f_n\subseteq g_n$。由引理 A.1.1 可知，$\mathcal{F}\cup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n)$ 几乎必然是紧致的，因此我们可以取一个子序列，并假设 $g_n\to g$，其中 $g\in\mathcal{F}$。由引理 A.2.2 可知，$f\subseteq g$。因此，几乎必然有 $\mathcal{A}'\subseteq\mathcal{F}_{\uparrow}$，这意味着 $\mathcal{A}'\cup\mathcal{F}$ 是不交叉的。引理 A.2.2 和 $\mathcal{A}_n$ 几乎必然的遍布性意味着 $\mathcal{A}'$ 几乎必然是遍历的。因此，$\mathcal{A}'$ 是一种编织。由定理 2.4.4 可得 $\mathcal{A}'\sim\mathcal{F}$，正如所需。至此，定理 2.4.5 的证明完成。

5.6 定理 2.4.8 的证明

设 $\mathcal{A}$ 为一条编织，$\mathcal{W}=$ 为 $\mathcal{A}$ 的网，$\mathcal{F}=$ 为 $\mathcal{A}$ 的流。设 D 是 $\mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$ 的一个可数、稠密且几乎必然非分歧的子集。根据定理 2.4.3，事件

$$\{\mathcal{W}=\mathrm{web}_D(\mathcal{A}),\ \mathcal{W}\preceq\mathcal{A}\preceq\mathcal{F},\ \mathcal{A}\cup\mathcal{W}\cup\mathcal{F}\text{ is noncrossing},\ D\text{ is non-ramified}\}$$

的概率为 1。不失一般性，在第 5.6 节余下部分中，我们假设此事件发生。在证明过程中，我们会将先前的一些结果应用于逆时间方向，处理 $\Pi^{\downarrow}$ 值对象而非 $\Pi^{\uparrow}$ 值对象。为此，我们将使用 $\cdot^{\circlearrowleft}$ 算子，该算子定义在定理 2.4.8 的陈述上方，表示时空 $\mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$ 围绕原点旋转 180 度。在前面的章节中，对于满足 $(x,\ t)$ 的 $f\in\Pi^{\uparrow}$，$\in H(f)$，我们用 $f|_{(x,t)}$ 表示将 f 限制在 $[t-,\infty+]$ 上所得的结果。在这里，我们需要扩展这一记号，使其既能表示向前时间方向的限制，也能表示向后时间方向的限制。对于 $f\in\Pi$，我们用 $f\rfloor_{(x,t)}$ 表示将 f 限制在 $[\sigma_f-,t+]$ 上所得的结果，用 $f\lceil_{(x,t)}$ 表示将 f 限制在$[t-,\tau_f+]$上。对于 $f\in\Pi^{\uparrow}$，本节中我们将避免使用记号 $f|_z$，改用 $f\lceil_z$。

我们先证明定理 2.4.8，首先说明

$$\{g\in\Pi^{\downarrow};\ g\text{ does not cross }\mathcal{A}\text{ and }g\text{ begins in }D\}=\{f\rfloor_z\in\Pi^{\downarrow};\ z\in D\text{ and }f\in\mathcal{F}(z)\}\tag{5.7}$$

为证明 (5.7)，先考虑 g 不与 $\mathcal{A}$ 交叉且始于 D的情形。应用定理 4.3.9（反向时间）可得 $f\in\Pi^{\updownarrow}$，使得 $g\subseteq f$ 且 f 不与 $\mathcal{A}$交叉，这意味着$f\in$的流$(\mathcal{A})=\mathcal{F}$。我们有 $g=f\rfloor_z$，因此 (5.7) 的左侧包含于右侧。为证明反向包含关系，考虑 $z\in D$和 $f\in\mathcal{F}(z)$。显然，$g=f\rfloor_z$始于$z\in D$ 且不与 $\mathcal{F}$交叉，这意味着 g 不与 $\mathcal{A}$交叉。至此我们证明了 (5.7)。令

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{W}}_D&=\overline{\{g\in\Pi^{\downarrow};\ g\text{ does not cross }\mathcal{A}\text{ and }g\text{ begins in }D\}_{\downarrow}}\\ \widehat{\mathcal{W}}'_D&=\overline{\{f\rfloor_z\in\Pi^{\downarrow};\ z\in D\text{ and }f\in\mathcal{F}(z)\}_{\downarrow}}\end{aligned}\tag{5.8}$$

注意，(5.8) 就是 (2.16)，此处为方便起见再次列出。由命题 A.2.1，$\mathcal{F}$ 的紧致性蕴含方程 (5.7)（右侧）的相对紧性。有了这一点，应用反向时间下的引理 4.5.1 可得 $\mathcal{W}_D=\mathcal{W}'_D$。由 (2.12) 可知

$$\widehat{\mathcal{W}}'_D=(\mathrm{web}_{D^{\circlearrowleft}}(\mathcal{F}^{\circlearrowleft}))^{\circlearrowleft}\tag{5.9}$$

$\widehat{\ }$由此定理 2.4.3 得出，$\mathcal{W}'_D$ 既是一个对偶网，并且（根据注 4.5.4）不依赖于稠密且几乎必然非分歧的子集 $D\subseteq\mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$ 的选择。从这里开始，我们记作 $\widehat{\mathcal{W}}=\widehat{\mathcal{W}}_D=\widehat{\mathcal{W}}'_D$。由（5.9）可知（$\widehat{\mathcal{W}}'_D$）$^{\circlearrowleft}=$网$_{D^{\circlearrowleft}}$（$\mathcal{F}^{\circlearrowleft}$），换句话说，（$\widehat{\mathcal{W}}'_D$）$^{\circlearrowleft}$是与 $\mathcal{F}^{\circlearrowleft}$ 相关联的网。定理 2.4.3 蕴含（$\widehat{\mathcal{W}}'_D$）$^{\circlearrowleft}$不会

与 $\mathcal{F}^{\circlearrowleft}$, 交叉，因此 $\widehat{\mathcal{W}}'_D$ 不与 $\mathcal{F}$ 交叉；根据引理 4.1.3，这也意味着它不与$\frown\mathcal{A}$交叉。因此（$\mathcal{W}$，$\mathcal{W}$）是一个双重网。

将（5.7）向时间向前使用时所得到的同一论证表明，$\{f \in \Pi^{\uparrow}$；f不与 $\mathcal{A}$交叉，且 f始于 $D\} = \{f\lceil_z \in D$并且 $f \in \mathcal{F}$（z）$\}$。由（2.12）和定理 2.4.3 可知

$$\mathcal{W} = \overline{\{f \in \Pi^{\uparrow};\ f \text{ does not cross } \mathcal{A} \text{ and } f \text{ begins in } D\}_{\uparrow}}. \tag{5.10}$$

现在我们来关注（2.17）。设

$$\mathcal{F}' = \overline{\{g_{\hookrightarrow} f \in \Pi^{\updownarrow};\ g \in \widehat{\mathcal{W}} \text{ ends and } f \in \mathcal{W} \text{ begins at the same point of } D\}}. \tag{5.11}$$

我们必须证明 $\mathcal{F}' \overset{a.s}{=} \mathcal{F}$。设 $h \in \mathcal{F}'$。那么存在 $z_n \in D$，使得 $f_n \in \mathcal{W}$从$\frown$开始并在 z_n处结束，且 $h_n \to h$，其中 $h_n = (g_n) \hookrightarrow (f_n)$。利用 z_n 是非分歧的这一点，令h'_n为 $\mathcal{F}$（z_n）中的唯一元素。注意，f_n不与 $\mathcal{F}$交叉。因此，$((h'_n)\rfloor_{z_n}) \hookrightarrow (f_n)$是一条经过 z_n 且不与 $\mathcal{F}$交叉的路径，所以它是 $\mathcal{F}$的一个元素，进而等于 h_n。于是 $f_n = (h'_n)\lceil_{z_n}$。对称地论证可得 $g_n = (h'_n)\rfloor_{z_n}$，这意味着$h'_n = (g_n) \hookrightarrow (f_n) = h_n$。因此 $h_n \in \mathcal{F}$，这意味着 $h \in \mathcal{F}$。

为证明反向包含，令 $f \in \mathcal{F}$。由引理 4.2.8，得 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(D)$，因此存在 $z_n \in D$ 和 $h_n \in \overline{\mathcal{F}(z_n)}$，使得 $h_n \to f$。令 $f_n = (h_n)\lceil_{z_n}$ 和 $g_n = (h_n)\rfloor_{z_n}$。我们知道 h_n 与 $\mathcal{F}$ 不交叉，因此 f_n 和 g_n 与 $\mathcal{A}$ 不交叉。由 (5.8) 和 (5.10) 可得$\frown f_n \in \mathcal{W}$和 $g_n \in \mathcal{W}$。因此 $h \in \mathcal{F}'$。于是我们有 $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$，这就证明了 (2.17)。

只剩下证明唯一性，并假设 $(\mathcal{W}, \widehat{\mathcal{U}})$ 是一个双重网。那么 $\widehat{\mathcal{U}}^{\circlearrowleft}$ 是一个网，几乎必然与 $\mathcal{F}^{\circlearrowleft}$，不交叉，$\widehat{\mathcal{W}}^{\circlearrowleft}$ 也同样如此。很容易验证，$\mathcal{F}^{\circlearrowleft}$ 是一个取值于 $\Pi^{\updownarrow}$ 的随机变量，并继承了 $\mathcal{F}$ 的闭性、遍历性和不交叉性质。命题 A.2.1 表明，相对紧性也会通过 $\cdot^{\circlearrowleft}$, 得以继承，因此 $\mathcal{F}^{\circlearrowleft}$ 是一个编织。现在由引理 4.1.4 可知，$\widehat{\mathcal{U}}^{\circlearrowleft} \cup \widehat{\mathcal{W}}^{\circlearrowleft}$ 几乎必然不交叉；由此，引理 4.5.5 可推出 $\mathrm{web}(\widehat{\mathcal{U}}^{\circlearrowleft}) \overset{\text{a.s.}}{=} \mathrm{web}(\widehat{\mathcal{W}}^{\circlearrowleft})$。因此，根据定理 2.4.3，我们有 $\widehat{\mathcal{U}}^{\circlearrowleft} \overset{\text{a.s.}}{=} \widehat{\mathcal{W}}^{\circlearrowleft}$, s，进而推出 $\widehat{\mathcal{U}} \overset{\text{a.s.}}{=} \widehat{\mathcal{W}}^{\text{s}}$，如所要求。

5.7 定理 2.4.9 的证明

回想一下，$\Pi_c^{\uparrow}$，$\Pi_c^{\downarrow}$和 $\Pi_c^{\updownarrow}$分别表示连续的正向半无限、反向半无限和双无限 càdlàg 路径集合。定理 2.4.9 的证明基于以下引理。

引理 5.7.1 以下结论成立。

1. 设 $\mathcal{A} \subseteq \Pi_c^{\uparrow}$ 是一个确定性编织。若 $h \in \Pi^{\updownarrow}$ 不与 $\mathcal{A}$ 交叉，则 $h \in \Pi_c^{\updownarrow}$。 *2.* 设 $\mathcal{F} \subseteq \Pi_c^{\updownarrow}$ 是一个确定性流。若 $f \in \Pi^{\uparrow}$ 不与 $\mathcal{F}$ 交叉，则 $f \in \Pi_c^{\uparrow}$。

Proof: 我们将依次证明每个断言，先从第一个开始。我们用反证法。设 $\mathcal{A} \subseteq \Pi_c$。假设 $h \in \Pi^{\updownarrow}$ 不与 f 交叉，且 h 在 $t \in \mathbb{R}$处不连续。不失一般性（或者考虑关于原点反射后的空间），我们可以假设 $h(t-) < h(t+)$。由引理 4.1.1，存在 $f \in \mathcal{A}$，使得 $f(t-) \le h(t-)$ 且 $h \lhd f$。因此 $h(t+) \le f(t+)$。于是我们有 $f(t-) \le h(t-) < h(t+) \le f(t+)$，这意味着 $f \in \mathcal{A}$在 t处不连续。这就产生了矛盾，从而完成证明。

剩下的工作是证明第二个断言。如果 $f \in \Pi^{\uparrow}$ 不与 $\mathcal{F}$ 交叉，那么由定理 4.3.9，存在 $f' \in \Pi^{\updownarrow}$，使得 $f \subseteq f'$且 f'不与 $\mathcal{F}$交叉。根据我们已经证明的内容，有 $f' \in \mathcal{F}$，因此 $f' \in \Pi_c$，这意味着 $f \in \Pi_{c\circ}$。
■

现在给出定理 2.4.9 的证明。注意，只需对确定性编织证明这些结果即可。我们将依次证明这两个断言，先从第一个开始。设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是满足 $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ 的确定性编织。我们要证明，如果 $\mathcal{A} \subseteq \Pi_c^{\uparrow}$，那么 $\mathcal{B} \subseteq \Pi_{c\circ}^{\updownarrow}$。由对称性，进而可得： $\mathcal{A} \subseteq \Pi_c^{\uparrow}$ 当且仅当 $\mathcal{B} \subseteq \Pi_{c\circ}^{\uparrow}$。

根据定理 2.4.4，不妨设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 耦合的，使得 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ 几乎必然不交叉。在该事件上，根据引理 4.1.4，路径 $f \in \Pi$ 交叉 $\mathcal{A}$ 当且仅当它交叉 $\mathcal{B}$。因此，由 (2.13) 得到 $\mathrm{flow}(\mathcal{A}) \overset{\text{a.s.}}{=} \mathrm{flow}(\mathcal{B})$，下文将其称为 $\mathcal{F}$。根据引理 5.7.1 的第 1 部分，由于 $\mathcal{A} \subseteq \Pi_c^{\uparrow}$，我们还得到 $\mathcal{F} \subseteq \Pi_{c\circ}^{\updownarrow}$。由于 $\mathcal{B} \preceq \mathcal{F}$，我们有 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}_{\uparrow}$，因此 $\mathcal{B} \subseteq \Pi_{c\circ}$。交换 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的角色后，由对称性可得同样结论。这就证明了定理 2.4.9 的第一个断言。

还需证明第二个断言。设 $\mathcal{A}$ 是一个确定性编织。令 $\mathcal{W}$、$\mathcal{F}$ 分别表示相应的网和流。还需证明 $\hat{}\mathcal{W} \subseteq \Pi_c^{\uparrow}$ 当且仅当 $\mathcal{W} \subseteq \Pi_c^{\downarrow}$，其中 $\hat{}\mathcal{W}$ 由定理 2.4.8 中的 (2.16) 给出。根据对称性（或者考虑反向时间），只需证明若 $\mathcal{W} \subseteq \Pi_c^{\uparrow}$，则 $\hat{}\mathcal{W} \subseteq \Pi_{c\circ}^{\downarrow}$。为此，假设 $\mathcal{W} \subseteq \Pi_{c\circ}$。

根据我们已经证明的内容， $\mathcal{F} \subseteq \Pi_{c\circ}$。由 (2.16) 可得

$$\hat{\mathcal{W}} = \overline{\{g \in \Pi^{\downarrow};\, g \text{ does not cross } \mathcal{F} \text{ and } (g(\tau_g), \tau_g) \in D\}_{\downarrow}}. \tag{5.12}$$

令 $\hat{}f \in \hat{}\mathcal{W}$。那么存在 $\hat{}f_n \in \Pi^{\downarrow}$，使得 $\hat{}f_n$ 不与 $\mathcal{F}$ 交叉，且 $\hat{}f_n \to \hat{}f$。根据定理 $\hat{}$4.3.9（应用于反向时间），存在 $h_n \in \mathcal{F}$，使得 $f_n \subseteq h_{n\circ}$。由 $\mathcal{F}$ 的紧致性，我们$\hat{}$可以取一个收敛子序列 $h_n \to h \in \mathcal{F}$。根据引理 A.2.2，可得 $f \subseteq h_\circ$。由于 $h\hat{}$不与 $\mathcal{F}$ 交叉， f 也不与 $\mathcal{F}$ 交叉。因此，根据引理 5.7.1 第 2 部分（应用于反向时间），我们有 $\hat{}f \in \Pi_{c\circ}^{\downarrow}$。于是 $\mathcal{W} \subseteq \Pi_{c\circ}^{\downarrow}$。

A 附录

A.1 关于豪斯多夫度量

设 (M, d_M) 是一个度量空间，并令 $\mathcal{K}(M)$ 表示 M 的紧子集所成的集合，其中包括空集。我们用 $\mathrm{dist}_M(x, A) = \inf_{a\in A} d_M(x, a)$ 表示点$x \in M$到 $A \subseteq M$的下确界距离。现在我们陈述一些关于 $\mathcal{K}(M)$ 的众所周知的事实。函数

$$d_{\mathcal{K}(M)}(A_1, A_2) := \sup_{x_1\in A_1} \mathrm{dist}_M(x_1, A_2) \vee \sup_{x_2\in A_2} \mathrm{dist}_M(x_2, A_1), \tag{A.1}$$

定义了 $\mathcal{K}(M)$ 上的一种度量，称为豪斯多夫度量，更准确地说，是关于 d_M 的豪斯多夫度量。如果 d和 d'是 M 上生成相同拓扑的两种度量，那么它们对应的豪斯多夫度量在 M 上生成相同的拓扑。这种拓扑称为豪斯多夫拓扑。请注意“豪斯多夫拓扑”与“一个豪斯多夫拓扑”之间细微的区别：前者指这一特定拓扑，后者则指任何具有豪斯多夫性质的拓扑，也就是说，其中任意两个不同点都拥有互不相交的邻域。（本文中提及的所有拓扑空间都具有豪斯多夫性质。）

M 的完备性意味着 $\mathcal{K}(M)$的完备性。从 M 到 $\mathcal{K}(M)$的同一扩展，对于可分性和紧致性也成立。现在我们来建立一些更详细的联系。

引理 A.1.1 设(M, d_M) 是一个完备度量空间。

1. 设 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{K}(M)$。那么 $\mathcal{X}$相对紧，当且仅当 $\cup_{X\in\mathcal{X}} X$ 是 M的相对紧子集。

2. 设 $X \subseteq M$。那么 X 相对紧，当且仅当 $\{A \in \mathcal{K}(M);\ A \subseteq X\}$ 是 $\mathcal{K}(M)$ 的相对紧子集。

Proof: 这两个断言显然等价：取 $\mathcal{X} = \{A \in \mathcal{K}(M);\ A \subseteq X\}$ 即可推出 (1)⇒(2)，取 $X = \cup_{A\in\mathcal{X}} A$ 则可推出 (2)⇒(1)。我们将证明 (1)。由于 M 的完备性蕴含 $\mathcal{K}(M)$ 的完备性，因此在 M 和 $\mathcal{K}(M)$ 中，相对紧性都等价于全有界性。

假设 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{K}(M)$ 是全有界的。那么，对于每个 $\epsilon > 0$，存在一个由 $\mathcal{K}(M)$ 中元素组成的有限集 $X_1, \ldots, X_n$，使得对任意 $X \in \mathcal{X}$，都存在某个 X_i，满足$d_{\mathcal{K}(M)}(X, X_i) < \epsilon$。令 $Y = \bigcup_{i=1}^n X_i$，并注意到 $\bigcup_{X\in\mathcal{X}} X \subseteq Y_{(\epsilon)}$。由于每个 X_i 在 M 中都是紧致的，Y 在 M 中也紧致，尤其是 Y 是全有界的。因此 $\bigcup_{X\in\mathcal{X}} X$ 也是全有界的。

反过来，假设 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{K}(M)$ 满足 $\bigcup_{X\in\mathcal{X}} X \subseteq M$ 是全有界的。令$\epsilon > 0$。存在一个有限集 $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq M$ 和一个映射 $f\colon \bigcup_{X\in\mathcal{X}} X \to \{x_1, \ldots, x_n\}$，使得对任意 $x \in \bigcup_{X\in\mathcal{X}} X$，都有 $d_M(x, f(x)) < \epsilon$。对于任意 $X \in \mathcal{X}$，集合 $f(X) = \{f(x);\ x \in X\}$ 是有限集，因此是紧致的，这意味着 $f(X) \in \mathcal{K}(M)$。根据构造，我们有 $d_{\mathcal{K}(M)}(X, f(X)) < \epsilon$。令 $\mathscr{X}$ 为 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 的子集所组成的集合，因此 $\mathscr{X}$ 是 $\mathcal{K}(M)$ 的有限子集。我们已证明，对于任意 $X \in \mathcal{X}$，都存在某个 $X' \in \mathscr{X}$，使得 $d_{\mathcal{K}(M)}(X, X') < \epsilon$。因此 $\mathcal{X}$ 是全有界的。■

下一个引理是引理 A.3.1 证明的关键组成部分。它提供了 $\mathcal{K}(M)$ 的一系列闭（因而也是可测）子集。我们定义

$$A^{(\epsilon)} = \{x \in M\,;\, \mathrm{dist}_M(x, A) < \epsilon\} \qquad \text{for } \epsilon > 0,$$
$$A^{[\epsilon]} = \{x \in M\,;\, \mathrm{dist}_M(x, A) \le \epsilon\} \qquad \text{for } \epsilon \ge 0,$$

as $A \subseteq M$ 的（分别为）开 ϵ-扩张和闭 ϵ-扩张。注意，$A^{[0]} = A$.

引理 A.1.2 设 X、$Y \subseteq M$、$\epsilon \ge 0$ 和 $\mathscr{C} \subseteq \mathcal{K}(M)$。则：

1. 集合 $\{A \in \mathcal{K}(M);\ X \subseteq A^{[\epsilon]}\}$ 是闭集；*2.* 集合 $\{A \in \mathcal{K}(M);\ A \cap (Y \setminus X) = \emptyset\}$ 在 X 为闭集且 Y 为开集时是闭集；*3.* 集合 $\{A \in \mathcal{K}(M);\ A \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset\}$ 在 X 为闭集且 Y 为开集时是闭集；*4.* 集合 $\{A \in \mathcal{K}(M);\ \exists C \in \mathscr{C},\ C \subseteq A\}$ 在 $\mathscr{C}$ 为闭集时是闭集。

Proof: 我们分别证明这些结论。对于第一个结论，假设 $A_n \to A$ 属于 $\mathcal{K}(M)$，且对所有 n，都有 $X \subseteq A_n^{[\epsilon]}$，其中 $\epsilon \ge 0$。令 $f \in X$，于是 $d_{\mathcal{K}(M)}(\{f\}, A_n) \le \epsilon$。令 $n \to \infty$，我们得到 $d_{\mathcal{K}(M)}(\{f\}, A) \le \epsilon$。由于 $f \in X$是任意的，$X \subseteq A^{[\epsilon]}$，证毕。

对于第二个断言，假设 $A_n \to A$ in $\mathcal{K}(M)$ 且 $A_n \cap (Y \setminus X) = \emptyset$ 对所有 n都成立，其中 Y是开集，X 是闭集。我们必须证明 $A \cap (Y \setminus X)$ 为空集。我们将用反证法。假设存在 $f \in A \cap (Y \setminus X)$，这意味着 $f \in A \cap Y$且 $f \notin X$。由于 $A_n \to A$，存在 $f_n \in A_n$使得 $f_n \to f$。对于每个 n，注意到 $A_n \cap (Y \setminus X)$ 为空集，我们有 (a) $f_n \notin Y$ 或 (b) $f_n \in X$；因此，这两个选项之一必定对 $n \in \mathbb{N}$ 的某个无限子序列成立。如果 (a) 对无穷多个 n 成立，那么沿着该子序列，我们有 $f_n \to f$，其中 $f_n \notin Y$且 $f \in Y$，这与 Y 是开集这一事实矛盾。如果 (b) 对

无穷多个 n 成立，那么沿着该子序列，我们有 $f_n \to f$，其中 $f_n \in X$ 且 $f \notin X$，这与 X 是闭集这一事实矛盾。因此，我们得到了所需的矛盾。

对于第三个断言，假设 $A_n \to A$ 属于 $\mathcal{K}(M)$，且对所有 n都有 $A_n \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$，其中 $X \subseteq M$是闭的，$Y \subseteq M$是开的。取 $f_n \in A_n \cap (X \setminus Y)$，于是 $f_n \in A_n \cap X$ 且 $f_n \in M \setminus Y$。由引理 A.1.1，集合 $\cup_n A_n$ 是一个相对紧的 M，并包含序列 (f_n)，因此我们可以取一个收敛子序列 $f_n \to f$。由于 $A_n \to A$，我们有 $f \in A$。我们有 $f_n \in X$且 $f_n \in M \setminus Y$，又因为 X 和 $M \setminus Y$都是闭的，所以有 $f \in X$ 且 $f \in M \setminus Y$。因此 $f \in A \cap (X \setminus Y)$，证明完成。

对于最后一个断言，假设 $A_n \to A$ 属于 $\mathcal{K}(M)$，且 $C_n \in \mathscr{C}$ 满足 $C_n \subseteq A_n$。利用引理 A.1.1，集合 $A \cup (\cup_n A_n)$是紧致的，这意味着 $\cup_n C_n$ 是相对紧的，因此我们可以取一个子序列，并假设 $C_n \to C \in \mathcal{K}(M)$。由于 $C_n \subseteq A_n$，我们有 $C \subseteq A$；又因为 $\mathscr{C}$ 是闭的，所以有 $C \in \mathscr{C}$。■

引理 A.1.3 若 $F: M \to M$ 连续，则从 $\mathcal{K}(M)$ 到其自身的映射$A \mapsto \{F(f);\ f \in A\}$ 连续。

Proof: 注意，若 F 一致连续，则由豪斯多夫度量的定义可直接得出结论，见 (A.1)。对于一般的连续 F，由引理 A.1.1 可知，若$A_n \to A$ 属于 $\mathcal{K}(M)$，则集合 $(\cup_n A_n) \cup A$ 是紧致的，因此 F在此集合上的限制是一致连续的。结论由此得出。■

引理 A.1.4 设 $A_n, B_n, A, B \in \mathcal{K}(M)$，且对所有 n都有 $A_n \subseteq B_n$。若 $A_n \to A$ 且 $B_n \to B$，则 $A \subseteq B$。

Proof: 设 $a \in A$。由于 $A_n \to A$，存在 $a_n \in A_n$ 使得 $a_n \to a$。因此 $a_n \in B_n$。由于 $B_n \to B$，于是有 $a \in B$。■

A.2 关于 Π和 $\mathcal{K}$的 M1 拓扑(Π)

Whitt（2002）的著作详细阐述了四种 Skorohod 拓扑下实值随机过程（即单条 c`adl`ag 路径）的相对紧性和弱收敛。Freeman and Swart（2023）为这四种拓扑引入了一个统一框架，适用于由 c`adl`ag 路径构成的随机集。这里我们回顾该框架中 M1 版本的一些性质。

Π 的紧子集在我们的主要结果中起着关键作用，因此我们需要相应的判据来刻画相对紧性（Π的子集的相对紧性）和紧性（与取值于 $\mathcal{K}(\Pi)$ 的随机变量的分布收敛有关）。固定一个生成 $\mathbb{R}$ 上拓扑的度量$d_{\mathbb{R}}$，并对 $A \subseteq \mathbb{R}$，记 $\mathrm{dist}_{\mathbb{R}}(x, A) = \inf\{d_{\mathbb{R}}(x, y);\ y \in A\}$。连续路径集合的相对紧性通常用连续模来刻画，参见例如 Billingsley（1995）的定理 7.2。M1 拓扑下的对应对象是

$$w_{T,\delta}(f) = \sup\Big\{ \mathrm{dist}_{\overline{\mathbb{R}}}\big(f(t_2\star_2), [f(t_1\star_1), f(t_3\star_3)]\big);\ t_1\star_1, t_2\star_2, t_3\star_3 \in I(f)_{\mathfrak{s}}, \\ -T \le t_1 < t_2 < t_3 \le T,\ t_3 - t_1 < \delta \Big\}, \tag{A.2}$$

约定空集上的上确界为零，且 $[a, b] = [a \wedge b, a \vee b]$。

命题 A.2.1 以下结论成立：

1. 子集 $\mathcal{A} \subseteq \Pi$ 相对紧，当且仅当对所有 $0 < T < \infty$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{f \in \mathcal{A}} w_{T,\delta}(f) = 0.$$

2. 子集 $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{K}(\Pi)$ 相对紧，当且仅当对所有 $0 < T < \infty$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\mathcal{A} \in \mathscr{A}} \sup_{f \in \mathcal{A}} w_{T,\delta}(f) = 0.$$

3. 一列取值于 Π 的随机变量 $f_n(f_n)$ 是紧的，即它们的分布构成了 Π 上一列相对紧的概率测度，当且仅当对所有 $0 < T < \infty$和 $\epsilon > 0$，我们有

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathbb{P}\left[w_{T,\delta}(f_n) \geq \epsilon\right] = 0.$$

4. 一列取值于 $\mathcal{K}(\Pi)$ 的随机变量 $(\mathcal{A}_n)$ 是紧的，即它们的分布构成了 $\mathcal{K}(\Pi)$ 上一列相对紧的概率测度，当且仅当对所有 $0 < T < \infty$ 和 $\epsilon > 0$，我们有

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathbb{P}\left[\sup_{f \in \mathcal{A}_n} w_{T,\delta}(f) \geq \epsilon\right] = 0. \tag{A.3}$$

Proof: 第 1 部分可由 Freeman and Swart（2023）定理 3.7 中给出的相对紧性判据推出。用该定理的术语来说，由于$\mathbb{R}$ 是紧致的，紧包含条件自动成立，因此 Skorohod 等度连续性要求便转化为上文的第 1 部分。注意，由引理 A.1.1 可知，命题 A.2.1 的第 1 部分和第 2 部分实际上彼此等价。另请注意，令 $\mathcal{A}_n = \{f_n\}$ 即可由第 4 部分推出第 3 部分。因此，要完成命题 A.2.1 的证明，只需由第 2 部分推出第 4 部分。（事实上，类似的论证也可由第 1 部分推出第 3 部分。）

首先，假设 $(\mathcal{A}_n)$ 是紧的。也就是说，对于每个 $\kappa > 0$，存在一个紧集 $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{K}(\Pi)$，使得 $\liminf_{n \to \infty} \mathbb{P}[\mathcal{A}_n \in \mathscr{B}] \geq 1 - \kappa_\circ$ 根据第 2 部分，对于任意 $\epsilon > 0$ 和 $T \in (0, \infty)$，存在 $\delta_0 > 0$，使得对于所有 $\delta \in (0, \delta_0)$，都有 $\sup_{B \in \mathscr{B}} \sup_{f \in B} w_{T,\delta}(f) \leq \epsilon_\circ$ 因此 $\liminf_{n \to \infty} \mathbb{P}[\sup_{f \in \mathcal{A}_n} w_{T,\delta}(f) \leq \epsilon] \geq 1 - \kappa_\circ$

剩下的就是证明逆向蕴含。设 $(\mathcal{A}_n)$ 满足 (A.3)，且令 $\kappa > 0_\circ$ 注意到$w_{T,\delta}(f)$ 是关于 δ 和 T 的递增函数。由 (A.3)，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，取集合 $\epsilon = 1/k$，并选取 $\delta_k > 0$ 和 $T_k \in (0, \infty)$，使得

$$\limsup_{n \to \infty} \mathbb{P}[\mathcal{A}_n \setminus B_k \neq \emptyset] \leq \epsilon 2^{-k} \tag{A.4}$$

其中 $B_k = \{f \in \Pi;\ w_{T,\delta}(f) \leq k^{-1}\}_\circ$ 注意，$B_{k+1} \subseteq B_k$并令 $B = \cap_k B_{k\circ}$ 于是 $\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{f \in B} w_{T,\delta}(f) = 0$，因此第 2 部分得出 $\mathscr{B} = \{X \in \mathcal{K}(\Pi);\ X \subseteq B\}$ 是 $\mathcal{K}(\Pi)$ 的紧子集。我们有

$$\begin{aligned}
\limsup_n \mathbb{P}[\mathcal{A}_n \setminus B \neq \emptyset] &= \limsup_n \mathbb{P}[\cup_k (\mathcal{A}_n \setminus B_k) \neq \emptyset] \\
&\leq \limsup_n \textstyle\sum_k \mathbb{P}[\mathcal{A}_n \setminus B_k \neq \emptyset] \\
&\leq \textstyle\sum_k \limsup_n \mathbb{P}[\mathcal{A}_n \setminus B_k \neq \emptyset] \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

上面的第三行用到了反向法图引理，最后一行用到了 (A.4)。注意到 $\{\mathcal{A}_n \setminus B = \emptyset\} = \{\mathcal{A}_n \subseteq B\} = \{\mathcal{A}_n \in \mathscr{B}\}$，于是我们得到 $\limsup_n \mathbb{P}[\mathcal{A}_n \in \mathscr{B}] \geq 1 - \epsilon_\circ$ 因此 $(\mathcal{A}_n)$ 是紧的，证明完毕。■

下面三个引理是命题 2.2.1 和 A.2.1（第 1 部分）的推论。它们涵盖了本文中我们与 M1 拓扑的大部分交互。回顾第 2.2 节，对于 $f \in \Pi$，插值图 $H(f)$ 上存在一个自然的全序 $\sqsubseteq$。我们将相应的严格序关系记作 $\sqsubset$。我们对 (2.8) 中引入的术语稍作扩展：若 $w,\ z \in H(f)$，且 $w \sqsubseteq z$ 在 $H(f)$ 上的全序中，我们将 $f|_{[w,z]}$ 记作唯一的 $g \subseteq f$，使得 $g \in \Pi$ 起于 w，终于 z。

引理 A.2.2 设 $f_n, f \in \Pi$。假设 $f_n \to f$，且 $w_n, z_n \in H(f_n)$ 满足 $z_n \to z$ 和 $w_n \to w$，并假设 $w_n \sqsubseteq z_n$ 在从 $H(f_n)$ 诱导的序中。则 $w, z \in H(f)$，其中 $w \sqsubseteq z$ 在从 $H(f)$ 诱导的序中，并且 $f_n|_{[w_n,z_n]} \to f|_{[w,z]}$。

特别地，如果 $z_n \in H(f_n)$ 满足 $f_n \to f$ 和 $z_n \to z$，则 $z \in H(f)$。

Proof: 第二个结论由第一个结论立即得出，因此我们将证明第一个结论。设 $g_n = f_n|_{[w_n,z_n]}$ 和 $g = f_{[w,z]}$。根据引理的假设，(f_n) 是 $\mathcal{K}(\Pi)$ 中的相对紧序列。由于 $g_n \subseteq f_n$，由命题 A.2.1 第 1 部分可知，(g_n) 也相对紧。因此，要证明本引理，只需证明 (g_n) 的任意极限点都等于 g。

设 g' 是 (g_n) 的一个极限点，并稍微滥用一下记号，取一个子序列，假设 $g_n \to g'$ 在 M1 拓扑下收敛。由命题 2.2.1 可得 $d_{\mathcal{K}((\mathbb{R}^2_\partial)^2)}(H^{(2)}(g_n),\ H^{(2)}(g')) \to 0$。正如我们在命题 2.2.1 前的评论中所指出的，显然这意味着 $d_{\mathcal{K}(\mathbb{R}^2_\partial)}(H(g_n),\ H(g')) \to 0$。此外，$(h, h') \mapsto d_{\mathcal{K}(\mathbb{R}^2_\partial)}(H(h),\ H(h'))$ 是 Π 上的豪斯多夫度量，它生成的拓扑比 M1 拓扑更粗；如 Freeman and Swart（2023）第 3.4 节所述，所生成的拓扑就是 Skorohod 的 M2 拓扑。由极限的唯一性立即可知，若 $d_{\mathcal{K}(\mathbb{R}^2_\partial)}(H(g_n),\ H(g)) \to 0$，则 $d_{\mathcal{K}((\mathbb{R}^2_\partial)^2)}(H^{(2)}(g_n),\ H^{(2)}(g)) \to 0$。因此，要证明本引理，只需说明 $H(g') = H(g)$。

考虑 $v \in H(g')$。由于 $H(g_n) \to H(g')$，存在 $v_n \in H(g_n)$ 使得 $v_n \to v$。由于 $g_n \subseteq f_n$，因此我们有 $v_n \in H(f_n)$，其中 $w_n \sqsubseteq v_n \sqsubseteq z_n$。因此，$(w_n, v_n)$、$(v_n, z_n) \in H^{(2)}(f_n)$。由于 $H^{(2)}(f_n) \to H^{(2)}(f)$，因此我们得到 (w, v)、$(v, z) \in H^{(2)}(f)$，这意味着 $v \in H(f)$，其中 $w \sqsubseteq v \sqsubseteq z$。于是 $v \in H(g)$。因此我们得到 $H(g') \subseteq H(g)$。

还需证明反向包含关系。考虑 $v \in H(g)$。因此 $v \in H(f)$，其中 $w \sqsubseteq v \sqsubseteq z$，这意味着 (w, v)、$(v, z) \in H^{(2)}(f)$。于是存在 (w'_n, v_n)、$(v_n, z'_n) \in H^{(2)}(f_n)$，使得 $(w'_n, v_n) \to (w, v)$，且 $(v_n, z'_n) \to (v, z)$。如果 $v = w$，那么 $w_n \to v$，并且由于 $w_n \in H(g_n)$，我们得到 $v \in H(g')$。同理，如果 $v = z$，那么 $z \in H'(g)$。因此，不失一般性，我们可以假设 $w \sqsubset v \sqsubset z$。

注意，$w_n \vee w'_n$ 和 $z_n \wedge z'_n$ 是 $H(f_n)$ 的元素，其中 $\wedge$ 和 $\vee$ 分别表示在 $\sqsubseteq$ 下的最小值和最大值。此外，$w_n \vee w'_n \to w$ 和 $z_n \wedge z'_n \to z$。如果对无穷多个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $v_n \sqsubseteq w_n \vee w'_n$，那么对这些 n，$(v_n, w_n \vee w'_n) \in H^{(2)}(f_n)$，于是我们会得到 $(v, w) \in H^{(2)}(f_n)$，这意味着 $v \sqsubseteq w$，与之矛盾。因此，除有限多个 n 外，对所有 $w_n \vee w'_n \sqsubseteq v_n$ 都成立。同理，$v_n \sqsubseteq z_n \wedge z'_n$。因此，除有限多个 n 外，对所有 $w_n \sqsubseteq v_n \sqsubseteq z_n$ 都成立。对于这样的 n，我们有 $v_n \in H(g_n)$，这意味着 $v \in H(g)$。由此得到 $H(g') \subseteq H(g)$，所以实际上 $H(g') = H(g)$，证明完毕。■

引理 *A.2.3* 设 f_n、$f \in \Pi$。假设 $f_n \to f$ 和 $t_n \in I(f_n)$，且 $t_n \to t \in \mathbb{R}$。对每个 n，令 $\star_n \in \{-, +\}$。则 $f \in I(f)$ 和 $f(t-) \wedge f(t+) \le \liminf_n f_n(t_n \star_n) \le \limsup_n f_n(t_n \star_n) \le f(t-) \vee f(t+)$。

Proof: 令 x 为 $(f_n(t_n \star_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 的任一子序列极限点，这意味着 (x, t) 是 $(f_n(t_n \star_n),\ t_n)$ 的子序列极限点。注意，$(f_n(t_n \star_n),\ t_n) \in H(f_n)$。由引理 A.2.2

因此有 $(x,t) \in H(f)$，这意味着 $x \in [f(t-) \wedge f(t+)\ f(t-) \vee f(t+)]$。结论得证。■

引理 A.2.4 设 f_n，其中 $f_n \to f$ 和 $t\star \in I(f)$。存在 $t_n \in \mathbb{R}$ 使得 $t_n \to t$ 且 $f_n(t_n\star) \to f(t\star)$。

PROOF: 注意到 $H(f_n) \to H(f)$，取 $(x_n,t_n) \in H(f_n)$，使得 $(x_n,t_n) \to (f(t\star)\ t)$。于是 $(f_n(t_n-)\ t_n) \sqsubseteq (x_n,t_n) \sqsubseteq (f_n(t_n+)\ t_n)$。由于 $\mathbb{R}$ 的紧致性，不妨沿着一个子序列取极限，使得 $f_n(t_n-)$ 和 $f_n(t_n+)$ 均收敛，分别记为 $f_n(t_n-) \to a$ 以及 $f_n(t_n+) \to b$。因此，根据引理 A.2.2，我们有 $(a,t) \in H(f)$ 以及 $(b,t) \in H(f)$，且 $(f(t-)\ t) \sqsubseteq (a,t) \sqsubseteq (f(t\star)\ t) \sqsubseteq (b,t) \sqsubseteq (f(t+)\ t)$。若 $\star = -$，则 $(a,t) = (f(t\star)\ t)$ 且 $f_n(t_n-) \to f(t-)$。若 $\star = +$，则 $(b,t) = (f(t\star)\ t)$ 且 $f_n(t_n+) \to f(t+)$。■

A.3 关于 $\mathcal{K}(\Pi)$ 中的可测性

本节将证明，涉及 $\mathcal{K}(\Pi)$ 的若干基本映射都是可测的。在第 5 节中处理取值于 $\mathcal{K}(\Pi)$ 的随机变量时，需要用到这些结果。本节的大部分工作都集中在引理 A.3.1 中，该引理还用于引理 4.2.5 的证明。

回顾一下，我们在 $\mathbb{R}^2_c$、Π 和 $\mathcal{K}(\Pi)$ 上使用博雷尔 σ-域。在每种情况下，这些 σ-域都由闭集（或等价地，由开集）生成。由于我们关注的是紧致性，因此尽可能使用闭集会更方便。回顾一下，d_Π 是通过命题 2.2.1 定义的，它在 Π 上生成 M1 拓扑；相应地，$\mathcal{K}(\Pi)$ 上的豪斯多夫度量由式 (A.1) 定义。

引理 A.3.1 映射 $(A,z) \mapsto A(z)$ 从 $\mathcal{K}(\Pi) \times \mathbb{R}^2_c \to \mathcal{K}(\Pi)$ 出发是可测的 e.

PROOF: 证明相当技术性。回顾一下，$A(z) = \{f \in A;\ z \in H(f)\}$。注意，命题 2.2.1 表明 $A(z)$ 是 Π 的闭子集，由于 $A(z)$ 是紧集 A 的子集，因此它是紧致的。由于 $\mathcal{K}(\Pi)$ 和 $\mathbb{R}^2_c$ 都是可分的，为了证明 $(A,z) \mapsto A(z)$ 的可测性，只需证明边缘映射 $A \mapsto A(z)$ 和 $z \mapsto A(z)$ 都是可测的。我们将证明分成这两个部分，并分别独立证明。在每一部分中，我们将证明 $\mathcal{K}(\Pi)$ 的一个闭子集的原像是可测的；我们将使用可测子集上的可数次集合运算，明确表示这个原像。引理 A.1.2 提供了 $\mathcal{K}(\Pi)$ 的一系列可测（事实上是闭）子集。闭图 $H(f)$ 是可测的（事实上是紧集）这一事实，为我们提供了 $\mathbb{R}^2_c$ 的可测子集。

可测性 $A \mapsto A(z)$： 固定 $z \in \mathbb{R}^2_c$ 并将此映射记为 $M_z : \mathcal{K}(\Pi) \to \mathcal{K}(\Pi)$，因此 $M_z(A) = A(z)$。对于 $z \in \mathbb{R}^2_c$，记 $\Pi_z = \{f \in \Pi;\ z \in H(f)\}$ 和 $\mathcal{K}(\Pi_z)$ 表示 Π_z 的紧子集族。命题 2.2.1 蕴含 Π_z 是 Π 的闭子集，由此引理 A.1.2 的第 1 部分可知，$\mathcal{K}(\Pi_z)$ 是 $\mathcal{K}(\Pi)$ 的闭子集。注意，M_z 映射到 $\mathcal{K}(\Pi_z)$ 中。因此，只需证明 $\mathcal{K}(\Pi_z)$ 中任一闭子集的原像都是可测的。为此，设 $\mathscr{C} \subseteq \mathcal{K}(\Pi_z)$ 是闭集，并设 $\mathscr{C}'$ 是 $\mathscr{C}$ 的稠密可数子集。我们将证明以下条件等价：

1. $A(z) \in \mathscr{C}$；
2. 对于所有 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 和 $C \in \mathscr{C}'$，使得 $\left(A \cap \Pi_z^{(\delta)}\right) \setminus C^{[\epsilon]} = \emptyset$ 和 $C \subseteq A^{[\epsilon]}$。

我们先证明正向蕴含 (1)⇒(2)。假设 $A(z) \in \mathscr{C}$，并假定 (2) 不成立，以便使用反证法。于是存在 $\epsilon > 0$，使得对所有

$C \in \mathscr{C}'$ 以及所有 $\delta > 0$，均有 $\left(A \cap \Pi_z^{(\delta)}\right) \setminus C^{[\epsilon]} \neq \emptyset$ 或 $C \not\subseteq A^{[\epsilon]}$。我们有 $A(z) \in \mathscr{C}$，因此可以选择 $C \in \mathscr{C}'$，使得

$$d_{\mathcal{K}(\Pi)}(C, A(z)) \leq \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{A.5}$$

因此 $C \subseteq A(z)^{[\epsilon]}$，这意味着 $C \subseteq A^{[\epsilon]}$。取 $\delta = \frac{1}{n}$，于是我们得到存在 $n \in \mathbb{N}$ 的一个无限子序列，使得 $\left(A \cap \Pi_z^{(1/n)}\right) \setminus C^{[\epsilon]} \neq \emptyset$。对于这样的 n，取 $f_n \in \left(A \cap \Pi_z^{(1/n)}\right) \setminus C^{[\epsilon]}$。于是我们有 $f_n \notin C^{[\epsilon]}$，由 (A.5) 可知 $f_n \notin A(z)^{[\epsilon/2]}$。我们还有 $f_n \in A \cap \Pi_z^{(1/n)}$，而由 A 的紧致性可知 (f_n) 有一个子列极限 $f \in A(z)$。然而，这与前一句得出的结论矛盾。因此 (1)⇒(2)。

现在来证明逆向蕴含 (2)⇒(1)。取 $\epsilon = \frac{1}{n}$，并将 $\delta = \delta_n > 0$ 和$C = C_n \in \mathscr{C}'$ 视为 (2) 中给定的条件。也就是说，我们有

$$C_n \subseteq A^{[1/n]} \qquad \text{and} \qquad A \cap \Pi_z^{(\delta_n)} \subseteq C_n^{[1/n]}. \tag{A.6}$$

由 (A.6) 中的第一个陈述，由于 $C_n \in \mathcal{K}(\Pi_z)$，我们有 $C_n \subseteq A^{[1/n]} \cap \Pi_z \subseteq A(z)^{[1/n]}$。显然，$A(z) \subseteq A \cap \Pi_z^{(\delta_n)}$，因此由 (A.6) 中的第二个陈述可得 $A(z) \subseteq C_n^{[1/n]}$。将这些结果结合起来，可得 $d_{K(\Pi)}(A(z), C_n) \leq \frac{1}{n}$。因此，$C_n \to A(z)$，因为 $n \to \infty$。由于 $\mathscr{C}$是闭集，我们于是得到 $A(z) \in \mathscr{C}$。因此 (2)⇒(1)。

现在我们有 (1)⇔(2)。因此

$$\begin{aligned} M_z^{-1}(\mathscr{C}) &= \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{\delta>0} \bigcup_{C \in \mathscr{C}'} \left\{ B \in \mathcal{K}(\Pi) \,;\, \left(B \cap \Pi_z^{(\delta)}\right) \setminus C^{[\epsilon]} = \emptyset \right\} \cap \left\{ B \in \mathcal{K}(\Pi) \,;\, C \subseteq B^{[\epsilon]} \right\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{C \in \mathscr{C}'} \left\{ B \in \mathcal{K}(\Pi) \,;\, B \cap \left(\Pi_z^{(1/m)} \setminus C^{[1/n]}\right) = \emptyset \right\} \cap \left\{ B \in \mathcal{K}(\Pi) \,;\, C \subseteq B^{[1/n]} \right\} \end{aligned}$$

注意，我们用到了集合代数恒等式 $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus Z$。根据引理 A.1.2 的第 1 部分和第 2 部分，上述最后一行由 $\mathcal{K}(\Pi)$ 的闭子集的可数并与可数交组成。因此 M_z 是可测的。

() 的可测性： 为了保持此论证与上文之间的对称性，我们将重用部分记号。固定 $A \in \mathcal{K}(\Pi)$，并将所讨论的映射记为 $M_A : \mathbb{R}^2_{\mathrm{c}} \to \mathcal{K}(\Pi)$，于是 $M_A(z) = A(z)$。对于任意 $z \in \mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$，我们有 $M_A(z) \in \mathcal{K}(A)$，其中 $\mathcal{K}(A)$ 表示 A的所有紧子集组成的集合。引理 A.1.2 的第 1 部分表明，$\mathcal{K}(A)$ 是 $\mathcal{K}(\Pi)$ 的闭子集。容易验证，若 $B \in \mathcal{K}(A)$，则

$$M_A^{-1}(B) = \left(\bigcap_{f \in B} H(f) \right) \setminus \left(\bigcup_{f \in A \setminus B} H(f) \right). \tag{A.7}$$

换言之，方程 (A.7) 表示，$M_A(z) = B$ 当且仅当 B 恰好是满足 $z \in H(f)$ 的所有 $f \in A$ 的集合。为了证明 M_A 的可测性，只需固定 $\mathcal{K}(A)$ 的一个闭子集 $\mathscr{C}$，并证明 $M_A^{-1}(\mathscr{C})$ 是 $\mathbb{R}^2_{\mathrm{c}}$ 的可测子集。令 $\mathscr{C}'$ 为 $\mathscr{C}$ 的一个稠密可数子集。我们将证明以下条件等价：

3. $A(z) \in \mathscr{C}$;
4. for all $\epsilon > 0$ there exists $C \in \mathscr{C}'$ such that $z \in \left(\bigcap_{f \in C} H(f)^{[\epsilon]}\right) \setminus \left(\bigcup_{f \in A \setminus C^{[\epsilon]}} H(f)\right)$.

我们先证明正向蕴含 (3)⇒(4)。假设 $A(z) \in \mathscr{C}$，也就是说 $M_A(z) \in \mathscr{C}$。那么存在 $B \in \mathscr{C}$使得 $z \in M_A^{-1}(B)$。取 $C \in \mathscr{C}'$使得 $d_{\mathcal{K}(\Pi)}(B, C) \leq \epsilon$。

由 (A.7) 可知 $z \in \bigcap_{f\in B} H(f)$。不难验证，$\bigcap_{f\in B} H(f) \subsetneq \bigcap_{f\in B^{[\epsilon]}} H(f)^{[\epsilon]}$，并且由于 $C \subseteq B^{[\epsilon]}$，我们得到 $z \in \bigcap_{f\in C} H(f)^{[\epsilon]}$。类似地，我们有 $B \subseteq C^{[\epsilon]}$，因此 $A \setminus C^{[\epsilon]} \subseteq A \setminus B$，且由 (A.7) 可知 $z \notin \bigcup_{f\in A\setminus B} H(f) \supseteq \bigcup_{f\in A\setminus C^{[\epsilon]}} H(f)$。由此我们证明了 (3)⇒(4)。

现在我们来证明逆向蕴含 (4)⇒(3)。取 $\epsilon = \frac{1}{n}$，并令 $C = C_n$ 如-(4) 中所给。注意到对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $C_n \subseteq A$，由命题 A.2.1 可知，序列 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 相对紧（作为 $\mathcal{K}(\Pi)$ 中元素构成的序列），因此存在一个收敛子序列。稍微滥用一下记号，我们转而考虑这个收敛子序列，并令$B = \lim_n C_n$。由此立即可得 $B \in \mathscr{C}$。

由 (4) 可知 $z \in \bigcap_{f\in C_n} H(f)^{[\epsilon_n]}$。对于每个 $g \in B$，存在 $g_n \in C_n$ 使得$g_n \to g$。由于 $g_n \in C_n$，我们有 $z \in H(g_n)^{[\epsilon_n]}$。由命题 2.2.1 可知，$H(g_n) \to H(g)$ 在$\mathcal{K}(\mathbb{R}^2_c)$ 中成立，这意味着 $H(g_n)^{[\epsilon_n]} \to H(g)$。由此立即可得 $z \in H(g)$；又由于$g \in B$ 是任意的，因此我们有 $z \in \bigcap_{g\in B} H(g)$。

同样，由 (4) 可得，对所有 n，$z \notin \bigcup_{f\in A\setminus C_n^{[\epsilon_n]}} H(f)$。取 $g \in A \setminus B$，并注意到由于 $B \subseteq \Pi$ 是闭的，我们有 $d_{\mathcal{K}(\Pi)}(\{g\}, B) > 0$。由于 $C_n \to B$，我们也有 $C_n^{[\epsilon_n]} \to B$，因此对充分大的 n，有 $g \notin C_n^{[\epsilon_n]}$。于是 $z \notin H(g)$。由于 $g \in B$ 是任意的，因此我们有 $g \notin \bigcup_{g\in A\setminus B} H(g)$。将此与上一段的结论以及 (A.7) 结合，可得 $z \in M_A^{-1}(B)$。因此 (4)⇒(3)。

现在我们有 (3)⇔(4)。由此可得

$$\begin{aligned} M_A^{-1}(\mathscr{C}) &= \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{C\in\mathscr{C}'} \left(\left(\bigcap_{f\in C} H(f)^{[\epsilon]} \right) \setminus \left(\bigcup_{f\in A\setminus C^{[\epsilon]}} H(f) \right) \right) \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{C\in\mathscr{C}'} \left(\left(\bigcap_{f\in C} H(f)^{[1/n]} \right) \setminus \left(\bigcup_{f\in A\setminus C^{[1/n]}} H(f) \right) \right) \end{aligned} \tag{A.8}$$

现在我们来考察 (A.8) 右侧方括号中的两项。集合 $\bigcap_{f\in C} H(f)^{[1/n]}$是闭集的交，因此是闭集。另请注意，

$$\bigcup_{f\in A\setminus C^{[1/n]}} H(f) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{f\in A\setminus C^{(1/n+1/m)}} H(f) \right). \tag{A.9}$$

我们断言，只要 $E \subseteq \Pi$ 紧致，$\bigcup_{f\in E} H(f)$ 就是闭集；为此，取 $x_n \in H(f_n)$，其中 $f_n \in E$ 且 $x_n \to x \in \mathbb{R}^2_c$，取一个收敛子序列 $f_n \to f \in E$，再由命题 2.2.1 可得 $H(f_n) \to H(f)$，因此 $x \in H(f)$。特别地，由于对所有 $\delta > 0$，$C^{(\delta)}$ 都是开集，我们有 $A \setminus C^{(\delta)}$ 是紧致的，因此 (A.9) 的右侧是可数个闭集的并。至此，我们已经证明 (A.8) 可用 $\mathbb{R}^2_c$ 的可测子集通过可数次集合运算表示 $M_A^{-1}(\mathscr{C})$。因此 M_A 是可测的。■

引理 A.3.2 设 $z \in \mathbb{R}^2_c$。映射 $(A, z) \mapsto A|_z$ 是从 $\mathcal{K}(\Pi) \times \mathbb{R}^2_c \to \mathcal{K}(\Pi)$ 的可测映射。

Proof: 回忆一下 $A|_z = \{f|_z;\ f \in A(z)\}$。由于 $\mathcal{K}(\Pi)$ 和 $\mathbb{R}^2_c$ 都是可分的，为了证明 $(A, z) \mapsto A|_z$ 的可测性，只需证明边缘映射 $A \mapsto A|_z$ 和$z \mapsto A|_z$ 都是可测的。回忆 $\Pi_z = \{f \in \Pi;\ z \in H(f)\}$ 引理 A.3.1 的证明，其中我们证明了 $\Pi_z \subseteq \Pi$ 和 $\mathcal{K}(\Pi_z) \subseteq \mathcal{K}(\Pi)$ 都是闭的。由引理 A.3.1，

映射 $(A, z) \mapsto A(z)$ 是可测的，并且显然它映入 $\mathcal{K}(\Pi_z)$。回忆一下，对于 $f \in \Pi_z$，$f|_z$是唯一的 $g \subseteq f$，使得 $(g(\sigma_g-)\,\sigma_g) = z$，且 $A|_z = \{f|_z;\ f \in A \cap \Pi_z\}$。由引理 A.2.2，从 Π_z 到其自身定义的映射 $f \mapsto f|_z$ 是连续的。由引理 A.1.3 可知，$A \mapsto A|_z$ 在 $\mathcal{K}(\Pi_z)$ 上连续。由于 $A|_z = (A(z))|_z$，证明得证。■

引理 A.3.3 映射 $A \mapsto A_\uparrow$ 是从 $\mathcal{K}(\Pi)$ 到其自身的连续映射。

Proof: 设 $A_n, A \in \mathcal{K}(\Pi)$ 满足 $A_n \to A$。则 (A_n) 相对紧。注意到 $g \subseteq f \Rightarrow w_{T,\delta}(f) \le wT, \delta(f)$，由命题 A.2.1 的第 2 部分可知 $((A_n)\uparrow)$ 相对紧。设 $B \in \mathcal{K}(\Pi)$ 是 $((A_n)\uparrow)$ 的一个极限点。我们必须证明 $B = A_{\uparrow}$。不失一般性，可取一个子序列，并假设 $(A_n)_\uparrow \to B$。

设 $g \in B$。那么存在 $f_n \in A_n$，使得 $g_n \subseteq f_n$ 且 $g_n \to g$。由引理 A.1.1，集合$\cup_n A_n$ 相对紧，因此我们可以再取一个子序列，并假设 $f_n \to f$。于是 $f \in A$。由引理 A.2.2 可知 $g \subseteq f$，因此 $g \in A_{\uparrow}$。故 $B \subseteq A_{\uparrow}$。

还需证明反向包含关系。令 $g \in A_{\uparrow}$。则存在 $f \in A$，使得 $g \subseteq f$。由于 $A_n \to A$，存在 $f_n \in A_n$，使得 $f_n \to f$。根据命题 2.2.1（及其前面的注释），我们有 $H(f_n) \to H(f)$。特别地，存在 $z_n \in H(f_n)$，使得 $z_n \to (g\ (\sigma_g-)\ \sigma_g) \in H(f)$。令 $g_n = f_n|_{z_n}$。引理 A.2.2 表明 $g_n \to g$，因此 $g \in B$。于是 $A_\uparrow \subseteq B$。因此 $A_\uparrow = B$，证明完成。■

A.4 引理 2.5.1 的证明

我们必须证明布朗网络 $\mathcal{W}_\mathrm{b}$ 满足定义 2.4.1 中对网的定义。该论证依赖于布朗网络的众所周知的性质。我们在第 2.2 节中指出，$(\Pi_\mathrm{c}^\uparrow, d_\Pi)$ 是布朗网络通用的状态空间。由于 $\mathcal{W}_\mathrm{b}$ 是一个 $\mathcal{K}(\Pi_\mathrm{c}^\uparrow)$ 值随机变量，它也是一个 $\mathcal{K}(\Pi^\uparrow)$ 值随机变量。现在我们将引用 Schertzer 等人（2017）定理 2.3 的 (a)–(c) 点，该定理定义了 $\mathcal{W}_\mathrm{b}$。

我们首先证明 $\mathcal{W}_\mathrm{b}$ 是一种编织。令 $D \subseteq \mathbb{R}_\mathrm{c}^2$ 为稠密且可数的。根据该定义的 (a) 点，几乎必然地，对所有 $z \in D$，$\mathcal{W}_\mathrm{b}(z)$ 都非空；由引理 A.2.2 可知，这意味着 $\mathcal{W}_\mathrm{b}$ 几乎必然遍历。此外，由于 $\mathcal{W}_\mathrm{b}(z)$ 几乎必然是单点集，D 几乎必然非分歧。文献中众所周知，$\mathcal{W}_\mathrm{b}$ 几乎必然不交叉；严格来说，这是因为定义的 (b) 点给出 $\mathcal{W}_\mathrm{b}(D)$ 不交叉，(c) 点给出 $\mathcal{W}_\mathrm{b} \overset{\mathrm{a.s.}}{=} \mathcal{W}_\mathrm{b}{}^\mathrm{s}(D)$，而连续路径的极限仍保有不交叉性质（最后这一步推论用到了引理 3.3.7）。至此，我们已证明 $\mathcal{W}_\mathrm{b}$ 是一种编织。

定义的 (c) 点给出，对于任意确定性的稠密可数 $D \subseteq \mathbb{R}^2$，$\mathcal{W}_\mathrm{b} \overset{\mathrm{a.s.}}{=} \mathcal{W}_\mathrm{b}{}^\mathrm{s}(D)$。注意到我们在本引理上方刚刚关于 $\mathcal{W}_\mathrm{b}(D)$ 和 $\mathcal{W}_\mathrm{b}|_D$ 的说明，可得 $\mathcal{W}_\mathrm{b} \overset{\mathrm{a.s.}}{=} {}^\mathrm{s}(\mathcal{W}_\mathrm{b}|_D)$。引理 A.2.2 表明，若 $A_n \to A$ 属于 $\mathcal{K}(\Pi)$，则 $(\mathcal{A}_n)_\uparrow \to \mathcal{A}_\uparrow$。将这一事实与布朗网络的常用随机游走逼近系统相结合（例如 Schertzer 等人（2017）的图 9），不难证明 $\mathcal{W}_\mathrm{b} \overset{\mathrm{a.s.}}{=} {}^\mathrm{s}(\mathcal{W}_\mathrm{b})\uparrow$。因此，特别地，$\mathcal{W}_\mathrm{b}|_D \overset{\mathrm{a.s.}}{=} {}^\mathrm{s}(\mathcal{W}_\mathrm{b}|_D)\uparrow$，由此 (2.12) 得出 $\mathcal{W}_\mathrm{b} \overset{\mathrm{a.s.}}{=} {}^\mathrm{s}$网$(\mathcal{W}_\mathrm{b})$。因此，定理 2.4.3 表明 $\mathcal{W}_\mathrm{b}$ 是一个网。

参考文献

P.Alexandroff 和 P. Urysohn。《关于紧致拓扑空间的回忆录》，献给 D. Egoroff 先生。阿姆斯特丹论文集，14(1)，1929年。

R. A. Arratia。《直线上的合并布朗运动》。威斯康星大学麦迪逊分校，1979年。N. Berestycki、C. Garban 和 A. Sen。合并布朗流：一种新方法。《概率年刊》，43(6)，2015年。P. Billingsley。《概率与测度》。威利出版社，1995年。G. Cannizzaro 和 M. Hairer。布朗网络作为随机 ⧹-树。2021年。A. Depperschmidt、A. Greven 和 P. Pfaffelhuber。标记度量测度空间。《概率电子通讯》，16(none)，2011年。S. N. Ethier 和 T. G. Kurtz。《马尔可夫过程：刻画与收敛》。威利出版社，1986年。L. R. Fontes 和 C. M. Newman。完整布朗网络作为随机流的标度极限。《随机性与动力学》，6(02):213–228，2006年。L. R. G. Fontes、M. Isopi、C. M. Newman 和 K. Ravishankar。布朗网络：刻画与收敛。《概率年刊》，32(4):2857–2883，2004年。N. Freeman 和 J. Swart。路径空间上的 Skorohod拓扑。*arXiv:2301.05637*，第1–47页，2023年。A. N. Kolmogorov。关于 Skorohod收敛。《概率论及其应用》，1: 213–222，1956年。H. Kunita。随机流与随机微分方程，第24卷。剑桥大学出版社，1997年。T. M. Liggett。相互作用粒子系统，第276卷。施普林格，柏林，1985年。T. Mountford、K. Ravishankar 和 G. Valle。稳定网络的一种构造。《拉丁美洲概率与数理统计杂志》，16(1):787，2019年。C. Newman、K. Ravishankar 和 R. Sun。合并的非简单随机游走收敛到布朗网络。《概率电子期刊》，10，2005年。V. V. Piterbarg。各向同性同胚随机流的扩张与收缩。《概率年刊》，26(2)，1998年。E. Schertzer、R. Sun 和 J. Swart。布朗网络、布朗网及其普适性。《无序系统、随机过程及其应用进展》，第270–368页，2017年。A. Skorohod。随机过程的极限定理。《概率论及其应用》，1:261–290，1956年。F. Soucaliuc、B. T´oth 和 W. Werner。独立一维布朗路径之间的反射与聚合。载于亨利·庞加莱研究所年鉴´（*B*辑）概率与统计，第36卷，第509–545页，2000年。R. Sun 和 J. M. Swart。布朗网。《概率年刊》，第1153–1208页，2008年。B. T´oth 和 W. Werner。真正的自排斥运动。《概率论及相关领域》，111(3):375–452，1998年。W. Whitt。《随机过程极限》。施普林格纽约，2002。