arXiv:2302.02789v1 [math.DS] 6 Feb 2023

脉冲微分方程：周期解的存在性与稳定性

ALEXANDRE A. P. RODRIGUES 里斯本经济与管理学院 RUA DO QUELHAS, 6, 1200-781 里斯本 波尔图大学数学中心 RUA DO CAMPO ALEGRE, 687, 4169-007 波尔图，葡萄牙

Abstract. 我们研究 $\mathbb{R}$ 中具有有限个双曲平衡点、且受 ω周期性瞬时扰动脉冲（$\omega > 0$）作用的一般微分方程。利用原系统（无扰动）的时间-ω 映射，我们能够求出扰动系统的所有周期解，并研究其稳定性。本文建立了一种算法，用于确定频率为 ω的脉冲系统的 ω周期解、研究其稳定性，并确定鞍结分岔。借助这一技术，我们能够全面刻画所研究系统的渐近动力学。

1. Introduction

微分方程可用于描述许多现实世界现象的动力学。某些演化过程的特点是，在特定时刻会发生状态突变（例如，森林火灾或采伐会突然改变景观 [15], 药物治疗 [8], 疫苗接种 [5, 14, 16]）。这些过程会受到短期扰动的影响，其持续时间与过程的持续时间相比可以忽略不计。因此，自然可以假设这些扰动是瞬时的。此类系统可通过具有不连续轨道的动力系统 [13, 18]进行研究。

我们将这类系统称为脉冲微分方程或带脉冲的微分方程：这类微分方程系统与一个离散映射相耦合，用以描述状态变化，即所谓的“脉冲”。脉冲条件可以依赖于时间或状态[7, 12]。脉冲微分方程理论由 Mil’man 和 Mishkis 于 20 世纪 60 年代提出 [12], ，并在 80 年代和 90 年代迅速发展 [2, 3, 9, 13, 17,18] ，能够很好地描述一些在一系列给定时刻发生突变的现实过程。

脉冲方程在采用周期性疫苗接种的流行病模型中发挥着重要作用[5, 14, 16] ，也可能出现在宏观经济学中——例如，当用跳跃来模拟资本密集度受到的冲击时，索洛微分方程[6] 就会变成脉冲微分方程。

数学文献中最常见的脉冲微分方程类型如下：

Date：2023年2月7日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 34A37；34D23；37C75；34C25；37G15*Keywords:* 脉冲微分方程，瞬时脉冲，周期解，稳定性。AR 部分研究经费由 CMUP 提供，该中心的经费来自国家基金，并通过 FCT——科学与技术基金会（Funda.c˜ao para a Ci^encia e Tecnologia, I.P.）拨付，项目编号为 UIDB/00144/2020。

(1) 瞬时脉冲：与整个过程的持续时间相比，这些变化持续的时间相对较短。脉冲发生时刻的序列可能依赖于状态 [3, 13]；(2) 非瞬时脉冲：这同样是一种脉冲作用，它从任意一个不动点开始，并在一个有限时间区间内持续起作用。 [7]的作者提出了这类新的抽象微分方程，其中脉冲并非瞬时发生，并探讨了在温和条件下解的存在性；(3) 自治脉冲方程：微分方程 $\varphi(t)$ 的解不断演化，直到它到达相空间的某个紧子集 M 中的一点（如果确实到达的话）；此时，算子 $I(x)$ $x \in M$ 会瞬时将 $\varphi(t)$ 转移到相空间中的另一点 [18]。

本文受脉冲型 SI/SIR 传染病模型的启发， [5, 14, 16], 我们研究在 $\mathbb{R}$ 中受按周期性时间序列发生的瞬时脉冲作用的微分方程。在 [5, 16], 中，脉冲在易感者群体中发挥疫苗接种的作用。

创新点与结构。本文将研究 $\mathbb{R}$ 中具有 ω–周期性脉冲效应时刻的非线性微分方程。我们将提出一种（简单的）算法，以求出微分方程的 ω–周期解并判定其稳定性。该算法很有用，因为在 $\mathbb{R}$ 中，我们无需使用定理 3.1（见 [10] ）中讨论的脉冲微分方程 Lyapunov 映射形式体系，就能推断其稳定性[1]。

在第 2 节介绍脉冲微分方程的一些基本结果后，我们将在第 3 节描述并阐述所研究的系统，并陈述本文的主要结果。在第 4 节中，我们将给出一些有用结果，通过与未扰动系统相关的时间-ω 映射来确定 ω–周期解。这些结果适用于更一般的瞬时脉冲微分方程。所研究系统的周期解仅为 ω–周期解。

在第5节中，我们推导了用于研究脉冲系统周期解稳定性的技术性结果。主要结果的证明在第 6 节中给出。第7节对本文作出总结。我们力求给出一份自洽的论述，汇集所有与证明相关的主题。我们绘制了说明性图形，使本文易于阅读。

2. Preliminaries

下一节包含一些关于瞬时脉冲微分方程的有用信息，相关内容见 [4, 9]。另请参阅 [1] 的第1章。

2.1. 瞬时脉冲微分方程。脉冲微分方程由一个常微分方程和一个定义“跳跃”条件的离散映射耦合而成。该过程的演化规律由微分方程描述

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

[1]注意，由 [10] 发展出的理论在周期解唯一时有效。

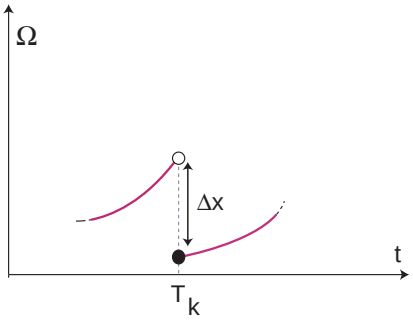

FIGURE 1. $t = T_k$ 处的“跳跃”定义为 $\Delta x(T_k) := \lim_{t\to T_k^+} \varphi(t,x) - \lim_{t\to T_k^-} \varphi(t,x)$, 其中 $\Omega = \mathbb{R}_0^+$。

其中 $t \in \mathbb{R}$、 $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ 和 f： $\mathbb{R}\times\Omega \to \Omega$ 是 C^1。时刻 t 的瞬时脉冲由映射 $I(t,x)$: $\mathbb{R}\times\Omega \to \Omega$ 定义为

$$I(t,x) = x + I(t,x).$$

本文始终关注以下初值问题:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x) \qquad t \neq T_k \\ \Delta x(T_k) &= I_k(x) \qquad t = T_k, \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$，脉冲固定在序列 $(T_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ 上，使得 $T_0 = 0$,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad T_k < T_{k+1} \qquad \text{and} \qquad \lim_{k\in\mathbb{N}} T_k = +\infty,$$

and，如图1所示， $t = T_k$ 处的瞬时“跳跃”定义为:

$$\Delta x(T_k) := \lim_{t\to T_k^+} \varphi(t,x) - \lim_{t\to T_k^-} \varphi(t,x).$$

对于 $k \in \mathbb{N}$ 和 $t \in [T_k, T_{k+1})$，方程 (2.1) 的解 $\varphi(t)$ 满足方程$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$；对于 $t \geq T_k$， $\varphi(t)$ 满足等式

$$\lim_{t\to T_k^+} \varphi(t,x) = \lim_{t\to T_k^-} \varphi(t,x) + I_k\left(\lim_{t\to T_k^-} \varphi(t,x)\right),$$

whe关于 $x \in \Omega$。下面的结果讨论方程 (2.1) 的唯一解的存在性 .

定理 2.1（[2, 9], 改编）。设函数 f： $\mathbb{R}\times\Omega \to \Omega$ 在集合$[T_k, T_{k+1}[\times\Omega$ 上连续，其中 $k \in \mathbb{N}$。对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $x \in \Omega$，假设当 $(t,y) \to (T_k, x)$ 时， $f(t,y)$ 的极限存在且有限，其中 $t > T_k$。那么，对于每个 $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times\Omega$，都存在 $\beta > t_0$ 和一个初值问题 (2.1) 的解 φ : $]t_0, \beta[\to \mathbb{R}$ 。如果 f 关于 $\mathbb{R}\times\Omega$ 中的 x 是C^1 ，则该解唯一。

The 下面的定理给出了使解 φ 可延拓的条件 .

定理 2.2（[2, 9], 改编版）。设函数 $f\colon \mathbb{R}\times\Omega \to \Omega$ 在集合$[T_k, T_{k+1}[\times\Omega$ 上连续，其中 $k\in\mathbb{N}$。对于每个 $k\in\mathbb{N}$ 和 $x\in\Omega$，假设当 $(t,y)\to(T_k,x)$ 时，$f(t,y)$ 的极限存在且有限，其中 $t>T_k$。若 $\varphi\colon]\alpha,\beta[\to\mathbb{R}$ 是方程 (2.1) 的一个解，则当且仅当满足以下条件时，该解可向 β 的右侧延拓：$\beta\neq T_k$

$$\lim_{t\to\beta^-}\varphi(t)=\eta$$

且以下条件之一成立：

(1) $\beta\neq T_k$，对任意 $k\in\mathbb{N}_0$ 和 $\eta\in\Omega$；(2) $\beta=T_k$，

对某个 $k\in\mathbb{N}_0$ 和 $\eta+I_k(T_k,\eta)\in\Omega$。

在定理 2.2 的条件下，对每个 $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\Omega$，存在一个唯一解 $\varphi(t,x_0)$，它在 $\mathbb{R}$ ([2, 9]) 中定义，可写为：

$$\varphi(t,x_0)=\begin{cases} x_0+\displaystyle\int_0^t f(s,\varphi(s,x_0))\mathrm{ds}+\sum_{0<T_k<t} I_k(\varphi(T_k,x_0)) \quad \text{for} \quad t\in[0,b[\\ \\ x_0+\displaystyle\int_0^t f(s,\varphi(s,x_0))\mathrm{ds}+\sum_{t<T_k<0} I_k(\varphi(T_k,x_0)) \quad \text{for} \quad t\in(a,0] \end{cases} \tag{2.2}$$

2.2. 周期解与稳定性。以下定义改编自[11, 17, 18]。对于 $\omega>0$，我们称 φ 是方程 (2.1) 的 ω–周期解，当且仅当存在 $x_0\in\Omega$ 使得

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \varphi(t,x_0)=\varphi(t+\omega,x_0). \tag{2.3}$$

我们不考虑常数解，并将 ω 视为使 (2.3) 成立的最小正值。设 $x_0\in\Omega$ 满足 $\varphi(t,x_0)$ 是方程 (2.1) 的 ω–周期解。我们称$\varphi(t,x_0)$ 为：

(1) 稳定：对于 x_0 的任意邻域 V，都存在另一个 x_0 的邻域 $W\subset V$，使得对所有 $y_0\in W$ 和所有 $k\in\mathbb{N}$，$\varphi(k\omega,y_0)\in V$；

(2) 渐近稳定：若其稳定，且存在 x_0 的一个邻域 V，使得对于任意 $y_0\in V$，$\lim_{k\to+\infty}\varphi(k\omega,y_0)=x_0$；(3) 不稳定：若其不稳定。

3. Setting and main result

本节列出有关所讨论的脉冲微分方程的主要假设，并陈述本文的主要结果。

3.1. 研究对象。考虑 $\mathbb{R}^+_0$ 中的以下初值问题：

$$\begin{cases} \dot{x}=h(x) \\ \\ \varphi(0)=x_0\in\mathbb{R}^+_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

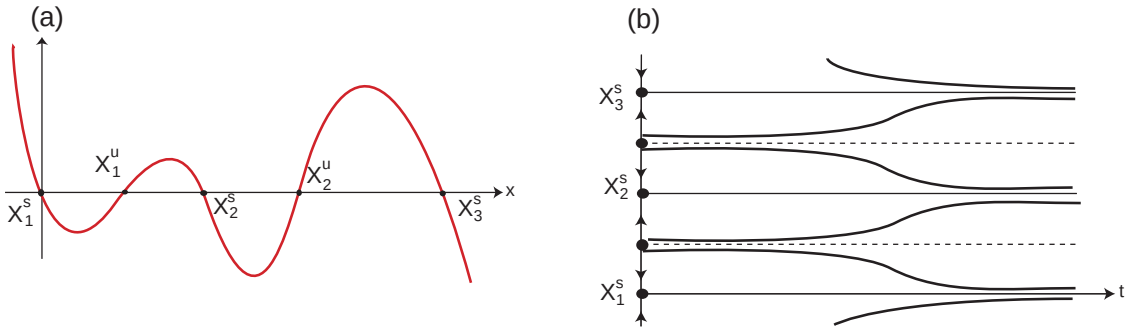

FIGURE 2. (a)：方程 (3.1) 的可能向量场 h，其中 $A<0$、$k=5$ 和 $n=3$（见 (P1)–(P2)）。(b)：方程 (3.1) 的解随 $t\in\mathbb{R}_0^+$ 变化的图像示意图。

其流由 $\varphi(t,x)$ 给出，其中 $x\in\mathbb{R}_0^+$ 和 $t\in\mathbb{R}$。向量场 $h:\ \mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$：

(P1) 是 C^2–光滑的，可写为 $h(x)=Ax+H(x)$，其中 $A=dh(0)\neq 0$（线性部分），且 $0\neq H(x)=\mathcal{O}(x^2)$，其中 $\mathcal{O}$ 表示通常的朗道记号；

(P2) 有 k 个零点，$k\in\mathbb{N}$。

不失一般性，我们考虑 $A=dh(0)<0$，且平衡点的数量为奇数（$k=2n-1$、$n\in\mathbb{N}$）——见图 2。我们按如下方式记号并排列 (P2) 保证存在的平衡点：

$$0=X_1^s<X_1^u<X_2^s<X_2^u<\ldots<X_n^s.$$

对于固定的 $\omega>0$（一经选定便不再改变），定义 $T_k=k\omega$、$k\in\mathbb{N}$，以及以下初值问题（其动机来自 [5, 16]）：

$$\begin{cases}\dot{x}=h(x)\\ \varphi(T_k,x)=(1+\lambda)\lim\limits_{t\to T_k^-}\varphi(t,x)\qquad(\text{pulse})\\ \varphi(0,x_0)=x_0\in\mathbb{R}_0^+\end{cases}\tag{3.2}$$

其中

(P3) $\lambda\in\,]-1,+\infty[$.

与微分方程 (3.2) 相关的流由 $\varphi_\lambda(t,x)$ 给出，其中 $\varphi_0(t,x)\equiv\varphi(t,x)$，$x\in\mathbb{R}_0^+$ 且 $t\in\mathbb{R}$。如图 3(a) 所示，记 $R_\omega(x)$ 为与 (3.1) 相关的时间-ω映射：

$$R_\omega(x)=\varphi_0(\omega,x).$$

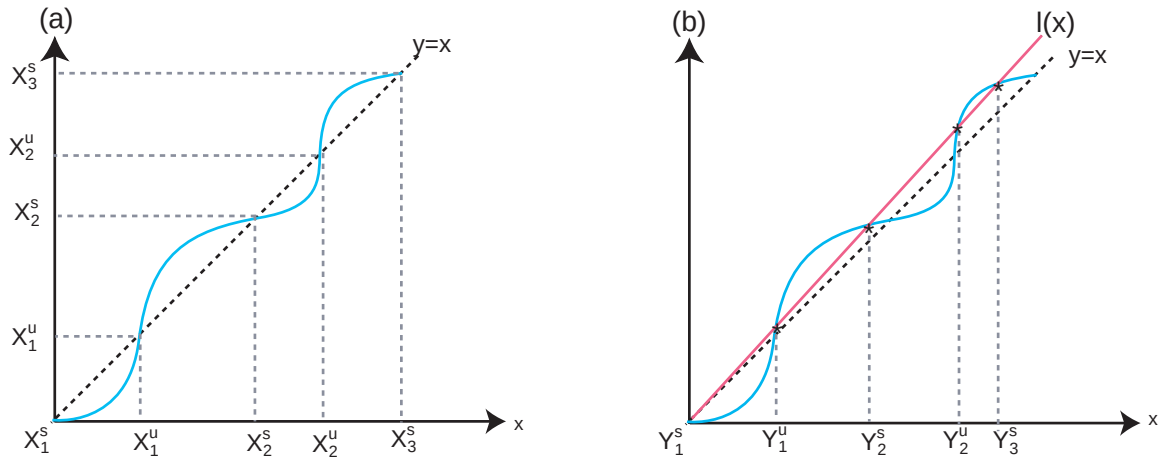

FIGURE 3. (a) $A<0$、 $k=5$ 和 $x\in\mathbb{R}_0^+$时映射 R_ω 的示意图。(b) R_ω 与 ℓ 交点的示意图（定理 A 的第 (1) 项）。每个以 $\star$标记的交点都对应于 (3.2) 的一个平衡点。

我们还假设:

(P4) 对所有 $j\in\{1,...,n\}$，映射 R_ω 在 $x\in\,]X_j^s$、$X_j^u[$ 时为凸，在 $x\in]X_j^u$、$X_{j+1}^s[$时为凹。

以下假设虽然并非证明主要结果所必需，但能简化主要结果的证明。参见第7节的讨论。

(P5) 对所有 $j\in\{1,...,n\}$，存在唯一的一对 (m_j,M_j)，使得 $m_j,M_j\in[X_j^s,X_{j+1}^s]$并且

$$\frac{R_\omega(m_j)}{m_j}=\min_{x\in[X_j^s,X_{j+1}^s]}\frac{R_\omega(x)}{x}=\beta_j<1\,,\qquad \frac{R_\omega(M_j)}{M_j}=\max_{x\in[X_j^s,X_{j+1}^s]}\frac{R_\omega(x)}{x}=\gamma_j>1.$$

对于 $\lambda>-1$，脉冲映射 $x_0\mapsto(1+\lambda)x_0$ 是单射且递增的，这意味着脉冲后两个解不会交叉或重叠。存在唯一的全局解$\varphi_\lambda(t,x_0)$满足 (3.2)，使得算子

$$(x_0,\lambda)\mapsto\varphi_\lambda(t,x_0)$$

关于 x_0 和 λ 连续（参见 [4]的第1节），并可通过以下公式显式表示（见（2.2））：

$$\varphi_\lambda(t,x_0)=x_0+\int_0^t h(\varphi_0(s,x_0))ds+\sum_{0<T_k\le t}\lambda\left(\lim_{t\to T_k^-}\varphi_\lambda(t,x_0)\right),\qquad t\ge 0.$$

3.2. 主要结果。

定理 A. 设系统 (3.2) 满足性质 (P1)–(P5)。以下断言成立：

(1) ω–周期轨道的数量随 λ 变化，且对应于 R_ω 与 $\ell(x)$ 的图像的交点数量：$= \overline{x}$ ($\lambda+1$)。

(2) 可以找到 ω–周期解的 λ 值取决于 $x \in \mathbb{R}_0^+$，并由映射 $\lambda = g(x)$ 给出，其中

$$g(x) := \frac{x}{R_\omega(x)} - 1, \qquad x > 0. \tag{3.3}$$

(3) 对于每个 $x_0 \in \mathbb{R}^+$，都可以找到 $\lambda > -1$，使得 (3.2) 有一个与 x_0 相关联的 ω–周期解。

(4) 设 φ_λ 是 (3.2) 的一个 ω–周期点，它与初始条件 $x_0 \in \mathbb{R}$ 相关联。

(a) 如果 $g'(x_0) > 0$，那么 $\varphi_\lambda(t, x_0)$ 渐近稳定。(b) 如果 $g'(x_0) < 0$，那么 $\varphi_\lambda(t, x_0)$ 不稳定。

定理 A 的第 (1) 项示例可见于图 3(b)，其中 $A < 0$ and $k = 5$。这一结果可视为一种电影技术，用于定位 (3.2) 的 ω–周期解，并将其表示为 λ and ω 的函数。对于 $j \in \{1, ..., n\}$，根据稳定性，(3.2) 的解记作 Y_j^sor Y_j^u，其中 s 表示稳定，u 表示不稳定，且 $X_1^s = Y_1^s = 0$。定理 A 的证明见第 6 节。

以下推论由定理 A 与对不同 $\omega > 0$ 取值时 R_ω 的分析结合得出，在若干应用中可能很有用（例如，在流行病模型中，当我们希望消除一个地方性吸引周期解时）。

推论 3.1。设 $\omega_1 > 0$ 和 $\lambda \neq 0$。若 $Y^\star \neq 0$ 是与 $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$相关的 (3.2) 的 ω_1–周期解，则存在 $\omega_2 \in]0, \omega_1[$，使得 $Y^\star$ 不再属于周期解。此外，对于这个 ω_2–值，$\varphi_\lambda(t, Y^\star)$ 要么收敛到 $X_1^s \equiv 0$，要么发散。

为 了完整起见，我们在第 6.2 小节简要证明推论 3.1。

3.3. 补充说明。我们指出关于 (3.2) 的动力学的一些说明，并讨论某些假设的几何意义。

(1) 首先，请注意，(3.2) 可视为与参数 $\lambda > -1$相关的 (3.1) 的非光滑扰动。若 $\lambda = 0$，则微分方程 (3.2) 没有脉冲，且所有解都是光滑的。

(2) 对所有 $\lambda \geq -1$, $x_0 = 0$，均为（3.2）的一个平衡点。

(3) 如果 $\lambda = -1$，那么所有解都收敛到平衡点 $x_0 = 0$。(4) 性质（P4）可改述为：对所有 $j \in \{1, ..., n\}$，映射 R'_ω 在 $x \in]X_j^s, X_j^u[$ 上递增，在 $x \in]X_j^u, X_{j+1}^s[$ 上递减。(5) 性质（P5）的几何意义如下：在每个形如 $]X_j^s, X_{j+1}^u[$, 的区间上， R_ω 的图像位于线性映射 $\beta_j x$ 和 $\gamma_j x$ 的图像之间，其中 $j \in \{1, ..., n\}$。假设（P5）只要求 m_j 和 M_j 唯一；它们的存在性由第5节的引理 5.3 保证。(6) 如果（P5）不成立，那么定理 A 的证明会更加复杂，但其结论在定性上保持不变。(7) 向量场 h 为线性映射的情形已由 Milev 和 Bainov [11] 研究。他们证明，微小的脉冲系数扰动就很容易破坏稳定性。在 [18] 中，作者证明了一个关于具有脉冲效应的周期解的 Andronov-Witt 定理的类似结果，并将其应用于一个振荡器（例1）和一个二维电子系统（例2）。

4. Periodic solutions of an impulsive system

以下结果给出了一种有用的方法，可用于确定 ω–周期脉冲微分方程中的周期轨道，见 $\mathbb{R}$。

命题4.1. 若 $\omega > 0$，则（3.2）满足以下结论：

(1) 对所有 $x \in \mathbb{R}_0^+$ $\varphi_\lambda(\omega, x) = x$，当且仅当 $\varphi_\lambda(t, x)$是 ω-周期的。(2) 若对所有 $x \in \mathbb{R}_0^+$ $\varphi_\lambda(\omega, x) > x$，则序列$(\varphi_\lambda(T_k, x))_{k\in\mathbb{N}}$单调递增。(3) 若对所有 $x \in \mathbb{R}_0^+$ $\varphi_\lambda(\omega, x) < x$，则序列$(\varphi_\lambda(T_k, x))_{k\in\mathbb{N}}$单调递减。(4) 若 Ψ 是（3.2）的一个周期解，则 Ψ 的周期为 ω。

证明。(1) 假设对于某个 $x \in \mathbb{R}_0^+$， $\varphi_\lambda(\omega, x) = x$。因此，对于 $t \in [0, \omega[$，解存在且定义良好：

$$\varphi_\lambda(t + \omega, x) = \varphi_\lambda(t, x).$$

利用脉冲映射，这意味着

$$\varphi_\lambda(2\omega, x) = \varphi_\lambda(\omega, x).$$

对所有形如 $[k\omega,(k + 1)\omega)$, $k \in \mathbb{N}$ 的区间重复上述论证，可得对所有 $t \in \mathbb{R}$，都有 $\varphi_\lambda(t, x) = \varphi_\lambda(\omega + t, x)$，因此 φ_λ 是周期性的。

(2) 假设对于给定的 $x \in \mathbb{R}_0^+$，有 $\varphi_\lambda(\omega, x) > x$。我们要通过对 $k \in \mathbb{N}_0$ 进行归纳法来证明：

$$\varphi_\lambda(T_{k+1}, x) = \varphi_\lambda((k+1)\omega, x) > \varphi_\lambda(k\omega, x) = \varphi_\lambda(T_k, x). \tag{4.1}$$

对于 $k = 0$，根据假设，我们有 $\varphi_\lambda(\omega, x) > x$，这等价于：

$$\varphi_\lambda(T_1, x) > \varphi_\lambda(0, x).$$

假设公式 (4.1) 对 k 成立，则：

$$\begin{aligned}
\varphi_\lambda(T_{k+2}, x) &\overset{\text{Def. of } T_k}{=} \varphi_\lambda((k+2)\omega, x) \\
&= \lim_{t \to (k+2)\omega^-} (1+\lambda)\varphi_\lambda(t, x) \\
&\overset{\text{Hypothesis}}{>} \lim_{t \to (k+1)\omega^-} (1+\lambda)\varphi_\lambda(t, x) \\
&= \varphi_\lambda((k+1)\omega, x) \\
&= \varphi_\lambda(T_{k+1}, x)
\end{aligned}$$

由此得到结果。

(3) 与 (2) 类似。

(4) 设 φ_λ 是与初始条件 $x_0 \in \mathbb{R}^+$ 相关的周期为 $P > 0$ 的周期解。根据定义，我们有：

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_\lambda(\omega, x_0) = \varphi_\lambda(\omega + P, x_0). \tag{4.2}$$

因此，我们可以得出结论：

$$\begin{aligned}
\varphi_\lambda(\omega, x_0) &\overset{\text{Def.}}{=} (1+\lambda) \lim_{t \to \omega^-} \varphi_\lambda(t, x_0) \\
&\overset{\textbf{(P3)}}{\neq} \lim_{t \to \omega^-} \varphi_\lambda(t, x_0) \\
&= \lim_{t \to (P+\omega)^-} \varphi_\lambda(t, x_0)
\end{aligned}$$

由此我们推得：

$$\varphi_\lambda(\omega + P, x_0) \neq \lim_{t \to (P+\omega)^-} \varphi_\lambda(t, x_0),$$

因此，$P + \omega$ 是 ω 的正倍数，因为它应当是一个脉冲时刻。这意味着，P 是 ω的正倍数。

□

如果与 x 关联的轨迹不是常值的，那么 $\varphi_\lambda(\omega, x) > x$ 或者 $\varphi_\lambda(\omega, x) < x$。在这两种情况下，序列 $(\varphi_\lambda(T_k, x))_{k\in\mathbb{N}}$ 都是单调的。如果它有界，那么它将收敛到一个不动点或一个周期轨道。总之，(3.2) 的非恒定解要么收敛到一个 ω–周期解，要么发散。

5. Study of stability using the time-ω map

本节的目标是陈述定理 A 证明中所需的预备结果。这些辅助结果刻画了映射 R_ω 和 g。在继续之前，值得注意的是，对于$x_0 \in \mathbb{R}_0^+$和 $\lambda > -1$，我们有：

$$R_\omega(x_0) \stackrel{\text{Def.}}{=} \varphi_0(\omega, x_0) = \lim_{t\to\omega^-} \varphi_\lambda(t, x_0) = \frac{\varphi_\lambda(\omega, x_0)}{1+\lambda}. \tag{5.1}$$

此外，以下性质对 R_ω： $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$成立：

(1) 根据 (P2)，它有 k 个不动点；(2) 它关于 $\mathbb{R}_0^+$递增、双射且连续。(3) 如果 $R_\omega(x) \gtrless x$，那么对于所有 $k \in \mathbb{N}$，我们有$R_\omega^k(x) \gtrless R_\omega^{k-1}(x)$，对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立。

引理 5.1. 在假设 (P1)–(P3) 下，如果 $A = dh(0) < 0$，那么以下性质对 (3.2) 成立：

(1) *g is continuous in $\mathbb{R}^+$;*

(2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{R_\omega(x)}{x} = \exp(A\omega)$;

(3) $\lim_{x\to 0} g(x) = \exp(-A\omega) - 1 > 0$;

(4) *if H is bounded then* $\lim_{x_0\to+\infty} g(x_0) = \exp(-A\omega) - 1$.

证明。（1）由 g 的表达式（见 (3.3)）、 R_ω 和 R_ω 的光滑性可立即得出：对于所有 $x \in \mathbb{R}^+$, $x \neq 0$。

（2）根据 (P1)，向量场 h 可写为 $h(x) = Ax + H(x)$，其中 $H(x) = \mathcal{O}(x^2)$。因此，对于 $x_0 \in \mathbb{R}^+$，我们可以对 (3.2) 积分，得到：

$$R_\omega(x_0) \stackrel{\text{Def.}}{=} \varphi_0(\omega, x_0) = x_0 \exp(A\omega) + \exp(A\omega) \int_0^\omega \exp(-At) H(\varphi_\lambda(t, x_0)) dt$$

由此我们推得（对于 $x_0 \neq 0$）：

$$\begin{aligned} \frac{R_\omega(x_0)}{x_0} &= \frac{\varphi_0(\omega, x_0)}{x_0} \\ &= \exp(A\omega) + \exp(A\omega) \int_0^\omega \exp(-At) \frac{H(\varphi_\lambda(t, x_0))}{x_0} dt. \end{aligned} \tag{5.2}$$

同样由 (P1)，由于 $H(x)_{\overline{x}} = \mathcal{O}(x)$，我们可以得出：

$$\exp(A\omega)\int_0^{\omega}\exp(-As)\frac{H(\varphi_\lambda(t,x_0))}{x_0} = \mathcal{O}(x_0).$$

将这一结论应用于 (5.2)，得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_\omega(x)}{x} = \exp(A\omega).$$

(3) 根据第 (2) 项以及 g 的表达式（见 3.3），容易验证：

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \exp(-A\omega) - 1.$$

(4) 假设 H 有界于 $M > 0$，且由于 [2]

$$\forall t \in [0,\omega], \quad \exp(At) \le \exp(A\omega),$$

由 (5.2) 可得存在 $k > 0$，使得：

$$0 \le \exp(A\omega)\int_0^{\omega}\exp(-As)\frac{H(\varphi(t,x_0))}{x_0}dt \le \frac{kM}{x_0}$$

and thus $\lim_{x_0\to+\infty}\dfrac{R_\omega(x_0)}{x_0} = \exp(A\omega).$

□

以下推论是引理 5.1 的直接结果，经过坐标变换 $x \mapsto x - X_j^s$ 后，其中 $j \in \{1,...,n\}$。

推论 5.2. 关于方程 (3.2) 的假设 (P1)–(P3)，对于 $j \in \{1,...,n\}$，以下断言成立：

(1) $\lim_{x\to X_j^s}\dfrac{R_\omega(x)}{x} = \exp(dh(X_j^s)\omega);$

(2) $\lim_{x\to X_j^s} g(x) = \exp(-dh(X_j^s)\omega) - 1 > 0.$

推论 5.2 给出了 R_ω 在 X_j^s 处切线斜率的数值。如图 4 所示，下面的结果表明，将 R_ω 的图像限制在 $[X_j^s, X_{j+1}^s]$ 上时，它位于两个线性映射的图像之间。

引理 5.3. 在假设 (P1)–(P3) 下，对于所有 $j \in \{1,...,n\}$，存在 $\beta_j \le 1 \le \gamma_j$，使得

$$\forall x \in [X_j^s, X_{j+1}^s], \qquad \beta_j x \le R_\omega(x) \le \gamma_j x.$$

[2]请注意，$A = dh(0) < 0$。

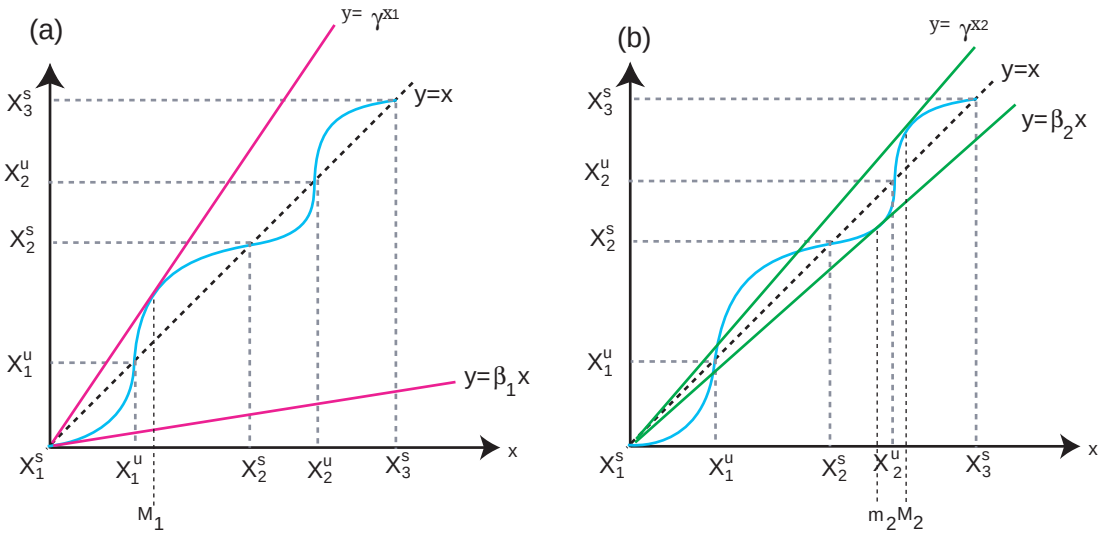

FIGURE 4.引理 5.3 的示意图：将 R_ω 限制在 $[X_j^s, X_{j+1}^s]$ 上时，其图像位于两条线性映射的图像之间，其中 $j \in \{1, ..., n\}$。(a)：$j = 1$。(b)：$j = 2$。

证明. 固定 $j \in \{1, ..., n\}$。映射

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{R_\omega(x)}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ \exp(A\omega) & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

根据引理 5.1，$[X_j^s, X_{j+1}^s]$ 在紧集 $[X_j^s, X_{j+1}^s]$ 上连续。特别地，由魏尔斯特拉斯定理，存在 $\beta_j \leq 1 \leq \gamma_j$（见图 4），使得

$$\forall x \in [X_j^s, X_{j+1}^s], \qquad \beta_j \leq \frac{R_\omega(x)}{x} \leq \gamma_j,$$

其中

$$\beta_j = \min_{x \in [X_j^s, X_{j+1}^s],} \frac{R_\omega(x)}{x} \qquad \text{and} \qquad \gamma_j = \max_{x \in [X_j^s, X_{j+1}^s],} \frac{R_\omega(x)}{x}.$$

现在引理得证。 □

首先，作为(P4)和(P5)中所述的 R_ω 的图像几何结构的推论，注意到

$$m_1 = X_1^s \equiv 0, \quad M_j \in [X_j^u, X_{j+1}^s[\quad \text{and} \quad m_j \in]X_j^s, X_j^u[.$$

引理5.4. 在假设(P1)–(P5)下，对所有 $j \in \{1, ..., n\}$，以下断言成立：

(1) $R'_\omega(x) > R_\omega(x)/x$ 对于 $x \in]m_j, X_j^u[$;
(2) $R'_\omega(x) > R_\omega(x)/x$ 对于 $x \in]X_j^u, M_j[$;

(3) $R'_\omega(x) < R_\omega(x)/x$ 当 $x \in]M_j, m_{j+1}[$;

(4) $R'_\omega(m_j) = \dfrac{R_\omega(m_j)}{m_j}$ *and* $R'_\omega(M_j) = \dfrac{R_\omega(M_j)}{M_j}$.

证明。我们对 $j = 1$ 进行证明。对于 $j > 0$，证明过程类似（只需作必要的调整）。

(1) 对于 $x \in]m_1^s, X_1^u[$，映射 R_ω 是凸的（根据 (P4)），且 $R_\omega(0) = R_\omega(X_1^s) = 0$。容易验证:

$$R'_\omega(x) \geq \frac{R_\omega(x) - R_\omega(0)}{x - 0} = \frac{R_\omega(x)}{x}$$

我们希望证明，对于所有 $x \in]m_1^s, X_1^u[$，都有:

$$R'_\omega(x) > \frac{R_\omega(x)}{x}. \tag{5.3}$$

反设存在 $x_0 \in]m_1^s, X_1^u[$ 使得

$$R'_\omega(x_0) = \frac{R_\omega(x_0)}{x_0}. \tag{5.4}$$

S由于根据 (P4)，R_ω 是递增的，因此对于所有 $x \in [m_1, x_0[$，我们有 t:

$$\frac{R_\omega(x)}{x} \overset{\text{convexity}}{\leq} R'_\omega(x) \overset{R_\omega \text{ is decreasing}}{\leq} R'_\omega(x_0) \overset{(5.4)}{=} \frac{R_\omega(x_0)}{x_0}. \tag{5.5}$$

断言 5.1. 对所有 $x \in [m_1, x_0[$，以下等式成立:

$$\frac{R_\omega(x)}{x} = \frac{R_\omega(x_0)}{x_0} \tag{5.6}$$

断言 5.1 的证明：反设断言 5.1 不成立，即存在 $z \in [m_1, x_0[$，使得 $R_\omega($ z $< R_\omega)(x_0)\, x_0$。根据中值定理，存在 $y_0 \in]z, x_0[$，使得:

$$\begin{aligned} R'_\omega(y_0) &= \frac{R_\omega(x_0) - R_\omega(z)}{x_0 - z} \\ &> \frac{R_\omega(x_0) - \frac{R_\omega(x_0) z}{x_0}}{x_0 - z} \\ &= R_\omega(x_0) \left(\frac{1 - \frac{z}{x_0}}{x_0 - z} \right) \\ &= \frac{R_\omega(x_0)}{x_0}, \end{aligned}$$

c这与 (5.5) 矛盾（注意 $m_1 \leq z < y_0 < x_0$）。因此，断言 5.1 得证 .

等式 (5.6) 等价于 $R_\omega(x) = {}^{R_\omega}(x_0)\, x_0 \underbrace{\quad}^{x}$，其中 $x \in [m_1, x_0[$。特别地，在 $x = 0$ 附近，我们可以写成：

$$R_\omega(x) = \frac{R_\omega(x_0)}{x_0} x \overset{\text{Lemma 5.1}}{=} \exp(A\omega)x$$

这是马尔萨斯定律的解在时刻 ω 的取值（$A = dh(X_1^s) = dh(0)$）：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ \varphi(0,x) = x \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

然而，φ_λ 是方程 (3.2) 的解，而该方程不是线性的（由 (P1) 可知 $H(x) \neq 0$）。这就产生了矛盾。因此，等式 (5.3) 得证。

(2) 反设，对于给定的 $x_0 \in]X_1^u, M_1[$，有 $R'_\omega(x_0) \leq R_\omega(x_0)/x_0$。由于 R_ω 是凹函数（由 (P4) 可知，$\Leftrightarrow R'_\omega$ 是递减的），我们可以写出，对于 $x > x_0$：

$$R'_\omega(x) \overset{R'_\omega \text{is decreasing}}{\leq} R'_\omega(x_0) \overset{\text{contradiction}}{\leq} R_\omega(x_0)/x_0.$$

特别地，对于 $y \in]x_0, M_1]$，我们可以使用微积分基本定理，从而得到：

$$\begin{aligned} R_\omega(y) &= R_\omega(x_0) + \int_{x_0}^{y} R'_\omega(x)dx \\ &\leq R_\omega(x_0) + \int_{x_0}^{y} \frac{R_\omega(x_0)}{x_0}dx \\ &= R_\omega(x_0) + \frac{R_\omega(x_0)}{x_0}y - \frac{R_\omega(x_0)}{x_0}x_0 \\ &= \frac{R_\omega(x_0)}{x_0}y \end{aligned}$$

从而得到 $R_\omega(M_1) \overset{R_\omega(x_0)}{\underbrace{\leq}}_{x_0} M_1$。由于 $R_\omega(M_1) = \gamma_1 M_1$（回想引理 5.3 中 γ_1 的含义），我们得到

$$\gamma_1 \leq \frac{R_\omega(x_0)}{x_0}$$

这意味着（利用 (P5)）$x_0 = M_1$，这与 $x_0 < M_1$ 矛盾。

（3）与（2）类似。

(4) 由引理 5.3 证明中 m_j 和 M_j 的定义可知。

□

6. Proof of the main results

6.1. 定理 A 的证明。

证明. (1) 假设 $\varphi(t, x_0) \in \mathbb{R}^+$ 是 (3.2) 的 ω–周期解。一方面，我们有

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_\lambda(t+\omega, x_0) = \varphi_\lambda(t, x_0),$$

这意味着

$$\varphi_\lambda(\omega, x_0) = \varphi_\lambda(0, x_0) = x_0.$$

另一方面，我们可以写成（见（5.1）：

$$R_\omega(x_0) \overset{\text{Def.}}{=} \varphi_0(\omega, x_0) = \frac{\varphi_\lambda(\omega, x_0)}{1+\lambda} \overset{\varphi_\lambda \text{ is periodic}}{=} \frac{x_0}{1+\lambda}.$$

因此， ω–周期轨道的数量等于 R_ω 和 $\ell(x) = \dfrac{x}{\lambda+1}$的图像交点的数量。

(2) 如果 $x_0 \in \mathbb{R}^+$ 满足条件，使得 $\varphi_\lambda(t, x_0)$ 是 (3.2) 的 ω–周期解，那么

$$R_\omega(x_0) = \frac{x_0}{1+\lambda}$$

这等价于

$$\lambda = \frac{x_0}{R_\omega(x_0)} - 1 =: g(x).$$

(3) 这是由(2)中映射 g 的构造方式所导致的。

(4) 我们证明第一种情况；另一种情况的证明类似。若 $x_0 \in \mathbb{R}^+$ 对应于与 $\lambda^\star > -1$ 相关联的 ω周期解，则：

$$\lambda^\star = \frac{x_0}{R_\omega(x_0)} - 1. \tag{6.1}$$

对 g 在 $x_0 \neq 0$ 处求导，得到：

$$g'(x_0) = \frac{R_\omega(x_0) - x_0 R'_\omega(x_0)}{R^2_\omega(x_0)}, \tag{6.2}$$

其符号仅取决于分子 $R_\omega(x_0) - x_0 R'_\omega(x_0)$的符号，该符号已由引理5.4完全刻画。

假设 x_0 满足 $g'(x_0) > 0$。这意味着 g 在 x_0 附近递增，且 $R'_\omega(x_0) < R_\omega(x_0)/x_0$。根据引理5.4，这意味着 $x \in]M_j, m_{j+1}[$，其中某个

$j \in \{1, ..., n\}$。特别地，对于 $x > x_0$，我们有：

$$\begin{aligned} g(x) > g(x_0) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{R_\omega(x)} - 1 > \frac{x_0}{R_\omega(x_0)} - 1 \\ &\overset{(6.1)}{\Leftrightarrow} \quad \frac{x}{R_\omega(x)} - 1 > \lambda^\star \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{R_\omega(x)} > 1 + \lambda^\star \\ &\Leftrightarrow \quad R_\omega(x) < \frac{x}{1+\lambda^\star} \\ &\Leftrightarrow \quad (1+\lambda^\star) R_\omega(x) < x \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi_\lambda(\omega, x) < \varphi_\lambda(0, x) \\ &\overset{\text{Lemma 4.1}}{\Leftrightarrow} \quad (\varphi_\lambda(T_k, x))_{k\in\mathbb{N}} \text{ is monotonically decreasing} \end{aligned}$$

由于序列 $(\varphi_\lambda(T_k, x))_{k\in\mathbb{N}}$ 单调递减且下界为x_0，因此 $\varphi_\lambda(T_k, x)$ 应收敛到与 x_0 ($\Leftrightarrow \varphi_\lambda(t, x_0)$ 渐近稳定相关的 ω–周期解（根据第2.2小节的定义）。$g'(x_0) < 0$ 的情形证明类似。

□

6.2. 推论 3.1 的证明。在赋予 C^1–Whitney 拓扑的 C^1–映射空间中，映射 R_ω 与恒等映射微分同伦。换言之，我们有 $\lim_{\omega\to 0} R_\omega =_{C_1} Id$，其中 Id 表示 $\mathbb{R}$中的恒等映射。因此，若 $Y^\star \neq 0$ 是与 $x_0 \in \mathbb{R}^+$相关的(3.2)的 ω_1–周期解，则它对应于 ℓ 和 R_ω的图像的一个交点（不同于原点）。由于 $\lim_{\omega\to 0} \frac{x}{R_\omega}(x) - 1 = \mathbf{0}$，因此 g 的图像收敛于零映射 0，排除了可能交点处的 λ–值。推论 3.1 得证。

7. Discussion and Final Remark

本文研究了 $\mathbb{R}$ 中具有有限个双曲平衡点、并受到 ω–周期瞬时脉冲作用的非线性微分方程（$\omega > 0$）。该系统唯一的非常数复现解是 ω–周期解。我们提出了一种运动学算法，通过求两个实值映射 ℓ 和 R_ω 的图像交点，来求出扰动系统的 ω–周期解；其中，后者是未扰动系统的时间-ω 映射。

在几乎所有情况下，映射 R_ω 无法显式求得。尽管如此，这是一个可求解的数值问题，我们可以据此导出辅助映射 g；随后，根据定理 A，我们便能研究周期解的稳定性。此外，只需确定周期解的初值及其稳定性，就足以推断方程 (3.2) 所有解的渐近行为，正如表1中针对 $k = 5$、$A < 0$、$\gamma_1 > \gamma_2$ 和 $\beta_2 > \exp(-A\omega) - 1$所示。

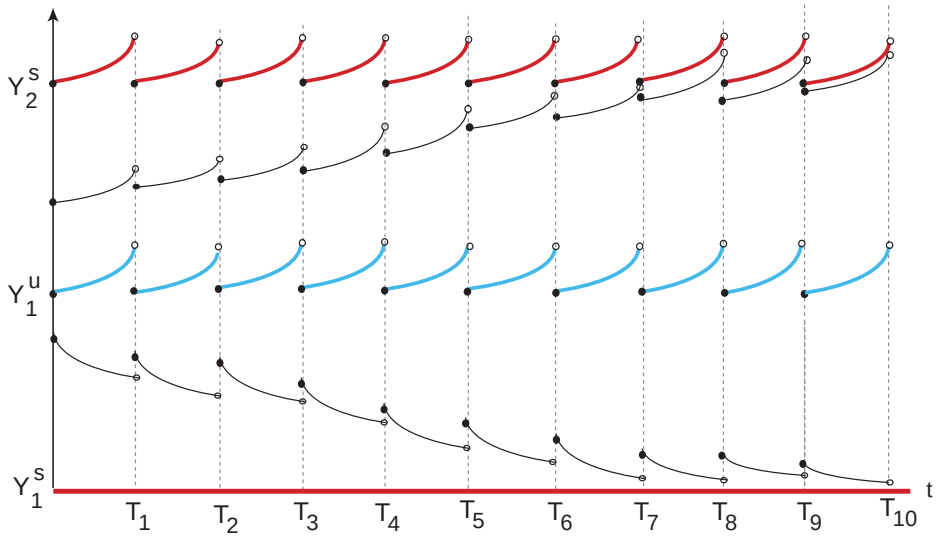

FIGURE 5. 表1中情形2和4的三个 ω–周期解示意图：两个稳定解（蓝色）和一个不稳定解（红色）。

根据定理 A 的证明，我们可知，若 $x_0 \in \mathbb{R}^+$ 满足 $g'(x_0) = 0$，则 $\varphi_\lambda(t, x_0)$ 是一个鞍结分岔：对 λ 进行微小的光滑扰动，会导致周期解的数量变为零个或两个，且这两个周期解的稳定性不同。在表1所考察的情形（$A < 0, k = 5$）中，这种情况发生于

$$\lambda = \frac{1}{\gamma_1} - 1, \quad \lambda = \frac{1}{\beta_2} - 1 \quad \text{and} \quad \lambda = \frac{1}{\gamma_2} - 1.$$

此外，在 $\lambda = \exp(-A\omega) - 1$处，原点发生跨临界分岔：两个平衡点之间发生稳定性的交换。这些分岔的分析可直接由表1和图6得出。

假设(P1)–(P5)对 $\mathbb{R}$中的一般微分方程系统成立，也就是说，它们在 C^2 映射集合中的一个剩余集上有效。假设(P4)–(P5)简化了证明，并可按以下方式放宽：

- 对于每个 $j \in \{1, ..., n\}$，R'_ω 应在$[X_j^s, X_{j+1}^s]$内至少改变一次符号。假设(P4)指出，这种情况发生在 $X = X_j^u$处；这并不失一般性，其他取值也可以，证明过程仍可沿用同样思路（只需对引理5.4作必要修改）；

- 假设（P5）简化了定理 A 的证明，而且可以放宽。如果去掉（P5），那么 g 的图像会有一些区间保持不变。

关于含瞬时脉冲的微分方程，一个自然的问题是运用 [10, 15]，的技术推广 [18] 中例2的二维结果；这项工作留待未来完成。

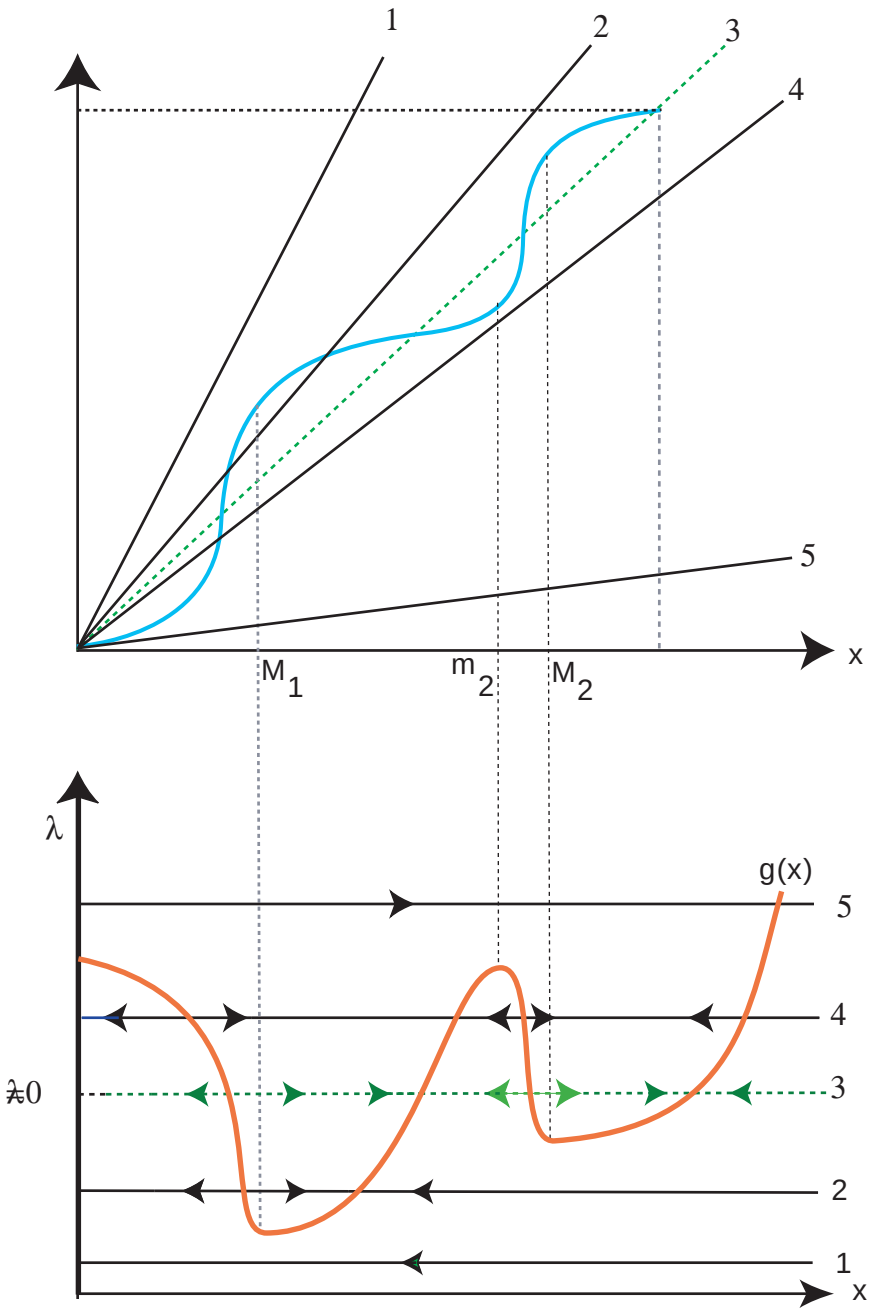

FIGURE 6. 定理 A 的几何解释。 ℓ 和R_ω的可能交点；对于每个交点，我们可以通过观察 g的单调性来判断其稳定性。对于 $j \in \{1,2,3,4,5\}$，直线 j 是 $\dfrac{x}{1+\lambda_j}$的图像，其中 $-1 <\lambda_j < \lambda_{j+1}$。 λ_3 的值为 0（其动力学与 (3.1) 的动力学相对应）。下方示意图中的箭头表示周期解的稳定性。将这些值与表1中的值进行比较。

直线参考 图6中	λ的区间	平衡点数量 （3.2）的	平衡点的稳定性 （3.2）的（有序）
1	$\lambda < \frac{1}{\gamma_1} - 1$	1	$0 = Y_1^s$
2	$\frac{1}{\gamma_2} - 1 < \lambda < \frac{1}{\gamma_1} - 1$	3	$0 = Y_1^s, Y_1^u, Y_2^s$ 见图5
3	$\frac{1}{\gamma_1} - 1 < \lambda < \frac{1}{\beta_2} - 1$	5	$0 = Y_1^s, Y_1^u, Y_2^s, Y_2^u, Y_3^s$
4	$\frac{1}{\gamma_1} - 1 < \lambda < \exp(-A\omega) - 1$	3	$0 = Y_1^s, Y_1^u, Y_2^s$ 见图5
5	$\lambda > \exp(-A\omega) - 1$	2	$0 = Y_1^u, Y_1^s$

TABLE 1. 方程（3.2）的定性动力学，其中 $k = 5$, $n = 3$, $A < 0$, $\gamma_1 > \gamma_2$ 和$\beta_2 > \exp(-A\omega) - 1$，其中 $A = dh(0) = dh(X_1^s)$。

REFERENCES

[1] R. Agarwal, H. Snezhana, D. O'Regan, *Non-instantaneous impulses in differential equations* Springer, Cham. 1–72, 2017.
[2] D. Bainov, P. Simeonov, *Impulsive differential equations: periodic solutions and applications*。第 66 卷。CRC Press, 1993。[3] D. D. Bainov, E. Minchev, K. Nakagawa, *Asymptotic behaviour of solutions of impulsive semilinear parabolic equations* 30 5 2725 2734, 1997 , Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, ( ) –。[4] A. Dishliev, K. Dishlieva, S. Nenov, *Specific asymptotic properties of the solutions of impulsive differential equations. Methods and applications* 2012 。Academic Publication, 。[5] A. d'Onofrio, *Stability properties of pulse vaccination strategy in SEIR epidemic model*, Mathematical Biosciences, 179(1), 57–72, 2002。[6] G. F. Emmenegger, I. M. Stamova, *Shocks to capital intensity make the Solow equation an impulsive differential equation* 6 1 93 110, , International Journal of Differential Equations and Applications, （）, –。[7] E. Hern´andez, D. O'Regan, *On a new class of abstract impulsive differential equations*, Proceedings of the American Mathematical Society, 141(5), 1641–1649, 2013。[8] M. Huang, J. Li, X. Song, H. Guo, *Modeling impulsive injections of insulin: towards artificial pancreas*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 72(5), 1524-1548, 2012。[9] V. Lakshmikantham, P. S. Simeonov, *Theory of impulsive differential equations*（第 6 卷）。World Scientific, 1989。

[10] X. Li、M. Bohner、C.-K. Wang, *Impulsive differential equations: periodic solutions and applications*, 《Automatica》52, 173–178, 2015年。[11] N. Milev、D. Bainov, *Stability of linear impulsive differential equations*, 《Computers & Mathematics with Applications》21(11), 2217–2224, 1990年。[12] V. D. Milman、A. D. Myshkis, *On the stability of motion in the presence of impulses*, 《Sib. Math. J.》1(2), 233–237, 1960年。[13] A. M. Samoilenko、A. A. Perestyuk, *Impulsive differential equations*。World Scientific, 1995年。[14] R. Shi、L. Chen, *Stage-structured impulsive SI model for pest management*, 《Discrete Dynamics in Nature and Society》, 2007年。[15] Z. Shuai、L. Bai、K. Wang, *Optimization problems for general simple population with n–impulsive harvest*, 《J. Math. Anal. Applications》329(1), 634–646, 2007年。[16] B. Shulgin、L. Stone、Z. Agur, *Pulse Vaccination Strategy in the SIR Epidemic Model*, 《Bull. Math. Biol.》60(6), 1123–1148, 1998年。[17] P. Simeonov、D. Bainov, *Stability with respect to part of the variables in systems with impulse effect*, 《J. Math. Anal. Applications》117(1), 247–263, 1986年。[18] P. Simeonov、D. Bainov, *Orbital stability of periodic solutions of autonomous systems with impulse effect*, 《Int. J. Systems Sci.》19(2), 2561–2585, 1988年。[19] L. Qian、Q. Lu、Q. Meng、Z. Feng, *Dynamical behaviors of a prey-predator system with impulsive control*, 《J. Math. Anal. Applications》363(1), 345–356, 2010年。

Alexandre Rodrigues, Centro de Matemática da Univ. do Porto,
Rua do Campo Alegre, 687, 4169-007 Porto, Lisbon School of Economics and Management,
Rua do Quelhas, 6, 1200-781Lisboa, Portugal*Email address*: alexandre.rodrigues@fc.up.pt