arXiv:2302.02791v1 [physics.class-ph] 30 Jan 2023

洛伦兹变换的分解

K. S. Karplyuk[1], * Myroslav I. Kozak[2], † 和 O. O. Zhmudskyy[3], ‡[1]塔拉斯·舍甫琴科大学无线电物理系，乌克兰基辅学术格卢什科夫大道 *2* 号 *5* 号楼，邮编 *03122*，*karpks@hotmail.com*[2]乌日霍罗德国立大学物理系，乌克兰乌日霍罗德沃洛申街 *54* 号，邮编 *88000*[3]中佛罗里达大学物理系，美国佛罗里达州奥兰多市中佛罗里达大道 *4000* 号，邮编 *32816*，*ozhmudsky@Knights.ucf.edu*

本文展示了如何对任意洛伦兹变换进行分解。也就是说，将任意洛伦兹变换表示为空间旋转与洛伦兹推动的序列，或表示为洛伦兹推动与空间旋转的序列。文中推导出了确定所需洛伦兹推动和旋转的关系式。

PACS 编号：12., 12.20.-m, 12.15.-y, 13.66.-a

I. 引言

在量子电动力学中，洛伦兹变换最方便、最自然的形式是基于 16 个狄拉克矩阵的超复形式 [1]。在超复表示中，标量与矩阵 $a1\hat{}$ 相关联，赝标量与矩阵 $a\hat{\imath}$ 相关联，四矢量与矩阵$a_\alpha\gamma^\alpha$ 相关联，四赝矢量与矩阵$a_\alpha\pi^\alpha$ 相关联，而二阶反对称四阶张量与矩阵 $a_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}$ 相关联。这里 $\tilde{1}$ 是单位矩阵 4×4,

$$\gamma^\alpha\gamma^\beta+\gamma^\beta\gamma^\alpha=2g^{\alpha\beta}, \tag{1}$$

$$\hat{\imath}=\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \qquad \pi^\alpha=\gamma^\alpha\hat{\imath}, \qquad 2\sigma^{\alpha\beta}=\gamma^\alpha\gamma^\beta-\gamma^\beta\gamma^\alpha. \tag{2}$$

与往常一样，希腊指标取值为 0、1、2、3，拉丁指标取值为 1、2、3。

我们将这些数命名为

$$a\hat{1}+b\hat{\imath}+c_\alpha\gamma^\alpha+d_\alpha\pi^\alpha+\frac{1}{2}f_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} \tag{3}$$

狄拉克数 [2]。狄拉克数的超复系统包含一个基于 8 个矩阵 1、$\hat{\imath}$,$\sigma^{\alpha\beta}$ 的子系统。该子系统中的数具有如下形式

$$a\hat{1}+b\hat{\imath}+\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}=a\hat{1}+b\hat{\imath}+ \\ +L_{01}\sigma^{01}+L_{02}\sigma^{02}+L_{03}\sigma^{03}+L_{23}\sigma^{23}+L_{31}\sigma^{31}+L_{12}\sigma^{12} \tag{4}$$

我们将这些数称为洛伦兹数，因为洛伦兹变换正是借助它们来实现的。更确切地说，借助矩阵

指数

$$e^{\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}}=\hat{1}+\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}+\ldots= \\ =\hat{1}+\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}-\frac{L^2}{2!}-\frac{L^2}{3!}\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}+\frac{L^4}{4!}+\ldots= \\ =\cos L+\frac{L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}}{2L}\sin L. \tag{5}$$

这里我们用到了等式

$$\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}(L^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta}-\hat{\imath}L^{\alpha\beta}L^{\diamond}_{\alpha\beta})=-L^2. \tag{6}$$

及指定

$$L^{\diamond}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}L^{\mu\nu}, \qquad \varepsilon^{0123}=1, \qquad \varepsilon_{0123}=-1. \tag{7}$$

与 $L_{\alpha\beta}$ 对偶的张量 $L^{\diamond}_{\alpha\beta}$ 具有以下分量

$$L^{\diamond}_{01}=-L_{23}, L^{\diamond}_{02}=-L_{31}, L^{\diamond}_{03}=-L_{12}, \\ L^{\diamond}_{23}=L_{01}, L^{\diamond}_{31}=L_{02}, L^{\diamond}_{12}=L_{03}. \tag{8}$$

标量、赝标量、向量、赝向量和二阶反对称张量的洛伦兹变换通过以下运算进行

$$a\hat{1}=e^{\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}}a\hat{1}e^{-\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}}, \quad b\hat{\imath}=e^{\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}}b\hat{\imath}e^{-\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}}, \\ c'_\alpha\gamma^\alpha=e^{\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}}c_\alpha\gamma^\alpha e^{-\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}}, \\ d'_\alpha\pi^\alpha=e^{\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}}d_\alpha\pi^\alpha e^{-\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}}, \\ f'_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}=e^{\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}}f_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}e^{-\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}}. \tag{9}$$

狄拉克旋量的洛伦兹变换通过以下运算进行

$$\psi'=e^{\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}}\psi. \tag{10}$$

如果 (9)-(10) 中的指数具有 $\frac{1}{2}L_{kl}\sigma^{kl}$ 的形式，那么这些变换就是空间旋转；但如果它们具有 $L_{0k}\sigma^{0k}$ 的形式，那么这些变换就是洛伦兹推动。

*电子邮箱：karpks@hotmail.com
†电子邮箱：mko3ak@gmail.com
‡电子邮箱：ozhmudsky@physics.ucf.edu

一般情况下，变换既不是空间旋转，也不是洛伦兹推动。不过，任何洛伦兹变换总可以表示为空间旋转与洛伦兹推动的组合，或洛伦兹推动与空间旋转的组合。下面我们将推导出可在任意情况下实现这一点的关系式。

II. 洛伦兹变换的双四元数表示

超复洛伦兹数与双四元数同构。因此，可以利用众所周知的四元数代数来简化洛伦兹变换的运算。为验证这一同构关系，我们首先注意到

$$\sigma^{01}=-\hat{\imath}\sigma^{23},\sigma^{02}=-\hat{\imath}\sigma^{31},\sigma^{03}=-\hat{\imath}\sigma^{12}. \qquad (11)$$

因此，(4) 可以写成

$$a+\hat{\imath}b+\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}=a+\hat{\imath}b-\hat{\imath}\frac{1}{2}L^{\diamond}_{kl}\sigma^{kl}+\frac{1}{2}L_{kl}\sigma^{kl}=$$
$$=a+\hat{\imath}b+\frac{1}{2}(L_{kl}-\hat{\imath}L^{\diamond}_{kl})\sigma^{kl}=a+\hat{\imath}b+\frac{1}{2}l_{kl}\sigma^{kl}. \qquad (12)$$

Here

$$l_{kl}=L_{kl}-\hat{\imath}L^{\diamond}_{kl}. \qquad (13)$$

矩阵 $\hat{1}$、 σ^{23}、 σ^{31}、 σ^{12} 的代数与四元数代数同构：

$\times$	σ^{23}	σ^{31}	σ^{12}
σ^{23}	-$\hat{1}$	σ^{12}	$-\sigma^{31}$
σ^{31}	$-\sigma^{12}$	-$\hat{1}$	σ^{23}
σ^{12}	σ^{31}	$-\sigma^{23}$	-$\hat{1}$

$\times$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	-1	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	-1	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$-i$	-1

因此，这些数

$$a\hat{1}+\frac{1}{2}L_{kl}\sigma^{kl} \qquad (14)$$

可以视为四元数，而这些数

$$a+\hat{\imath}b+\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}=(a\hat{1}+\frac{1}{2}L_{kl}\sigma^{kl})+\hat{\imath}(b-\frac{1}{2}L^{\diamond}_{kl}\sigma^{kl}) \qquad (15)$$

类似于双四元数 [3]。也就是说，它是通过引入一个额外单位$\hat{\imath}$而扩展的四元数系统。

数学家考虑了引入额外单位的三种可能情形：当$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}=-1$时，当$\hat{\imath}\,\hat{\imath}=1$时，以及当$\hat{\imath}\,\hat{\imath}=0$时。第一种情形下得到的数称为椭圆（普通）双四元数，第二种情形下称为双曲双四元数，第三种情形下则称为抛物型双四元数。由于$\hat{\imath}\,\hat{\imath}=-1$，这里讨论的是椭圆（普通）双四元数。

$\hat{}$ $a1+b\hat{\imath}$ 数与复数同构，并且与 $\sigma^{\alpha\beta}$可交换。我们将这样的数称为$\hat{\imath}$-复数。因此，双四元数 (15) 可视为具有$\hat{\imath}$-复系数的四元数。特别地，指数 (5) 可写为

$$e^{\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}}=e^{\boldsymbol{l}\boldsymbol{\varsigma}}=1+\boldsymbol{l}\boldsymbol{\varsigma}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{l}\boldsymbol{\varsigma}\cdot\boldsymbol{l}\boldsymbol{\varsigma}+\frac{1}{3!}\boldsymbol{l}\boldsymbol{\varsigma}\cdot\boldsymbol{l}\boldsymbol{\varsigma}\cdot\boldsymbol{l}\boldsymbol{\varsigma}+\ldots=$$
$$\cos l+\frac{\boldsymbol{l}\boldsymbol{\varsigma}}{l}\sin l. \qquad (16)$$

这里我们采用如下记号

$$\boldsymbol{l}\boldsymbol{\zeta}\equiv\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}l_{kl}\sigma^{kl}=\frac{1}{2}(L_{kl}-\hat{\imath}L^{\diamond}_{kl})\sigma^{kl}=$$
$$(L_{23}-\hat{\imath}L^{\diamond}_{23})\sigma^{23}+(L_{31}-\hat{\imath}L^{\diamond}_{31})\sigma^{31}+(L_{12}-\hat{\imath}L^{\diamond}_{12})\sigma^{12}=$$
$$(\boldsymbol{r}+\iota\hat{\boldsymbol{b}})\boldsymbol{\varsigma}= \qquad (17)$$
$$(r_x+\hat{\imath}b_x)\sigma^{23}+(r_y+\hat{\imath}b_y)\sigma^{31}+(r_z+\hat{\imath}b_z)\sigma^{12}, \qquad (18)$$
$$l^2=-\boldsymbol{l}\boldsymbol{\varsigma}\cdot\boldsymbol{l}\boldsymbol{\varsigma}=\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}=(\boldsymbol{r}+\hat{\imath}\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{r}^2-\boldsymbol{b}^2+\hat{\imath}2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}, \qquad (19)$$
$$l=\sqrt{-\boldsymbol{l}\boldsymbol{\varsigma}\cdot\boldsymbol{l}\boldsymbol{\varsigma}}=\sqrt{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}}=\sqrt{\boldsymbol{r}^2-\boldsymbol{b}^2+\hat{\imath}2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}}. \qquad (20)$$

如果 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{b}=0$，那么变换(9)-(10)描述参考系绕 $\boldsymbol{r}$轴转过角度 $2r$的空间直接旋转。但如果 $\boldsymbol{l}=\hat{\imath}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{r}=0$，那么变换(9)-(10)描述洛伦兹推动。具体而言，如果$\frac{\boldsymbol{b}}{b}=\frac{\boldsymbol{v}}{v}$，$\tanh 2b=\frac{v}{c}$，那么它们描述向一个相对于原系统以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的参考系的变换。一般情况下，当$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}+\hat{\imath}\boldsymbol{b}$时，变换(9)-(10)既不是空间旋转，也不是洛伦兹推动。不过，正如我们将在下文看到的，它们总能表示为空间旋转与洛伦兹推动的先后组合，或洛伦兹推动与空间旋转的先后组合。

使用双四元数指数（16）进行运算时，若采用$\hat{\imath}$-复向量 $\boldsymbol{\lambda}$，而非$\hat{\imath}$-复向量 $\boldsymbol{l}$，会方便得多，

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})=\frac{\boldsymbol{l}}{l}\tan l. \qquad (21)$$

显然，在空间旋转的情况下，当 $\boldsymbol{l}$ 是一个$\hat{\imath}$-实向量 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}$时，参数 $\boldsymbol{\lambda}$ 也是一个$\hat{\imath}$-实向量

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{r})=\frac{\boldsymbol{r}}{r}\tan r. \qquad (22)$$

在洛伦兹推动的情况下，当 $\boldsymbol{l}$ 是$\hat{\imath}$-虚向量 $\boldsymbol{l}=\hat{\imath}\boldsymbol{b}$时，参数 $\boldsymbol{\lambda}$ 也是$\hat{\imath}$-虚向量

$$\boldsymbol{\beta}(\hat{\imath}\boldsymbol{b})=\frac{\hat{\imath}\boldsymbol{b}}{b}\tanh b. \qquad (23)$$

如果已知参数 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})$，则参数 $\boldsymbol{l}$ 由以下关系确定

$$\boldsymbol{l}=\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}}}\arctan\sqrt{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}}=\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\lambda}\arctan\lambda,$$
$$l=\arctan\sqrt{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}}=\arctan\lambda. \qquad (24)$$

使用参数 $\boldsymbol{\lambda(l)}$时，指数 $e^{\boldsymbol{l\varsigma}}$ 的形式为

$$e^{\boldsymbol{l\varsigma}} = \cos l + \frac{\boldsymbol{l\varsigma}}{l}\sin l = \cos l(1 + \frac{\boldsymbol{l\varsigma}}{l}\tan l) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 l}}(1 + \frac{\boldsymbol{l\varsigma}}{l}\tan l) = = \frac{1+\boldsymbol{\lambda\varsigma}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}}}, \tag{25}$$

两个指数的乘积 $e^{\boldsymbol{l}_2\boldsymbol{\varsigma}}e^{\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{\varsigma}}$ 具有如下形式

$$e^{\boldsymbol{l}_2\boldsymbol{\varsigma}}e^{\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{\varsigma}} = \frac{(1+\boldsymbol{\lambda}_2\boldsymbol{\varsigma})(1+\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\varsigma})}{\sqrt{(1+\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\boldsymbol{\lambda}_2)(1+\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_1)}} = = \frac{1-\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_2}{\sqrt{(1+\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\boldsymbol{\lambda}_2)(1+\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_1)}}\Big(1 + \frac{\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2+\boldsymbol{\lambda}_2\times\boldsymbol{\lambda}_1}{1-\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_2}\boldsymbol{\varsigma}\Big). \tag{26}$$

这里 $\boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l}_1)$， $\boldsymbol{\lambda}_2 = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l}_2)$。令

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l}) = \frac{\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2+\boldsymbol{\lambda}_2\times\boldsymbol{\lambda}_1}{1-\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_2}, \tag{27}$$

我们得到

$$1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l}) = \frac{(1+\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\boldsymbol{\lambda}_2)(1+\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_1)}{(1-\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_2)^2}. \tag{28}$$

指数的乘积具有指数 (16) 的形式，其中指数为 $\boldsymbol{l\zeta}$：

$$e^{\boldsymbol{l}_2\boldsymbol{\varsigma}}e^{\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{\varsigma}} = \frac{1+\boldsymbol{\lambda\varsigma}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}}} = e^{\boldsymbol{l\varsigma}}. \tag{29}$$

关系式 (26) 确定了相乘指数 $e^{\boldsymbol{l}_2\boldsymbol{\varsigma}}e^{\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{\varsigma}}$ 时，参数 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l}_1)$ 和 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l}_2)$ 的复合规则。注意，在 [4] 中，对于另一个与双四元数无关的参数，也得到了相同的关系式。

III. 洛伦兹变换的因式分解

任何洛伦兹变换都可以表示为空间旋转与洛伦兹推动的复合，或洛伦兹推动与空间旋转的复合。因此，指数 $e^{\boldsymbol{l\varsigma}}$ 可以表示为乘积

$$e^{\boldsymbol{l\varsigma}} = e^{\hat{\imath}\boldsymbol{b\varsigma}}e^{\boldsymbol{r\varsigma}}, \tag{30}$$

or

$$e^{\boldsymbol{l\varsigma}} = e^{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\varsigma}}e^{\hat{\imath}\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\varsigma}}. \tag{31}$$

让我们通过几个步骤求出推动参数 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{b}'$ 和旋转 $\boldsymbol{r}$、 $\boldsymbol{r}'$。

首先，将等式 (29)–(30) 的左右两边分别与其厄米共轭等式的左右两边相乘

$$(e^{\boldsymbol{l\varsigma}})^\dagger = e^{-\boldsymbol{l}^\star\boldsymbol{\varsigma}} = e^{-\boldsymbol{r\varsigma}}e^{\hat{\imath}\boldsymbol{b\varsigma}}. \tag{32}$$

or

$$(e^{\boldsymbol{l\varsigma}})^\dagger = e^{-\boldsymbol{l}^\star\boldsymbol{\varsigma}} = e^{\hat{\imath}\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\varsigma}}e^{-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\varsigma}}. \tag{33}$$

这里 * 表示$\hat{\imath}$-复共轭： $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} + \hat{\imath}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{l}^\star = \boldsymbol{r} - \hat{\imath}\boldsymbol{b}$。

将等式 (29) 右乘 (31)

$$e^{\boldsymbol{l\varsigma}}e^{-\boldsymbol{l}^\star\boldsymbol{\varsigma}} = e^{\hat{\imath}\boldsymbol{b\varsigma}}e^{\boldsymbol{r\varsigma}}e^{-\boldsymbol{r\varsigma}}e^{\hat{\imath}\boldsymbol{b\varsigma}} = e^{\hat{\imath}2\boldsymbol{b\varsigma}}, \tag{34}$$

并将等式 (30) 左乘 (32)

$$e^{-\boldsymbol{l}^\star\boldsymbol{\varsigma}}e^{\boldsymbol{l\varsigma}} = e^{\hat{\imath}\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\varsigma}}e^{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\varsigma}}e^{-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\varsigma}}e^{\hat{\imath}\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\varsigma}} = e^{\hat{\imath}\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\varsigma}}e^{\hat{\imath}\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\varsigma}} = e^{\hat{\imath}2\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\varsigma}}. \tag{35}$$

利用 (26)，我们求得与参数 $\boldsymbol{l} = \hat{\imath}2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{l}' = \hat{\imath}2\boldsymbol{b}'$对应的参数 $\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}2\boldsymbol{b})$ 和 $\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}2\boldsymbol{b}')$:

$$\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}2\boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})+\boldsymbol{\lambda}^\star(-\boldsymbol{l})+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\times\boldsymbol{\lambda}^\star(-\boldsymbol{l})}{1-\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^\star(-\boldsymbol{l})} = \frac{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})-\boldsymbol{\lambda}^\star(\boldsymbol{l})-\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\times\boldsymbol{\lambda}^\star(\boldsymbol{l})}{1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^\star(\boldsymbol{l})}, \tag{36}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}2\boldsymbol{b}') = \frac{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})+\boldsymbol{\lambda}^\star(-\boldsymbol{l})+\boldsymbol{\lambda}^\star(-\boldsymbol{l})\times\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})}{1-\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^\star(-\boldsymbol{l})} = \frac{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})-\boldsymbol{\lambda}^\star(\boldsymbol{l})-\boldsymbol{\lambda}^\star(\boldsymbol{l})\times\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})}{1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^\star(\boldsymbol{l})}. \tag{37}$$

第二步，我们将求出所需的参数 $\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}\boldsymbol{b})$ 和$\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}\boldsymbol{b}')$。它们与 $\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}2\boldsymbol{b})$ 和 $\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}2\boldsymbol{b}')$相差因子

$$\frac{\tan\sqrt{\hat{\imath}\boldsymbol{b}\cdot\hat{\imath}\boldsymbol{b}}}{\tan\sqrt{\hat{\imath}2\boldsymbol{b}\cdot\hat{\imath}2\boldsymbol{b}}} \quad \text{and} \quad \frac{\tan\sqrt{\hat{\imath}\boldsymbol{b}'\cdot\hat{\imath}\boldsymbol{b}'}}{\tan\sqrt{\hat{\imath}2\boldsymbol{b}'\cdot\hat{\imath}2\boldsymbol{b}'}}. \tag{38}$$

为求得这些因子，我们使用以下三角恒等式

$$\frac{\tan z}{\tan 2z} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\tan^2 2z}}. \tag{39}$$

Thus

$$\frac{\tan\sqrt{\hat{\imath}\boldsymbol{b}\cdot\hat{\imath}\boldsymbol{b}}}{\tan\sqrt{\hat{\imath}2\boldsymbol{b}\cdot\hat{\imath}2\boldsymbol{b}}} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\tan^2\sqrt{\hat{\imath}2\boldsymbol{b}\cdot\hat{\imath}2\boldsymbol{b}}}} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}2\boldsymbol{b})}}, \tag{40}$$

$$\frac{\tan\sqrt{\hat{\imath}\boldsymbol{b}'\cdot\hat{\imath}\boldsymbol{b}'}}{\tan\sqrt{\hat{\imath}2\boldsymbol{b}'\cdot\hat{\imath}2\boldsymbol{b}'}} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\tan^2\sqrt{\hat{\imath}2\boldsymbol{b}'\cdot\hat{\imath}2\boldsymbol{b}'}}} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}2\boldsymbol{b}')\cdot\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}2\boldsymbol{b}')}}. \tag{41}$$

让我们来计算

$$\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}2\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}2\boldsymbol{b}')\cdot\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}2\boldsymbol{b}') = = \frac{\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})+\boldsymbol{\lambda}^{\star 2}(\boldsymbol{l})-2\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^\star(\boldsymbol{l})+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})\boldsymbol{\lambda}^{\star 2}(\boldsymbol{l})-[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^\star(\boldsymbol{l})]^2}{[1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^\star(\boldsymbol{l})]^2} = = \frac{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})][1+\boldsymbol{\lambda}^{\star 2}(\boldsymbol{l})]-[1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^\star(\boldsymbol{l})]^2}{[1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^\star(\boldsymbol{l})]^2} = \frac{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})][1+\boldsymbol{\lambda}^{\star 2}(\boldsymbol{l})]}{[1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^\star(\boldsymbol{l})]^2}-1. \tag{42}$$

分别

$$\frac{\tan\sqrt{\hat{\imath}\boldsymbol{b}\cdot\hat{\imath}\boldsymbol{b}}}{\tan\sqrt{\hat{\imath}2\boldsymbol{b}\cdot\hat{\imath}2\boldsymbol{b}}}=\frac{\tan\sqrt{\hat{\imath}\boldsymbol{b}'\cdot\hat{\imath}\boldsymbol{b}'}}{\tan\sqrt{\hat{\imath}2\boldsymbol{b}'\cdot\hat{\imath}2\boldsymbol{b}'}}=$$
$$=\frac{1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})}{1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})+\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})][1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]^{\star}}}. \tag{43}$$

因此，与参数 $\boldsymbol{l}=\hat{\imath}\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{l}'=\hat{\imath}\boldsymbol{b}'$ 对应的参数 $\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}\boldsymbol{b})$ 和 $\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}\boldsymbol{b}')$ 具有如下形式

$$\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}\boldsymbol{b})=\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}2\boldsymbol{b})\frac{\tan\sqrt{\hat{\imath}\boldsymbol{b}\cdot\hat{\imath}\boldsymbol{b}}}{\tan\sqrt{\hat{\imath}2\boldsymbol{b}\cdot\hat{\imath}2\boldsymbol{b}}}=$$
$$=\frac{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})-\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})-\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\times\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})}{1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})+\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})][1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]^{\star}}}, \tag{44}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}\boldsymbol{b}')=\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}2\boldsymbol{b}')\frac{\tan\sqrt{\hat{\imath}\boldsymbol{b}'\cdot\hat{\imath}\boldsymbol{b}'}}{\tan\sqrt{\hat{\imath}2\boldsymbol{b}'\cdot\hat{\imath}2\boldsymbol{b}'}}=$$
$$=\frac{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})-\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\times\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})}{1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})+\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})][1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]^{\star}}}. \tag{45}$$

正如预期，参数 $\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}\boldsymbol{b})$ 和 $\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}\boldsymbol{b}')$ 是 $\hat{\imath}$-虚向量。这些向量的方向取决于先执行哪种运算——旋转还是洛伦兹推动——以及后执行哪种运算。向量 $\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}\boldsymbol{b})$ 和 $\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}\boldsymbol{b}')$ 的大小则不受此影响。

第三步，我们求出描述空间旋转的指数。为此，将 (29) 左乘 $e^{-\hat{\imath}\boldsymbol{b}\boldsymbol{\varsigma}}$，并将 (30) 右乘 $e^{-\hat{\imath}\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\varsigma}}$：

$$e^{-\hat{\imath}\boldsymbol{b}\boldsymbol{\varsigma}}e^{\boldsymbol{l}\boldsymbol{\varsigma}}=e^{-\hat{\imath}\boldsymbol{b}\boldsymbol{\varsigma}}e^{\hat{\imath}\boldsymbol{b}\boldsymbol{\varsigma}}e^{\boldsymbol{r}\boldsymbol{\varsigma}}=e^{\boldsymbol{r}\boldsymbol{\varsigma}}, \tag{46}$$
$$e^{\boldsymbol{l}\boldsymbol{\varsigma}}e^{-\hat{\imath}\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\varsigma}}=e^{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\varsigma}}e^{\hat{\imath}\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\varsigma}}e^{-\hat{\imath}\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\varsigma}}=e^{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\varsigma}}. \tag{47}$$

我们再次使用（26），经过一番冗长但并不复杂的变换，求得与参数 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$相对应的参数 $\boldsymbol{\lambda}$（$\boldsymbol{r}$）和 $\boldsymbol{\lambda}$（$\boldsymbol{r}'$）：

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r})=\frac{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})+\boldsymbol{\lambda}(-\hat{\imath}\boldsymbol{b})+\boldsymbol{\lambda}(-\hat{\imath}\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})}{1-\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}(-\hat{\imath}\boldsymbol{b})}=\frac{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})-\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}\boldsymbol{b})+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\times\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}\boldsymbol{b})}{1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}\boldsymbol{b})}=$$
$$=\Big\{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})]+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})][1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]^{\star}}-\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})+\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})+$$
$$+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\times\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})-\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\times\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})-\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})]+\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})]\Big\}\times$$
$$\times\Big\{1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})+\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})][1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]^{\star}}\Big\}^{-1}\{1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}\boldsymbol{b})\}^{-1}=$$
$$=\frac{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})][1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]^{\star}}+\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})[1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})]}{1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})+\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})][1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]^{\star}}}\times$$
$$\times\frac{1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})+\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})][1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]^{\star}}}{1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})+\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})][1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]^{\star}}+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})-\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})}=$$
$$=\frac{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]^{\star}}+\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]}}{\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]^{\star}}+\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]}}, \tag{48}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r}')=\frac{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})+\boldsymbol{\lambda}(-\hat{\imath}\boldsymbol{b}')+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\times\boldsymbol{\lambda}(-\hat{\imath}\boldsymbol{b}')}{1-\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}(-\hat{\imath}\boldsymbol{b}')}=\frac{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})-\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}\boldsymbol{b}')-\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\times\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}\boldsymbol{b}')}{1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}\boldsymbol{b}')}=$$
$$=\Big\{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})]+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})][1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]^{\star}}-\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})+\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})-$$
$$-\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\times\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\times\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})-\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})]+\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})]\Big\}\times$$
$$\times\Big\{1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})+\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})][1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]^{\star}}\Big\}^{-1}\{1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}(\hat{\imath}\boldsymbol{b}')\}^{-1}=$$
$$=\frac{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})][1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]^{\star}}+\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})[1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})]}{1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})+\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})][1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]^{\star}}}\times$$
$$\times\frac{1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})+\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})][1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]^{\star}}}{1+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})+\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})][1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]^{\star}}+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})-\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})}=$$
$$=\frac{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{l})\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]^{\star}}+\boldsymbol{\lambda}^{\star}(\boldsymbol{l})\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]}}{\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]^{\star}}+\sqrt{[1+\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{l})]}}. \tag{49}$$

如预期所料，参数 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r})$ 和 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r}')$ 是$\hat{\iota}$-实向量。这些向量的大小和方向都不取决于旋转与洛伦兹推动的先后顺序。

得到参数 $\boldsymbol{\lambda}(\hat{\iota}\boldsymbol{b})$、 $\boldsymbol{\lambda}(\hat{\iota}\boldsymbol{b}')$、 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r})$和 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r}')$后，我们可以利用关系式（23）转到参数 $\boldsymbol{l}$、 $\boldsymbol{l}'$、 $\boldsymbol{r}$、 $\boldsymbol{r}'$ ，并将任意洛伦兹变换表示为形式（29）或（30）。利用关系式（24），直接用 $\boldsymbol{\lambda}(\hat{\iota}\boldsymbol{b})$、 $\boldsymbol{\lambda}(\hat{\iota}\boldsymbol{b}')$、 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r})$和 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r}')$表示（29）–（30）中的指数则更为简单。

IV. 总结

本文展示了如何将任意洛伦兹变换表示为一系列空间旋转和洛伦兹推动，或洛伦兹推动和空间旋转变换。文中推导出确定此类旋转和推动参数的关系。将任意洛伦兹变换表示为旋转与推动，或推动与旋转的形式，可以赋予该变换以物理意义，并对其进行分析。

V. 致谢

作者谨向 Evgeniy Tolkachev 教授致谢，感谢他参与启发性的讨论。

[1] Drell S.D. Bjorken J.D. 相对论量子力学. McGraw-Hill，纽约，1964. [2] Casanova G. L'向量代数. Presses Universitaires de France，巴黎，1976. [3] A. V. Berezin、Yu. A. Kurotchkin 和 E. A. Tolkatchev。相对论物理中的四元数。《科学与技术》（俄文），明斯克，1989年。[4] Fedorov F. I.。《洛伦兹群》。Nauka，莫斯科，1979年。