arXiv:2302.02796v1 [physics.class-ph] 27 Jan 2023

非周期结构中的光子态密度

Vladislav A. Chistyakov[1],* Mikhail S. Sidorenko[1], Andrey D. Sayanskiy[1], 和 Mikhail V. Rybin[1,2]
[1] *School of Physics and Engineering, ITMO University, St Petersburg 197101, Russia and*
[2] *Ioffe Institute, St Petersburg 194021, Russia*（日期：2023年2月7日）

通常认为，周期性是形成带隙（即态密度受到抑制的能带）的必要且充分条件。本文通过分析三种周期性和有序程度各不相同的结构的带隙特性，对这一前提进行检验。我们研究了光子晶体、无序晶格，以及有序但非周期的准晶结构。实空间度量可以比较这些不同结构的周期性程度。利用这一度量，我们发现无序晶格和有序准晶可归为同一类材料结构。我们从理论和实验两方面考察了它们的光子态密度。分析表明，尽管周期性程度截然不同，光子晶体和准晶结构对态密度的抑制却几乎相同。我们的结果为理解形成带隙的物理机制提供了新的见解。

I. 引言

现代凝聚态物理源于对平移对称性的分析。平移对称性根据能带结构，依循适用于任何周期系统的布洛赫定理，决定波的输运性质。因此，与介电常数周期性相关的带隙赋予光子晶体对电磁波独特的控制能力。例如，光子晶体能够将光局域化在小型体积腔中、设计具有特定色散特性的波导，并改变光发射速率[1–4]。这些特性使光子晶体在光学应用中大有用处；例如，它们可用作谐振器[5], 、光学传感器[6], 和光子拓扑绝缘体[7]。然而，对光子晶体材料选择和对称性的某些限制，制约了其设计自由度。特别是，只有当折射率反差足够大且结构具有较高对称性时，才会出现全向带隙。采用数值优化的逆向工程方法可以解决这一问题，但往往会产生过于复杂的结构[8–11]。

另一种获得带隙的策略是考虑非周期系统。例如，尽管具有随机结构，无序超均匀结构仍具有所需的带隙特性[12–15]。在其他非周期系统中，准晶结构尤为引人注目，因为它们虽缺乏平移对称性，却具有有序性。近期三维纳米制造技术的进步，使得人们能够以极高精度制造这些结构，从而使其甚至能够在可见光范围内工作[16–22]。

准周期光子结构是一类特殊的光子结构，在倒易空间中具有高度的有序性。在倒易空间中设计结构，然后通过逆傅里叶变换获得其在实空间中的结构，这一可能性引起了广泛关注[20]。实空间方法能够设计出具有所需特性的光子结构，例如复杂的莫尔´图案[23]。最近，有研究报道了基于多个朝向各异的一维（1D）光栅的准晶体结构[24]。对于聚合物材料，即使介电反差很弱，这类结构也能展现出前所未有的辐射抑制能力，这是由于二维和三维情况下形成的带隙所致。

平移对称性使得可以根据波矢对解进行分类：这类解要么是传播波，要么是倏逝波[4]。在后一种情况下，波矢具有非零虚部，且在某个特定方向上存在带隙。在无序晶格中，安德森局域化是倏逝解的另一种成因[25,26]。图1展示了具有周期结构的有序光子晶体、非周期有序准晶以及无序晶格。准晶结构不具备产生倏逝波的这两个条件，因为它既没有周期性，也不存在无序。

本文研究准晶结构中的光抑制现象，并将其与蜂窝晶格光子晶体以及无序晶格结构中获得的类似特性进行比较。通过使用实空间度量，我们确定了周期性程度，从而能够对准周期结构与具有给定无序程度的无序晶格进行数值比较。数值结果表明，准晶结构中的波传播受到强烈抑制，其效果可与光子晶体相媲美；相比之下，对于周期性程度相同的无序晶格，抑制效果较弱。微波传输测量进一步证实了这些预测的特性。

II. 光子结构的设计

这里，我们描述介电常数在二维空间中呈调制分布的光子结构。我们首先从严格有序的准周期

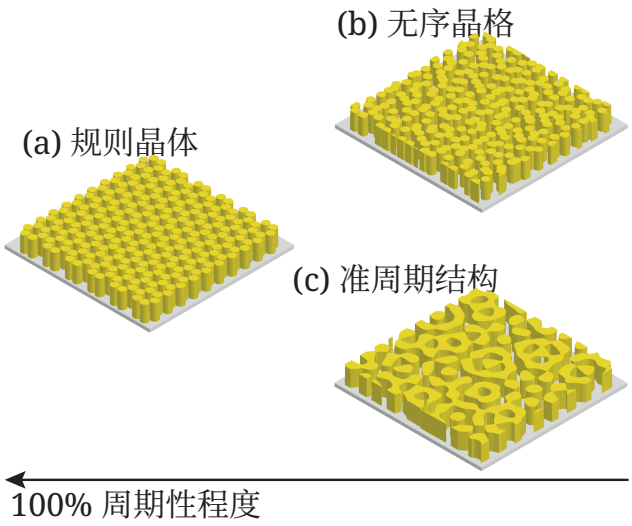

图1. 具有不同周期性程度的有序与无序结构图景。(a) 蜂窝光子晶体，一种有序周期结构。(b) 杆相对于蜂窝晶格中的杆位置随机偏移的无序晶格，是一种无序的非周期结构。(c) 准周期结构，一种有序但非周期的结构。

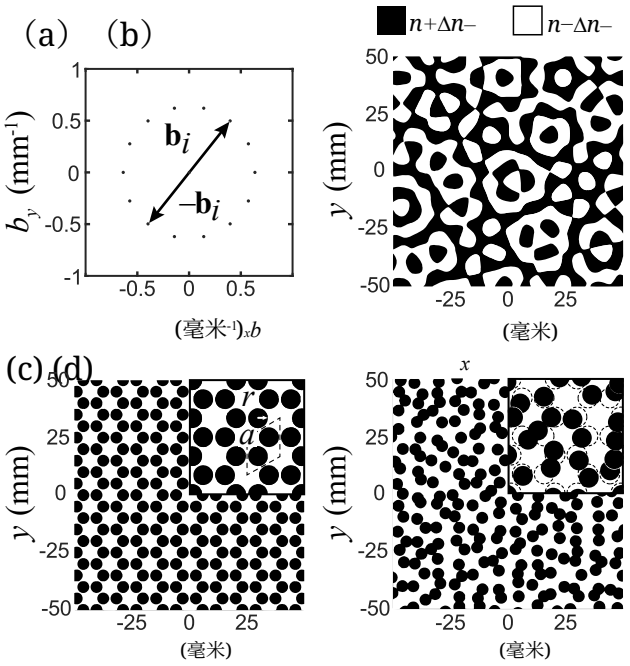

图 2。（a）倒易空间中沿圆周分布的十四个布拉格峰值示意图，对应于合并为单一结构的七个光栅，该结构用于生成具有全向布拉格带隙的准周期结构。（b）由两种材料构成、具有二元分布的准周期结构片段。该结构对应于七个光栅，其倒易空间中的峰值分布如（a）图所示。（c）由空气中的介电杆组成的有序蜂窝光子晶体。（d）空气中的介电杆无序晶格。相对于蜂窝晶格的节点，杆的位置沿 x 和 y 方向随机偏移。

结构（无平移对称性）开始，接着研究具有完美有序性和周期性的光子晶体，随后考察无序的非周期晶格。

按照参考文献24，我们将准周期结构构造为若干折射率呈正弦调制的一维光栅的叠加。光栅方向在极角范围内均匀分布，折射率的连续空间分布为：

$$\Delta n_c(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_{opt}} \Delta n_i \sin\left(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{r} + \phi_i\right), \qquad (1)$$

其中，i 表示光栅，N_{opt} 是光栅的最佳数量，Δn_i 是第 i个光栅中的折射率调制振幅，$\mathbf{b}_i$ 是决定光栅周期和方向的矢量，ϕ_i是随机相位。对于这类准晶结构，光栅的最佳数量为 $N_{opt} \approx 2.36(n/\Delta n)^{2/3}$，其中$n$ 是平均折射率，Δn 是折射率相对于平均值 n的偏差振幅，即 $n_1 = \overline{n} + \Delta n$ 和 $n_2 = n - \Delta n$。

可在与傅里叶变换密切相关的倒易空间中分析该结构的光学性质。正弦函数的傅里叶变换对应两个布拉格峰值（狄拉克δ函数），其方向为 $\pm\mathbf{b}_i$，位于倒易空间中。每个晶格的周期相同，均为 a，因此晶格矢量的长度定义为$b = |\mathbf{b}_i| = 2\pi/a$。光栅的均匀角分布使其在式（1）中叠加，从而在倒易空间的圆周附近形成密集分布的一级布拉格极大值，如图 2a 所示。由于相位是随机选取的，且光栅数量足够多，因此折射率的局部扰动呈均匀分布，在任何特定方向上都没有明显特征（见图 2b）。值得注意的是，根据近期的报告[24]，这种准周期结构对于电磁波的所有传播方向都具有完整的光子带隙。

为了获得仅由两种介电材料构成的结构，对折射率总和 $\Delta n_c(\mathbf{r})$应用二值化过程[27–31]

$$n_b(\mathbf{r}) = \overline{n} + \Delta n \mathrm{sign}\left(\Delta n_c(\mathbf{r})\right). \qquad (2)$$

二值化后，每个光栅都以有效振幅 $\Delta n_{b,\,i} = 2\Delta n/\sqrt{\pi N_{opt}}$参与光散射。二值化过程会在倒易空间中引入额外噪声，其积分背景值为布拉格峰值强度的 36%。然而，当光栅数量足够多时，这些峰值分布得非常密集，在有限尺寸结构中几乎无法区分[32]（见图 2a）。因此，适当选择光栅数量，即可使峰值沿圆周具有足够的密度。

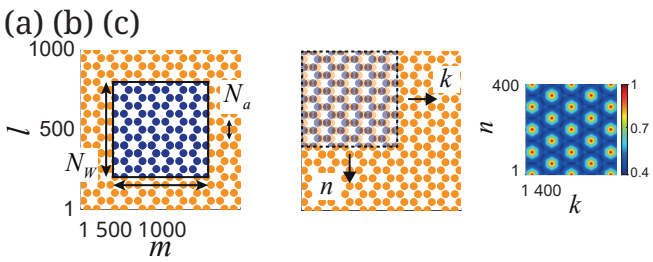

图 3. 有序光子晶体离散卷积的计算示意图。(a) 在完整结构 F 中选取有限区域 W 。(b) 计算离散卷积值。(c) 有序光子晶体的卷积。

我们选择具有蜂窝晶格的光子晶体作为周期有序结构（图 2c）。每个六边形晶胞包含六根半径为 $r = 0.26a$ 的介电杆，周围为空气。杆材料的填充率与准周期结构相同。两种结构具有相同的晶格常数 a。不具有平移对称性的无序晶格[33–36] 以蜂窝光子晶体为基础，但每根杆的位置都根据 $x = x_{0,\ j} + \delta x_j$ 和 $y = y_{0,\ j} + \delta y_j$ 随机偏移。这里， δx_j和 δy_j 是在区间 $[0 \dots d_r]$ 内均匀分布的随机值。图 2d 展示了这种无序晶格的一个示例。

III. 周期性程度的度量指标

由于我们的目标是揭示周期性如何影响结构的性质，因此需要一种合适的度量指标进行定量分析。这样的度量指标可让我们将有序准周期结构与具有特定无序值 σ 的光子晶体进行比较。目前，对于任意情形，还不存在兼具普遍定性和定量特性的标准度量指标。人们已开发并应用了各种度量指标来研究范围广泛的无序系统[37]。大多数已提出的度量指标都利用倒易空间[38–41]中无序谱的特征。然而，这些指标不适用于描述实空间中尺寸较小的样本。尽管有几项研究提出了非平凡的实空间度量指标，可根据伪无序[33,34], 对结构加以区分，但这些指标无法推广至其他类别的光子晶体，包括准周期结构。因此，需要采用特设方法。

在本研究中，我们利用一种基于实空间自卷积的度量指标。通过对样品进行数值卷积，可以得到可靠的品质因数[42]，；这意味着将实空间域离散为有限方形样品

$$C_{2D}(n,k) = \sum_{i=1}^{N_W}\sum_{j=1}^{N_W} W(i,j)F(n+i-1, k+j-1), \quad (3)$$

其中， $n = 1 \dots N_F - N_W + 1$、 $k = 1 \dots N_F - N_W + 1$ 是输出卷积矩阵的元素， $F(l,\ m)$是一个 $N_F \times N_F$ 的二值矩阵，用于描述完整结构； $W(i,\ j)$是该结构完整矩阵中一个 $N_W \times N_W$的区域，对应于具有晶格常数 $N_a = a/\Delta$的$N_F/N_a - 4$个周期； $\Delta = 0.1$ 是采样步长。图3展示了有序光子晶体的二维卷积。在每个位置，我们计算方形区域的每个元素与完整矩阵的每个元素的乘积，即求出它们的重叠部分，再将结果求和，得到当前位置的输出[43]。图5a和图5b分别展示了所研究的无序晶格和准周期结构的卷积图谱。图谱中的极大值反映了具有特定晶格常数 a的结构的周期性程度。为量化周期性程度，我们考察距中心距离等于晶格常数a的最近的极大值。值得注意的是，对于准周期样品，极大值会合并并形成一个环，这表明存在全向带隙。结构的非周期性分布表现为图谱上的极大值变宽且强度减弱。

接下来，我们考虑两种结构的选定极大值的一维归一化卷积 $C_{1\mathrm{D}}(x)$，如图 5c 中的实线所示。这些数据可以通过对高斯 $G(x)$函数和矩形脉冲 $\mathrm{rect}(x)$函数进行第二次卷积来充分描述，并以高斯函数的标准差来量化无序。相应的方程为

$$C_{rG}(x) = \sum_{x=1} \mathrm{rect}(x)G(k-x+1), \quad (4)$$

$$C'_{1\mathrm{D}}(x) = \sum_{x=1} C_{rG}(x)C_{rG}(k-x+1) \approx C_{1\mathrm{D}}(x), \quad (5)$$

其中， $\mathrm{rect}(x)$ 是长度为$C_{1\mathrm{D}}(x)$、高度为 1 的矩形脉冲， $G(x) = \exp(-x^2/(2\sigma^2))/(\sigma\sqrt{2\pi})$，而 σ 是标准差。将一维卷积应用于我们的结构后，当 $C'_{1\mathrm{D}}(x) \approx C_{1\mathrm{D}}(x)$时，我们发现高斯分布的标准差 σ 。结构和方形区域越大，标准差值就越稳定。对于我们的有序光子晶体，离散度为 $\sigma = 0$，这一点可由相应的卷积函数呈三角形这一事实证明，见图 5c 中的绿色曲线。图 5c 中的虚线显示了无序晶格的度量函数 $C'_{1\mathrm{D}}(x)$。该函数描述了图谱中的原始极大值，因此，我们也可以用这一度量指标来描述随机光子晶体的周期性程度。

我们求得准周期结构的卷积图之差的均方根误差函数[44] 的最小值。

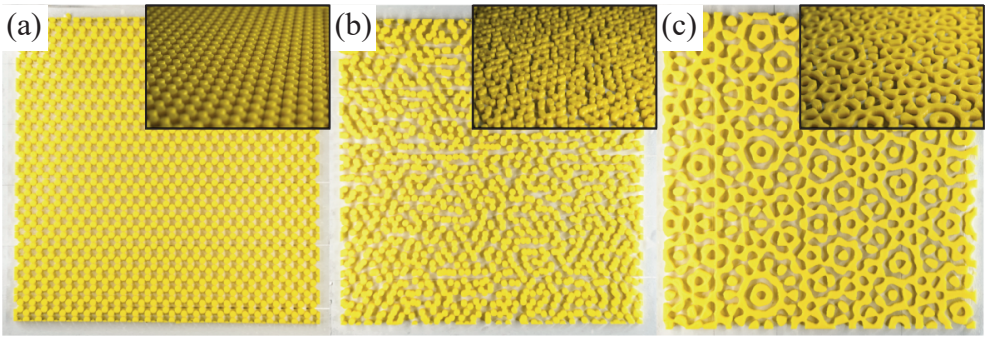

图4. 使用3D打印机打印的样品照片。(a) 空气中的介电杆构成的有序蜂窝光子晶体。(b) 空气中的介电杆无序晶格。杆的位置从蜂窝晶格位置沿 x 和 y 方向随机偏移（无序程度为 $d_r = 2$ mm）。(c) 由两种 Materials 构成的二元分布准周期结构。该结构对应于七个光栅合并而成的单一二元结构。所有结构的高度均为5 mm。(b)和(c)中的结构具有相同的周期性程度 $\sigma = 4.78$。

结构与无序晶格的卷积图之差的均方根误差函数 $d_r = 2$ 取得最小值。根据这一标准，准周期结构相当于无序程度为 $d_r = 2$ mm 的无序晶格，如图 5c 的插图所示。在这种情况下，所述度量指标显示两种结构的标准差均为 $\sigma = 4.78$。因此，这两种结构具有相同的周期性程度，而周期性程度正是形成光子带隙的参数。

IV. 带隙特性的探测

现在，我们根据上述度量指标，比较具有相同周期性程度的准周期结构和无序晶格的电磁特性。首先，我们使用 CST Studio Suite 软件的时域求解器进行了全波仿真。在所研究的每种结构的中心均放置一个线性偶极发射体。我们还对中心晶胞内15个不同偶极位置的数据取平均，并分析了平均后的结果。为便于后续实验，我们选择了一个 TM偏振偶极源（此时，电场沿竖直 z 方向振荡）。结构的顶部和底部边界设置为理想电导体；结构在x-y 平面内的竖直边界设置为完全匹配层，以模拟开放边界条件。

为了在实验中验证我们的理论预测，我们使用 3D打印机制造了聚合物样品。一对铝板构成了用于 TM偏振的平行平板波导，样品放置在两板之间。在结构的中心放置了一个小型偶极天线。我们测量了这些结构在 10.8 至 15 GHz 频率范围内的参数。对于每种结构，我们使用矢量网络分析仪测量了反射系数（S_{11} 参数），其 S_{11} 实部可用于估算发射功率 P。为了测量真空中的参考辐射功率 P_0，我们将偶极天线放置在不含结构的平行平板波导中。

对于模拟和实验中的结构，我们均选用聚乳酸（PLA）塑料，其介电常数约为 $\varepsilon_1 = 2.2$ ($n_1 \approx 1.5$)，且在微波范围内损耗较低（$\tan\delta \approx 1{\cdot}10^{-2}$）[45]。介电结构周围为空气（$n_2 \approx 1$）。对于折射率反差为 $n_1/n_2 = 1.5$ 的准周期结构，最优光栅数量为 $N_{opt} = 7$。我们对结构的尺度进行选择，使得在准周期结构和光子晶体带隙的不同频率下，晶格常数均为相同的值 $a = 10$ mm。对于光子晶体，介电杆的半径为 $r = 0.26a$。这些结构如图 4 所示。结构的尺寸为 $250 \times 250 \times 5$ mm^3（$25a \times 25a \times 0.5a$），所有样品的总体积填充率约为 50%。

首先，我们模拟了辐射效率，并研究了光子态局域密度变化引起的辐射抑制。偶极子 P的发射功率通过其阻抗实部估算，并以位于自由空间中的偶极子阻抗归一化P_0[18, 46, 47]。为方便起见，我们使用无量纲频率 a/λ 来表示所研究结构中偶极子的发射光谱（图 6 中的蓝色虚线）。光子晶体结构在 $0.46a/\lambda$ 附近呈现一个抑制带（图 6a）。在准周期结构的功率谱中，可以清楚地看到 $0.38a/\lambda$和 $0.41a/\lambda$ 附近的一对发射抑制带隙（图 6c）。我们注意到，无序晶格的光谱在不同的结构实现中相当相似。因此，我们不对系综的光谱进行平均。与光子态局域密度相关的辐射抑制在带隙内显著减弱。值得注意的是，结构的有限尺寸导致带隙内的光子态局域密度不为零。宏观干涉效应会造成振荡条纹，这些条纹出现在带隙之外频率处的所有光谱中，但在后续讨论中将忽略这些特征。一个重

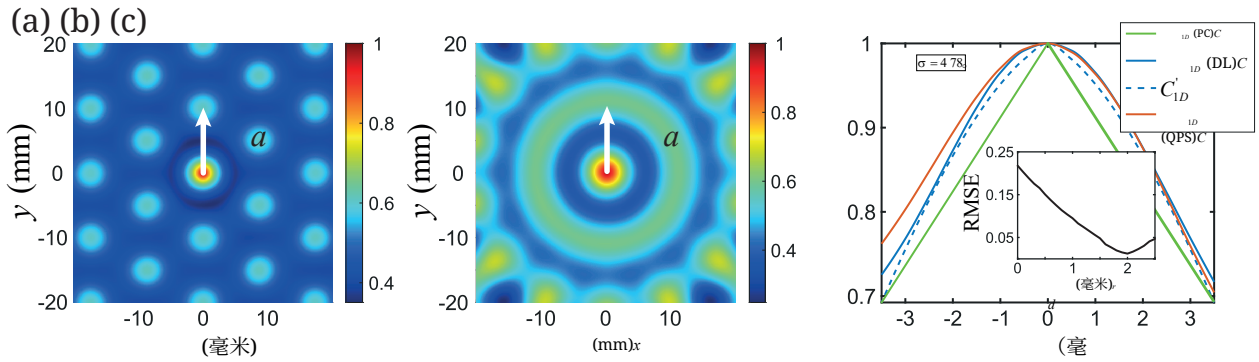

图 5. 图 4b 和 4c 分别展示的无序晶格 (a) 和准周期结构 (b) 的卷积图。白色箭头标出了平移向量。(c) 蜂窝光子晶体（绿色曲线）、准周期结构（红色曲线）、无序晶格（蓝色曲线）的卷积沿 x轴截面的比较，以及无序晶格的度量函数（蓝色虚线）。插图：准周期结构与无序晶格的卷积之间的均方根误差随无序晶格无序程度的变化。

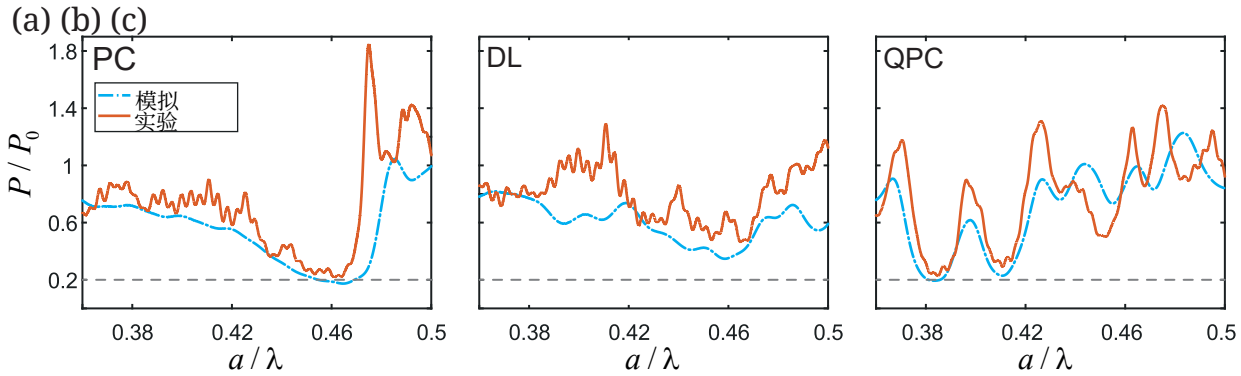

图 6. 置于蜂窝光子晶体 (a)、无序晶格 (b) 和准周期结构 (c) 内的偶极子的归一化辐射功率 P/P_0 。图中分别为理论结果（蓝色虚线）和实验结果（红色实线）。灰色虚线表示辐射抑制水平，最高可达 0.2。

要的发现是，尽管周期性程度截然不同，这两种规则结构表现出的辐射抑制几乎相同，均可降至 20% 的基准水平。具有与准周期结构相同周期性程度的无序晶格，表现出的抑制明显较弱，约为 40%（图 6b）。

图 6 中的红色实线表示实验中针对每种结构测得的偶极子归一化 TM 功率发射光谱。与模拟结果不同，所有结构的光谱中都观察到了高频波动条纹。这些条纹可能是由实验装置中样品与金属平面之间的空间间隙造成的。这些间隙会产生模拟中不存在的额外波导模式。然而，这类振荡不会影响对带隙抑制特征的分析。

对于这三种结构，光谱均在 $0.46a/\lambda$ 附近（图 6a 中的光子晶体样品）以及 $0.38a/\lambda$ 和 $0.41a/\lambda$ 附近（图 6c 中的准周期样品）呈现带隙，这与模拟所得结果高度吻合。此外，由布拉格带隙引起的电磁辐射抑制在有序结构中更强（降至 20% 处的基线）。实验中，具有与准周期结构相同周期性程度的无序晶格（图 6b）表现出较弱的发射抑制效应（基线约为 40%）。因此，实验数据完全证实了理论预测。

我们来讨论与光子态局域密度变化相关的参数。影响这一效应的主要参数如下：结构的尺寸、介电反差、所有空间方向上的阻带重叠情况，以及周期性程度。晶格的平移对称性限制了可能的旋转对称性，而旋转对称性决定了阻带能否在所有方向上重叠。如果介电反差较低，光子晶体中会产生额外的辐射泄漏；非周期性则会引入另一种泄漏通道。相比之下，准周期结构在阻带重叠方面没有严格限制，

但固定的周期性程度会阻碍局域态密度的抑制。这些相互竞争的效应为设计具有特定光子态局域密度的聚合物基结构创造了机会，而旋转对称性则提供了额外的自由度。

V. 结论

在本研究中，我们分析了准周期结构在先进电磁辐射调控方面的潜力。研究重点是光子态局域密度的抑制，以及这一抑制与结构周期性程度之间的相互作用。我们提出了一种实空间度量，用于比较准周期结构与无序晶格的光子特性。我们发现，由现成塑料材料制成的准周期结构，其光子态局域密度的抑制效果可与具有完美平移对称性的光子晶体相媲美。我们开展了理论和实验研究，结果高度吻合。令人惊讶的是，我们发现缺乏周期性有利于抑制光子态密度；在这方面，非周期结构较有序结构具有内在优势。我们的发现为利用多种低折射率材料设计光子结构开辟了道路，而准晶设计则赋予了额外的自由度。我们预计，融入准周期拓扑的聚合物基结构将拓展光子结构的潜在应用。

致谢

我们感谢 Alexander Petrov 富有成效的讨论。作者感谢俄罗斯科学基金会的资助（资助编号：20-79-10316）。

* v.chistyakov@metalab.ifmo.ru

[1] E. Yablonovitch, Phys. Rev. Lett. **58**, 2059 (1987). [2] J. Sajeev, Phys. Rev. Lett. **58**, 2486 (1987). [3] J. D. Joannopoulos, P. R. Villeneuve, and S. Fan, 自然 **386**, 143 (1997). [4] J. D. Joannopoulos, S. G. J ohnson, J. N. Winn, and R. D. Meade, *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*, 第2版（普林斯顿：普林斯顿大学出版社，2008）。[5] R. Merlin and S. M. Young, Optics Express **22**, 18579 (2014). [6] S. O. Konorov, A. M. Zheltikov, and M. Scalora, Opt. Express **13**, 3454 (2005). [7] M. Li, D. V. Zhirihin, M. A. Gorlach, X. Ni, D. S. Filonov, A. P. Slobozhanyuk, A. Al´u, and A. B. Khanikaev, Nature Photonics **14**, 89 (2019). [8] Y. Chen, F. Meng, Y. Kivshar, B. Jia, and X. Huang, Phys. Rev. Research **2**, 023115 (2020). [9] S. D. Campbell, D. Sell, R. P. Jenkins, E. B. Whiting, J. A. Fan, and D. H. Werner, Optical Materials Express **9**, 1842 (2019). [10] W. Li, F. Meng, Y. Chen, Y. f. Li, and X. Huang, Ad- vanced Theory and Simulations **2**, 1900017 (2019). [11] S. Molesky, Z. Lin, A. Piggott, W. Jin, J. Vuck- ovic, and A. Rodriguez, Nature Photonics **12** (2018), 10.1038/s41566-018-0246-9. [12] A. Nahata and A. Agrawal, Nature Photonics **7**, 177 (2013). [13] W. Man, M. Florescu, K. Matsuyama, P. Yadak, G. Nahal, S. Hashemizad, E. Williamson, P. Steinhardt, S. Torquato, and P. Chaikin, Opt. Express **21**, 19972 (2013). [14] E. C. O˘guz, J. E. S. Socolar, P. J. Steinhardt, and S. Torquato, Phys. Rev. B **95**, 054119 (2017). [15] M. A. Klatt, P. J. Steinhardt, and S. Torquato, Phys. Rev. Lett. **127**, 037401 (2021). [16] J. Xu, R. Ma, X. Wang, and W. Y. Tam, Opt. Express **15**, 4287 (2007). [17] P. M. Piechulla, L. Muehlenbein, R. B. Wehrspohn, S. Nanz, A. Abass, C. Rockstuhl, and A. Sprafke, Ad- 先进光学材料 **6**, 1701272 (2018). [18] K. M. Schulz, D. Jalas, A. Y. Petrov, and M. Eich, Opt. Express **26**, 19247 (2018). [19] G. Shang, M. Eich, and A. Petrov, APL Photonics **5**, 060901 2020( ). [20] N. Lassaline, R. Brechb¨uhler, S. J. W. Vonk, K. Ridder- beek, M. Spieser, S. Bisig, B. Feber, F. T. Rabouw, and D. J. Norris, 自然 **582** (2020), 10.1038/s41586-020-2390-x. [21] A. D. Sinelnik, I. I. Shishkin, X. Yu, K. B. Samusev, P. A. Belov, M. F. Limonov, P. Ginzburg, and M. V. Rybin, 先进光学材料 **8**, 1 (2020). [22] E. A. Koreshin and M. V. Rybin, 物理评论B辑 **105**, 024307 (2022). [23] P. Wang, Y. Zheng, X. Chen, C. Huang, Y. V. Kartashov, L. Torner, V. V. Konotop, and F. Ye, 自然 **577**, 42 (2020). [24] L. Maiwald, T. Sommer, M. S. Sidorenko, R. R. Yafyasov, M. E. Mustafa, M. Schulz, M. V. Rybin, M. Eich, and A. Y. Petrov, 先进光学材料 **10**, 2100785 (2022). [25] P. W. Anderson, 物理评论 **109**, 1492 (1958). [26] C. L´opez, 先进光学材料 **6**, 1800439 (2018). [27] N. F. Berk, Phys. Rev. A **44**, 5069 (1991). [28] N. D. Lai, W. P. Liang, J. H. Lin, C. C. Hsu, and C. H. Lin, Opt. Express **13**, 9605 (2005). [29] M. C. Rechtsman, H.-C. Jeong, P. M. Chaikin, S. Torquato, and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **101**, 073902 2008( ). [30] P. N. Dyachenko and Y. V. Miklyaev, in *Photonic Crystal Materials and Devices III (i.e. V)* 6182, , Vol. edited by R. M. D. L. Rue, P. Viktorovitch, C. Lopez, and M. Midrio, International Society for Optics and Photon- ics (SPIE, 2006) p. 61822I. [31] R. C. Gauthier and A. Ivanov, Opt. Express **12**, 990 (2004). [32] L. Maiwald, S. Lang, D. Jalas, H. Renner, A. Y. Petrov, and M. Eich, Opt. Express **26**, 11352 (2018).

[33] H. Ding, L. Lalouat, B. Gonzalez-Acevedo, R. Orobtchouk, C. Seassal 和 E. Drouard，Opt. Express **24**，A650（2016）。[34] N. Mann, A. Javadi, P. D. Garcıa, P. Lodahl 和 S. Hughes, Phys. Rev. A **92**，1（2015）。[35] A. Oskooi, P. A. Favuzzi, Y. Tanaka, H. Shigeta, Y. Kawakami 和 S. Noda，Appl. Phys. Lett. **100**（2012），10.1063/1.4711144。[36] L. L. Lima, M. A. Alencar, D. P. Caetano, D. R. Solli 和 J. M. Hickmann，J. Appl. Phys. **103**（2008），10.1063/1.2939240。[37] S. Yu, C.-W. Qui, Y. Chong, S. Torquato 和 N. Park，Nature Reviews Materials **6**（2020），10.1038/s41578-020- 00263-y。[38] S. Torquato, J. Kim 和 M. A. Klatt，Phys. Rev. X **11**，021028（2021）。[39] M. A. Klatt, J. Kim 和 S. Torquato，P hys. Rev. E **101**，032118（2020）。[40] S. Torquato 和 F. H. Stillinger，Phys. Rev. E **68**，041113（2003）。[41] S. Torquato、G. Zhang 和 F. H. Stillinger, Phys. Rev. X **5**，021020（2015）。[42] H. Dong、L. Zhang 和 B. Zou，Remote Sensing **12**（2020），10.3390/rs12030396。[43] V. Dumoulin 和 F. Visin，arXiv 预印本 arXiv:1603.07285（2016）。[44] T. Chai 和 R. R. Draxler，Geoscientific Model Development **7**，1247（2014）。[45] Y. Kim、M. M. Tentzeris 和 S. Lim，Materials **12**（2019），10.3390/ma12030402。[46] A. Krasnok、A. Slobozhanyuk、C. Simovski、S. Tretyakov、A. Poddubnyr、A. Miroshnichenko、Y. Kivshar 和 P. Belov, Scientific Reports **5**，12956（2015）。[47] K. M. Schulz、H. Vu、S. Schwaiger、A. Rottler、T. Korn、D. Sonnenberg、T. Kipp 和 S. Mendach，Phys. Rev. Lett. **117**，085503（2016）。