# 阿尔福斯拉普拉斯算子的新应用

Sergey E. Stepanov[1], **Josef Mikeš**[2], Irina I. Tsyganok[3]

[1] 俄罗斯科学院俄罗斯科学技术信息研究所数学系，俄罗斯莫斯科市乌谢维奇街20号，邮编125190，电子邮箱：s.e.stepanov@mail.ru

[2] 帕拉茨基大学，捷克共和国奥洛穆茨市 17. Listopadu 12，邮编77146，电子邮箱：josef.mikes@upol.cz

[3] 金融大学数据分析与金融技术系，俄罗斯莫斯科列宁格勒大街49-55号，邮编125468，电子邮箱：i.i.tsyganok@mail.ru

摘要。本文讨论紧黎曼流形的里奇张量无迹部分的正交分解，并研究其在紧致近似里奇孤子几何中的应用。此外，我们讨论洛伦兹流形中紧致类空超曲面的第二基本形式的正交展开，并研究其在构造真空广义相对论约束方程解这一问题中的应用。在这两种情形下，我们都使用著名的阿尔福斯拉普拉斯算子。

关键词：紧黎曼流形、里奇张量、正交分解、阿尔福斯拉普拉斯算子、紧致几乎 Ricci 孤子，

数学主题分类 53C20 · 53C21 · 53C24

## 1 引言

二阶椭圆算子 $S^*S$ 曾在多篇论文中被用于无边界的 $n$ 维（$n \geq 2$）紧黎曼流形（$M, g$）上的微分1-形式研究 [1] - [6]。$S^*S$ 的核是共形 Killing 1-形式空间。$S^*S$ 的主要应用之一，是构造变换（$M, g$）的光滑拟共形变形族。算子$S^*S$ 被称为阿尔福斯拉普拉斯算子（例如，参见 [4]；[6]）。它是橘粗拉普拉斯算子的一种特殊形式，后者定义在$1 \leq p \leq n-1$ 的微分 p-形式上。相应地，它的核是共形 Killing p-形式空间。橘粗拉普拉斯算子的几何性质见 [7]；[8] 等。

另一方面，o里奇流理论的重要组成部分之一是称为里奇孤子的自相似解（参见 [9, 第 153-176] 页以及 [10, 第 3]章）。这一理论因 G. Perelman 证明了庞加莱′猜想而广为人知（详情参见 [10, 引言]），并在微分几何和理论物理中有广泛应用。在 [11], 中定义了近似里奇孤子。这一定义形式上成立，却没有几何意义。后续研究仅考察了紧致近似里奇孤子（例如，参见 [12], [13], [14] 等）。本文探讨阿尔福斯拉普拉斯算子在近似里奇孤子几何中的应用。首先，这使我们能够为近似里奇孤子的概念提供依据。其次，先前证明的结论由这一正交分解的相应性质推导而出。第四节旨在建立广义相对论真空约束方程的一些代数微分性质，这些性质源于与之相关的阿尔福斯拉普拉斯算子。

## 2. 紧黎曼流形上无迹里奇张量的正交分解

设 $(M, g)$ 是一个带有列维-奇维塔联络 $\nabla$ 的 $n$ 维 $(n \geq 3)$ 紧黎曼流形。我们将 $S^pM := S^pT^*M$ 记为 $M$ 上对称双线性微分 $p$-形式的向量空间，或者换言之，记为 $(M, g)$ 上的协变对称 $p$-张量 $(p \geq 1)$ 的向量空间，并通过下式定义 $(M, g)$ 上两个协变对称 $p$-张量 $\varphi$ 和 $\varphi'$ 的 $L^2$ 内积

$$\langle \varphi, \varphi' \rangle := \int_M g(\varphi, \varphi')\, dvol_g$$

其中 $dvol_g$ 是 $(M, g)$ 的体积元。此外，$\delta^*: C^\infty S^1M \to C^\infty S^2M$ 是由公式 $\delta^*\theta := \frac{1}{2}L_\xi g$ 定义的一阶微分算子，其中 $\xi$ 是某个光滑向量场，其 $g$-对偶 1-形式为 $\theta$ （参见 [15, 第 117 页；514]）。同时，我们用公式 $\delta: C^\infty S^2M \to C^\infty S^1M$ 表示 $\delta^*$ 的形式伴随算子，它称为对称二阶张量的散度。在这种情况下，对于任意 $\varphi \in C^\infty S^2M$ 和 $\theta \in C^\infty S^1M$，有 $\langle \varphi, \delta^*\theta \rangle = \langle \delta\varphi, \theta \rangle$。利用上述内容，我们可以定义从 $S^1M$ 到无迹对称张量空间 $S_0^2M$ 的 $S$

由等式定义$S\theta \coloneqq \delta^{*}\theta + \frac{1}{n}\,\delta\theta\, g$。算子$S$ 称为*Cauchy-Ahlfors* 算子（例如参见 [3]）。显然，定义在$\xi$ 上的向量场$(M,\ g)$是共形 Killing 向量场当且仅当 $S$ 湮灭与 $\xi$ 对应的 1-形式 $\theta$（对应关系由黎曼度量 $g$确定），即 $\theta^{\#} = \xi$ （参见 [16, 第 46]页）。因此，$S$ 的核是有限维空间。

$S$ 的形式伴随算子定义为公式 $S^{*}\omega = \delta\omega$ ，其中 $\omega \in C^{\infty}S_0^2M$ 任意（见 [4]；[5]）。此外，容易验证公式（另见 [3]；[4] 和 [5]）

$$\triangle_A\,\theta = \frac{1}{2}\delta d\theta - Ric(\xi,\cdot) + \frac{n-1}{n}\,d\delta\theta. \tag{2.1}$$

对于阿尔福斯拉普拉斯算子 $\triangle_A \coloneqq S^{*}S$。在（2.1）中，我们用 $Ric$ 表示 $(M,g)$ 的里奇张量，用 $d$ 表示众所周知的外微分，它将微分 1- 形式向量空间 $\Lambda^1M$ 映射到微分2-形式向量空间 $\Lambda^2M$ （见[8, 第 21]页）。我们回顾一下，$\triangle_A$ 是一个形式自伴、非负、强椭圆的二阶微分算子（见 [2]； [3]； [5]）。注意，由于对任意 $\theta \in C^{\infty}S^1M$，$\langle\theta, \triangle_A\,\theta\rangle = \langle\theta, S^{*}S\theta\rangle = \langle S\theta, S\theta\rangle$，因此 $ker\triangle_A = ker\,S$ 。由此，$\triangle_A$ 的核由共形 Killing 1-形式构成。

我们在此回顾，对称无散无迹协变二阶张量称为 $TT$-张量（例如参见 [17]）。任意 $TT$-张量记作 $\varphi^{TT}$ （参见 [19]）。根据 Bourguignon-Ebin-Marsden 的一项结果（参见 [15, 第 132] 页；[19]），在任意紧黎曼流形（$M,\ g$）上，$TT$-张量构成一个无限维向量空间。这类张量在广义相对论的稳定性分析中（例如参见 [18]）以及黎曼几何中（例如参见 [15, 第 346-347] 页；[19] 和 [20] ）具有根本的重要性。

现在，我们可以陈述第一个结果了。

定理 1. 设 $(M,g)$ 是一个 $n$ 维的 $(n \geq 3)$ 紧黎曼流形。那么存在某个 1-形式 $\theta \in C^{\infty}S^1M$ 和某个 TT 张量 $\varphi^{TT} \in C^{\infty}S^2M$ ，使得 $(M,g)$ 的里奇张量 $Ric$ 的无迹部分 $Ric_0$ 可分解为

$$Ric_0 = S\theta + \varphi^{TT} \tag{2.2}$$

关于该 Cauchy-Ahlfors算子 $S$。此外，(2.2) 右侧的两个因子关于 $L^2$ 内积彼此正交，并且满足以下方程

$$\triangle_A\,\theta = -\,\frac{n-2}{n}\,ds \tag{2.3}$$

阿尔福斯拉普拉斯算子 $\triangle_A$。

证明。对于任意 $n$ 维（$n \geq 3$）紧黎曼流形（$M, g$），代数和 Im $\delta^* + C^\infty M \cdot g$ 在 $S^2M$ 中是闭的，并且我们有如下分解

$$S^2M = (\text{Im}\,\delta^* + C^\infty M \cdot g\,) \oplus \left(\delta^{-1}(0) \cap \text{trace}_g^{-1}(0)\right) \tag{2.3}$$

其中两个因子都是无限维的，并且相对于 $L^2$ 内积彼此正交（见 [15, 第 130] 页中的引理 4.57 ）。显然，(2.4) 的第二个因子 $\delta^{-1}(0)\cap \text{trace}_g^{-1}(0)$ 是 TT 张量空间。特别是，众所周知，对于（$M, g$）的里奇张量 $Ric$ ，有 $Ric \in S^2M$ 。因此，对于里奇张量，由正交分解 (2.4) 可得

$$Ric = \left(\frac{1}{2}\,L_\xi g + \lambda\, g\right) + \varphi^{TT} \tag{2.5}$$

其中某个向量场为 $\xi \in C^\infty TM$，某个 TT 张量为 $\varphi^{TT} \in C^\infty S^2M$ ，某个标量函数为 $\lambda \in C^\infty M$。显然，向量场 $\xi$ 的定义只确定到一个 Killing 向量场。这里回顾一下，任何这样的向量场 $X$ 都满足方程 $L_X g$ =0（见 [16, 第 43] 页）。

我们将 $s\colon = trace_g Ric$ 称为 $(M, g)$ 的标量曲率。然后对 (2.5) 两边应用算子 $trace_g$ ，得到

$$s = -\delta\theta + n\,\lambda \tag{2.6}$$

其中 $\theta$ 是 $g$ 的对偶 1-形式。在这种情况下，(2.4) 可改写为 (2.2) 的形式，其中 $Ric_0 = Ric\ - \frac{1}{n} s\ g$ 是里奇张量 $Ric$ 的无迹部分，而$S\theta = L_\xi g + \frac{1}{n}\delta\theta\ g$ 表示 Cauchy-Ahlfors算子对 1-形式$\theta$的作用。接下来，对 (2.2) 两边应用 $S^*$ ，得到 (2.3)，这是因为 $\delta\, Ric$ =– $\frac{1}{2} ds$，而这又是第二Bianchi恒等式的推论（见 [15, 第 43] 页）。定理得证。

以下推论成立。

推论 1. 设 $(M,g)$ 是一个 $n$ 维的 $(n\geq 3)$ 紧黎曼流形，并且 $Ric_0 = S\theta + \varphi^{TT}$ 是 $(M,g)$ 的无迹里奇张量 $Ric_0$ 的一个 $L^2$ 正交分解，其中 $\theta \in C^\infty S^1M$ 是某个 1-形式，$\varphi^{TT} \in C^\infty S^2M$ 是某个 TT 张量。若 $\int_M L_\xi s\, dv_g = 0$ 对于 $\xi = \theta^\#$ 或 $s = constant$ 满足以下某个假设，则 $\xi$ 是一个共形 Killing 向量场，且 $\varphi^{TT}$ 是无迹里奇张量 $Ric_0$。

证明。由 (2.3) 可推出积分公式

$$\langle S\theta, S\theta\rangle = -\frac{n-2}{n}\int_M L_\xi s\, dv_g \tag{2.7}$$

现在，若满足两个条件 $\int_M L_\xi s\, dv_g = 0$ 或 $s = constant$ 中的一个，则由 (2.7) 可得 $S\theta = 0$，即 $\xi = \theta^\#$ 是一个共形 Killing 向量场。于是，(2.2) 可以改写为 $Ric - \frac{s}{n} g = \varphi^{TT}$，其中 $s = constant$。在这种情况下，$\varphi^{TT}$ 是 $(M, g)$ 上的里奇张量 $Ric_0 = Ric - \frac{s}{n} g$ 的无迹部分，其中 $s = constant$。

注记。特别地，由推论 1 可知，紧黎曼流形 $(M,g)$ 的标量曲率 $s$ 为常数，当且仅当 $(M,g)$ 的里奇张量$Ric$ 具有形式 $Ric = \frac{s}{n} g + \varphi^{TT}$，其中 $\varphi^{TT} \in C^\infty S^2M$是某个 TT 张量。

我们回顾一下：若一个 $n$ 维黎曼流形 $(M,g)$ 存在完全共形 Killing 向量场 $\xi$，且其每个奇点处的散度 $div\,\xi$ 均不为零，那么 $(M,g)$ 同胚于标准球面 $\mathbb{S}^n$ 或欧几里得空间 $\mathrm{R}^n$（参见 [21] 中的引理 2.2）。另一方面，若 $(M,g)$ 是一个紧流形，则向量场 $\xi$ 在 $(M,g)$ 上是完备的。于是，利用 [21] 中的引理 2.2 和我们的推论 1，可以表述如下命题。

推论 2. 设 $(M,g)$ 是一个 $n$ 维的 $(n\geq 3)$ 紧黎曼流形，且 $Ric_0 = S\theta + \varphi^{TT}$ 是其无迹里奇张量 $Ric_0$ 的一个 $L^2$ 正交分解，其中包含某个 TT 张量 $\varphi^{TT} \in C^\infty S^2M$ 和某个 1-形式 $\theta \in C^\infty S^1M$，使得 $\xi = \theta^\#$ 在每个奇点处均满足 $\delta\theta \neq 0$。那么，根据

其中一个假设$\int_M L_V s\, dv_g = 0$ 或者，特别是， $s = constant$ 可以推导出$(M, g)$ 局部同胚于标准球面$\mathbb{S}^n$ 或欧几里得空间 $\mathrm{R}^n$。

最后我们给出一个注记。具体而言，我们注意到，可以根据正交分解 (2.2) 定义黎曼流形的两个特殊类别。第一类由条件 $S\theta = 0$ 定义。在这种情况下，任何此类黎曼流形都满足等式 $Ric = \frac{s}{n} g + \varphi^{TT}$ 对于相同的 $TT$ 张量 $\varphi^{TT}$。另一方面，第二类由条件 $\varphi^{TT} = 0$ 定义。在这种情况下，任何此类黎曼流形都满足方程 $Ric = \frac{1}{2} L_\xi g + \lambda g$。任何此类黎曼流形都称为近似里奇孤子。我们将在下一节讨论这类黎曼流形。

## 3. 紧致近似里奇孤子

若存在光滑向量场 $V$ 和一个常数（分别为一个光滑函数）$\lambda$，使得……则称一个 $n$ 维 $(n \geq 2)$ 黎曼流形 $(M, g)$ 为里奇孤子（分别为近似里奇孤子）（参见 [9, 第 37-38] 页，以及 [11], ，分别）。

$$Ric = \frac{1}{2} L_V g + \lambda g. \tag{3.1}$$

显然，向量场 $V$ 的定义在相差一个 Killing 向量场的意义下是唯一的。我们用 $(M, g, V, \lambda)$ 表示里奇孤子（分别地，近似里奇孤子），并将 (3.1) 称为其结构方程。这里注意到，当 $n \geq 3$ 且 $V$ 是一个 Killing 向量场时，近似里奇孤子 $(M, g, V, \lambda)$ 将是一个里奇孤子，因为此时我们有一个爱因斯坦流形，即满足 $Ric = \frac{s}{n} g$ ，其中 $s$ 为常数。此外，若 $\xi \equiv 0$，则称近似里奇孤子 $(M, g, V, \lambda)$ 为平凡的。

对 (3.1) 两边作用算子 $trace_g$ ，得到 $s = -\delta\theta + n\lambda$。此时，我们可以将方程 (3.1) 改写为以下形式： $Ric_0 = S\theta$ ，其中 $V = -\theta^{\#}$。因此，以下推论成立。

推论 3. 设 $(M, g, V, \lambda)$ 是一个 $n$ 维（$n \geq 3$）紧致几乎 Ricci 孤子，且 $\lambda$ 非常数。若其标量曲率 $s$ 满足以下某个假设

$\int_M L_V s\, dv_g = 0$ 或者，特别是，$s = constant$，则 $(M, g, V, \lambda)$ 与标准球面 $\mathbb{S}^n$ 等距，且 $V$ 是梯度共形 Killing 向量场。证明. 设 $(M, g, V, \lambda)$ 是一个 $n$ 维（$n \geq 3$）紧致几乎 Ricci 孤子。若满足条件 $\int_M L_V s\ dvol_g = 0$ ) 或 $s = constant$ 之一，则由推论 1 可知 $(M, g, V, \lambda)$ 是爱因斯坦流形。在这种情况下，(3.1) 可改写为形式 $\frac{1}{2} L_V g = (\lambda - \frac{s}{n})\, g$。若 $\lambda$ 是非常数函数，则 $V$ 是紧致爱因斯坦流形 $(M, g, V, \lambda)$ 上的非等距共形 Killing 向量场。在这种情况下，$(M, g, V, \lambda)$ 与标准球面 $\mathbb{S}^n$等距（见 [16, 第 57] 页）。另一方面，若维数为 $n \geq 2$ 的球面 $\mathbb{S}^n$ 存在全局定义的共形 Killing 向量场 $Z$，则 $Z$ 可全局分解为形式 $Z = X + Y$，其中 $X$ 是 Killing 向量场，$Y$ 是梯度共形 Killing 向量场（见 [24] 中的定理 3.1）。反过来，若 $(M, g, V, \lambda)$ 上的共形 Killing 向量场 $V$，则它在相差一个 Killing 向量场的意义下唯一。因此，我们可以说 $V$ 是梯度共形 Killing 向量场。反过来，维数为 $n \geq 2$ 的球面 $\mathbb{S}^n$ 存在全局定义的梯度共形 Killing 向量场（见 [24] 中的注 3.2）。推论 3 证毕。

众所周知，紧致二维 Ricci 孤子必定具有常曲率（见 [21] 中的定理 10.1）。进而，对于 $\dim M = 2$ 的情形，我们可以对紧致近似里奇孤子表述如下结论。推论 4. 设 $(M, g, V, \lambda)$ 是一个标量曲率非正的二维紧致近似里奇孤子 $s$。则

(i) 若 $s < 0$，则它是平凡孤子；(ii) 若 $V$ 是处处不为零的向量场，则它局部等距于欧几里得平面 $\mathrm{R}^2$。

证明. 设 $(M, g, V, \lambda)$ 是一个二维紧致近似里奇孤子，则$Ric = \frac{s}{2}\, g$ （见 [15, 第 44] 页）。首先，由 (3.1) 可得微分方程

$$ds = -d\delta\theta + n\, d\lambda. \tag{3.2}$$

其次，对（3.1）的两边应用算子 $\delta$，可得以下方程：

$$ds = -\overline{\triangle}\,\theta - d\delta\theta + \frac{s}{2}\,g + n\,\lambda. \tag{3.3}$$

结合（3.2）和（3.3），我们推导出二阶微分方程

$$\overline{\triangle}\,\theta = \frac{s}{2}\,g. \tag{3.4}$$

进而，由（2.5）我们推得积分公式

$$\int_M s\,g(\xi,\xi)\,dv_g = 2\,\langle \nabla\,\xi, \nabla\,\xi\rangle \tag{3.5}$$

对于 $\xi = \theta^{\#}$。在这种情况下，若标量曲率 $s \leq 0$，则 $\nabla\,\xi = 0$ 且 $\frac{s}{n}\,\|\xi\|^2 = 0$。因此，若 $\xi$ 是一个处处不为零的向量场，则由最后一个方程可得 $s = 0$。于是（$M$， $g$）具有零截面曲率，因此（$M$， $g$， $V$， $\lambda$）局部等距于欧几里得平面 $\mathrm{R}^2$（见 [7, 第 44] 页）。另一方面，若标量曲率在任意一点 $x \in M$处均满足 $s \neq 0$，则 $\xi = 0$，因此（$M$， $g$， $V$， $\lambda$）是平凡的。由此证明了推论。

## 4. 洛伦兹流形中的紧致超曲面

设 $\mathbb{L}_1^{n+1}$ 是一个维数为 $n+1 \geq 4$ 、符号为（$-\,+\cdots+$）且满足爱因斯坦场方程的洛伦兹流形（见 [26]；[27]）

$$\overline{Ric} - \frac{1}{2}\,\bar{s}\,\bar{g} + 2\Lambda\,g = \kappa\,T \tag{3.1}$$

其中，我们用 $\bar{g}$ 表示 $\mathbb{L}_1^{n+1}$ 的度量张量，用 $\overline{Ric}$ 和 $\bar{s}$ 分别表示 $\bar{g}$ 的里奇曲率和标量曲率。我们用字母 $\kappa$ 表示一个正常数，其取值（及物理量纲）取决于所采用的具体约定。此外，按照物理文献中的惯常用法，$T$ 表示源的应力-能量张量，而 $\Lambda$ 表示宇宙学常数。任何这样的 $\mathbb{L}_1^{n+1}$ 都称为时空。

此外，我们考虑 $\mathbb{L}_1^{n+1}$ 中的一个紧致类空超曲面（$M$， $g$）（例如参见 [15, 第 38-39] 页）。（$M$， $g$）的外在几何由所谓的第二基本形式 $K \in S^2M$ 描述。第二基本形式 $K$ 具有如下正交分解

$$K = \left(\frac{1}{2}\,L_\xi g + \lambda\,g\right) + \varphi^{TT} \tag{3.2}$$

对于 某个向量场 $\xi \in C^{\infty}TM$，某个 $TT$-张量 $\varphi^{TT} \in C^{\infty}S^{2}M$ 以及某个标量函数 $\lambda \in C^{\infty}M$。

我们记 $H\colon = trace_{g}K$ 为 $(M,g)$ 的平均曲率（见 [15, 第 38] 页）。然后，对 (3.2) 两边应用算子 $trace_{g}$，得到

$$H = -\delta\theta + n\,\lambda \tag{3.3}$$

其中，$\theta$ 是 $\xi$ 的 $g$-对偶 1-形式。设 $(M,g)$ 为无边界紧流形。在这种情况下，(3.2) 可改写为

$$K_{0} = S\theta + \varphi^{TT} \tag{3.4}$$

其中，$K_{0} = K - \frac{1}{n}H\,g$ 是第二基本形式 $K$ 的无迹部分，而 $S\theta = L_{\xi}g + \frac{1}{n}\delta\theta\,g$ 表示 Cauchy-Ahlfors算子。接下来，对 (3.4) 两边应用 $S^{*}$，得到

$$\triangle_{A}\,\theta = \delta K + \frac{1}{n}dH \tag{3.5}$$

关于阿尔福斯拉普拉斯算子 $\triangle_{A}$。现在，我们可以陈述我们的结果了。

定理 2. 设 $(M,g)$ 是洛伦兹流形 $\mathbb{L}_{1}^{n+1}$ 中的一个 $n$ 维紧致类空超曲面，其中 $\mathbb{L}_{1}^{n+1}$ 的维数为 $n+1 \geq 4$。则存在某个 1-形式$\theta \in C^{\infty}S^{1}M$ 和某个 TT 张量 $\varphi^{TT} \in C^{\infty}S^{2}M$，使得 $(M,g)$ 的第二基本形式 $K$ 的无迹部分 $K_{0}$ 可分解为

$$K_{0} = S\theta + \varphi^{TT} \tag{3.6}$$

对于 Cauchy-Ahlfors算子 $S$。此外，(3.6) 右侧的两个因子关于 $L^{2}$ 内积彼此正交，并且满足以下方程

$$\triangle_{A}\,\theta = \delta K + \frac{1}{n}dH \tag{3.7}$$

对于阿尔福斯拉普拉斯算子 $\triangle_{A}$。

因此，众所周知，三元组 $(M,g,K)$ 满足一组广义相对论约束方程，其形式如下（参见 [26]；[27]）

$$\begin{cases} s - g(K,K) + \left(trace_{g}K\right)^{2} = 2\,T(N,N) + 2\,\Lambda; \\ \qquad div_{g}K - d\left(trace_{g}K\right) = \kappa\,T(N,\,\cdot\,). \end{cases} \tag{3.8}$$

对于类时单位法向量场 $N$，它属于 $(M,g)$。

为避免不必要的复杂情况，我们在此着重讨论真空情形，即，我们考虑没有源项的场方程 $(T = 0)$，并取 $\Lambda = 0$。 在这种情形下，(3.1) 可改写为 $\overline{Ric} = \frac{1}{2}\,\bar{s}\,\bar{g}$， 此时，场方程也称为真空场方程。令 $T = 0$ 且 $\Lambda = 0$ 代入迹反转场方程，真空方程可写为 $Ric = 0$。那么$\mathbb{L}_1^{n+1}$ 是一个里奇平坦时空。

注记。第一个例子是描述静态黑洞的史瓦西几何。在这种几何中，里奇张量处处为零，但时空显然并不是平坦的。第二个例子是卡拉比–丘流形是里奇平坦的，但它们当然不同于闵可夫斯基空间 $\mathrm{R}_1^{n+1}$。

一个众所周知的问题是构造广义相对论真空约束方程的解（见 [27]；[28]；[29] 等）：

$$\begin{cases} s - g(K,K) + \left(trace_g K\right)^2 = 0; \\ div_g K - d\left(trace_g K\right) = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

这些就是任意空间维数$n \geq 2$下的广义相对论约束方程。此外，我们知道以下存在性定理。

定理 3（见 [27]）。设 $(M, g, K)$ 是满足真空约束方程 (3.9) 的三元组，则存在一个带有度量 $\bar{g}$ 的时空 $\mathbb{L}_1^{n+1}$ 以及一个嵌入$f\colon\ M \to \mathbb{L}_1^{n+1}$，使得以下断言成立：

1. 时空 $\mathbb{L}_1^{n+1}$ 是里奇平坦的；

2. $g$ 是由……诱导的度量 $f$，即 $g = f^*(\bar{g})$；

3. $K$ 是……的第二基本形式 $f\colon\ M \to \mathbb{L}_1^{n+1}$。

反过来，(3.9) 的第二个方程可以改写为如下形式

$$\delta K = -\,dH. \tag{3.10}$$

结合 (3.7) 和 (3.10)，我们得到

$$\triangle_A\,\theta = -\frac{n-1}{n}\,dH.$$

于是得到以下推论。

推论 5. 设 $(M, g)$ 是时空 $\mathbb{L}_1^{n+1}$ 中的 $n$ 维（$n \geq 3$）紧致类空超曲面，且 $K_0 = S\theta + \varphi^{TT}$ 是一个 $L^2$ 正交

无迹部分$K_0$ 的第二基本形式可分解为 某个一形式 $\theta \in C^\infty S^1 M$ 和 TT 张量 $\varphi^{TT} \in C^\infty S^2 M$。 如果广义相对论真空约束方程成立，那么平均曲率$H$ （$M$, $g$）为常数，当且仅当$K = \frac{1}{n} H\, g + \varphi^{TT}$。

注意，若（$M, g$）的平均曲率 $H$ 为常数，且（3.6）中的第二因子 $\varphi^{TT}$为零，则（$M, g$）是全脐的（参见 [15, 第 38]页）。另一方面，我们考虑存在类时共形向量场的洛伦兹流形。此类流形在 [30] 中称为共形静止时空。反过来，若$\mathbb{L}_1^{n+1}$ 是共形静止的爱因斯坦时空，则其每个具有常平均曲率 $H$ 的紧致类空超曲面（$M, g$）都是全脐的（另见 [30]）。因此，我们可以表述如下推论。

推论 6. 设 $\mathbb{L}_1^{n+1}$ 是维数为 $n + 1 \geq 4$ 的共形静止爱因斯坦时空，且广义相对论真空约束方程成立。若 $K = (S\theta + \frac{1}{n} Hg) + \varphi^{TT}$ 是具有常平均曲率的紧致类空超曲面（$M, g$）的第二基本形式的正交分解，则其第二因子 $\varphi^{TT}$ 为零（$M, g$）。

## 参考文献


1. Ahlfors L.，《多变量拟共形变形的条件》，《分析贡献》。《献给 L. Bers 的论文集》，Academic Press，纽约，19-25（1974）。

2. Pierzchalski A.，里奇曲率与黎曼
流形的拟共形变形，Manuscripta Math.，66，113-127（1989）。

3. Pierzchalski A.，《梯度：椭圆性与椭圆边界条件——一幅拼图》，Folia Mathematica，19(1)，65-83（2017）。

4. Pierzchalski A.，Orsted B.，黎曼流形上的阿尔福斯拉普拉斯算子，
边界，Michigan Math. J., 43, 99-122 (1996)。

5. Kozlowski W., Pierzchalski A., 加权形式拉普拉斯算子的自然边界值问题，Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., VII (5), 343-367 (2008)。 6. Branson T., Stein-Weiss 算子与椭圆性，Journal of Functional Analysis, 151, 334-383 (1997)。 7. Stepanov, S. E.; Mikesh, J. 曲率算子符号确定的紧黎曼流形上的 Hodge–de Rham 拉普拉斯算子与 Tachibana 算子。（俄文）Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., 79 (2) , 167–180 (2015); 译文见 Izv. Math., 79 (2), 375–387 (2015)。 8. Stepanov S.E., Mikeš J., 紧黎曼流形的贝蒂数与 Tachibana 数，Differential Geometry and its Applications, 31, 486-495 (2013)。 9. Chow B., Lu P., and Ni L., Hamilton 的里奇流，Grad. Stud. in Math., 77, 美国数学会, 普罗维登斯, RI (2006)。 10. Morgan J., Tian G., 里奇流与庞加莱猜想，Clay Mathematics Monographs, 美国数学会, 普罗维登斯, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA (2007)。 11. Pigola S., Rigoli M., Rimoldi M., Setti A. G., 里奇近似孤子，Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 10 (4), 757–799 (2011)。 12. Barros A., Batista R., Ribeiro jr. E., 标量曲率为常数的紧致近似里奇孤子是梯度型的，Monatshefte für Mathematik, 174, 29–39 (2014)。 13. Barros A., Gomes J.N., Rebeiro E., 关于近似里奇孤子的刚性的一则注记，Archiv der Mathematik, 100, 481–490 (2013)。 14. Deshmukh S., 与球面等距的近似里奇孤子。Int. J. of Geom. Methods in Modern Physics, 16 (5), 1950073 (2019)。 15. Besse A.L., 爱因斯坦流形，Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg ( 2008)。 16. Yano K., 黎曼几何中的积分公式，Marcel Dekker, 纽约

17. Gicquaud R., Ngo Q.A.，关于具有任意平均曲率和小 TT 张量的爱因斯坦约束方程解的新观点，Class. Quant. Grav., 31(19), 195014（2014年）。18. Garattini R.，自持式可穿越虫洞？，Class. Quant. Grav., 22 (6), 2673–2682（2005年）。19. Bourguignon, J. P. and Ebin, David G. and Marsden, Jerrold E.，关于具有满射而非单射符号的伪微分算子的核，科学院周刊。A、B 辑，数学科学与物理科学，282（1976年），867-870。20. Boucetta M.，$S^n$ 上的 Lichnerowicz 拉普拉斯算子的谱与对称特征张量，Osaka J. Math. 46（2009年）235–254。21. Obata M.，黎曼流形的共形变换，J. Differential Geometry, 4 (3), 311-333（1970年）。22. Sharma R.，关于近似里奇孤子和测地向量场的一些结果，Beitrage zur Algebra und Geometrie, 59, 289-294（2018年）。23. Ghosh, A.，势向量场满足某些条件的近似里奇孤子，Publ. Math. Debrecen, 87 (1-2), 103-110（2015年）。24. Yano K., Sawaki S.，具有共形变换群的黎曼流形，J. Differential Geometry, 2（1968年），161-184。25. Hamilton R.S.，曲面上的里奇流，数学与广义相对论，Contemp. Math., 71, 美国数学会，普罗维登斯，237–262（1988年）。26. Shoke-Bryua Y.，广义相对论中的数学问题，Uspekhi Mat. Nauk, 40 (6), 3–39（1985年）。27. Carlotto A.，广义相对论约束方程，Living Reviews in Relativity, 24 (2), 1-170（2021年）。28. Chru P. T., Delay E.，关于加权函数空间中广义相对论约束算子的映射性质及其应用，法国数学会回忆录，94（2003年）。

29. Helmut F.，共形真空场方程的柯西问题，在
广义相对论，Commun. Math. Phys.，91，445-472（1983年）。
30. Alías L.J., Romero A., Sanchez M.，具有常平均曲率的类空超曲面与Calabi-Bernstein 型问题，Tôhoku Math J.，49，337-345，（1997年）。