arXiv:2302.02818v1 [math.AG] 6 Feb 2023

离散赋值环上光滑射影概形的表示定理

郭宁和伊万·帕宁

摘要。本文证明了任意不可约概形 X 在离散赋值环 R上光滑射影时的几何表示定理。作为推论，对于任意约化 R-群概形 G，我们证明了半局部仿射概形 X 上的任意一般平凡主 G_U-丛，都可由仿射直线 $\mathbb{A}^1_U$ 上的主 G-丛沿着 U粘合而得。

1. 引言

设 R 为离散赋值环，设 X 为在 R上光滑的不可约概形。当 R 包含一个域且 X 在 R 上射影时， [Pan20] 和 [PSV15], 分别证明了两个几何表示定理。本文的目标是去除 R上的等特征条件。以下定理 1.2 和 1.4 是本文的主要结果：前者是几何表示定理，后者是其在约化R-群概形下下降主丛中的应用，尤其涉及关于主丛的 Grothendieck–Serre 猜想，参见 [Pan19b], [Pan21]。

定义 1.1. 设 S 是一个正则概形，令 Sm_S 表示 S-光滑概形范畴。Sm_S 中的一个 *Nisnevich 方块* 是如下形式的交换图

$$\begin{array}{ccc} W & \longleftarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longleftarrow & Y \end{array}$$

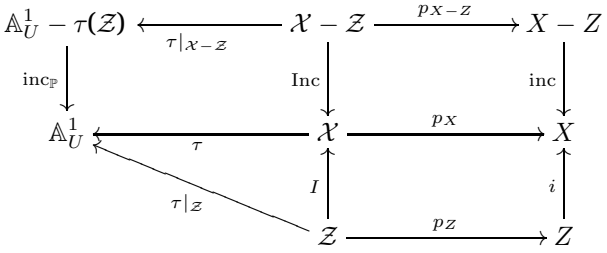
该图是笛卡尔的，且两条竖直箭头是开嵌入，两条水平箭头是 étale，并且存在一个同构 $(X-W)_{\mathrm{red}} \cong (Y-V)_{\mathrm{red}}$。

设 S 是一个仿射概形，且 $O_S = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$。本文中，仿射 S-概形是一个态射 $T \to S$，其中 T 是一个仿射概形，且 O_T 是有限生成的O_S-代数。

定理 1.2. 设 R 是一个离散赋值环，且 X 是一个 R-光滑 R-射影不可约 R-概形，其相对维数纯为 r。设 $\mathbf{x} \subset X$ 是闭点的有限子集。令 $U = \text{谱}(\mathcal{O}_{X,\mathbf{x}})$。设 $Z \subset X$ 是一个闭子集，且不包含 X 的闭纤维的任何泛点。那么存在一个仿射 U-光滑概形$\mathcal{X}$，其相对维数为一，并带有一个闭子集 $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$，使其构成如下

日期：2023年2月7日。2010 数学学科分类号。 主要分类号 14F22；次要分类号 14F20、14G22、16K50。关键词和短语。 主丛、挠子、群概形、几何表示。

交换图

(1.3)


并满足下列条件

(i) τ 是一个 *étale*态射，使得 $\tau|_{\mathcal{Z}}\colon\ \mathcal{Z} \to \mathbb{A}^1_U$ 是一个闭嵌入；*(ii)* 左侧的方块是 $\mathbf{Sm}_U$ 中的 *Nisnevich* 方块；*(iii)* 右侧的两个方块均可交换；*(iv)* 定义为 $\mathrm{pr}_U \circ \tau$ 的结构态射 $p_U\colon\ \mathcal{X} \to U$ 允许一个 U截面$\Delta\colon\ U \to \mathcal{X}$；*(v)* 我们有 $p_X \circ \Delta = \mathrm{can}$，其中 $\mathrm{can}\colon U \hookrightarrow X$ 是开浸入；*(vi)* $i_0\colon = \tau \circ \Delta$ 是投影 $\mathrm{pr}_U\colon \mathbb{A}^1_U \to U$ 的零截面 $i_0\colon\ U \to \mathbb{A}^1_U$；*(vii)* $\mathcal{Z}$ 是 U-有限的；*(viii)* $\tau(\mathcal{Z}) \cap \{1\} \times U = \emptyset$。

以下主丛下降是定理 1.2 的直接推论。利用这一结果，我们证明了离散赋值环上的光滑射影概形的 Grothendieck–Serre猜想，参见 [GPan3] 和 [?PanSt，第 1.1 和 1.2] 条定理。

定理1.4。设 R, X, $\mathbf{x} \subset X$, r, $U = \text{谱}(\mathcal{O}_{X,\,\mathbf{x}})$ 如定理 *1.2* 中所述。设$\mathbf{G}$ 是一个约化的 R-群概形，且 $\mathcal{G}/X$ 是一个在 X的泛点 η 处平凡的主 $\mathbf{G}$-丛。则存在一个在 $\mathbb{A}^1_U$ 上的主 $\mathbf{G}$-丛 $\mathcal{G}_t$ 以及一个在 U 上有限的闭子集 $\mathcal{Z}' \subset \mathbb{A}^1_U$，使得

(i) $\mathcal{G}_t$ 这个$\mathbf{G}$-丛在 $\mathbb{A}^1_U$中的开子概形$\mathbb{A}^1_{\mathcal{Z}'} - \mathcal{Z}'$ 上平凡；(ii) $\mathcal{G}_t$ 在 $\{0\} \times U$ 上的限制经由can^*与 $\mathcal{G}$ 在 U上的限制一致；并且(iii) $\mathcal{Z}' \cap (\{1\} \times U) = \emptyset$。

定理*1.4*的证明。主 G-丛 $\mathcal{G}$ 在 X的泛点 η处平凡。[NG] 的主定理推出主 G-丛 $\mathcal{G}|_U$平凡。由此可知，存在一个闭子集 $Z \subset X$，它避开 X 闭纤维的所有泛点，且主 G-丛 $\mathcal{G}|_{X-Z}$ 平凡。现在考虑定理 1.2 中的图(1.3)，并取概形 $\mathbb{A}^1_U$的闭子概形 $\mathcal{Z}' = \tau(\mathcal{Z})$。

显然，$\mathcal{Z}'$ 是 U 上的有限态射，并具有性质 (iii)。为了构造所需的 $\mathbb{A}^1_U$上的主 G-丛 $\mathcal{G}_t$，注意到丛 $p_X^*(\mathcal{E})|_{\mathcal{X}-\mathcal{Z}}$是平凡的。由于左侧的方块是 Sm_U 中的一个 Nisnevich 方块，因此存在一个$\mathbb{A}^1_U$ 上的主 G-丛 $\mathcal{G}_t$，使得

1) $\tau^*(\mathcal{G}_t) = p_X^*(\mathcal{E})$;
2) $\mathcal{G}_t|_{\mathbb{A}^1_U - \mathcal{Z}'}$.

现在，图(1.3)的性质 (v) 和 (vi) 表明，主 G-丛 $\mathcal{G}_t$ 具有性质 (ii)，也就是说，$\mathcal{G}_t$ 在 $\{0\} \times U$ 上的限制与 $\mathcal{G}$ 在 U 上的限制一致。

定理的证明已完成。 □

致谢。 作者感谢圣彼得堡数学研究所国际数学中心提供的优良环境。本研究由俄罗斯联邦科学与高等教育部资助，协议编号：075-15-2022-289。

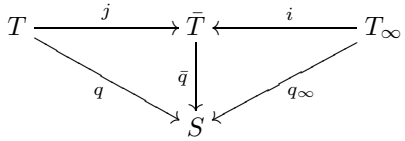
2. 弱初等纤维化：定义与结果

本节回顾[GPan2，定义 1.1]中引入的弱初等纤维化概念，并将 [GPan2，定理 1.3 和 1.4] 的主要结果表述为下文的定理 2.4 和 2.5。

弱初等纤维化的概念是对 Artin 在 [A，Exp. XI，Déf. 3.1] 中引入的概念，以及 [PSV15，定义 2.1]中引入的其变体所作的修改。 [GPan2] 中的结果是对 M. Artin 关于存在良好邻域的一个结果的修改 [A] 。

本文中，术语**概形** 指分离、拟紧、诺特且 Krull 维数有限的概形（如 [MV] 中所定义）。

定义 2.1. 概形的一个态射 $q\colon T \to S$ 若可纳入一个交换图，则称为弱初等纤维化

(2.2)


该交换图满足以下条件：

(i) j 是一个在 $\bar{q}$的每个纤维上稠密的开嵌入； $j\colon T \to T - T_\infty$ 是一个同构；(ii) $\bar{q}$ 是光滑射影的，且其所有纤维均为一维等维纤维；(iii) q_∞ 是有限 étale 满射态射；(iv) $q = \mathrm{pr}_S \circ \pi$，其中 $\pi\colon T \to \mathbb{A}^1_S$ 是有限平坦满射态射。

图 (2.2) 称为弱初等纤维化 $q\colon T \to S$的图。

设 $Z \subset T$ 是一个闭子概形。概形态射 $q\colon T \to S$ 若是弱初等纤维化，且态射$q|_Z\colon Z \to S$ 是有限的，则称为弱初等 Z-纤维化；特别地， $Z \cap T_\infty = \emptyset$。在此情形下，图 (2.2) 称为弱初等 Z-纤维化 $q\colon T \to S$的图。

记号 2.3. 设 B 为局部正则概形， $b \in B$ 为其闭点。对于一个 B-概形 Y，记作 $Y_b = Y \times_B b$。对于一个 B-态射 $\varphi\colon Y' \to Y''$（其中 B为概形），将 φ_b 记作 b-态射 $\varphi \times_B b\colon Y' \times_B b \to Y'' \times_B b$。

定理 2.4. *(*[GPan2, 定理 1.3]*)* 设 B 为局部正则概形， $b \in B$ 为其闭点。设 X/B 为相对维数为 r的不可约 B-光滑、 B-射影概形。设$\mathbf{x} \subset X$ 为闭点的有限子集。则存在 $\mathbb{A}^{r-1}_B$ 中的一个开子概形 S 、一个包含$\mathbf{x}$的开子概形 $X_S \subset X$ ，以及一个弱初等纤维化 $q_S\colon X_S \to S$。

设 $Z \subset X$ 是一个闭子概形，使得 维数 $Z_b < r$。那么存在 $\mathbb{A}^{r-1}_B$ 中的一个开子概形 S 、一个包含 $\mathbf{x}$ 的开子概形 $X_S \subset X$ ，以及一个弱初等 Z_S-纤维化 $q_S\colon X_S \to S$，其中 $Z_S := Z \cap X_S$。

定理 2.5. *(*[GPan2，定理 1。4]*)* 在定理 *2.4* 的假设下，存在一个开$S \subset \mathbb{A}^r_B$、一个包含集合 **x** 且位于 X 中的开邻域 X_S，以及一个弱初等纤维化 $\dot{q}_S\colon\ X_S \to S$，还有一个由 S-概形构成的交换图

$$\begin{array}{ccccc} \dot{X}_S & \xrightarrow{j_S} & \hat{X}_S & \xleftarrow{i} & \mathbb{W}_S \\ & \searrow^{\dot{q}_S} & \downarrow{\scriptstyle \hat{q}_S} & \swarrow_{\mathrm{pr}_S} & \\ & & S & & \end{array} \tag{2.6}$$

这是弱初等纤维化 $\dot{q}_S\colon\ X_S \to S$的图表。

此外，若 $Z \subset X$ 如定理 *2.4* 所述，则可以选择开集 $S \subset \mathbb{A}^r_B$、集合**x** 在 X 中的开邻域 X_S、弱初等纤维化 $\dot{q}_S\colon\ X_S \to S$ 以及 S-概形的交换图(2.6)，使得 (2.6) 是弱初等Z_S-纤维化 $\dot{q}_S\colon\ X_S \to S$的图表。

3. 克服有限域障碍

Panin 将闭子概形重新嵌入仿射直线。对于域 k和光滑连通的 k-曲线 C，每个闭点 $x \in C$ 都可以重新嵌入到$\mathbb{A}^1_k$ 中，也就是说，存在一个闭点$y \in \mathbb{A}^1_k$，其剩余域 k_y 同构于 k_x。事实上，x 有一个开邻域 U，它对 $\mathbb{A}^1_k$是 étale 的，并且k_x/k 分解为一个可分代数扩张 k_x/k' 和一个单扩张 k'/k，于是由本原元定理可知 k_x/k 是单扩张。然而，当 k 是有限域，例如 $k = \mathbb{F}_2$时，尽管$\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_2}$ 有无穷多个闭点，但其固定次数的闭点只有有限个。例如，不存在从三个 Spec $\mathbb{F}_2$ 的副本的不交并到$\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_2}$的闭嵌入，因为后者只有两个次数为 1 的闭点。我们将这一现象归纳为以下“有限域障碍”。这一现象由 Panin 发现。他早在 [Pan15], 中就提出了一种克服有限域障碍的方法；另见 [Pan20，第 5–6]节。更晚些时候，[Čes22b，第3]节中给出了一些更高维的推广。

对于有限域 k 和有限 k-概形 Z_k，如果对每个正整数 d，下列不等式都成立，我们就称将 Z 嵌入 $\mathbb{A}^1_k$ 不存在有限域障碍

$$\#\{z \in Z_k \mid [k(z)\colon k] = d\} \le \#\{x \in \mathbb{A}^1_k \mid [k(x)\colon k] = d\}.$$

引理 3.1. 对于半局部仿射概形 U、不可约半局部仿射 U-概形 S（其每个闭 U-纤维都是半局部的），以及一个 U-截面 $\delta\colon\ U \to S$，使得$T\colon = \delta(U) \subset S$是闭的，存在一个有限 *étale* 态射 $\rho\colon\ S' \to S$，它来自一个U-概形 S'，以及 δ 的一个提升 $\delta'\colon\ T \to S'$，使得

(i) 对于每个闭点 $u \in U$，点 $\delta'(\delta^{-1}(u)) \in S'_u$ 是 S'_u中唯一的 $k(u)$-有理点；(ii) 对于每个闭点 $u \in U$，将 S'_u 嵌入 $\mathbb{A}^1_u$ 不存在有限域障碍，也就是说

$\#\{z \in S'_u \mid [k(z)\colon\ k(u)] = d\} \le \#\{x \in \mathbb{A}^1_u \mid [k(z)\colon\ k(u)] = d\}$ 对于每个整数 $d \ge 1$.

当 S 为正则时，我们可以构造 S'，使其不可约。

证明。令 t（分别为 t′）表示 T 中剩余域为无限（分别为有限）的闭点的有限集合，并令 s（分别为 s′）表示闭点 $S\backslash T$ 的有限集合

其剩余域为无限（分别为有限）。对于任意整数 $q > 1$，对每个 $s_i \in \mathrm{s}$ 和每个 $s_i' \in \mathrm{s}'$，我们选取首一多项式

- $f_{s_i} \in k(s_i)[x]$ 作为 q 个互不相同的一次多项式的乘积；
- $f_{s_i'} \in k(s_i')[x]$ 次数为 q 的不可约多项式。

此外，我们选取一个次数为 q 的首一多项式 $f_{\mathfrak{t}} \in xR[x]$，使得

- $f_{\mathfrak{t}}$ 在每个 $k(t_i)[x]$ 中的约化都是次数为 q 的互异线性多项式之积；
- $f_{\mathfrak{t}}$ 在每个 $k(t_i')[x]$ 中的约化都是 x 与另一个次数为 $q-1$ 的不同不可约多项式之积。

由中山引理，存在一个次数为 q 的多项式 $F(x) \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)[x]$，使得 F 的约化在截面 T 上变为 $f_{\mathfrak{t}}$，在 s_i 上变为 f_{s_i}，并在 s_i' 上变为 $f_{s_i'}$。上述对次数为 q 的点数的估计表明，当 q 足够大时，所示不等式成立。此外，多项式 $F(x)$ 确定了一个概形 $S' := \mathrm{Spec}(\Gamma(S, \mathcal{O}_S)[x]/F(x))$，它在 S 上有限 étale。令 $\rho\colon S' \to S$ 为由此得到的态射，因此由 $F(x)$ 的构造，原像 $\rho^{-1}(T)$ 为 $= T \sqcup T'$。只需将 δ' 定义为复合映射 $T \hookrightarrow \rho^{-1}(T) \hookrightarrow S'$，它是 δ 的一个提升。若 S 正则，则 S' 也正则。因此，我们可以用包含 $\delta'(T)$ 的 S' 的一个不可约分支替换 S'。□

引理 3.2。设 U 为半局部仿射概形，$p_U\colon \mathcal{X} \to U$ 为概形间带有截面 $\Delta\colon U \to \mathcal{X}$ 的仿射态射，且 $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ 是一个 U-有限闭子概形，则存在有限 U-态射 $\varphi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$，以及一个 U- 有限闭子概形 $\mathcal{Z} := \varphi^{-1}(\mathcal{Z} \cup \Delta(U))$ 使得

(i) Δ 提升为截面 $\Delta'\colon U \to \mathcal{X}$；(ii) φ 在 $\mathcal{Z}$ 附近是 *étale* 的；(iii) 对每个闭点 $u \in U$ 和每个整数 $n \geq 1$，都有

$$\#\{z \in \tilde{\mathcal{Z}}_{k(u)} \mid [k(z)\colon k(u)] = n\} \leq \#\{z \in \mathbb{A}^1_{k(u)} \mid [k(z)\colon k(u)] = n\}.$$

证明。取 $\mathcal{Z} \cup \Delta(U)$ 在闭 U-纤维中的所有闭点所成的集合 z，并令 S 为 $\mathcal{X}$ 在 z 处的半局部化。由于 U 是半局部的，集合 z 是有限的。由于 $\mathcal{X} \to U$ 是拟射影的，在构造 S 时，根据 [GLL13，定理 5.1]，，存在一个超曲面 $H \subset \mathbb{P}^N_U$，对应某个 $N \geq 0$，使得 $\mathcal{X} \cap H$ 包含 $\mathcal{Z} \cup \Delta(U)$，但不包含 $\mathcal{X} - (\mathcal{Z} \cup \Delta(U))$ 的闭点。因此，经过半局部化后，可以将 $\mathcal{Z} \cup \Delta(U)$ 视为 S 的闭子概形，并将 $T := \Delta(U)$ 记作 S 中的截面。不失一般性，假设 S 不可约，因此引理 3.1 适用，˜从而得到一个有限 étale 态射 $S \to S$。根据极限论证和 Zariski 主定理，S 可替换为满足所需条件的 U-概形 $\mathcal{X}$。□

4. 将相对曲线配置到仿射直线上

上述截面避开了将闭子概形 $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ 嵌入到 $\mathbb{A}^1_U$ 中的有限障碍，因此可以将此嵌入延拓为态射$\mathcal{X} \to \mathbb{A}^1_U$。

引理 4.1。对于半局部整环 $\mathfrak{R}$，设 $\mathfrak{R}$-光滑仿射概形 C 具有纯相对维数一，并带有一个 R-有限闭子概形 $Z \subset C$。如果对于每个极大理想 $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{R}$，将 $Z_{\mathfrak{m}}$ 嵌入到 $\mathbb{A}^1_{\kappa_{\mathfrak{m}}}$不存在有限域障碍，那么存在一个拟有限平坦满射态射 $\tau\colon C \to \mathbb{A}^1_{\mathfrak{R}}$，使得$\tau|_Z\colon Z \hookrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathfrak{R}}$ 是一个闭嵌入，且 τ 在 Z的某个开邻域上是 *étale* 的。

证明。取一个极大理想 $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{R}$。在光滑的 $\kappa_{\mathfrak{m}}$-曲线 $C_{\kappa_{\mathfrak{m}}}$ 上存在闭点 $z_i \in Z_{\kappa_{\mathfrak{m}}}$。$z_i$ 处的光滑性给出一个分解 $C_{\kappa_{\mathfrak{m}}} \to \mathbb{A}^1_{\kappa_{\mathfrak{m}}} \to \mathrm{Spec}\,\kappa_{\mathfrak{m}}$，使得 $\kappa(z_i)$ 是 $\kappa_{\mathfrak{m}}$的一个单代数扩张的有限可分扩张，因此由本原元定理可知，$\kappa(z_i)/\kappa_{\mathfrak{m}}$ 是单的，从而存在一点 $\hat{}z_i \in \mathbb{A}^1_{\kappa_{\mathfrak{m}}}$，使得 $\kappa(z_i) \simeq \kappa(\hat{}z_i)$。此外，由于不存在有限域障碍，我们可以假设这些 $\hat{}z_i$ 彼此不同。现在，我们将 $Z_{\kappa_{\mathfrak{m}}}$ 写成

$$Z_{\kappa_{\mathfrak{m}}} = \coprod_{i=1}^{l} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C_{\kappa_{\mathfrak{m}}},z_i}/\mathcal{I}_i^{r_i}) \quad \text{where } \mathcal{I}_i \text{ is the ideal sheaf of } z_i^{\mathrm{red}} \text{ and } r_i > 0.$$

$\hat{}$ 由于 $C_{\kappa_{\mathfrak{m}}}$ 是 $\kappa_{\mathfrak{m}}$-光滑的，完备化$\mathcal{O}_{C_{\kappa_{\mathfrak{m}}},z_i}$ 是正则完备的，因此由[BouAC, IX, §3, No3, Thm. 1]，，关系式 $\kappa(\hat{}z_i) \simeq \kappa(z_i)$给出同构

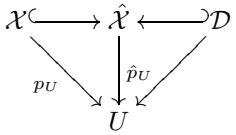
$$\hat{\mathcal{O}}_{C_{\kappa_{\mathfrak{m}}},z_i} \simeq \hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}^1_{\kappa_{\mathfrak{m}}},\hat{z}_i} \quad \text{and in particular, isomorphisms } \mathcal{O}_{C_{\kappa_{\mathfrak{m}}},z_i}/\mathcal{I}_i^{r_i} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\kappa_{\mathfrak{m}}},y_i}/\mathfrak{m}_{\hat{z}_i}^{r_i}.$$

利用这些同构和中山引理，我们得到一个闭嵌入$i\colon Z_{\kappa_{\mathfrak{m}}} \hookrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathfrak{R}}$。取一个截面 $s \in \Gamma(C, \mathcal{O}_C)$，使其在每个不可约纤维的一个闭点处消失，并且与经由 i拉回的坐标重合，则s 确定一个态射 $\tau\colon C \to \mathbb{A}^1_{\mathfrak{R}}$，使得 $\tau|_Z$ 是闭嵌入。此外，由纤维判平坦准则 [EGA IV$_2$, 6.15]和 [EGA IV$_3$, 11.3.11]，τ 是平坦的。因此，由于剩余域扩张是平凡的，τ 沿着 Z 是 étale。最后，τ 是准有限的，因为 i 是准有限的，并且 τ 的准有限轨迹 [SP, 01TI] 是开集。□

命题 4.2. 设半局部整环 $\mathfrak{R}$ 及其谱 U，有一个相对维数为一的仿射 U-光滑概形

$$p_U\colon \mathcal{X} \to U$$

其上有一个由截面 $f \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$定义的 U-有限闭子概形，若 p_U适合弱初等纤维化的图表



带有 p_U 的截面 Δ，使得对每个极大理想 $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{R}$ 和每个整数$d \geq 1$，都有

$$\#\{z \in \mathcal{Z}_{\kappa_{\mathfrak{m}}} \mid [\kappa(z) : \kappa_{\mathfrak{m}}] = d\} \leq \#\{y \in \mathbb{A}^1_{\kappa_{\mathfrak{m}}} \mid [\kappa(y) : \kappa_{\mathfrak{m}}] = d\}$$

且点 $\Delta(\{\mathfrak{m}\})$ 是 $\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}$的唯一 $\kappa_{\mathfrak{m}}$-点，那么存在一个有限满射U-态射

$$\tau\colon \mathcal{X} \to \mathbb{A}^1_U$$

其限制为闭嵌入 $\tau|_{\mathcal{Z}}\colon \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathcal{X}$，并具有以下性质

(i) τ沿着 $\mathcal{Z} \cup \Delta(U)$是 ***étale***；(ii) $\tau^{-1}(\tau(\mathcal{Z}))$ $= \mathcal{Z} \sqcup \mathcal{Z}'$且 $\mathcal{Z}' \cap \Delta(U) = \emptyset$；(iii) $\tau^{-1}(\{0\} \times U)$ $= \Delta(U) \sqcup \mathcal{D}$且 $\mathcal{D} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$；(iv) $\tau^{-1}(\{1\} \times U)$ $\cap\, \mathcal{Z} = \emptyset$；(v) 存在首一多项式 $h \in R[t]$，使得

$$(h) = \ker(\mathfrak{R}[t] \to \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})/(f)).$$

证明。引理 4.1 中的构造表明，存在一个闭嵌入$\rho\colon \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathbb{A}^1_U$。根据假设，$\mathcal{D} := \hat{}\mathcal{X} \backslash \mathcal{X}$是一个例外 Cartier 除子。初等纤维化的构造意味着 $\mathcal{L} := \mathcal{O}_{\hat{}\mathcal{X}}(\mathcal{D})$是

$\mathcal{O}(1)$ 在一个射影空间上的拉回，因此 $\mathcal{L}$ 是丰 ample。为求得 τ，我们首先通过适当的截面 $t_1, t_\infty \in \Gamma(\hat{\mathcal{X}}, \mathcal{L}^{\otimes n})$，对一个足够大的整数 $n > 0$构造有限满射的 U-态射$\hat{\tau}\colon \hat{\mathcal{X}} \to \mathbb{P}^1_U$。设 t_∞ 是 $\mathcal{L}$ 的一个整体截面，其零点轨迹恰为$\mathcal{D}$。为求得 t_1，对于闭纤维$\hat{\mathcal{X}}_{\mathbf{u}}$，我们构造$t_{1,\mathbf{u}} \in H^0(\hat{\mathcal{X}}_{\mathbf{u}}, \mathcal{L}^{\otimes n})$，其中整数 $n > 0$ 满足以下条件

(a) $t_{1,\mathbf{u}}|_{\mathcal{D}_{\mathbf{u}}}$ has no zeros and $g := t_{1,\mathbf{u}}/t^n_{\infty,\mathbf{u}}$ is a regular function in $\mathcal{O}(\mathcal{X}_{\mathbf{u}})$ for an integer $n > 0$;
(b) $t_{1,\mathbf{u}}|_{\mathcal{Z}_{\mathbf{u}}} = \rho \cdot t^n_{\infty,\mathbf{u}}|_{\mathcal{Z}_{\mathbf{u}}}$.

设 $J \subset \mathcal{O}_{\hat{\mathcal{X}}_{\mathbf{u}}}$ 是定义 $\mathcal{Z}_{\mathbf{u}} \sqcup \mathcal{D}_{\mathbf{u}}$ 的理想层。我们考虑以下短正合列

$$0 \to J \to \mathcal{O}_{\hat{\mathcal{X}}_{\mathbf{u}}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{Z}_{\mathbf{u}} \sqcup \mathcal{D}_{\mathbf{u}}} \to 0.$$

由塞尔定理 [ÉGA III$_1$, 2.6.1], , 存在一个整数 $n > 0$, 使得 $H^1(\hat{\mathcal{X}}_{\mathbf{u}}, \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes J) = 0$，因此

$$H^0(\hat{\mathcal{X}}_{\mathbf{u}}, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\hat{\mathcal{X}}_{\mathbf{u}}}) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{Z}_{\mathbf{u}}, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\mathcal{Z}_{\mathbf{u}}}) \oplus H^0(\mathcal{D}_{\mathbf{u}}, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\mathcal{D}_{\mathbf{u}}}) \quad \text{is surjective.}$$

注意， $H^0(\mathcal{D}_{\mathbf{u}}, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\mathcal{D}_{\mathbf{u}}})$ 是一个半局部环，其中包含一个在 $\mathcal{D}_{\mathbf{u}}$ 上没有零点的元素 $\alpha_{\mathbf{u}}$。通过这个满射映射，我们可以在 $\mathcal{X}_{\mathbf{u}}$ 上提升关系 $t_{1,\mathbf{u}}|_{\mathcal{Z}_{\mathbf{u}}} = \rho \cdot t^n_{\infty,\mathbf{u}}|_{\mathcal{Z}_{\mathbf{u}}}$。因此，元素 $(\rho \cdot t^n_{\infty,\mathbf{u}}|_{\hat{\mathcal{X}}_{\mathbf{u}}}, \alpha_{\mathbf{u}})$ 提升为所需的 $t_{1,\mathbf{u}}$, 使得$g := t_{1,\mathbf{u}}/t^n_{\infty,\mathbf{u}}$ 是 $\mathcal{O}(\mathcal{X}_{\mathbf{u}})$ 中的正则函数，其限制 $t_{1,\mathbf{u}}|_{\mathcal{D}_{\mathbf{u}}}$ 没有零点，并且条件 (2) 由构造满足。

尚需将 $t_{1,\mathbf{u}}$ 延拓为截面 $t_1 \in \Gamma(\hat{\mathcal{X}}, \mathcal{L}^{\otimes n})$。根据塞尔判别准则，并在必要时扩大 n , 对于定义 $\hat{\mathcal{X}}_{\mathbf{u}} \subset \mathcal{X}$ 的理想层 $I_{\mathbf{u}}$, 群 $H^1(\hat{\mathcal{X}}, I_{\mathbf{u}}(n)) = 0$, 因此映射

$$H^0(\hat{\mathcal{X}}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \twoheadrightarrow H^0(\hat{\mathcal{X}}_{\mathbf{u}}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \quad \text{is surjective.}$$

只需将 t_1 取为 $t_{1,\mathbf{u}}$ 在此满射下的原像。由于 $\mathcal{D}$ 在 U上有限，因此它是半局部的。因此， t_1 在 $\mathcal{D}$ 上没有零点，因为 $t_{1,\mathbf{u}}$ 在 $\mathcal{D}_{\mathbf{u}}$上没有零点。因此，态射

$$\hat{\tau}\colon \hat{\mathcal{X}} \xrightarrow{[t^n_\infty \,:\, t_1]} \mathbb{P}^1_U \quad \text{is well-defined.}$$

最后，根据中山引理，限制 $\hat{\tau}|_{\mathcal{Z}}$ 是闭嵌入 $\mathcal{Z} \hookrightarrow \mathbb{A}^1_U$。按构造，限制 $\tau := \hat{\tau}|_{\mathcal{X}}\colon \mathcal{X} \to \mathbb{A}^1_U$ 是有限且满射的。□

定理 *1.2* 的证明。我们从离散赋值环 R上的一个不可约 R-光滑射影概形 X开始，它具有纯相对维数 r ; 另取 X中闭点的一个有限子集 x，以及一个避开 X的闭纤维所有泛点的闭子集 $Z \subset X$。于是根据定理 2.5，存在一个开集 $S \subset \mathbb{A}^r_R$、 X中包含 x 的一个开邻域 X_S、一个弱初等纤维化 $\dot{q}_S\colon X_S \to S$ 以及一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \dot{X}_S & \xrightarrow{j_S} & \hat{X}_S & \xleftarrow{i} & \mathbb{W}_S \\ & \searrow^{\dot{q}_S} & \downarrow{\scriptstyle \hat{q}_S} & \swarrow_{\mathrm{pr}_S} & \\ & & S & & \end{array} \tag{4.3}$$

的 S-概形，它是弱初等 Z_S-纤维化 $\dot{q}_S$的图表。对于 $U = \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{X,\mathbf{x}}$, 我们取 $\mathcal{Z} := U \times_S Z_S$ 和 $\mathcal{X} := U \times_S X_S$。因此，我们得到一个光滑的$U$-态射 $p_U\colon \mathcal{X} \to U$，其纯相对维数为一。典范嵌入$\mathsf{can}: U \hookrightarrow X_S$诱导出一个截面 $\Delta\colon U \to \mathcal{X}$。因此，对于态射 $p_X\colon \mathcal{X} \to X$,

我们有 $p_X \circ \Delta = \mathrm{can}$，其中 $\mathrm{can}: U \hookrightarrow X$ 是典范嵌入。显然，闭子概形 $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ 是 U-有限的。特别地，我们得到两个交换方块

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X}-\mathcal{Z} & \hookrightarrow & \mathcal{X} & \hookleftarrow & \mathcal{Z} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_X} & & \downarrow \\ X-Z & \hookrightarrow & X & \hookleftarrow & Z \end{array}$$

接下来需要构造定理 1.2 中的 Nisnevich 方块。首先，我们克服将 $\mathcal{Z}$ 嵌入 $\mathbb{A}^1_U$ 的有限域障碍。由引理 3.2，存在一个纯相对维数一的光滑态射 $\mathcal{X} \to U$，以及一个有限态射φ: $\tilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$，使得 $\tilde{\mathcal{Z}} := \varphi^{-1}(\mathcal{Z} \cup \Delta(U))$ 满足以下性质

(i) $\tilde{\mathcal{Z}}$ 是 X 的一个 U-有限闭子概形；(ii) Δ 可提升为截面 $\Delta': U \to X'$，即 $\Delta = \varphi \circ \Delta'$；(iii) $\varphi|_{\tilde{\mathcal{Z}}}: \mathcal{Z} \twoheadrightarrow \mathcal{Z}$ 是有限 étale 满射；(iv) 将 $\tilde{\mathcal{Z}}$ 嵌入 $\mathbb{A}^1_U$ 时不存在有限域障碍。

特别地，$\Delta'(U) \subset \mathcal{Z}$，并且对于 $\tilde{p}_X: X \to X$，我们有 $\tilde{p}_X \circ \Delta' = p_X \circ \varphi \circ \Delta' = p_X \circ \Delta =$ 可以。于是，由命题 4.2，存在一个有限平坦满射 U- 态射 $\tau: \tilde{\mathcal{X}} \to \mathbb{A}^1_U$，使得 $\tau|_{\tilde{\mathcal{Z}}}: \tilde{\mathcal{Z}} \hookrightarrow \mathbb{A}^1_U$ 是闭嵌入，且 τ 在 $\mathcal{Z}$ 处是 étale。此外，由于不存在有限域障碍，在嵌入 $\mathcal{Z}$ 时，我们可以确保 $\tau(\mathcal{Z}) \cap (\{1\} \times U) = \emptyset$。注意，$\tau$ 是有限平坦覆盖，因此令 $\mathcal{X}^\circ$ 为 $\tilde{\mathcal{X}}$ 中分歧轨迹的补集，则 $\tau|_{\mathcal{X}^\circ}: \mathcal{X}^\circ \to \mathbb{A}^1_U$ 是 étale。由于 τ 在 $\mathcal{Z}$ 处是 étale，我们知道 $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}^\circ$。根据命题 4.2 中的性质 (ii)，如果 $\tau^{-1}(\tau(\tilde{\mathcal{Z}})) = \tilde{\mathcal{Z}} \sqcup \tilde{\mathcal{Z}}'$，那么 $\Delta(U) \cap \tilde{\mathcal{Z}}' = \emptyset$。现在我们设 $\mathcal{X}^{\circ\circ} := \mathcal{X}^\circ - \tilde{\mathcal{Z}}'$，于是

(a) $\tau: \mathcal{X}^{\circ\circ} \to \mathbb{A}^1_U$ is étale;
(b) $\Delta'(U) \subset \tilde{\mathcal{Z}} \subset \mathcal{X}^{\circ\circ}$ and $\tau|_{\tilde{\mathcal{Z}}}: \tilde{\mathcal{Z}} \hookrightarrow \mathbb{A}^1_U$ is a closed embedding;
(c) $\tau^{-1}(\tau(\tilde{\mathcal{Z}})) = \tilde{\mathcal{Z}}$ in $\mathcal{X}^{\circ\circ}$.

特别地，我们得到一个**étale** 态射 $\tau: \mathcal{X}^{\circ\circ} \to \mathbb{A}^1_U$，使得 $\tau|_{\tilde{\mathcal{Z}}}: \tilde{\mathcal{Z}} \hookrightarrow \mathbb{A}^1_U$是闭嵌入，并且它属于一个交换图，其中最左侧的两个方块是笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbb{A}^1_U - \tau(\tilde{\mathcal{Z}}) & \hookleftarrow & \mathcal{X}^{\circ\circ} - \tilde{\mathcal{Z}} & \hookrightarrow & \tilde{\mathcal{X}} - \tilde{\mathcal{Z}} & \to & \mathcal{X} - \mathcal{Z} & \to & \dot{X}_S - \dot{Z}_S & \to & X - Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}^1_U & \xleftarrow[\tau]{} & \mathcal{X}^{\circ\circ} & \hookrightarrow & \tilde{\mathcal{X}} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{X} & \to & \dot{X}_S & \to & X \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \tau(\tilde{\mathcal{Z}}) & \xleftarrow{\sim} & \tilde{\mathcal{Z}} & \xrightarrow{=} & \tilde{\mathcal{Z}} & \xrightarrow{\varphi|_{\tilde{\mathcal{Z}}}} & \mathcal{Z} & \to & Z_S & \to & Z \end{array}$$

特别地，左上方的方块是 Sm_U 中的一个 Nisnevich 方块，因此用 $\mathcal{X}^{\circ\circ}$替换$\mathcal{X}$，用 $\mathcal{Z}$ 替换 $\mathcal{Z}$，用 Δ'替换 Δ 后，我们便完成了证明。□

参考文献

[BouAC] Nicolas Bourbaki, 《交换代数. 第*1–7*章》, 《数学基础》（柏林）, 施普林格出版社, 柏林, 1998。译自法文，1989年英文译本的重印版。

[ÉGA III$_1$] A. Grothendieck 和 J. Dieudonné，《代数几何基础. III. 相干层的上同调研究. I》，法国高等科学研究所数学出版物 11 (1961)，167。MR0217085 (36 #177c) [EGA IV$_2$] Alexander Grothendieck 和 Jean Dieudonné，《代数几何基础. IV. 概形与概形态射的局部研究. II》，法国高等科学研究所数学出版物 24 (1965)，231（法文）。MR0199181 (33 #7330) [EGA IV$_3$] A. Grothendieck 和 J. Dieudonné，《代数几何基础. IV. 概形与概形态射的局部研究. III》，法国高等科学研究所数学出版物 28 (1966)，255。MR0217086 (36 #178)[EGA IV$_4$] Alexander Grothendieck 和 Jean Alexandre Eugène Dieudonné，《代数几何基础. IV. 概形与概形态射的局部研究 IV》，法国高等科学研究所数学出版物 32 (1967)，361（法文）。MR0238860 (39 #220) [SGA $3_{\mathrm{I\ new}}$] Philippe Gille 和 Patrick Polo（编），《群概形》（SGA 3）. 第 I 卷. 群概形的一般性质，《数学文献》（巴黎）[《数学文献》（巴黎）], 7, 法国数学会，巴黎，2011（法文）。布瓦玛丽代数几何研讨班 1962–64. [布瓦玛丽代数几何研讨班 1962–64]；由 M. Demazure 和 A. Grothendieck 主持的研讨班，M. Artin、J.-E. Bertin、P. Gabriel、M. Raynaud 和 J-P. Serre 协助；1970 年法文原版的修订注释版。MR2867621[SGA 3_{II}] 《群概形. II：乘法型群与一般群概形的结构》，布瓦玛丽代数几何研讨班 1962/64（SGA 3）。由 M. Demazure 和 A. Grothendieck 主持。《数学讲义》，第 152 卷，施普林格出版社，柏林—纽约，1970（法文）。MR0274459 (43 #223b) [SGA $3_{\mathrm{III\ new}}$] Philippe Gille 和 Patrick Polo（编），《群概形》（SGA 3）. 第 III 卷. 约化群概形的结构，《数学文献》（巴黎）[《数学文献》（巴黎）], 8, 法国数学会，巴黎，2011（法文）。布瓦玛丽代数几何研讨班 1962–64. [布瓦玛丽代数几何研讨班 1962–64]；由 M. Demazure 和 A. Grothendieck 主持的研讨班，M. Artin、J.-E. Bertin、P. Gabriel、M. Raynaud 和 J-P. Serre 协助；1970 年法文原版的修订注释版。MR2867622[A] M. Artin，《与经典上同调的比较：光滑概形情形》，1973（法文）。[Bh] S. M. Bhatwadekar，《解析同构与有限生成模的范畴》，Commun. Algebra 16 (1988)，第 9 期，1949–1958，DOI 10.1080/00927878808823669（英文）。[Čes22a] Kęstutis Česnavičius，《准分裂非分歧情形下的 Grothendieck-Serre》，Forum Math. Pi 10 (2022)，30，DOI 10.1017/fmp.2022.5（英文）。编号 e9。[Čes22b] ———，光滑除子的补集上的扭子，见 https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~cesnavicius/torsors-complement.pd

f

(2022). [Ch] V. Chernousov，《关于由二次扩张分裂的群主题的变奏及具有平凡不变量的群概形的*Grothendieck–Serre*猜想》 F_4 具有平凡 g_3 不变量，Doc. Math. **Extra Vol.** (2010)，147–169（英文）。[C-T/O] Jean-Louis and Ojanguren Colliot-Thélène Manuel，《局部平凡的主齐性空间》，Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **75** (1992)，97–122，DOI 10.1007/BF02699492（法文）。[C-T/S] J.-L. and Sansuc Colliot-Thélène J.-J.，《柔性环面下的主齐性空间；应用》，J. Algebra **106** (1987)，148–205，DOI 10.1016/0021-8693(87)90026-3（英文）。[FP15] Roman Fedorov and Ivan Panin，《关于含有无限域的正则局部环上主丛的*Grothendieck–Serre*猜想的证明》，Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **122**(2015)，169–193，DOI 10.1007/s10240-015-0075-z。MR3415067[Gab] O. Gabber，《已宣布但仍未发表》。

[GLL13] Ofer Gabber、Qing Liu和Dino Lorenzini，《代数簇的指标》，Invent. Math. 192 (2013)，第3期，567–626，DOI 10.1007/s00222-012-0418-z。[Gil] Philippe Gille，《Kneser–Tits问题》，Séminaire Bourbaki。Volume 2007/2008。Exposés 982–996，2009，第39–82页，ex（法文）。[NG] N. Guo，《半局部Dedekind环上的Grothendieck–Serre猜想》，Transform. Groups 27 (2022)，第3期，897–917，DOI 10.1007/s00031-020-09619-8（英文）。[GPan2] N. Guo and I. Panin，《弱初等纤维化》，2023。预印本。[GPan3] ———，《混合特征离散赋值环上光滑射影概形的Grothendieck–Serre猜想》，2023。预印本。[Gr1] A. Grothendieck，《同调挠率与有理截面》，Séminaire Claude Chevalley Tome 3 (1958)。[Gr2] ———，《Brauer群。II：上同调理论》，1966（法文）。[Gr3] ———，《Brauer群。III：例子与补充》，1968（法文）。[Hab] W. J. Haboush，《约化群是几何约化的》，Ann. Math. (2) 102 (1975)，67–83，DOI 10.2307/1970974（英文）。[Mo] L.-F. Moser，《有理平凡的挠子与Serre–Grothendieck猜想》。Diplomarbeit，2008，http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~lfmoser/da.pdf。[MV] Fabien Morel and Vladimir Voevodsky，《$\mathbb{A}^1$-概形的同伦理论》，Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 90 (1999)，45–143，DOI 10.1007/BF02698831（英文）。[Mu] David Mumford，《阿贝尔簇》，Tata Inst. Fundam. Res., Stud. Math.，第5卷，London: Oxford University Press，1970（英文）。[Na] M. Nagata，《仿射环中群的不变量》，J. Math. Kyoto Univ. 3 (1964)，369–377，DOI 10.1215/kjm/1250524787（英文）。[Ni1] E. A. Nisnevich，《函数域上算术群的仿射齐性空间与有限子群》，Funct. Anal. Appl. 11 (1977)，64–66，DOI 10.1007/BF01135540（英文）。[Ni2] Yevsey A. Nisnevich，《有理平凡的主齐性空间与Dedekind环上约化群概形的算术》（Rationally trivial principal homogeneous spaces and arithmetic of reductive group schemes over Dedekind rings），C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I 299 (1984)，5–8（法文）。[OP1] M. Ojanguren and I. Panin，《Witt群的纯性定理》，Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 32 (1999)，第1期，71–86，DOI 10.1016/S0012-9593(99)80009-3（英文）。[OP2] ———，《有理平凡的厄米空间是局部平凡的》，Math. Z. 237 (2001)，第1期，181–198，DOI 10.1007/PL00004859（英文）。[OPZ] M. Ojanguren、I. Panin和K. Zainoulline，《关于二次型的范数原理》，J. Ramanujan Math. Soc. 19 (2004)，第4期，289–300（英文）。[OS] M. Ojanguren and R. Sridharan，《Azumaya代数的消去》，J. Algebra 18 (1971)，501–505，DOI 10.1016/0021-8693(71)90133-5（英文）。[PS] I. A. Panin and A. A. Suslin，《关于Azumaya代数的一个Grothendieck猜想》，St. Petersbg. Math. J. 9 (1997)，第4期，1（英文）。[Pan05] I. Panin，《线性代数群的纯性定理》，2005。见 http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0729。[Pan13] ———，《关于约化群概形上的主 G-丛的Grothendieck–Serre猜想：II》，2013。见 http://www.math.org/0905.1423v3。[Pan15] ———，《关于含有限域的正则局部环上主丛的Grothendieck–Serre猜想的证明》，2015。见 https://www.math.uni-bielefeld.de/lag/man/559.pdf。[Pan16] ———，《关于约化群概形上的主 G-丛的Grothendieck–Serre猜想：II》，Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 80 (2016)，第4期，131–162，DOI 10.4213/im8452；英文译本，Izv. Math. 80 (2016)，第4期，759–790。MR3535361

[Pan17] ———,关于含有限域的正则局部环上主丛的 Grothendieck–Serre 猜想的证明, 2017。arXiv 预印本 arXiv: 1707.01767。[Pan19a] ———, 优良三元组与关于约化群概形上主 G-丛的 Grothendieck-Serre 猜想, Duke Math. J. 168 (2019), 第 2 期, 351–375, DOI 10.1215/00127094-2018-0042。[Pan19b] ———, 优良三元组与关于约化群概形上主 G-丛的 Grothendieck-Serre 猜想, Duke Math. J. 168 (2019), 第 2 期, 351–375, DOI 10.1215/00127094-2018-0042。[Pan21] ———, 混合特征情形下 Grothendieck-Serre 猜想的注记, J. Math. Sci., New York 252 (2021), 第 6 期, 841–848, DOI 10.1007/s10958-021-05204-w（英文）。[Pan20] ———,关于含域的正则局部环上主丛的 Grothendieck-Serre 猜想的证明, Izv. Math. 84 (2020), 第 4 期, 780–795, DOI 10.1070/IM8982（英文）。[Par] Raman Parimala, 仿射平面上的不可分解二次空间, Adv. Math. 62 (1986), 1–6, DOI 10.1016/0001-8708(86)90085-X（英文）。[PSV15] I. Panin、A. Stavrova 和 N. Vavilov, 关于约化群概形上的主 G-丛的 Grothendieck-Serre 猜想: I, Compos. Math. 151 (2015), 第 3 期, 535–567, DOI 10.1112/S0010437X14007635（英文）。[PPeSt] I. Panin、V. Petrov 和 A. Stavrova, 关于类型为 E_6 和 E_7的单伴随群概形的 Grothendieck–Serre 猜想, 2009。预印本, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/。[PanSt] I. Panin 和 A. Stavrova, 关于相对射影直线上的主丛, 2023。预印本。[Po] Dorin Popescu, 一般Néron去奇异化与逼近, Nagoya Math. J. 104 (1986), 85–115, DOI 10.1017/S0027763000022698（英文）。[Poo] Bjorn Poonen, 有限域上的 Bertini定理, Ann. Math. (2) 160 (2005), 第 3 期, 1099–1127, DOI 10.4007/annals.2004.160.1099（英文）。[ChPoo] François 和 Charles Bjorn Poonen, 有限域上的 Bertini不可约性定理, J. Am. Math. Soc. 29 (2016), 第 1 期, 81–94, DOI 10.1090/S0894-0347-2014-00820-1（英文）。[R1] M. S. Raghunathan, 具有有理截面的主丛, Invent. Math. 116 (1994), 第 1–3 期, 409–423, DOI 10.1007/BF01231567（英文）。[R2] ———, 勘误: 具有有理截面的主丛, Invent. Math. 121 (1995), 第 1 期, 223, DOI 10.1007/BF01884296（英文）。[R3] ———, 仿射空间上的主丛与射影直线上的丛, Math. Ann. 285 (1989), 第 2 期, 309–332, DOI 10.1007/BF01443521（英文）。[RR] M. S. Raghunathan 和 A. Ramanathan, 仿射直线上的主丛, Proc. Indian Acad. Sci., Math. Sci. 93 (1984), 137–145, DOI 10.1007/BF02840656（英文）。[Se] J.-P. Serre, 代数纤维空间, 1958。载于《Chow环及其应用》, Chevalley研讨会, 第二年, 数学秘书处, 巴黎。[Sw] Richard G. Swan, Néron-Popescu去奇异化, 《代数与几何讲座》。国际代数与几何会议论文集, 台湾台北国立台湾大学, 1995年12月26–30日, 1998, 第135–192页（英文）。[SP] Stacks项目作者, Stacks项目, 2018。[T] Jacques Tits, 代数群与抽象单群, Ann. Math. (2) 80 (1964), 313–329, DOI 10.2307/1970394（英文）。[Vo] Vladimir Voevodsky, 带转移的预层的上同调理论, 《循环、转移与动机同调理论》, 2000, 第87–137页（英文）。[Z] Kirill Zainoulline, 带转移的函子的纯性问题, K-Theory 22 (2001), 第 4 期, 303–333, DOI 10.1023/A:1011122612924（英文）。

V. A. 斯捷克洛夫数学研究所圣彼得堡分部, 丰坦卡街27号, 191023 圣彼得堡, 俄罗斯电子邮箱地址: guo.ning@eimi.ru电子邮箱地址: paniniv@gmail.com