流形浸入

Андрей Рябичев

arXiv:2302.02822v1 [math.HO] 2 Feb 2023

摘要

本文基于我在“Dark geometry fest”会议上所作的报告，该会议于2022年7月17日举行，主题是几何方法及其应用，参见 [1]。我们将朝着斯梅尔–赫希定理的方向展开，为此先来分析它最简单的一个特例——惠特尼–格劳斯坦定理，即关于平面上光滑曲线的定理。

本文写得通俗易懂，部分内容较为非正式，主要面向对数学感兴趣、但尚未深入学习数学的人。

1 序言之外：如何学好拓扑学

本文的主要目标，是向读者展示现代数学的一个分支——微分拓扑（它不像集合论或经典分析那样广为人知）。在这一领域中，灵活的拓扑方法被应用于流形及其间的映射。什么是微分拓扑？下文将对此展开讨论。不过，为了避免陷入抽象定义的困境，我们将从一个直观易懂的结论开始（并顺便讲解陈述和证明该结论所需的所有定义）。

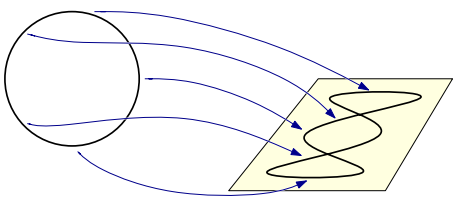
对于那些对学习拓扑学兴趣浓厚、已经迫不及待想了解如何入门的人，我推荐阅读哈彻的著作 [6] 和Фоменко-Фукса [5]；两者讲述的内容相似，但编排顺序略有不同，风格也大相径庭。若想深入学习微分方法，赫希教材 [7]很有帮助。若要扎实地学习本文所讨论的主题本身（以及之后对其进行广泛推广的方法），我可以推荐格罗莫夫的著作 [2] 和Мишачёва-Элиашберга [3]——它们的写作风格同样截然不同，而且前一本涵盖的内容远超后一本。

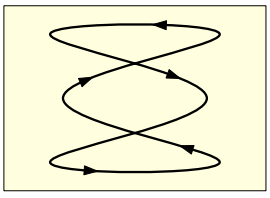
不过在我看来，学习数学的关键并不在于阅读大量精心挑选的书籍和文章，而首先在于独立解题并将解答交给教师批改。例如，莫斯科独立大学可以为有志于此的人提供帮助。而这一功能并非本文所能实现；回到开头，本文的目的只是指出研究方向。

2 平面上的曲线

定义 1. 平面上的闭曲线称为连续映射 $\alpha\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$。

这里 S^1 表示圆周， $\mathbb{R}^2$ 表示平面。我们所说的从圆周到平面的映射，是指任意一种规则（对应关系），使得圆周上的每个点 x 在平面上恰好有一个像 $\alpha(x)$。圆周上不同点的像可以在平面上重合，这并不被禁止。





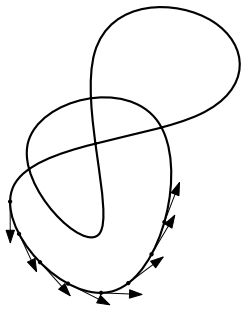
映射的连续性更容易通过直观的方式来理解，即相近的点映到相近的点；要对这个概念作出全面的形式化表述，工作量过于庞大，需要另行开展一项大型研究，远远超出本文的范围。

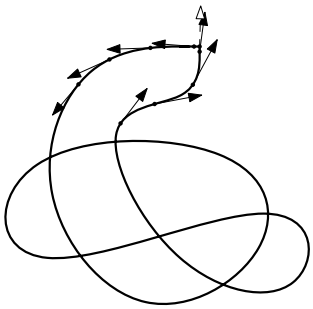
为了在文字中定义曲线，我们常常只绘出平面上的点集，即与某些对象相对应的点集（映射的像）。不过，严格来说，圆周上的点集与所绘点集之间的对应关系包含了更多信息——具体是哪一个点映到了哪里。正如我们随后将看到的，为了达到我们的目的，我们可以忽略其中几乎所有信息。几乎所有信息——唯一的例外是曲线在平面上的“绕行方向”：当圆周上的点沿正方向（逆时针）运动时，曲线在平面上随之呈现的方向。

3 光滑曲线

定义 2. 如果曲线 $\alpha\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ 的速度向量 $\dot{\alpha}$ 在每个点 $x \in S^1$ 都不为零，并且 $\dot{\alpha}$ 随 x连续变化，我们就称它为光滑的。

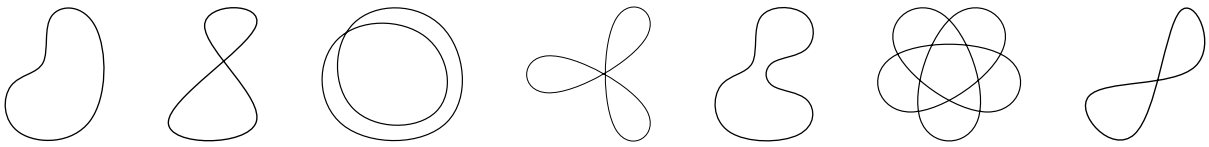
下图中，左侧所示的曲线是光滑的，而右侧的曲线则不是，因为在它的“折点”处无法定义一个非零的速度向量（导数）。[1]





换句话说，$\dot{\alpha}$ 定义了一个连续映射 $S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$。事实上，速度向量 $\dot{\alpha}$ 可以取平面上除原点 (0,0) 以外的任意值。定义了这个新对象后，自然会尝试解决分类问题：

问题。 如何描述平面上的所有光滑闭曲线?

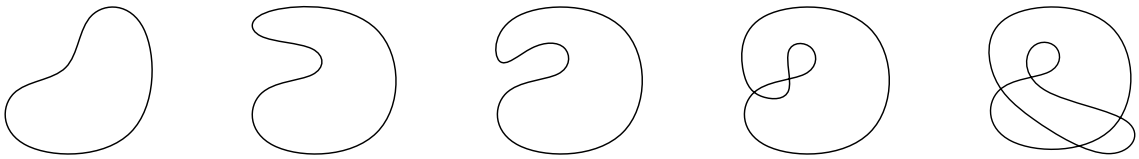


显然，这样的曲线有无穷多条——更准确地说，是连续统多个。若将某些曲线视为“等价”，分类问题就会更容易处理——但究竟哪些曲线应当视为等价呢?

例如，上图中的第五条曲线不过是第一条稍微压扁后的样子。第二条则像是最后一条旋转并拉伸后的结果。这让人想到某种变形，而这也正是拓扑学中的常见做法.....

4 光滑曲线的变形

光滑曲线可 可以进行变形，使其在任何时刻都保持光滑。 и.



[1]一般来说，按照公认的光滑性定义，光滑曲线应当只是连续可微的；而速度向量非零的曲线，更准确地说应称为浸入曲线。我们使用的术语有时正是用来指称曲线的，而且整体上看起来更简洁，也没那么吓人。

我们还要求所考虑的变形满足：每一点的速度向量都随时间连续变化（因为这也是光滑曲线结构的重要组成部分，而所有变换都必须连续）。



满足这两个条件的变形称为正则同伦。对于能够借助它相互变换的曲线，我们称它们正则同伦。

因此，我们的定义仅涉及光滑曲线本身，不借助任何外部概念，所以相当自然。值得注意的是，在正则同伦过程中，曲线不仅可以拉伸和收缩，还可能出现或消失自交点（如上例所示）。

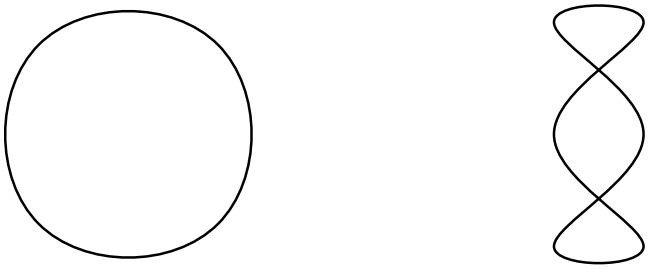
更形式地说，正则同伦是一个光滑映射 $S^1 \times [0;1] \to \mathbb{R}^2$。利用正则同伦定义的任一版本，都不难证明下面的命题。

引理。 正则同伦关系是一种等价关系。

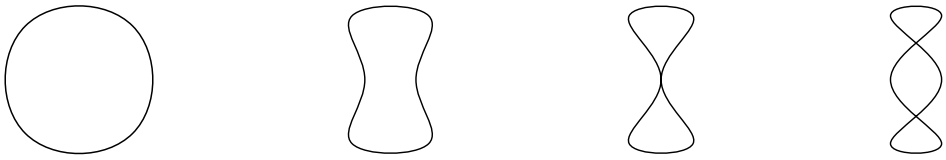
因此，所有曲线都可以分成互不相交的等价类，这些等价类将是我们接下来感兴趣的对象。

5 正则同伦示例

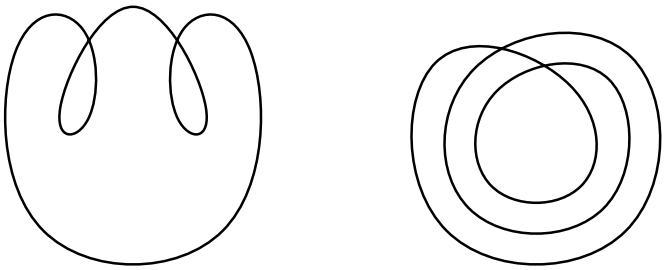
取如下两条曲线 α_0 和 α_1:



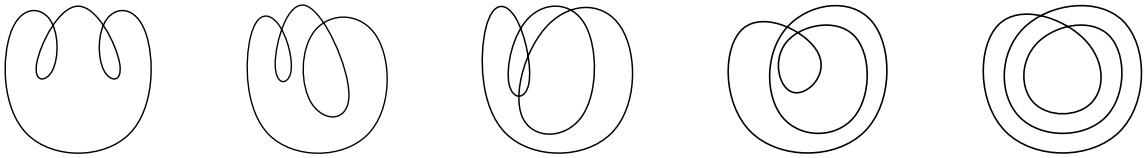
它们之间是否存在正则同伦？稍加思考，我们便能得出肯定的答案，并明确地构造出一个正则同伦：



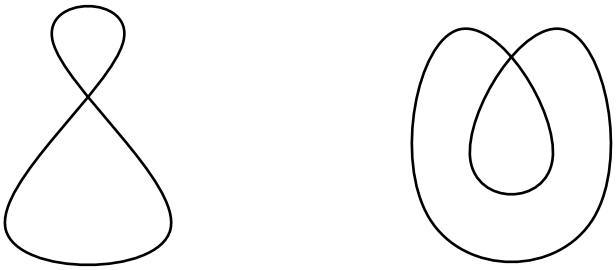
那么对于这两条这样的曲线呢?



这里的情况似乎已经变得复杂了。不过，我们仍然可以构造出所需的正则同伦，而且这并不难：



那么对于这样的曲线呢?



想像之前几次那样轻松地构造正则同伦，却遇到了一些障碍：在形变过程中的某个时刻，曲线不再光滑。答案似乎是“不能”，但这该如何证明呢？毕竟，我们无法给出正则同伦，并不意味着它不存在——它可能以相当复杂的方式构造出来，等等。

为了解决这类问题，拓扑学（以及许多其他领域）都会用到同一种重要的数学技巧。

6 通识性描述：不变量

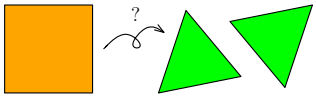
要证明某件事无法做到，常常会用到不变量。

不变量是一种在给定问题中保持不变的量。很多时候，找到恰当的不变量就等于解决了问题。对于此前很少接触不变量的读者，我们来分析几个几乎显而易见的例子。

问题。 一排摆着100枚筹码。允许交换相隔一枚筹码的两枚筹码。能否把筹码的顺序完全颠倒?

答案： 不能。第一枚筹码只能出现在奇数位置上。但最后它必须位于第100个位置，也就是偶数位置。第一枚筹码所在位置的奇偶性是不变量。

问题。 能否把边长为1的正方形剪成若干块，再用这些块拼成两个边长为1的正三角形?



答案： 不能。 正方形的面积大于两个三角形的面积之和（请自行证明！）。面积是不变量。

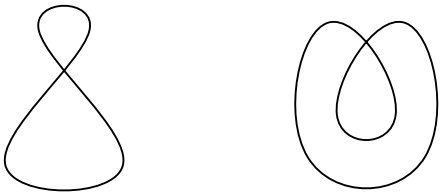
问题。 玛莎把一块巧克力掰成了8块。然后她又把其中一块掰成8块，依此类推。她有没有可能在某个时刻恰好得到179块?

回答： 不，没有这种可能。每次切割后，块数除以 7 的余数都是 1，而 179 除以 7 的余数是 4。余数（模 7）是不变量。

7 光滑曲线正则同伦的不变量

x

究竟是什么不变量“区分”这两条曲线?

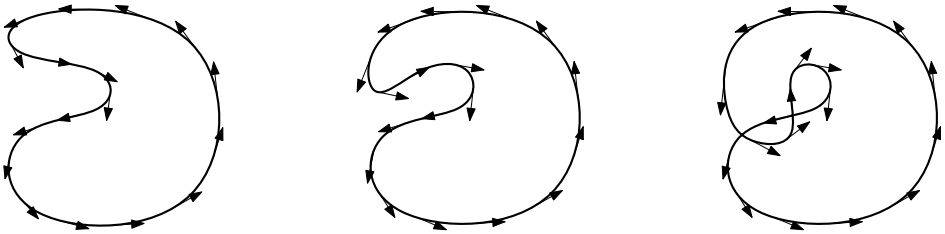


答案：速度向量的旋转次数。我们将这个数记为 $r(\alpha)$。要计算它，需要沿着曲线移动，标记速度向量的方向，然后统计总共转了多少圈（计入正负号）。逆时针旋转记为“+”，顺时针旋转记为“–”。

确实，第一条曲线的这个数等于 0，而第二条曲线则等于 2。仔细追踪沿曲线绕行时的速度向量，就可以手动计算出这个数。



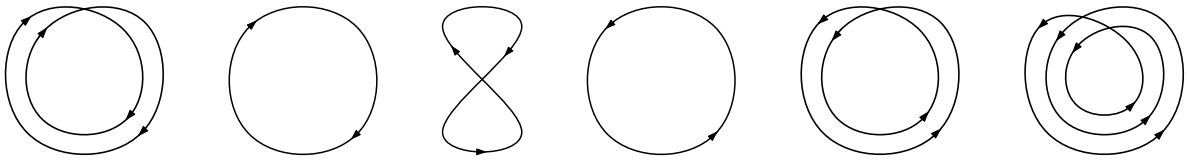
但是，如何证明函数 $r(\cdot)$ 是一个不变量呢？为此，我们使用如下论证：在曲线 α的正则同伦过程中，数值 $r(\alpha)$ 也必须连续变化。



但是在每一时刻， $r(\alpha)$ 都是整数。因此它根本不可能变化！严谨的证明可以在例如 [6], §1.1 中找到。

8 两两之间不能通过正则同伦变形的曲线

对于曲线 α，数值 $r(\alpha)$ 可以取任意整数。很容易构造一系列曲线，使函数 $r(\cdot)$ 在这些曲线上的取值恰好是所有整数。只需让速度向量旋转不同的圈数，例如：



这样，我们得到了一列无穷多个两两不正则同伦的曲线。按照速度向量的旋转圈数，依次将它们记作 $\ldots, \gamma_{-2}, \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$，即满足 $r(\gamma_m) = m$。

顺便说一下，如果沿曲线 γ_0 反方向行进，就会得到曲线 γ_0'，一般来说，它不属于我们的集合。



题目。 上图中的曲线 γ_0 和 γ_0' 正则同伦。

为了简便起见，以下我们将把正则同伦的曲线视为相同，并将它们看作同一个对象。从这个角度来看，对于曲线 γ_0，绕行方向并不重要；而对于任何其他 γ_m，当 $m \neq 0$ 时，改变绕行方向会使它变成另一条曲线 γ_{-m}。

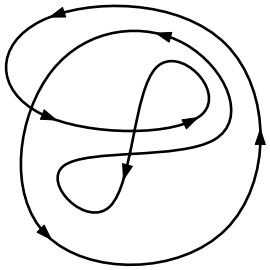
9 曲线分　类：在正则同伦意义下

现在自然会提出这样一个问题：是否存在不属于这一系列……，γ_{-2}，γ_{-1}，γ_0，γ_1，γ_2，γ_3，. . .的曲线（在正则同伦意义下）？ 如果以下猜想成立，就不会存在其他曲线:

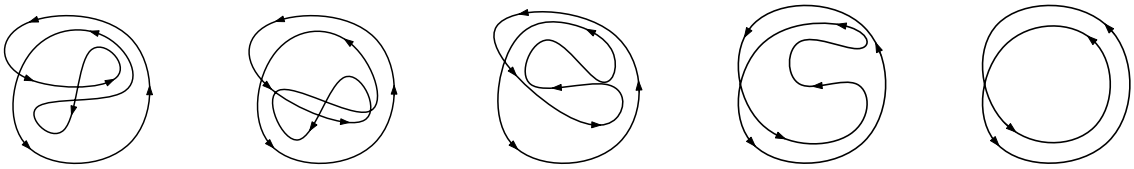
猜想。 具有相同数量 $r(\cdot)$ 的曲线正则同伦。

这样的猜想与之前关于曲线 γ_0 和 γ_0'的练习一致。确实，我们看到 $r(\gamma_0) = r(\gamma_0') = 0$，而且 γ_0 和 γ_0' 正则同伦。

我们来检验一下这个猜想是否适用于下面这条曲线 α



对于它，数值 $r(\alpha)$等于 2。这意味着它应该与上面列表中的曲线 γ_2 正则同伦。确实，可以明确地构造出一个正则同伦:



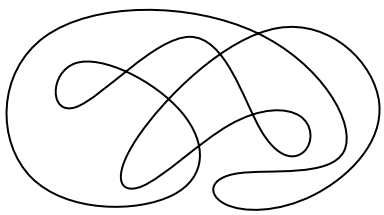
10 猜想的证明与分类

如何证明这个猜想? 一个自然的想法是将所有曲线化为某种标准形式!

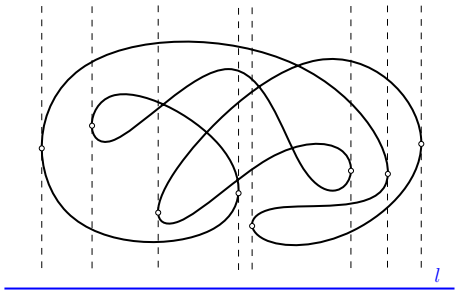
具体来说，如果给定一条曲线 α，可以尝试尽可能地简化它，希望最终得到某个 k对应的 γ_k 。

猜想的证明。第 1 步

取一条曲线 α。

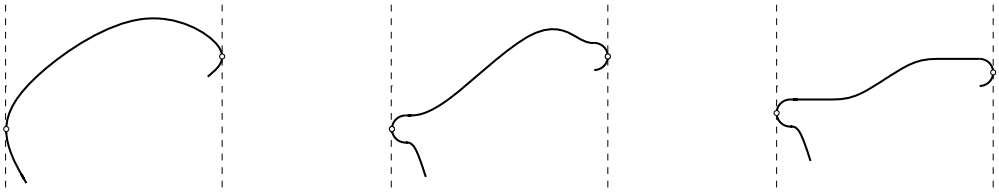


选取直线 l，使得 α 只有有限条切线与 l垂直。如果速度向量 $\dot{\alpha}$ 始终在转动，那么任意一条直线都可以。[2]

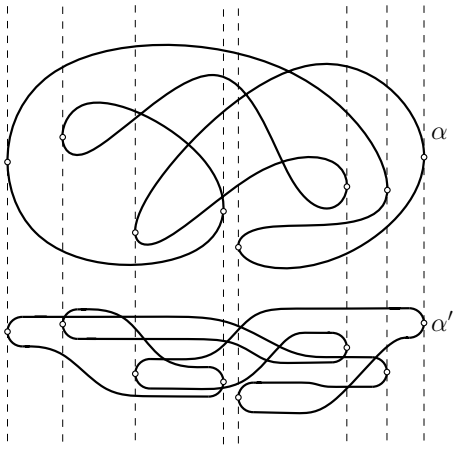


猜想的证明。步骤 2

接下来，将曲线 α “压扁”，使其由若干段“几乎平行于 l”的部分和一些“转向”组成。



我们将得到的曲线称为 α'。实际上， α' 由一系列转向、它们的方向以及它们在 l 轴上的“坐标”来描述，其余所有数据都可以通过正则同伦轻易改变。



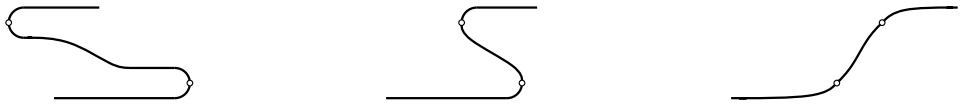
猜想的证明。第3步

注意，在运动过程中，可以区分“向右”和“向左”的转向，就像我们自己沿着曲线行进一样。每种转向都可能呈现两种形态。下图展示了一对“向右”转向和一对“向左”转向。



现在我们将按以下方式变形 α' 。如果连续出现两个方向相反的转弯，就可以将它们缩短。

[2]一般而言，这样的直线 l 由萨德引理保证存在。然而，要将萨德引理应用于 $\dot{\alpha}$，就必须要求 α 具有二阶光滑性。另一方面，在几何学中，人们通常认为所有映射都具有无限阶光滑性，因此我们不必觉得这一额外假设带来了负担。



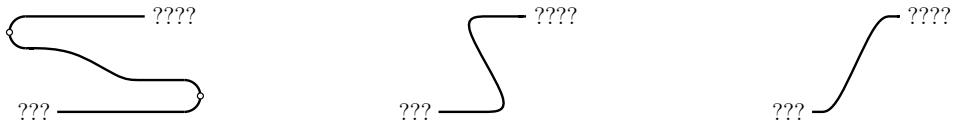
猜想的证明。第3步。 уточ

更确切地说，假设我们遇到了两个方向相反的转弯。在第一个转弯之前和第二个转弯之后，还有一些曲线片段。

如有必要，就把两端分别拉到第一个转向之前和第二个转向之后，使投影到 l 上时两端最终重合。这样一来，端点外侧的曲线片段上的所有转向都保持不变，只是分别向相反方向“拉开”，不会产生新的转向。

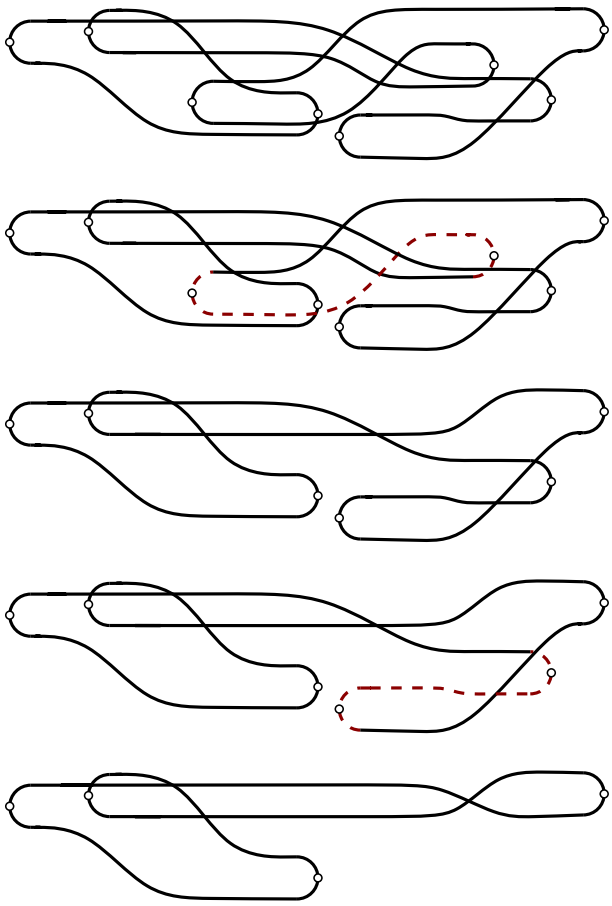


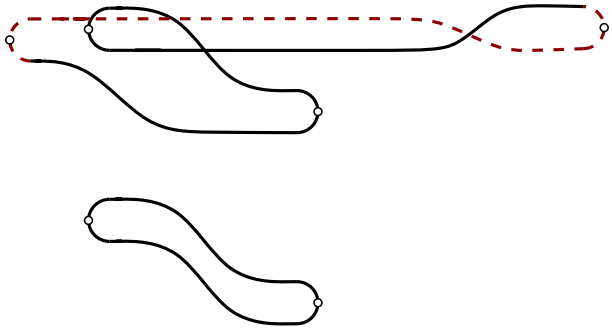
对得到的曲线段可以执行转向缩减 程序（尽管可能无法对原始曲线进行此操作）。



猜想的证明。第4步。示例

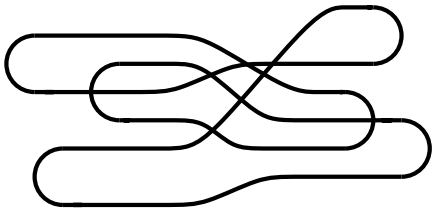
显然，可以不断应用转向缩减程序，直到只剩下同一方向的转向为止。让我们对曲线 α' 进行这一操作：



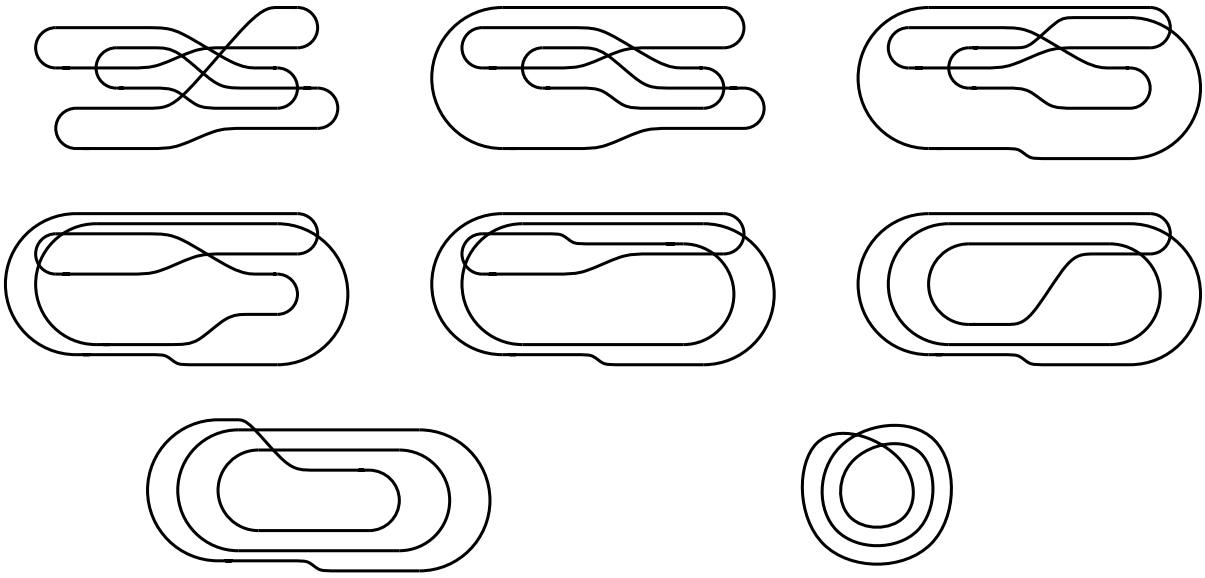


猜想的证明。第4步

因此，可以不断应用转向缩减程序，直到只剩下同一方向的转向为止。最终，曲线看起来会是这样：



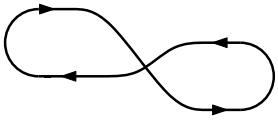
可以将它仔细地“拼合”成表格中相应的曲线。



猜想的证明。第4步。结束

因此，**猜想得证：**我们能够将任意曲线 α 变形为某个 k 对应的曲线 γ_k 。

等等！所描述的过程不可能最终得到曲线 γ_0！事实上，缩短后得到的曲线的所有转向方向都相同，而 γ_0 则不是。

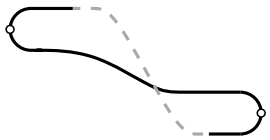


换句话说，即使 α 与 γ_0 正则同伦，在我们的算法结束时，对于某个 $k \neq 0$，我们会得到 γ_k。但我们已经证明，γ_0 与 γ_k 不正则同伦，这就产生了矛盾。

猜想的证明。第4步。 уточ

实际上，在第3步中，并非所有曲线都能应用端点“拉伸”过程。确实，在第3步的 уточ 中，我们隐含地假设，被拉伸端点之外的片段彼此不相连。

但是，如果 它们相连，那么就无法朝不同方向拉动两端了 .



而且，这恰好发生在我们的曲线是 γ_0 或 γ_0' 的情况下。

猜想的证明。第4步。现在肯定结束了

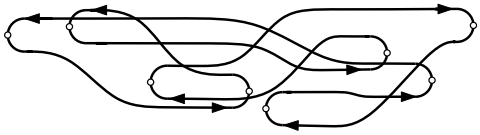
因此，当满足以下条件时，算法终止：

- 只剩下方向相同的转向；
- 只剩下两个方向相反的转向。

在第二种情况下，得到曲线 γ_0 或 γ_0'；而在第一种情况下，对于 $k \neq 0$，得到曲线 γ_k。

猜想的证明。备注

回想一下，对于哪个 $k \in \mathbb{Z}$，曲线 α' 与 γ_k正则同伦？当然，只有对于 $k = r(\alpha)$。事实证明，在步骤 2 结束时，可以直观地计算出 k 的值。该怎么做？



问题。这个数 k 等于向右转的次数与向左转的次数之差的一半，也就是说 ть

$$r(\alpha') = \frac{r_L - r_R}{2}.$$

例如，对于上图中的曲线，它等于 $\frac{5-3}{2} = 1$。事实上，直接计数可知，沿给定方向遍历曲线时，速度向量总共逆时针旋转了 1 圈。这与上文第 4 步中分析的示例完全一致：在那里我们证明了这条曲线与曲线 γ_1正则同伦。

猜想的证明。总结

结果可以概括如下。

定理 1 (惠特尼–格劳斯坦)。 平面上的任意一条光滑闭曲线 α 都正则同伦于 *§8* 中曲线集合里的唯一一条曲线 γ_k。其中，编号 k 等于速度向量 $r(\alpha)$的旋转圈数。

所给出的证明是作者原创的，其中所采用的组合几何表述显得相当自然。[3] 关于惠特尼–格劳斯坦定理的另外两个证明，参见普拉索洛夫的著作 [4]第 5.2 节。

[3]特别值得关注的是，在我们的证明中，可以清楚地看到哪些地方可应用经典分析定理——萨德引理，以严谨地论证这些构造。

11 惠特尼–格劳斯坦定理的推广

在本节中，我们将非正式地概述任意维数情形下上述定理的类似结论。这里概述的定义并不力求完整——要充分掌握这些内容，需要不止一门学期课程。..

11.1 流形

光滑流形——粗略地说，是由欧几里得空间的若干片段像纸浆模型一样粘合而成的集合。欧几里得空间的片段称为坐标图。其中，坐标图之间的粘合函数（坐标变换的映射）必须是连续可微的（通常要求无穷次可微）。

在流形 X 的每个点，都可以定义切向量，通常将其理解为局部坐标中的无穷小向量。所有点处的切向量构成切丛，记作 TX。

设 M, N 是一对流形。对于映射 $M \to N$，可以讨论其导数。更确切地说，如果映射 $f: M \to N$ 光滑（在局部坐标中连续可微），则其微分 $df: TM \to TN$有定义。

本质上，映射的微分是函数导数的直接推广。微分指出某个切向量被映到了哪里。直观地说：如果点 x以速度 v在 M 中运动，那么根据定义，它的像 $f(x)$在同一时刻会以速度 $df(v)$在 N中运动。

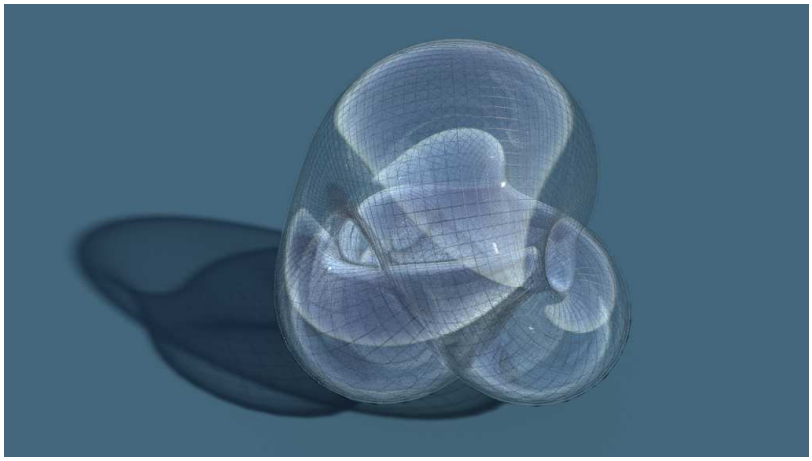
微分的一个重要性质是：对于 M 的切丛的每个纤维，即从同一点 M 出发的向量集合，微分都是一个线性映射（保持向量空间的结构）。

11.2 浸入

设 $\dim M < \dim N$。如果光滑映射 $M \to N$ 在每一点$x \in M$的微分 df_x 的秩都为 $\dim M$，则称其为浸入。

定理 2 (Smale–Hirsch。). 连续映射 $f: M \to N$ 可以变形为浸入，当且仅当存在一个覆盖 f 的纤维嵌入 $F: TM \to TN$。

例如，利用这个定理可以轻松证明，存在一个射影平面的浸入。其中一种这样的浸入称为博伊曲面 *(Boy surface)*，如下图所示。



Smale–Hirsch 定理于20世纪60年代左右得到证明，并经过多次完善。后来，米哈伊尔·格罗莫夫为更广泛的一类问题发展了类似的技术。这种技术称为 h-原理，并被广泛应用于现代科学。

12 后记：给行家的练习

题目。 证明，任意一条光滑曲线都可以分解为有限条互不自交的弧。

习题。 任意一条光滑曲线是否都会将平面分成有限个部分?

习题。 在 §4 的定义中，去掉正则同伦过程中速度向量变化的连续性要求。闭合曲线在平面上的正则同伦类的描述将如何改变?

习题。 证明：对于任意一条直线 l 和一条光滑闭合曲线 α，在 α上至少存在两点，使得这两点处的切线与 l 垂直。

习题。 构造一个纤维嵌入 $T\mathbb{RP}^2 \to T\mathbb{R}^3$。

致谢

我衷心感谢节庆的组织者 [1]（感谢他们的工作，感谢他们给予我发言的机会，也衷心祝愿他们事业兴旺、工作顺利），也感谢节庆的参与者；没有他们，这一切活动也无从开展。此外，我感谢达莉娅·雷琴科娃提出的诸多文风方面的建议，这些建议无疑让文章更加完善；也感谢萨谢奇卡·皮利普尤克对文章内容提出的一些有益的补充说明（所有剩下的疏漏，无论是语言上的还是数学上的，都由作者本人承担全部责任）。

参考文献

[1] 参会节“Dark geometryfest”页面 https://vk.com/dark_geometry_f est

[2] M. 格罗莫夫，《偏微分关系》，莫斯科：Мир，1990。

[3] H.M. 米沙乔夫、Я. M. 埃利亚什贝格，《 h-原理导论》。莫斯科：МЦНМО，20 04

[4] B. B. 普拉索洛夫，《组合与微分拓扑学基础》。莫斯科：МЦНМО，2014

[5] A. T. 福缅科，Д. Б. 福克斯，《同伦拓扑学教程》。莫斯科：Наука，1989

[6] A. 哈彻，《代数拓扑学》。莫斯科：МЦНМО，2011

M. 希尔施，《微分拓扑学》。莫斯科：Мир，1979

Андрей Рябичев НМУ，莫斯科
第179学校 电子邮箱:
ryabichev@179.ru