arXiv:2302.02823v1 [physics.class-ph] 2 Feb 2023

非完整约束：从热力学观点对最小作用量原理的考察

Umberto Lucia[a], *, Giulia Grisolia[a]

[a]“伽利略·费拉里斯”能源系，都灵理工大学，杜卡德利阿布鲁齐大道 *24* 号，*10129*，都灵，意大利

摘要

对于非完整约束，最小作用量原理似乎无法导出与物理行为相一致的运动方程。本文针对这一数理物理中的基本问题提出了一种解答。此外，本文还基于热力学第一定律和第二定律进行了若干探讨。

关键词：分析力学，理性力学，非完整约束，最小作用量。

1. 引言

最小作用量原理是物理学中研究最多的基本原理之一，其历史发展过程中也出现了一些争议。

在提交给法国科学院的两篇论文中，分别发表于1741年和1744年，皮埃尔-路易·莫佩尔蒂（1698–1759） [1] 提到了最小作用量原理，并将其定义为普遍原理。具体而言，他指出，自然发生变化时，该变化所需的作用量应尽可能小。随后，莱昂哈德·欧拉（1707–1783）完善了这一结果，指出在所有连接相同端点的可能轨迹中，任何运动质点的真实轨迹都是使作用量最小的那条；他还认识到，作用量是动能两倍对时间的积分 [2]。

在力学的发展过程中，由卡尔·弗里德里希·高斯（1777–1855）提出的最小二乘法，最初用于分析小行星谷神星的椭圆轨道 [3], ，且与勒让德方法密切相关。这一方法的改进促成了如下原理的形成：在所有可能的运动中，实际发生的运动在给定条件下使约束最小。该原理与达朗贝尔原理（让·达朗贝尔，1717–1783）密切相关。在此背景下，人们对高斯原理进行了统计力学分析

*通讯作者电子邮箱：umberto.lucia@polito.it（Umberto Lucia）

并探讨了其在完整约束（约束仅取决于坐标）和非完整约束（速度上的非可积约束）中的应用，指出高斯原理仅适用于任意完整约束，而且显然也适用于约束函数为动量齐次函数的非完整约束 [4]。

如今，最小作用量原理被应用于物理学中，尽管它通常更多地被称为哈密顿原理，而不是莫培尔蒂原理；但它在工程学中并未受到重视，尽管一些变分原理被用于相关应用 [5], ，即使生物力学和机器人学中对使用最小作用量原理的兴趣正在增长 [6]。变分方法是现代分析力学发展的基础 [7]。但是，Flannery 指出 [8, 9, 10, 7]:

> “最小作用量原理只能应用于完整约束和线性非完整约束，而对于一般的非完整约束，它无法用于获得正确的运动方程”。

这一论述所指出的问题可以概括为以下问题：是否可以证明，最小作用量原理不能应用于一般的非完整约束?

本文讨论最小作用量原理的有效性问题，旨在提出一种证明，以回答 Flannery 所提出的问题。为此，在“材料与方法”部分讨论完整约束和非完整约束，在“结果”部分提出与 Flannery 问题相关的证明，并在最后一节从热力学视角展开一些思考。

2. 材料与方法

2.1. 初步考量

力学系统的运动受到约束，这些约束源于物质条件，可用直线、曲线、平面、曲面在几何上表示 [11]。约束既可通过数学方程描述，也可通过与约束反力相关的力来描述（物理描述）[11]。

为了确定由 N 个质点构成的系统的空间位置，需要知道 N 位置向量 $\mathbf{r}$ 的值，即 [12]:

- $3N$ 坐标 $r_i, i \in [1, 3]$，若系统是自由的，即表示该系统的点均可取任意位置；
- $n \leq 3N$ 坐标；如果表示系统的某些点受到约束，并且 n 是系统的自由度数。

因此，为了采用一般方法，方便的做法是引入一组$n \leq 3N$（如果系统是自由的，则有 $n = 3N$）适用于所研究问题的广义坐标 q。为了确定系统在给定时刻的力学状态，还需要广义速度的值：（$\mathbf{q}$ $\dot{\mathbf{q}}$），其中$\mathbf{q} = (q_1, .., q_n)$，且 $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, .., \dot{q}_n)$，同时 [12]。

在此背景下，必须引入约束的定义，如下所示：

定义 1. [11] - 约束称为：

1. 完整的，如果系统可能构形的任何限制都满足以下条件：

$$f(\mathbf{q}, t) = 0 \tag{1}$$

这是一个可积关系；

2. 非完整的，如果系统可能运动的任何限制 [11] 都满足以下条件：

$$g(\mathbf{q}; \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \tag{2}$$

这是一个不可积关系。

如果非完整约束表示一个完整约束，那么它就是可积的。

2.2. 完整系统与拉格朗日系统

映射的概念对于表示实数开集的定义域至关重要，因此必须先给出其定义。

定义 *2.* [11] ——设 Q 为一个点集。若存在一个从Q 到 $U \subseteq Q \to \mathbb{R}^n$的单射 φ，其像为 $\mathbb{R}^n$中的开集 $\varphi(U)$，则称其为一个大小为 n 的映射。函数 $Q_i : U \to \mathbb{R}, i\ in[1, n]$，满足 $\forall x \in U : \varphi(x) = (Q_1(x) .., Q_n(x))$，称为与折叠 φ相关联的坐标。$q = \{Q_i\}_{i\in[1,n]}$ 在所有 Q上构成一个局部坐标系。该折叠记作有序对 (U, φ) 或 (U, q)。

在此背景下，可以定义过渡函数。它们是两个开集 $\mathbb{R}^n$ 之间的映射，分别表示为函数 $q_{1i} = \varphi_{12i}(q_{1h})$ 和 $q_{2i} = \varphi_{21i}(q_{2h})$，用于描述从一个映射到另一个映射的坐标变换。

定义 3. - [11] 维数为 n、$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ 和 $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$ 的两个映射，若满足 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$，或者若在 $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ 时满足以下两个条件，则称它们 C^k-相容：

1. 集合 $O_1 = \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ 和 $O_2 = \varphi_2(U_1 \cap U_2)$，可视为两个映射在定义域交集上的集合，是开集；

2. 过渡函数 $\varphi_{12}: O_1 \to O_2$ 和 $\varphi_{21}: O_2 \to O_1$，定义为$\varphi_{12} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ 和 $\varphi_{21} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$，其中 φ_1 和 φ_2 属于 C^k类，并限制在交集 $U_1 \cap U_2$上。

定义 4. [11] - 在集合 Q 上，定义一组相容映射为$\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha: U_\alpha \to \mathcal{R}^n; \alpha \in \mathcal{I}\}$，其中 $\mathcal{I}$ 是指标集，其定义域为 U_α，这些定义域是 Q的重叠区域。带有图册的集合 Q 称为维数为 n的微分簇。

注释 1. 如果图册包含所有可能的映射，则称其为完整、充实或极大图册。微分簇是带有极大图册的集合。

注释 2. [11] -图册允许定义拓扑，因此微分簇也是一个拓扑空间。

定义 5. [11] - 点集 $\{P_\nu, \nu \in \mathcal{B}\}$若其构形空间 Q 具有可微簇的结构，则称为完整。此时， Q 称为构形簇。 Q 的维数 N 称为系统的自由度数。与 Q 的每个映射相关联的坐标 q_i 称为拉格朗日坐标。

注释 3. [11] - $\forall \nu \in \mathcal{B}$， $\exists \mathbf{r}_\nu: Q \to E_3$，即存在一种映射，将点 P_ν 的位置向量 $\mathbf{r}_\nu$ 对应到系统的任意构形：已知 Q 上的坐标 q_i ，映射 $\mathbf{r}_\nu$ 是向量函数 $\mathbf{r}_\nu$（q_i）。因此，速度为

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

.

定义 6. - [11] 完整系统的运动作用是一组向量（$\mathbf{r}_\nu$， $\dot{\mathbf{r}}_\nu$） $\nu \in \mathcal{B}$，满足：

$$\begin{cases} \mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_i) \\ \dot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_i \dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i \end{cases} \tag{3}$$

注释 4. [11] - 若 Q 是构形簇，则运动作用的集合就是切簇 TQ；事实上，运动作用的分量是一个在坐标 q_i 处与 Q 相切的向量的分量。

定义 7. [11]- 完整系统是由一些点组成的系统，这些点在所有时刻可能的构形构成一个维数为 $n+1$ 的可微簇 Q，称为构形的时空，且满足：

¯*1.* 存在一个可微函数 $t: Q \to \mathbb{R}$，它为每个构形指定其时间；*2.* 该映射满足：在时间 t的所有可能构形 Q_t 的集合是一个维数为 n的子可微簇；

3. 存在一个维数为 n 的可微簇 Q 以及一个微分同胚$\varphi:\ \mathbb{R}\times Q\ \to\ Q$，使得对于任意 $i\ \in\ \mathbb{R}$，它都会生成一个微分同胚$\varphi_t:\ Q\ \to\ Q_t:\ q\ \mapsto\ \varphi(t,q)$，连接簇 Q 与簇 Q_t。

整数 n 表示自由度的数量，种类 Q 是参考构形种类。

完整系统由受约束点或自由点组成。在动力学中，约束的作用是约束反力，称为约束反作用力，并且必须对其施加本构条件。

光滑约束由约束反力与约束本身的正交性表示。对于完整系统，若力系为 F_ν，则对于与指定构形相关的每个运动作用，都对应一个力的功率 $W=\sum_\nu \mathrm{F}_\nu\cdot\dot{\mathrm{r}}_\nu$；若力系是：

1. 主动作用力系 $\mathrm{F}_{a\nu}$，则施加与位置和速度相关的力定律，从而得到主动作用力的相应虚功率 $W_a^{(v)}$2. 若虚位移作用于约束反力系 $\mathrm{F}_{r\nu}$，则考虑约束反力的虚功率 W_r。

因此，定义如下：

定义 8. [11] - 如果一个完整系统对于所有虚位移，其约束反力的虚功率均为零，则称该系统为理想系统，或具有理想约束。

主动作用力的虚功率是分量 δq_i 的线性形式，其系数称为拉格朗日力，或主动作用力的拉格朗日分量：

$$W_a^{(v)}=\sum_\nu \mathbf{F}_{a\nu}\cdot\delta\mathbf{r}_\nu=\sum_\nu \mathbf{F}_{a\nu}\cdot\sum_i\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i=\sum_i\varphi_i\delta q_i \tag{4}$$

由此可得

$$\varphi_i=\sum_\nu \mathbf{F}_{a\nu}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \tag{5}$$

如果主动作用力是位置和速度的函数，那么拉格朗日力为 $\varphi=\varphi(\mathrm{q}\ \dot{\mathrm{q}}\ t)$。

定义 9. - [11] 力学系统的动力状态是系统各点的位置、速度和加速度随时间的分布。

每个动力状态都对应一个质量力的虚功率 $W_m^{(v)}$，质量力也称为惯性力。惯性力由牛顿定律定义

$$\mathbf{F}_{m\nu}=-m_\nu\mathbf{a}_\nu$$

惯性力的虚功率也是虚位移作用分量 δq_i的线性形式:

$$W_m^{(v)} = \sum_\nu \mathbf{F}_{m\nu} \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = -\sum_\nu m_\nu \mathbf{a}_\nu \cdot \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_i \tau_i \delta q_i \tag{6}$$

由此可得:

$$\tau_i = -\sum_\nu m_\nu \mathbf{a}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \tag{7}$$

表述 1。 [11] - **拉格朗日-达朗贝尔原理**- 对于具有理想约束的系统，在任意动力状态下，对于所有虚位移，主动作用力与惯性力的虚功率之和等于零:

$$W_a^{(v)} + W_m^{(v)} = 0 \tag{8}$$

如果一个系统（Q, $\mathcal{L}$）是拉格朗日系统，则称其为拉格朗日系统；它是一个维数为 n 的微分簇 Q，称为构形簇，并且与一个实函数 $\mathcal{L}$ 相关联: $TQ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。如果系统与时间无关，则拉格朗日量是一个函数

$$\mathcal{L} : TQ \to \mathbb{R}$$

拉格朗日动力学是由一阶 $2n$ 可微方程组 [11] 表示的曲线集合:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{dq_i}{dt} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \end{cases} \tag{9}$$

其中 $(9)_2$ 方程即为欧拉-拉格朗日方程。

对于完整系统，欧拉-拉格朗日方程的内在性质，即与拉格朗日坐标选择无关，是将拉格朗日-达朗贝尔原理应用于拉格朗日方程组的结果。

泛函是一种映射 $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$，它将所有由函数组成的 $n-$元组映射为一个实数。若对所有增长量的选取（即变分） $\delta q_i(t) \in \Omega$，都存在如下关系 [11], 则称泛函在点$q_i(t) \in \Omega$处可微:

$$\phi(q_i + \delta q_i) = \phi(q_i) + \delta\phi(q_i, \delta q_i) + \mathcal{R} \tag{10}$$

其中 $\delta\phi$ 是 δq_i 的线性泛函，而 $\mathcal{R}$ 是在相同增量下的高阶泛函。

定义10。 [11] - 如果变分 $\delta q_i(t)$ 满足以下条件，则称其为端点固定:

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \tag{11}$$

定义11。 [11] - 作用量定义为：

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\big(t, q_i(t), \dot{q}_i\big) dt \tag{12}$$

定理1. [12] -**最小作用量原理。**
函数 $q_i(t)$，对于**端点固定的变分**，若 $\delta\mathcal{A} = 0$ 对所有此类变分均成立，则该函数仅为微分方程组 (9) 的解，其中拉格朗日量只确定到坐标和时间的一个函数。

利用最小作用量原理（亦称哈密顿原理），可以建立一种研究力学系统的通用方法。在该原理中，力学系统由拉格朗日函数 $\mathcal{L}(\mathbf{q}; \dot{\mathbf{q}}\ t)$ 描述，由此可得作用量 [12]:

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}; \dot{\mathbf{q}}, t) \tag{13}$$

哈密顿原理指出，系统的运动沿着使作用量达到最小值的路径 $\mathbf{q}(t)$ 进行：

$$\delta\mathcal{A} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}; \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \tag{14}$$

该关系的证明可以从以下假设出发：作用量在 $\mathbf{q}(t)$ 处取最小值，并考虑其附近的微小变分 $\delta\mathbf{q}$。于是，对于

$$\mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t) \tag{15}$$

作用量 S 增加 [12], ，但对于 $t = t_1$ 和 $t = t_2$ ，关系式 (15) 必须具有固定值 $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ 和 $\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_2$；这一表述构成哈密顿原理的基本条件 [12]:

$$\delta\mathbf{q}(t_1) = \delta\mathbf{q}(t_2) = 0 \tag{16}$$

最小作用量原理的结果是拉格朗日微分方程：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \qquad i \in [1, n] \tag{17}$$

2.3. 非完整约束

自由点 P 在初始时刻 t_0 从任意初始位置 P_0 出发，可以发生一个微小位移 $dP = \mathbf{v}dt$；对于受约束点，由于约束 [13], 这些位移受到限制。处于时刻 t_0 初始构形的完整系统，可以在时刻 $t_0 + dt$ 过渡到另一构形，该构形与初始构形 [13] 无限接近。

定义12. [13]- 在时刻 t 从构形 C出发的可能位移，是完整约束系统的任意无穷小位移，它

使系统能够从时刻 t 的构形 C 过渡到时刻 $t+dt$ 的新构形 C'：

$$P_i = P_i(\mathbf{q};t) \mapsto P_i + dP_i = P_i(\mathbf{q}+d\mathbf{q};t+dt)$$

由此可得可能位移的 n 方程：

$$dP_i = \sum_k \frac{\partial P_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial P_i}{\partial t} dt = \nabla_{\mathbf{q}} P_i \cdot d\mathbf{q} + \frac{\partial P_i}{\partial t} dt \tag{18}$$

如果虚位移与完整约束方程（1）相耦合，而完整约束方程与位移本身相关，并由 l 方程表示，则可得：

$$df_j = \sum_k \frac{\partial f_j}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = \nabla_{\mathbf{q}} f_j \cdot d\mathbf{q} + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0 \tag{19}$$

且只能得到 $n-l$ 个自由拉格朗日坐标。除以 dt 后，可得到非完整约束关系（2）：

$$\frac{df_j}{dt} = \sum_k \frac{\partial f_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f_j}{\partial t} = \nabla_{\mathbf{q}} f_j \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial f_j}{\partial t} = \sum_k a_{jk} \dot{q}_k + b_j = (\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{q}} + b)_j = 0 \tag{20}$$

它是对运动的一种限制。

因此，位移受到限制，必须引入虚位移：

定义 13。 [13]- 虚位移是指任何假设的位移，它使系统能够从一个构形 C 过渡到另一个无限接近的构形 C'，且该过渡同时满足约束条件。

因此，对于非完整约束 $dt = 0$，关系式变为： (20)

$$\nabla_{\mathbf{q}} f_j \cdot d\mathbf{q} + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{q} = 0 \tag{21}$$

活力即动能的值，下面可以引入如下定理：

定理 2. [14]- **活力定理或柯尼希定理** - 任何运动系统的活力，等于质心的活力与相对于质心运动的活力之和。

Volterra 指出，拉格朗日量是 $\dot{\mathbf{q}}$ [14] 的显函数。

3. 结果

非完整系统这一术语由海因里希·鲁道夫·赫兹（1857—1894）于 1894 年提出，指其速度受到无法由位置约束推导出的约束的力学系统。

非完整系统与哈密顿系统或拉格朗日系统之间存在一些差异，例如 [9]:

- 非完整系统源自拉格朗日-达朗贝尔原理，而非基于哈密顿原理；
- 能量始终守恒，而动量并非总是守恒；
- 它们在相空间中的体积可能不守恒。

当某些构形变量为循环变量时，非完整系统的运动方程可写成欧拉-拉格朗日方程的形式，并通过引入与约束相关的附加项进行修正，而无需使用拉格朗日乘子。这一结果由谢尔盖·阿列克谢耶维˘奇 ˘卡普雷金（1869—1942）于1895年 [9]得出；他还认识到不变测度在非完整动力学中的重要性。

Flannery [7], 强调了一个关于非完整约束下最小作用量原理无效性的基本问题。基于前述定义和定理，本文提出了对这一问题的回应 [15, 16] 。

最小作用量原理的基础，是在固定端点（11）的假设下计算变分 [17]。

对于非完整约束 (20) 和 (21)，至少一个虚位移可以表示为其他虚位移的线性组合；即，

$$\delta q_i(t) = a_i^{-1} \sum_j a_{ij} \delta q_j \tag{22}$$

因此，作为最小作用量原理成立的基本条件，关系式 (20) 和 (21) 并不满足。

因此，对于非完整约束，使用最小作用量原理的基本条件并不成立，这证明了对于一般的非完整约束，不能使用最小作用量原理。此外，还提出了一种从热力学角度出发的替代方法。

4. 讨论与结论

所提出的证明将最小作用量原理的适用范围限定为完整约束和线性非完整约束 [7]。但是，寻找适用于一般非完整系统的替代方法也很重要。为此，可以从热力学角度提出一些考量，尤其是关于第二定律的考量。

热力学系统是一种与其环境相互作用、通过交换热量和功 [18]的物理系统。对于此类系统，可以将动能定理写成以下形式 [19, 20, 21]:

$$\delta W_{es} + \delta W_{fe} + \delta W_i = dE_k \tag{23}$$

其中， δ 表示路径相关微分， W_{es} 表示外力在系统边界上所做的功， W_{fe} 表示因外部

不可逆性而损失的功， E_k 表示系统的动能， W_i 表示内功，即：

$$\delta W_i = \delta W_i^{rev} - \delta W_{fi} \tag{24}$$

其中， rev 表示可逆（理想）内功， W_{fi} 表示因内部不可逆性而损失的功。考虑关系式 [19, 20, 21]:

$$\delta W_{se} + \delta W_{es} + \delta W_{fe} = 0 \tag{25}$$

其中， W_{se} 是系统内力在系统边界上向系统外部所做的功。因此，热力学第一定律可表示为：

$$\delta Q - \delta W_{se} = dU + dE_k \tag{26}$$

现在，将拉格朗日量定义为 [12, 11]:

$$\mathcal{L} = E_k - E_p \tag{27}$$

其中， $E_p = W_i + W_{es}$ 是势能。因此可得：

$$\mathcal{L} = E_k - (W_i + W_{es}) = W_{fe} \tag{28}$$

根据古伊-斯托多拉定理 [19, 20, 21]:

$$W_{fe} = -T_0 \int_0^\tau \Sigma \cdot dt \tag{29}$$

其中， T_0 是环境温度， Σ 是熵产生率， t 是时间。考虑过程持续时间 τ，即过程发生所用的时间 $^-$，以及熵产生率的平均值 Σ，即可采用工程热力学方法求得任意实际过程的熵产生量 S_g，如下所示：

$$S_g = \bar{\Sigma} \cdot \tau \tag{30}$$

因此，拉格朗日量为：

$$\mathcal{L} = -T_0 \, S_g \tag{31}$$

而作用量 $\mathcal{A}$ 为：

$$\mathcal{A} = -T_0 \int S_g dt \tag{32}$$

这一最后关系非常有趣，因为对于实际过程，熵产生结果总是可积的，正如工程热力学中通常所做的那样，而与位移的形式表达无关，由此得到：

$$\mathcal{A} = -T_0 \, \bar{S}_g \, \tau \tag{33}$$

因此，可以通过评估最大熵产生来应用最小作用量，而最大熵产生仅与耗散有关。这样一来，对非完整系统运动的分析就转化为对运动过程中耗散的分析。

这些思考为分析非完整约束提供了一个出发点，并提出一种热力学观点；该观点基于热力学第一定律和第二定律，从分析角度证实了文献 [22] 中强调的观点。

参考文献

[1] P. L. M. de Maupertuis，《Oeuvres de Mr De Maupertuis》。新版，修订并增补。4卷，J.-M. Bruyset，里昂，1756年。[2] L. Euler，《Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes》，Marcum-Michaelem Bousquet & Socios，洛桑与日内瓦，1744年。[3] C. F. Gauss，《Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium》，剑桥大学出版社，剑桥，1911年。[4] D. Evans、G. Morriss，《非平衡液体统计力学》，ANU EPress，澳大利亚国立大学，堪培拉，2007年。[5]E. Ramm，《最小作用量原理与最小约束原理》，GAMM-Mitteilungen 34 (2011) 164–182。doi:10.1002/gamm.201110026。[6]V. D. Sapio、O. Khatib、S. Delp，《最小作用量原理及其在机器人学与生物力学中的约束问题和任务层面问题上的应用》，《多体系统动力学》19 (2008) 303–322。doi:10.1007/s11044-007-9097-8。[7] M. R. Flannery，《非完整约束之谜》，《美国物理学杂志》73 (2005) 265–272。doi:10.1119/1.1830501。[8] A. M. Bloch、J. Marsden、D. Zenkov，《利用等谱流稳定非完整系统》，《SIAM控制杂志》38 (2000) 855–874。doi:10.1137/S0363012998335607。[9] A. M. Bloch、J. Marsden、D. Zenkov，《非完整动力学》，《美国数学会通报》52 (2005) 324–333。[10]A. M. Bloch、J. Marsden、D. Zenkov，《非完整系统中的准速度与对称性》，《SIAM控制杂志》24 (2009) 187–222。doi:10.1080/14689360802609344。[11] V. I. Arnol'd，《经典力学的数学方法》，Springer-Verlag，柏林，1989年。

[12] L. D. Landau、E. M. Lifšits，《力学》，Butterworth-Heinemann，牛津，1976年。[13] T. Levi-Civita、U. Amaldi，《理性力学讲义》第1卷，Zanichelli，博洛尼亚，1991年。[14]T. Levi-Civita、U. Amaldi，《理性力学讲义》第2卷，Zanichelli，博洛尼亚，1989年。[15] U. Lucia，非完整约束：为什么最小作用量原理不能导出方程

描述

arXiv:1102.2888v1 [physics.gen-ph](2011). 网址 https://arxiv.org/abs/1102.2888[16] U.Lucia，关于最小作用量原理和非完整约束的思考。网址 https://www.researchgate.net/publication/320720342[17] L. E. Elsgolts，《微分方程与变分法》，太平洋大学出版社，檀香山，2003年。[18] L. Borel，《热力学与能量学》，洛桑罗曼德理工出版社，洛桑，1984年。[19] A. Houberechts，《工程热力学》第1卷和第2卷，Vander，鲁汶，1975年。[20] M. Calì，P. Gregorio，《热力学》，Società Editrice Esculapio，博洛尼亚，2006年。[21] V. Giaretto，《应用热力学与传热》，CLUT，都灵，2021年。[22] F. Gay-Balmaz，H. Yoshimura，从拉格朗日力学到非平衡热力学：一种变分视角，《熵》21（2018）8。doi:10.3390/e21010008。