arXiv:2302.02837v1 [math.AG] 6 Feb 2023

弱初等纤维化

郭宁和 IVAN PANIN

摘要。我们引入了弱初等纤维化的概念，并证明它在某些有趣的情形下确实存在。我们的概念是对 M. Artin 的初等纤维化概念的修改。

1. 弱初等纤维化：定义与结果

在本节中，我们修改 M. Artin 关于良好邻域存在性的一个结果 [A] 。下面的概念是对 Artin 在 [A, Exp. XI, Déf. 3.1]中引入的概念及其在 [PSV, Defn. 2.1]中引入的版本的修改。在本预印本中，**概形** 一词指的是分离的、拟紧的、诺特的有限克鲁尔维数概形（如 [MV]中所述）。本预印本的**主要结果** 是下方紧接着陈述的定理 1.3。该定理分为两种情形：

1）闭点 $b \in B$ 处的剩余域 $k(b)$ 是有限的（定理 7.4）；2）闭点 $b \in B$ 处的剩余域 $k(b)$ 是无限的（定理 9.2）。

定义 1.1. 设 T 是一个概形。若概形态射 $q: T \to S$ 可以纳入一个满足下列条件的交换图中，则称该态射为弱初等纤维化

(1)
$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{j} & \bar{T} & \xleftarrow{i} & T_\infty \\ & {\scriptstyle q}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \bar{q}} & \swarrow{\scriptstyle q_\infty} & \\ & & S & & \end{array}$$

其中各态射满足以下条件：

(i) j 是开浸入，且在 $\bar{q}$的每个纤维中稠密，并且 $T = X - T_\infty$；(ii) $\bar{q}$ 是光滑射影态射，其所有纤维均为维数为一的等维纤维；(iii) q_∞ 是有限 ***étale*** 态射（其所有纤维均非空）；(iv) $q = pr_S \circ \pi$，其中 $\pi: T \to \mathbb{A}^1_S$ 是有限平坦满射。

图 (1) 称为弱初等纤维化 $q: T \to S$。

设 $Z \subset T$ 是一个闭子概形。若概形态射 $q: T \to S$ 是弱初等纤维化，且态射 $q|_Z: Z \to S$ 有限，则称其为弱初等 Z-纤维化。此时，图表 (1) 称为弱初等 Z-纤维化 $q: T \to S$ 的图表。

日期：2023年2月7日。2010数学学科分类：主类 14F22；次类 14F20、14G22、16K50。
关键词和短语：主丛、torsor、群概形、初等纤维化。

记号 1.2. 设 B 是一个局部正则概形，$b \in B$ 是其闭点。对于一个 B-概形 Y，记 $Y_b = Y \times_B b$。对于 B-概形之间的态射 $\varphi\colon Y' \to Y''$，记 φ_b 为 b-态射 $\varphi \times_B b\colon Y' \times_B b \to Y'' \times_B b$。

定理 1.3。设 B 是一个局部正则概形，$b \in B$ 是其闭点。设 X/B 是一个不可约的 B-光滑、B-射影概形，且相对维数为 r。设 $x \subset X$ 是一个有限闭点族。则存在 $\mathbb{A}^{r-1}_B$ 中的一个开子集 S、一个包含 x 的开子概形 $X_S \subset X$，以及一个弱初等纤维化 $q_S\colon X_S \to S$。

设 $Z \subset X$ 是一个满足 维数 $Z_b < r$ 的闭子概形。则存在 $\mathbb{A}^{r-1}_B$ 中的一个开子集 S、一个包含 x 的开子概形 $X_S \subset X$，以及一个弱初等 Z_S-纤维化 $q_S\colon X_S \to S$，其中 $Z_S = Z \cap X_S$。

定理 1.4。在定理 *1.3* 的假设下，存在一个开集 $S \subset \mathbb{A}^r_B$、X 中包含集合 $\mathbf{x}$ 的一个开邻域 $\dot{X}_S$，以及一个弱初等纤维化 $\dot{q}_S\colon X_S \to S$，并且存在一个由 S-概形组成的交换图

(2)
$$\begin{array}{ccccc} \dot{X}_S & \xrightarrow{j_S} & \hat{X}_S & \xleftarrow{i} & \mathbb{W}_S \\ & \searrow^{\dot{q}_S} & \downarrow{\scriptstyle \hat{q}_S} & \swarrow_{pr_S} & \\ & & S & & \end{array}$$

它是弱初等纤维化 $\dot{q}_S\colon X_S \to S$的一个图。

此外，若 $Z \subset X$ 如定理 *1.3* 中所述，则可以选取开集 $S \subset \mathbb{A}^r_B$、集合 $\mathbf{x}$ 在 X中的开邻域 $\dot{X}_S$、弱初等纤维化 $\dot{q}_S\colon X_S \to S$ 以及 S-概形的交换图 (2)，使得 (2) 是弱初等 Z_S-纤维化 $\dot{q}_S\colon X_S \to S$的一个图。

注 1.5。事实证明，图 (2) 还配有一个形如以下形式的 B-概形图

(3)
$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\tau} & \hat{X} & & \\ {\scriptstyle in}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle In} & & \\ \dot{X}_S & \xrightarrow{j_S} & \hat{X}_S & \xleftarrow{i_S} & \mathbb{W}_S \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \dot{Z}_S & \xleftarrow[\cong \tau]{} & \tau^{-1}(\dot{Z}_S) & \xleftarrow{} & \emptyset \end{array}$$

使得

(i) in, In 是开嵌入且 $in = \tau \circ In \circ j$; (ii) 态射 $\dot{X}_S \xleftarrow{\tau|_{\hat{X}_S - \mathbb{W}_S}} \hat{X}_S - \mathbb{W}_S$ 是良定义的，且它是一个同构; (iii) $(\tau|_{\hat{X}_S - \mathbb{W}_S}) \circ j = id_{\dot{X}_S}$ 且 $j \circ (\tau|_{\hat{X}_S - \mathbb{W}_S}) = id_{\hat{X}_S - \mathbb{W}_S}$; (iv) 态射 $j\colon X_S \to X_S - \mathbb{W}_S$ 是一个同构; (v) $\tau^{-1}(\dot{Z}_S) \cap \mathbb{W}_S = \emptyset$;

设 G 是一个约化的 B-群概形，且 $\mathcal{E}$ 是 X上的主 G-丛。在定理 1.3 的假设下，作为定理 1.4 和注 1.5 的直接推论，我们很容易得到以下结果

推论 1.6。 设 $Z \subset X$ 是定理 *1.3* 中的闭子集。考虑定理 *1.3* 和注 *1.5* 中的图表。显然，

$$\hat{X}_S = (\hat{X}_S - \mathbb{W}_S) \cup (\hat{X}_S - \tau^{-1}(\dot{Z}_S)) \cong \dot{X}_S \cup (\hat{X}_S - \tau^{-1}(\dot{Z}_S))$$

ˆ ˆ考虑 X_S 上的主 G-丛 $\mathcal{E}_S := In^*(\tau^*(\mathcal{E}))$。假设丛 $\mathcal{E}|_{X-Z}$ 是平凡的。则有如下结论

(i) 丛 ˆ $\mathcal{E}_S$ 限制到 ˆ $X_S - \tau^{-1}(\dot{Z}_S)$ 后是平凡的；(ii) $\tau^{-1}(\dot{Z}_S)$ 这个 ˆ X_S 的闭子概形是 S-有限的；ˆ(iii) 丛 $j_S^*(\mathcal{E}_S) = \mathcal{E}|_{\dot{X}_S}$；˙(iv) x 属于 X_S。

注 1.7。 我们从 X 上的主 G-丛 $\mathcal{E}$ 开始，该丛在定理 1.3 中的闭子概形 Z 之外是平凡的。于是， S 上的光滑射影曲线 X_S 、 X_S 上的 G-丛 $\mathcal{E}_S$ 、集合 x 以及闭子概形 Z 具有如下性质：

1) ($\hat{\mathcal{E}}_S)|_{\dot{X}_S}$等于 $\mathcal{E}|_{\dot{X}_S}$; ˆ2) $(\mathcal{E}_S)|_{\hat{X}_S - \tau^{-1}(\dot{Z}_S)}$ 是平凡的；˙3) x 属于 X_S; 4) ˆ X_S 的闭子概形概形 $\tau^{-1}(\dot{Z}_S)$ 是 S-有限的。

致谢。 作者感谢 POMI 国际数学中心提供的优良环境。本研究得到俄罗斯联邦科学和高等教育部资助，协议编号为 075-15-2022-289。

2. 移动引理

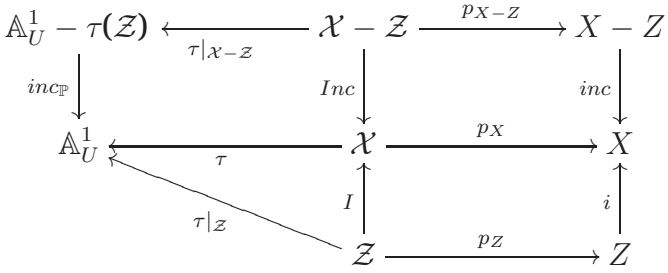
定义 2.1。 设 S 是一个仿射概形，且 $O_S = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$。回顾一下，仿射 S-概形是一个态射 $T \to S$，其具有一个仿射概形 T，使得 O_T 是有限生成的 O_S-代数。

以下结果证明见 [GPan，定理 1.2]。

定理 2.2. *(*[GPan，定理 1。2]*)* 设 R 是一个离散赋值环， X 是一个 R-光滑、 R-射影、不可约的 R-概形，且具有纯相对维数 r。设 $\mathbf{x} \subset X$ 是闭点的有限子集。令 $U = Spec(\mathcal{O}_{X,\mathbf{x}})$。设 $Z \subset X$ 是一个闭子集，且不包含 X的闭纤维的任何一般点。那么，存在一个仿射 U-光滑概形 $\mathcal{X}$，其相对维数为一，并带有一个闭子集 $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$，使其符合以下交换

图

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^1_U - \tau(\mathcal{Z}) \arrow[d, "inc_{\mathbb{P}}"'] & \mathcal{X} - \mathcal{Z} \arrow[l, "\tau|_{\mathcal{X}-\mathcal{Z}}"] \arrow[r, "p_{X-Z}"] \arrow[d, "Inc"'] & X - Z \arrow[d, "inc"'] \\
\mathbb{A}^1_U & \mathcal{X} \arrow[l, "\tau"] \arrow[r, "p_X"] & X \\
 & \mathcal{Z} \arrow[ul, "\tau|_{\mathcal{Z}}"] \arrow[u, "I"] \arrow[r, "p_Z"] & Z \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}
\tag{4}
$$



并满足以下条件

(i) τ 是一个 *étale*态射，使得 $\tau|_{\mathcal{Z}}$： $\mathcal{Z} \to \mathbb{A}^1_U$ 是闭嵌入；*(ii)* 左侧的方形是光滑 U-概形范畴中的 *Nisnevich* 方形；*(iii)* 右侧的两个方形均交换；*(iv)* 定义为 $pr_U \circ \tau$ 的结构态射 p_U： $\mathcal{X} \to U$ 允许一个 U-节 Δ： $U \to \mathcal{X}$；*(v)* 有 $p_X \circ \Delta = can$，其中 can： $U \hookrightarrow X$ 是开浸入；*(vi)* i_0： $= \tau \circ \Delta$ 是投影 pr_U： $\mathbb{A}^1_U \to U$ 的零截面 i_0： $U \to \mathbb{A}^1_U$；*(vii)* $\mathcal{Z}$ 是 U-有限的；*(viii)* $\tau(\mathcal{Z}) \cap \{1\} \times U = \emptyset$

注记 2.3. 闭子集 $Z \subset X$ 不包含闭纤维 X 的任何一般点。因此，dim $Z_b < r$。于是，$Z \subset X$ 如定理 1.3 所述。令 $B =$ Spec(R)，并令 $b \in B$ 为其闭点。

根据定理 1.4，可以选取一个开集 $S \subset \mathbb{A}^1_B$、一个开邻域 X_S，它是集合 $\mathbf{x}$ 在 X 中的开邻域，以及一个态射 $\dot{q}_S$：$X_S \to S$，使得图 (2) 是弱初等 Z_S-纤维化 $\dot{q}_S$：$X_S \to S$ 的图，其中 $Z_S = Z \cap X_S$。令 $U =$ Spec($\mathcal{O}_{X,\ \mathbf{x}}$)。

我们构造了图 (2) 右侧的方块。根据定理 1.4，它们满足性质 (iii)、(iv)、(v) 和 (vii)。

我们仍处于无限剩余域的情形（域 $k(b)$是无限的）。剩下的工作是构造左侧的方块，并验证 (i)、(ii) 和 (vi)。在无限剩余域的情形（$k(b)$是无限的），这在 [GPan 第 4]节中完成。

在有限剩余域的情形（$k(b)$ **是有限的**），有时根本不存在满足性质 (i) 的态射 τ。例如，当 $k(b) = \mathbb{F}_3$ 且 $\mathcal{Z}_b$ 的 $k(b)$-有理点数严格大于 3（例如 4 或 11）时，就会发生这种情况。在这种情形下，满足性质 (i) 至 (vii) 的图表 (4) 在 [GPan 第 3]节中构造。

定理 2.4。*(*[GPan，定理 1。3]*)* 设 R、 X、$\mathbf{x} \subset X$、 r、 $U = Spec(\mathcal{O}_{X,\ \mathbf{x}})$ 如定理 *2.2* 中所述。设**G** 是一个约化 R-群概形，且 $\mathcal{G}/X$ 是一个在 X的一般点 η 上平凡的主**G**-丛。那么存在一个定义在 $\mathbb{A}^1_U$上的主**G**-丛 $\mathcal{G}_t$，以及$\mathbb{A}^1_U$ 中的一个在 U 上有限的闭子集 $\mathcal{Z}'$，使得

(i) **G**-丛 $\mathcal{G}_t$ 在 $\mathbb{A}^1_U$ 中的开子概形 $\mathbb{A}^1_U - \mathcal{Z}'$ 上是平凡的，*(ii)* $\mathcal{G}_t$ 对 $\{0\} \times U$ 的限制与 $\mathcal{G}$ 对 U 的限制相同；*(iii)* $\mathcal{Z}' \cap \{1\} \times U = \emptyset$;

定理 *2.4* 的证明。主 G-丛 $\mathcal{G}$ 在 X 的一般点 η 上是平凡的。 [NG] 的主定理推出主 G-丛 $\mathcal{G}|_U$ 是平凡的。进而，这表明存在一个闭子集 $Z \subset X$，它避开闭纤维的所有一般点

X，并且主 G-丛 $\mathcal{G}|_{X-Z}$ 是平凡的。现在考虑定理 2.2 中的图 (4)，并取概形 $\mathbb{A}^1_U$ 的闭子概形 $\mathcal{Z}' = \tau(\mathcal{Z})$。

显然，$\mathcal{Z}'$ 在 U 上是有限的，并满足性质 (iii)。为构造所需的主 G-丛 $\mathcal{G}_t$ 在 $\mathbb{A}^1_U$ 上，注意到丛 $p_X^*(\mathcal{E})|_{\mathcal{X}-\mathcal{Z}}$ 是平凡的。由于左侧方形是光滑 U-概形范畴中的 Nisnevich 方形，存在一个主 G-丛 $\mathcal{G}_t$ 在 $\mathbb{A}^1_U$ 上，使得

1) $\tau^*(\mathcal{G}_t) = p_X^*(\mathcal{E})$;

2) $\mathcal{G}_t|_{\mathbb{A}^1_U - \mathcal{Z}'}$ 是平凡的。

现在，图 (4) 的性质 (v) 和 (vi) 表明，主 G-丛 $\mathcal{G}_t$ 满足性质 (ii)。也就是说，$\mathcal{G}_t$ 在 $\{0\} \times U$ 上的限制与 $\mathcal{G}$ 在 U 上的限制一致。

定理的证明已完成。 □

3. 定理 1.3 的有限域情形

本节的主要目的是陈述定理 3.6，该定理将在第 4 节中证明。

Notation 3.1 *Let $\mathbb{F}$ be a finite field, $n \geq 1$ an integer.* 关于…令 $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n_{\mathbb{F}}$ 为 $\mathbb{F}$ 上的射影空间。令 $S_{\mathbb{F}} = \mathbb{F}[T_0, ..., T_n]$ 为 $\mathbb{P}^n$ 的齐次坐标环。令 $S_{\mathbb{F},d} \subset S_{\mathbb{F}}$ 为 $\mathbb{F}$-次齐次多项式的子空间，令 $S_{\mathbb{F},\mathrm{hom}} = \sqcup_{d=0}^{\infty} S_{\mathbb{F},d}$ 为（不交并）。令 $f \in S_{\mathbb{F},d}$ 为一个 d 次齐次多项式。令 $H_f \subset \mathbb{P}^n$ 为由齐次理想 $(f) \subset S_{\mathbb{F}}$ 定义的 $\mathbb{P}^n$ 的闭子概形。令 X 为 $\mathbb{P}^n$ 的一个 $\mathbb{F}$-光滑射影等维子概形。令 $f_0, f_1, ..., f_r \in S_{\mathbb{F},hom}$ 为齐次多项式。令 X_i 为 X 的闭子概形，等于 $H_{f_i} \cap X$（概形交）。对于任意 $I \subset \{0, 1, ..., r\}$，记 X_I 为 X 中的概形交 $\cap_{i \in I} X_i$。

利用 [Poo] 和 [ChPoo]可以证明以下结果

定理 3.2.（*Bertini* 型定理 *3*）。设 X 是 $\mathbb{P}^n$的一个光滑射影等维子概形。设 $\underline{x} = \{x_1, ..., x_l\}$ 是 X中的一个有限闭点集。设 $r \geq 1$ 是 X的维数。存在次数分别为 $e_0, e_1, ..., e_r$的齐次多项式 $f_0, f_1, ..., f_r$，使得子概形 X_i 具有以下性质：

0) $X_{0,...,r} = \emptyset$*; 1)* 概形 $X_{2,...,r}$ 和 $X_{1,...,r}$ 分别是 $\mathbb{F}$-光滑的，维数分别为1 和 0；*3)* X_0 和 X_1 不包含 $\underline{x}$中的任何点；*3)* 对任意 $i > 1$，概形 X_i 都包含集合 $\underline{x}$;

4) 对每个 $i = 0, 1, ..., r-1$，数 e_i 整除 e_{i+1}。

设 Z是 X中的一个闭子集，且 $dim Z \leq r-1$。那么可以选取 f_0，…，$f_r \in S_{\mathrm{hom}}$使得此外 $X_{1,\ ...,\ r} \cap Z = \emptyset$ 并且 $X_{0,\ 2,\ ...,\ r} \cap Z = \emptyset$

记号 *3.3.* 设 X、$r \geq 1$、$\underline{x} \subset X$、闭子集 $Z \subset X$、齐次多项式 f_0、f_1、…、f_r 的次数分别为 e_0、e_1、…、e_r，如定理 *3.2* 中所述。对于所有满足 $j > i$ 的 i、$j = 0$、…、r，令 $d_{i,\ j} = e_j/e_i$。用 $\mathcal{O}(e)$ 表示 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e)|_X$（此处 $e \in \mathbb{Z}$）。用 $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}(e_i))$ 表示 $f_i|_X$。

设 $m \geq 0$，则用 $\mathbb{A}^m$ 表示 $\mathbb{A}^m_{\mathbb{F}}$。

令 $\dot{q} = (x_2/x^{d_{1,2}1}, ..., x_r/x^{d_{1,1}r}) : \dot{X} \to \mathbb{A}^{r-1}$;

对于 $\mathbb{A}^{r-1}$ 中的一个扎里斯基开集 S，取 $\dot{X}_S = \dot{q}^{-1}(S)$ 和 $\dot{Z}_S = Z \cap \dot{X}_S$。

设 $\mathbb{P}^{r,w}_{\mathbb{F}}$ 为权重分别为 $1, d_{0,1}, ..., d_{0,m}$ 的加权射影空间，其齐次坐标为 $[t_0 : t_1 : ... : t_m]$。记 $\mathbb{P}^{r,w}$ 为 $\mathbb{P}^{r,w}_{\mathbb{F}}$。

设 $\mathbb{P}^{r-1,w}_{\mathbb{F}}$ 为权重分别为 $1, d_{1,2}, ..., d_{1,m}$ 的加权射影空间，其齐次坐标为 $[x_1 : ... : x_m]$。记 $\mathbb{P}^{r-1,w}$ 为 $\mathbb{P}^{r-1,w}_{\mathbb{F}}$。

令 $X_{s_i} = X - X_i$, $\mathbb{P}^{r,w}_{t_i} = \mathbb{P}^{r,w} - \{t_i = 0\}$ 和 $\mathbb{P}^{r-1,w}_{x_i} = \mathbb{P}^{r-1,w} - \{x_i = 0\}$.

写作 $\dot{X}$ 对于 X_{s_1} 和 $\dot{\mathbb{P}}^{r,w}$ 对于 $\mathbb{P}^{r,w}_{t_1}$。

注意，$\mathbb{P}^{r-1,w}_{x_1}$是仿射空间 $\mathbb{A}^{r-1}$。

该识别通过将 $[x_1 : x_2 : ... : x_r]$ 映射到 $(x_2/x^{d_{1,2}1}, ..., x_r/x^{d_{1,1}r})$给出。注意，$\mathbb{P}^{r,w}_{t_0}$ 是仿射空间 $\mathbb{A}^r$。*Th*

e 识别通过将 $[t_0 : t_1 : ... : t_r]$ 映射到 $(t_1/t^{d_{0,1}0}, ..., t_r/t^{d_{0,0}r})$给出。

命题 3.4。在记号 *3.3* 下，态射

$$\pi = [s_0 : s_1 : ... : s_r] : X \to \mathbb{P}^{r,w} \tag{5}$$

是良定义且有限的。

证明。有 $X = \cup_{i=0}^r X_{s_i}$、$\mathbb{P}^{r,w} = \cup_{i=0}^r \mathbb{P}^{r,w}_{t_i}$ 以及 $\pi^{-1}(\mathbb{P}^{r,w}_{t_i}) = X_{s_i}$。由于每个 X_{s_i} 都是仿射的，态射 π 是仿射的。同时，π 是射影的。因此，π 是有限的。□

命题 3.5。在定理 *3.2* 的假设和记号 *5.4* 下，设 $M \subset X$ 是一个闭子概形，使得 $X_{1,...,r} \cap M = \emptyset$。则态射 $[s_1 : ... : s_r] : M \to \mathbb{P}^{r-1,w}$是有限的。特别地，态射 $[s_1 : ... : s_r] : Z \to \mathbb{P}^{r-1,w}$ 是有限的。

证明。它是仿射且射影的。 □

下面的部分结果将在第 4 节末证明。

定理 3.6. 在定理 *3.2* 的假设以及记号 *3.1* 和 *3.3* 下，考虑仿射簇 $\dot{X}$ 和态射 $\dot{q} : \dot{X} \to \mathbb{A}^{r-1}$。对于原点的一个开邻域 $S \subset \mathbb{A}^{r-1}$，令 $\dot{X}_S = \dot{q}^{-1}(S)$，并用 $\dot{q}_S$ 表示 $\dot{q}|_{\dot{X}_S} : \dot{X}_S \to S$。存在原点的一个扎里斯基开邻域 $S \subset \mathbb{A}^{r-1}$，使得

$$\dot{q}_S : \dot{X}_S \to S \text{ is a weak elementary } \dot{Z}_S\text{-fibration.}$$

4. 定理 1.3 的有限域情形的证明

本节的主要目标是证明定理 3.6。本节沿用第 3 节中使用的记号。

构造 4.1. 将 $\hat{}X$ 定义为 $X \times \mathbb{P}^{r-1,w}$ 的一个闭子概形，由方程 $s_j x^{d_{i,j}}_i = s^{d_{i,i}j} x_j \ (j > i)$ 给出。我们将 $\hat{}X$ 视为在子概形 $\underline{w}$处对 X 进行的加权爆破。

若 $\mathbb{P}^{r,w}$ 是命题 *3.4* 的加权射影空间，则方程 $t_j x^{d_{i,j}}_i = t^{d_{i,i}j} x_j$定义。我们将 $\hat{}\mathbb{P}^{r,w}$ 视为 $\mathbb{P}^{r,w}$ 在点 $\mathbf{0} := [1 : 0 : ... : 0]$ 处的加权爆破。

投影 $X \times \mathbb{P}^{r-1,\ w} \to \mathbb{P}^{r-1,\ w}$ 和 $\mathbb{P}^{r,\ w} \times \mathbb{P}^{r-1,\ w} \to \mathbb{P}^{r-1,\ w}$ 诱导出态射 $\hat{q}: \hat{X} \to \mathbb{P}^{r-1,\ w}$ 和 $\hat{p}: \hat{\mathbb{P}}^{r,\ w} \to \mathbb{P}^{r-1,\ w}$，从而可以将概形 $\hat{X}$ 和 $\hat{\mathbb{P}}^{r,\ w}$ 视为$\mathbb{P}^{r-1,\ w}$-概形。态射 $\pi \times id$: $X \times \mathbb{P}^{r-1,\ w} \to \mathbb{P}^{r,\ w} \times \mathbb{P}^{r-1,\ w}$ 诱导出一个态射

$$\hat{\pi}: \hat{X} \to \hat{\mathbb{P}}^{r,w}.$$

这是一个 $\mathbb{P}^{r-1,w}$-概形的态射。令 $\hat{X}_{x_1} = q^{-1}(\mathbb{P}^{r-1}_{,x_1}{}^{w})$ 和 $\hat{\mathbb{P}}^{r,w}_{x_1} = p^{-1}(\mathbb{P}^{r-1}_{,x_1}{}^{w})$。回顾一下，$\mathbb{P}^{r-1}_{,x_1}{}^{w}$ 是仿射空间 $\mathbb{A}^{r-1}$。

考虑带权 $\mathbb{P}^{1,w}$，其加权齐次坐标为 $[t_0 : t_1]$，权重分别为 1、e_1/e_0。令 $d_1 = e_1/e_0$。已知 $\mathbb{P}^{1,w}$ 与带齐次坐标 $[t_0^{d_1} : t_1]$ 的 $\mathbb{P}^1$ 同构。特别地，$\mathbb{P}^{1,w}$ 是光滑的。考虑一个态射

$$\varphi: \hat{\mathbb{P}}^{r,w}_{x_1} \to \mathbb{P}^{1,w} \times \mathbb{A}^{r-1}$$

由 $([t_0 : \ldots : t_m], [x_1 : \ldots : x_m]) \mapsto ([t_0 : t_1], (x_2/x^{d_{1,2}\,1}, \ldots, x_m/x^{d_{1,1}\ m}))$ 给出。考虑一个态射

$$\psi: \mathbb{P}^{1,w} \times \mathbb{A}^{r-1} \to \hat{\mathbb{P}}^{r,w}_{x_1}$$

给定 通过 $([t_0 : t_1],\ (y_2, \ldots, y_m)) \mapsto ([t_0 : t_1 : t^{d_{1,1}\ 2} y_2 : \ldots : t^{d_{1,1}\ m} y_m],\ [1 : y_2 : \ldots : y_m])$。

引理 4.2。态射 φ 和 ψ 是良定义的，并且它们互为逆同构。此外，它们是 $\mathbb{A}^{r-1}$-概形的同构。

推论 4.3。概形 $\mathbb{P}^{r,\ w}_{x_1}$ 是光滑的。

该态射 $sm\ \hat{p}: \hat{\mathbb{P}}^{r,\ w}_{x_1} \to \hat{\mathbb{P}}^{r-1,\ w}_{x_1} = \mathbb{A}^{r-1}$ 是光滑射影概形，且以 $\mathbb{P}^{1,\ w} \cong \mathbb{P}^1$ 为纤维.

记号 4.4. 投影 $X \times \mathbb{P}^{r-1,w} \to X$ 和 $\mathbb{P}^{r,w} \times \mathbb{P}^{r-1,w} \to \mathbb{P}^{r,w}$ 分别诱导态射$\tau: \hat{X} \to X$ 和 $\sigma: \hat{\mathbb{P}}^{r,w} \to \mathbb{P}^{r,w}$。令 $E_w = \tau^{-1}(\underline{w})$，$E_0 = \sigma^{-1}(\mathbf{0})$。

注 4.5. 注意，$\sigma \circ \hat{\pi} = \pi \circ \tau$。显然，态射 $\tau: X - E_w \to X - \underline{w}$ 和 $\hat{\sigma}: \mathbb{P}^{r,w} - E_0 \to \mathbb{P}^{r,\ w} - \{0\}$ 都是同构。

注意，$X = (X - \underline{w}) \cup X_{s_0}$ 和 $\mathbb{P}^{r,w} = (\mathbb{P}^{r,w} - \mathbf{0}) \cup \mathbb{P}^{r}_{,t_0}{}^{w}$。

命题 4.6. 以下结论成立

1) 态射 $\tau: X_{x_1} - (E_w)_{x_1} \to X$ 和 $\sigma: \mathbb{P}^{r}_{,x_1}{}^{w} - (E_0)_{x_1} \to \mathbb{P}^{r,w}$ 是同构；

2) 概形 $X_{x_1} - (E_w)_{x_1}$，$\mathbb{P}^{r}_{,x_1}{}^{w} - (E_0)_{x_1}$，$X$和 $\mathbb{P}^{r,w}$ 都是光滑的。

证明。第一个断言显然。证明第二个断言。概形 X 光滑。因此，概形 X 和 $X_{x_1} - (E_w)_{x_1}$ 也光滑。根据推论 4.3，概形 $\mathbb{P}^{r,\ w}_{x_1}$光滑。因此，概形 $\mathbb{P}^{r,\ w}_{x_1} - (E_0)_{x_1}$ 和 $\mathbb{P}^{r,\ w}$也光滑。□

引理 4.7。设 $X_{s_0} \xrightarrow{\pi_0} \mathbb{P}^{r,\ w}_{t_0} = \mathbb{A}^r$ 是态射 $\pi: X \to \mathbb{P}^{r,\ w}$的基变换。那么 π_0 是有限平坦的。

证明。根据命题 3.4，态射 π 是有限满射。因此，作为 π的基变换，态射 π_0 是有限满射。由于 X_{s_0} 和 $\mathbb{A}^m$ 光滑，可知 π_0是平坦的，而且它也是有限的。□

引理 4.8。态射 $\hat{\pi}_{x_1}: X_{x_1} \to \mathbb{P}^{r}_{,x_1}{}^{w}$是有限平坦的。

^ ^ ^ ^ ^ ^证明。 有 $X_{x_1} = (X - E_w)_{x_1} \cup (X_{s_0})_{x_1}$, $\mathbb{P}^{r,w}_{x_1} = (\mathbb{P}^{r,w} - E_0)_{x_1} \cup (\mathbb{P}^{r,w}_{t_0})_{x_1}$。因此^ ^ 只需验证态射 $(\hat{X} - E_w)_{x_1} \xrightarrow{\pi_{x_1}} (\hat{\mathbb{P}}^{r,w} - E_0)_{x_1}$ 和 $(\hat{X}_{s_0})_{x_1} \xrightarrow{\pi_{x_1}} (\hat{\mathbb{P}}^{r,w}_{t_0})_{x_1}$ 是有限平坦的。

$\xrightarrow{\pi_0}$ ^ ^ 态射 π_0 是 根据引理 4.7 是有限平坦的。 因此它也是有限平坦的。 最后，态射 $\hat{\pi}_{x_1} : (\hat{X}_{s_0})_{x_1} \to (\hat{\mathbb{P}}^{r,w}_{t_0})_{x_1}$是态射 $\hat{\pi}_0$ 的基变换。因此它也是有限平坦的。

态射 $X - w = \hat{X} - E_w \to \hat{\mathbb{P}}^{r,w} - E_0 = \mathbb{P}^{r,w} - [1 : 0 : \ldots : 0]$ 是有限满射。^ ^ 因此，态射 $X_{x_1} - (E_w)_{x_1} \to \mathbb{P}^{r,w}_{x_1} - (E_0)_{x_1}$ 是有限满射。根据命题 6.4 的第二项，源和目标都是光滑概形。因此，态射 ^ ^$X_{x_1} - (E_w)_{x_1} \to \mathbb{P}^{r,w}_{x_1} - (E_0)_{x_1}$ 是平坦且有限的。因此，$\hat{\pi}_{x_1}$ 是有限平坦的。□

引理 4.9. 态射 $\hat{q} : \hat{X}_{x_1} \to \hat{\mathbb{P}}^{r-1,w}_{x_1} = \mathbb{A}^{r-1}$ 是平坦射影的。

证明. 我们知道 $\hat{q} = \hat{p} \circ \hat{\pi}_{x_1}$。现在应用引理 4.8 和推论 4.3。 □

^**命题 4.10.** 概形 X_{x_1} 是光滑的。

证明. 根据引理 4.7，态射 π_0 是有限平坦的。根据定理 3.2，概形 $\pi_0^{-1}(\{0\}) = X_{1,\ldots,m} = \underline{w}$是零维光滑的。因此， π_0 在原点 $\{0\}$之上是 étale 的。所以，我们可以取一个包含 $\{0\}$ 的扎里斯基开集 $U \subset \mathbb{A}^m$，使得对于 $W = \pi_0^{-1}(U)$，态射 ^ ^ ^ ^$\pi_0 : W \to U$ 是有限 étale 的。于是，态射 $\hat{\pi}_0 : W \to U$ 和 $(\hat{\pi}_0)_{x_1} : W_{x_1} \to U_{x_1}$ 作为 π_0的基变换，都是 ^ ^ 有限 étale 的。注意， U_{x_1} 在 $\mathbb{P}^{r,w}_{x_1}$ 中是开集，而后者根据推论 4.3 是光滑的。因此， U_{x_1} 是光滑的，其 étale 覆盖 W_{x_1} 也如此。

可知 $\hat{X} - E_w)_{x_1} = (\hat{X} - E_w)_{x_1}$。我们已经知道命题 4.3 是光滑的。因此， X_{x_1} 是光滑的。□

回忆一下，$\hat{p} : \hat{\mathbb{P}}^{r,w}_{x_1} \to \mathbb{P}^{r-1,w}_{x_1} = \mathbb{A}^{m-1}$ 是光滑射影的，其纤维为射影直线 $\mathbb{P}^1$。对于态射 $\hat{q} : \hat{X}_{x_1} \to \mathbb{P}^{r-1,w}_{x_1}$，有 $\hat{q} = \hat{\pi}_{x_1} \circ \hat{p}$。

命题 4.11. 设 $C = \hat{q}^{-1}(\{0\})$。则
1) C 是光滑射影曲线；*2)* $\tau|_C : C \to X$ 是闭嵌入；*3)* $\tau(C)$ 与 X 中的光滑闭一维子概形 $X_{2,\ldots,m}$ 重合。

证明。 令 U 和 W 如命题 4.10 的证明中所述。证明第一个断言。存在一个开覆盖 $C = (C - E_{\underline{w}}) \cup (C \cap W)$。注意到 $\tau : C - E_{\underline{w}} \to X_{2,\ldots,m} - \underline{w}$ 是同构。由于 $X_{2,\ldots,m}$ 是光滑的，因此 $C - E_{\underline{w}}$也光滑。

映射 $\hat{\pi} : \hat{W} \to \hat{U}$ 是有限 étale。因此 $C \cap \hat{W} \to (\mathbb{P}^1 \times \{0\}) \cap \hat{U}$也是有限 étale。由于 $\mathbb{P}^1$^ 光滑，因此 $C \cap W$ 也光滑。于是 C 光滑。由于 C 是 X 中的闭子概形，它是射影的。

证明第二个断言。令 $l := \hat{p}^{-1}(\{0\})$。由推论 4.3 $\sigma|_l$， $l \to \mathbb{P}^{r,w}$ 将l 与闭子概形 $\mathbb{P}^{r,w}_{2,\ldots,m} := \{t_2 = t_3 = \ldots = t_m = 0\}$对应起来。特别地， $\sigma|_l : l \to \mathbb{P}^{r,w}$^ 是一个闭嵌入，且 $\sigma|_l : l \cap U \to U$ 也是一个闭嵌入。令 $\tau_C := \tau|_C$。有 $X = (X - \underline{w}) \cup W$。因此 $C = \tau_C^{-1}(X - \underline{w}) \cup \sigma_C^{-1}(W) = (C - E_{\underline{w}}) \cup (C \cap \hat{W})$。由于 $\hat{\tau}_C : C - E_{\underline{w}} \to X - \underline{w}$ 是一个闭嵌入，只需验证 $\tau_C : (C \cap W) \to W$

是一个闭嵌入。但这个态射是闭嵌入 $\hat{}\,\hat{}\sigma|_l\colon (l\cap U)\to U$的基变换。因此，态射 $\tau_C\colon (C\cap W)\to W$ 确实是一个闭嵌入。

$\hat{}$ 证明第三个断言。态射 $\tau\colon X\to X$ 是通过 π 对态射 $\hat{}\,\hat{}\sigma:\mathbb{P}^{r,w}\to\mathbb{P}^{r,w}$ 进行基变换得到的。闭嵌入 $j_C\colon C\hookrightarrow X$ 是通过 $\hat{}\pi$ 对 $j_l\colon l\hookrightarrow\mathbb{P}^{r,w}$ 进行基变换得到的。因此，$\tau_C\colon C\hookrightarrow X$ 是通过 π 对 $\sigma|_l\colon l\hookrightarrow\mathbb{P}^{r,w}$ 进行基变换得到的。回忆一下，$\sigma|_l$ 将 l 识别为 $\mathbb{P}^{r,\overset{w}{2\ldots},m}$。于是 τ_C 将 C 识别为概形 X 的子概形 $\pi^{-1}(\mathbb{P}^{r,\overset{w}{2\ldots},m})=X_{2,\ldots,m}$。□

推论 4.12。存在原点 $0\in\mathbb{A}^{r-1}$ 的一个扎里斯基开邻域 S，使得对于 $\hat{}\,X_S:=\hat{}\,q^{-1}(S)$，态射 $\hat{}\,q:\hat{}\,X_S\to S$ 是光滑射影的。

记号 4.13。将 j 记为复合映射 $\dot{X}\xrightarrow{\tau^{-1}}\hat{}\,X_{x_1}-(E_w)_{x_1}\hookrightarrow\hat{}\,X_{x_1}$，其中 τ 是命题 *6.4* 中的同构。那么 j 是一个开嵌入。

记 $\hat{Z}$ 对于 $\tau^{-1}(Z)\subset\hat{X}$。由于 $Z\cap\underline{w}=\emptyset$ 态射 τ 将 $\hat{}\,j$ 将 $Z:=Z_{s_1}$ 与 Z_{x_1} 等同。此外 $\hat{Z}$ 与 Z 等同。

输入 $\dot{q}=\hat{}\,q\circ j:\dot{X}\to\mathbb{P}^{r-1,\ \overset{w}{x_1}}=\mathbb{A}^{r-1}$。

Writ 且对于闭嵌入 $\mathbb{A}^{r-1}\times\underline{w}=(E_{\underline{w}})_{x_1}\hookrightarrow\hat{}\,X_{x_1}$，令 $q_\infty=\hat{}\,q\circ i$。

引理 4.14。态射 $\dot{q}|_{\dot{Z}}:\dot{Z}\to\mathbb{A}^{m-1}$ 是有限的。态射 q_∞ 是有限 *étale* 的。

证明。态射 $q|_{Z_{s_1}}$ 是仿射且射影的。因此它是有限的。□

考虑如下交换图

(6)
$$\begin{array}{ccccc}\dot{X} & \xrightarrow{j} & \hat{X}_{x_1} & \xleftarrow{i} & \mathbb{A}^{r-1}\times\underline{w}\\ & \searrow^{\dot{q}} & \downarrow{\scriptstyle\hat{q}} & \swarrow_{q_\infty} & \\ & & \mathbb{A}^{r-1} & & \end{array}$$

态射 $\hat{}\,q$ 是平坦射影的。态射 q_∞ 是有限 étale 的。态射 i $\hat{}$ 是一个闭嵌入，态射 j 是一个开嵌入，将 X 与 $X_{x_1}-i(\mathbb{A}^{r-1}\times\underline{w})$ 识别。闭集 $\underline{x}$ 包含于 X_{s_1}中。若 $Z\subset X$ 如定理 3.2 中所述，则根据引理 4.14，$\dot{Z}\subset X_{s_1}$以及 $\dot{Z}$ 在 $\mathbb{A}^{r-1}$ 上是有限的。

定理 4.15. 设 $S\subset\mathbb{A}^r$ 如推论 *4.12* 中所述。那么在记号 *3.3* 下，通过开嵌入 $S\hookrightarrow\mathbb{A}^{r-1}$ 对图式 (6) 作基变换后，

(7)
$$\begin{array}{ccccc}\dot{X}_S & \xrightarrow{j_S} & \hat{X}_S & \xleftarrow{i} & S\times\underline{w}\\ & \searrow^{\dot{q}_S} & \downarrow{\scriptstyle\hat{q}_S} & \swarrow_{\mathrm{pr}_S} & \\ & & S & & \end{array}$$

是弱初等纤维化 $\dot{q}_S:X_S\to S$ 与 $\underline{x}\subset X_S$ 的图式。此外，若 $Z\subset X$ 如定理 *3.2* 中所述，则 $\dot{q}:X_S\to S$ 是弱初等 Z_S-纤维化。

证明. 这由推论 4.12 和引理 4.14 得出。□

显然，定理 4.15 推出以下结论

推论 4.16. *[= 定理 3.6] 在定理 3.2、4.15 和记号 3.3 的记号与假设下，考虑仿射簇 $\dot{X}$ 和态射 $\dot{q}\colon \dot{X} \to \mathbb{A}^{r-1}$。那么，对于推论 4.12 中原点的开邻域 $S \subset \mathbb{A}^{r-1}$，以及 $Z_S = Z \cap X_S$，态射 $\dot{q}_S\colon X_S \to S$ 是一个弱初等 Z_S-纤维化。*

5. 定理 1.3 的无限域情形

本节中，k 是无限域，$n \geq 1$。令 $\mathbf{P}^n_k$ 为具有齐次坐标 $T_0, ..., T_n$ 的射影空间。令 $r \geq 1$ 和 $d \geq 1$。考虑向量空间 $S_{k,\,d}$，它由系数属于 k、变量为 $T_0, ..., T_n$ 的 d 次齐次多项式组成。对于每个 i，记 T_i 为 $T_i|_X$。那么，X 的齐次坐标 k-代数 $k[X]$ 是 $k[T_0, ..., T_n]$。

记号 *5.1.* 令 k 为无限域，$n \geq 1$ 为整数。令 $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n_k$ 为 k 上的射影空间。令 $S_k = k[T_0, ..., T_n]$ 为 $\mathbb{P}^n$ 的齐次坐标环。令 $S_{k,d} \subset S_k$ 为 k-子空间，其元素为次数 d 的齐次多项式；令 $S_{k,\mathrm{hom}} = \sqcup_{d=0}^{\infty} S_{k,d}$（不交并）。令 $f \in S_{k,d}$ 为次数 d 的齐次多项式。令 $H_f \subset \mathbb{P}^n$ 为 $\mathbb{P}^n$ 的闭子概形，它由齐次理想 $(f) \subset S_k$ 定义。令 X 为 $\mathbb{P}^n$ 的一个 k- 光滑射影等维子概形，其维数为 r。令 $W \subset S_{k,d} \subset S_{k,\mathrm{hom}}$ 为维数 r 的向量 k-子空间。令 $\mathbf{f} = \{f_1, ..., f_r\}$ 为 W 的一个自由 k-基。令 X_i 为 X 与 $H_{f_i} \cap X$ 的闭子概形（概形交）。对于任意 $I \subset \{0, 1, ..., r\}$，记 X_I 为 X 中的概形交 $\cap_{i \in I} X_i$。记 $\underline{w} = X_{1,...,r}$ 为 X 中的闭子概形。记 $\mathcal{O}(d)$ 为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_X$。对于 f_i，记 $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}(d))$ 为 $f_i|_X$。闭子概形 $\underline{w} = X_{1,...,r} \subset X$ 仅取决于 W。

将 [A, Exp. XI, Thm. 2.1] 中的论证加以推广，可得如下 Bertini 型结果（见 [PSV]）

定理 5.2. 设 k 是一个代数闭域，且 $X \subset \mathbf{P}^n_k$ 是一个纯维数为 $r \geq 1$ 的光滑闭子概形。设 $\mathbf{x} \subset X$ 是一个闭点有限子集。对于记号 *5.1* 中的每个整数 $d \gg 0$，对一**般的** 维数为 r 的向量子空间 W，其中 $S_{k,d}$，以及 W 的一**般的** 自由 k-基 $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_r\}$，下述结论成立

(i) 概形 w 是 k-光滑的零维概形，且 $w \cap X_0 = \emptyset$；*(ii)* $\pi|_{\mathbf{x}} : \mathbf{x} \to \mathbb{P}^r$ 是闭嵌入，其中 $\pi = [s_0 : ... : s_r] : X \to \mathbb{P}^r$；*(iii)* 对每个 $x \in \mathbf{x}$，都有 $s_2(x) \neq 0 \neq s_1(x)$；特别地，$\mathbf{x} \cap w = \emptyset$ 且 $\mathbf{x} \subset X_{s_2}$；*(iv)* 对每个 $x \in \mathbf{x}$，由方程 $\{s_1(x)s_i = s_i(x)s_1\}$ 定义的 X 的闭子概形（其中 $i \in \{2, ..., r\}$）是光滑的一维概形。

设 $Z \subset X$ 是满足 $dim Z < r$ 的闭子集。则可以选取 W 和上述 $\mathbf{f}$，使性质 *(i)* 至 *(iv)* 成立，并且满足以下条件：*(v)* $w \cap Z = \emptyset$；特别地，$Z \subset X - w$，且映射 $q = [s_1 : ... : s_r] : Z \to \mathbb{P}^{r-1}$ 是有限的。

由此定理立即可得以下结论

推论 5.3. 设 k 为一个无限域。设 $X \subset \mathbf{P}_k^n$ 为一个纯维数为 r 的 k-光滑闭子概形。设 $\mathbf{x} \subset X$ 为一个由闭点组成的有限集合。对于记号 *5.1* 中的每个整数 $d \gg 0$，对于一个一般的维数为 r 的向量子空间 W，其中 $S_{k,\,d}$ 并且对于一个一般的自由 k-基 $\boldsymbol{f} = \{f_1, \ldots, f_r\}$，以下结论成立

(i) 概形 $w := X_{\underline{1},\ldots,r}$ 是 k-光滑的，维数为零，且 $w \cap X_0 = \emptyset$；*(ii)* $\pi|_{\mathbf{x}} : \mathbf{x} \to \mathbb{P}^r$ 是闭嵌入，其中 $\pi = [s_0 : \ldots : s_r] : X \to \mathbb{P}^r$；*(iii)* $\mathbf{x} \subset X_{s_1} \cap X_{s_2}$；特别地，$\mathbf{x} \cap w = \emptyset$ 且 $\mathbf{x} \subset X_{s_2}$；*(iv)* 对每个点 $x \in \mathbf{x} \otimes_k k$，由方程 $\{s_1(x) s_i = s_i(x) s_1\}$ 定义的 $X \otimes_k k$ 的闭子概形，其中 $i \in \{2, \ldots, r\}$，都是光滑的一维概形。

设 $Z \subset X$ 是一个闭子集，且 $dim Z < r$。那么可以选择上文的 W 和 $\mathbf{f}$，使得性质 *(i)* 至 *(iv)* 成立，并且以下条件也成立：*(iv)* $w \cap Z = \emptyset$；特别地，$Z \subset X - w$，且映射 $q|_Z : Z \to \mathbb{P}_k^{r-1}$ 是有限的。

本节余下部分中，域 k 是无限的。本节下文将使用记号 5.1。

记号 *5.4*。设 X、$r \geq 1$、$\mathbf{x} \subset X$、闭子集 $Z \subset X$、整数 $d \gg 0$、一般维数 r、向量子空间 W、S_k 中的 d 以及 W 的一般自由 k-基 $\boldsymbol{f} = \{f_1, \ldots, f_r\}$ 如定理 *5.2* 中所述。用 $\mathcal{O}(d)$ 表示 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_X$。用 $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}(e_i))$ 表示 $f_i|_X$。设 $m \geq 0$，则用 $\mathbb{A}^m$ 表示 $\mathbb{A}_k^m$。令 $\dot{q} = (s_2/s_1, \ldots, s_r/s_1) : \dot{X} \to \mathbb{A}^{r-1}$；对于 $\mathbb{A}^{r-1}$ 中的扎里斯基开集 S，令 $\dot{X}_S = \dot{q}^{-1}(S)$ 和 $\dot{Z}_S = Z \cap \dot{X}_S$。设 $\mathbb{P}^r := \mathbb{P}_k^r$ 为齐次坐标是 $[t_0 : t_1 : \ldots : t_r]$ 的射影空间。设 $\mathbb{P}^{r-1} := \mathbb{P}_k^{r-1}$ 为齐次坐标是 $[x_1 : \ldots : x_r]$ 的射影空间。令 $X_{s_i} = X - X_i$、$\mathbb{P}_{t_i}^r = \mathbb{P}^r - \{t_i = 0\}$ 和 $\mathbb{P}_{x_i}^{r-1} = \mathbb{P}^{r-1} - \{x_i = 0\}$。

用 X 表示 X_{s_1}，用 $\mathbb{P}^r$ 表示 $\mathbb{P}_{t_1}^r$。注意，$\mathbb{P}_{x_1}^{r-1}$ 是仿射空间 $\mathbb{A}^{r-1}$。该对应将 $[x_1 : x_2 : \ldots : x_r]$ 映至 $(x_2/x_1, \ldots, x_r/x_1)$。注意，$\mathbb{P}_{t_0}^r$ 是仿射空间 $\mathbb{A}^r$。该对应将 $[t_0 : t_1 : \ldots : t_r]$ 映至 $(t_1/t_0, \ldots, t_r/t_0)$。

命题 5.5. 在记号 *5.4* 下，态射

$$\pi = [s_0 : s_1 : \ldots : s_r] : X \to \mathbb{P}^r \tag{8}$$

是良定义且有限的。

证明. </style}有 $X = \cup_{i=0}^r X_{s_i}$、$\mathbb{P}^r = \cup_{i=0}^r \mathbb{P}_{t_i}^r$ 和 $\pi^{-1}(\mathbb{P}_{t_i}^r) = X_{s_i}$。由于每个 X_{s_i} 都是仿射的，态射 π 是仿射的。同时，π 是射影的。因此，π 是有限的。□

命题 5.6. 在定理 *3.2* 和记号 *5.4* 的假设下，设 $M \subset X$ 是一个闭子概形，使得 $\underline{w} \cap M = \emptyset$。那么态射 $[s_1 : \ldots : s_r] : M \to \mathbb{P}^{r-1}$ 是有限的。特别地，态射 $[s_1 : \ldots : s_r] : Z \to \mathbb{P}^{r-1}$ 是有限的。

证明. 它是仿射且射影的。 □

以下部分结果将在第 6 节末尾证明。

定理 5.7. 在定理 *5.2* 的假设下，记号 *5.1* 和 *5.4* 对每个整数 $d \gg 0$，对于 S_k 中的**一般的**维数 r 向量子空间 W，d 以及**一般的**自由k-基 $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_r\}$， W以下结论成立。

对于仿射簇 $\dot{X}$ 及态射 $\dot{q}$： $\dot{X} \to \mathbb{A}^{r-1}$，存在有限集 $\dot{q}(\mathbf{x})$ 的一个扎里斯基开邻域 $S \subset \mathbb{A}^{r-1}$，使得

$$\dot{q}_S : \dot{X}_S \to S \text{ is a weak elementary } \dot{Z}_S\text{-fibration.}$$

6. 定理 1.3 的无限域情形的证明

本节的主要目标是证明定理 5.7。本节沿用第 5 节中的记号。

构造 6.1。 在记号 *5.4* 下，将 X ˆ定义为 $X \times \mathbb{P}^{r-1}$ˆ的一个闭子概形，其方程为 $s_j x_i = s_i x_j$。我们将 X 视为沿着 X 在 ***étale over*** $\mathrm{Spec}(k)$子概形$\underline{w}$ 处的爆破。

ˆ若 $X = \mathbb{P}^r$ 是命题 *5.5* 中的射影空间，则 $\mathbb{P}^r$ 是 $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^{r-1}$ 的一个闭子概形，其方程为 $t_j x_i = t_i x_j$。我们将 ˆ$\mathbb{P}^r$视为 $\mathbb{P}^r$ 在点 $\mathbf{0} := [1 : 0 : \dots : 0]$处的加权爆破。

投影 $X \times \mathbb{P}^{r-1} \to \mathbb{P}^{r-1}$诱导出一个态射 ˆ$q$: ˆ$X \to \mathbb{P}^{r-1}$，从而可以将概形 ˆ$X$ 视为一个 $\mathbb{P}^{r-1}$-概形。令 $[x_1 : \dots : x_r]$ 为 $\mathbb{P}^{r-1}_k$ 上的齐次坐标。设 $\mathbb{P}^{r-1}_{x_i} = \mathbb{P}^{r-1} - \{x_i = 0\}$。显然，$\mathbb{P}^{r-1}_{x_1} \cong \mathbb{A}^{r-1}_k$。只需将 $[x_1 : x_2 : \dots : x_r]$ 与 $(x_2/x_1, \dots, x_r/x_1)$对应起来。设 ˆ $X_{x_1} =$ ˆ$q^{-1}(\mathbb{P}^{r-1}_{x_1})$。 $X \subset \mathbb{P}^n_k$、 W和 $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_r\}$ 与推论 5.3 中的相同。特别地，w 是 Spec(k)上的有限 étale 概形。令 $[x_1 : \dots : x_r]$ 为上述 $\mathbb{P}^{r-1}_k$、 $\mathbb{P}^{r-1}_{x_i} = \mathbb{P}^{r-1} - \{x_i = 0\}$和 $\mathbb{P}^{r-1}_{x_1} \cong \mathbb{A}^{r-1}_k$ 上的齐次坐标。只需将 $[x_1 : x_2 : \dots : x_r]$ 与 $(x_2/x_1, \dots, x_r/x_1)$对应起来。如上所述，记 ˆ X_{x_1} 为 ˆ$q^{-1}(\mathbb{P}^{r-1}_{x_1})$。

记号 6.2. 投影 $X \times \mathbb{P}^{r-1} \to X$ 和 $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^{r-1} \to \mathbb{P}^r$ 分别诱导一个态射ˆ ˆτ： $X \to X$ 和 σ： $\mathbb{P}^r \to \mathbb{P}^r$。将 $\mathbb{P}^r$ 中的 $0]$ 记作 $\mathbf{0}$ $[1 : 0 : \dots :$。令$E_w = \tau^{-1}(w)$ 和 $E_0 = \sigma^{-1}(\mathbf{0})$。

注意， $E_w = \mathbb{P}^{r-1} \times_{pt} w$，其中 pt 表示 $\mathrm{Spec}(k)$;
将ˆ$X \xleftarrow{i} E_w = \mathbb{P}^{r-1} \times_{pt} w$记作闭嵌入。
将 X_{s_i} 记作 $X - X_i$，并将 记作 $X\, X_{s_1}$。
设 $Z \subset X$ 是一个闭子集，且 $Z \subset X - w$。令 $Z = Z \cap X$。

ˆ**注释 6.3.** 显然，态射 τ: $X - E_w \to X - \underline{w}$是一个同构。令 ˆ$Z$表示 $\tau^{-1}(Z)$ 和 $Z_{x_1} =$ ˆ$Z \cap$ ˆX_{x_1}。

ˆ **命题 6.4.** 令 $\tau_1 = \tau|_{\hat{}X_{x_1} - (E_w)_{x_1}} : X_{x_1} - (E_w)_{x_1} \to X$。那么

ˆ *1*）态射 $\tau_1 : X_{x_1} - (E_w)_{x_1} \to X$ 是一个同构；ˆ *2*）概形 $X_{x_1} - (E_w)_{x_1}$ 和 X 是 k- 光滑的。ˆ *3*）态射 $\tau_1|_{\hat{Z}_{x_1}} : Z_{x_1} \to Z$ 是一个同构。

记号 6.5。 将 $j : \dot{X} \hookrightarrow$ ˆX_{x_1} 记作 $\dot{X} \xrightarrow{\tau^{-1}}$ ˆ$X_{x_1} - (E_w)_{x_1} \hookrightarrow$ ˆX_{x_1}.
ˆ显然， $j|_{\dot{Z}}$ 将 Z 与 Z_{x_1}对应起来；

令 $\dot{q} = \hat{q} \circ j$: $\dot{X} \to \mathbb{A}_k^{r-1}$; 显然, $\dot{q} = (s_2/s_1, ..., s_r/s_1)$; 对于 $\mathbb{A}_k^{r-1}$ 中的开集 S, 记$\dot{X}_S$ 为 $\dot{q}^{-1}(S)$, $\hat{} X_S$ 为 $\hat{q}^{-1}(S)$; $\dot{Z}_S$ 为 $Z \cap \dot{X}_S$; $\hat{} Z_S$ 为 $\hat{Z} \cap \hat{X}_S$; 显然, $\dot{X}_S = j^{-1}(\hat{} X_S)$; $\dot{\hat{}}$ 令 $\dot{q}_S = \dot{q}|_{\dot{X}_S}$: $X_S \to S$, 且 $\hat{q}_S = \hat{q}|_{\hat{X}_S}$: $X_S \to S$, 以及 $j_S = j|_{\dot{X}_S}$: $X_S \hookrightarrow X_S$; $\dot{\hat{}}$ 显然, $j_S|_{\dot{Z}_S}$ 将 Z_S 与 Z_S对应起来; 显然, $\dot{q}_S = \hat{q}_S \circ j_S$: $X_S \to S$; $\hat{}$令 $X_S \leftarrow S \times_{pt} w$: $i_S = i \times_{pt} w$; 显然, $\hat{q}_S \circ i_S = pr_S$: $S \times_{pt} w \to S$。

定理 6.6. 令 k, $X \subset \mathbf{P}_k^n$, r, $x \in X$, $d \gg 0$ 为如推论 *5.3* 中所述的 **一般的** 维数为 r 的向量子空间W, 并取其自由 k-基 $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_r\}$。令 S为推论 *5.3* 第 *(iii)* 项中所述的 $\mathbb{A}_k^{r-1}$ 内点 $\dot{q}(x) \in \mathbb{P}_{x_1}^{r-1} = \mathbb{A}_k^{r-1}$ 的开邻域。那么在记号 *6.2* 和记号 *6.5* 下, 交换图

$$
\begin{array}{ccccc}
\dot{X}_S & \xrightarrow{j_S} & \hat{X}_S & \xleftarrow{i_S} & S \times_{pt} \bar{w} \\
& \searrow^{\dot{q}_S} & \downarrow{\scriptstyle \hat{q}_S} & \swarrow_{pr_S} & \\
& & S & &
\end{array}
\tag{9}
$$

是一个弱初等纤维化的图。

令 $Z \subset X$ 为一个维数 维数 $Z < r$ 的闭子集。则可以选择上述的 W 和 $\mathbf{f}$, 使得推论 *5.3* 中的性质 *(i)* 至 *(iii)* 成立, 且 $w \cap Z = \emptyset$。在 $\dot{}$ 这种情况下, 图 (9) 是弱初等 Z_S-纤维化 $\dot{q}_S$: $X_S \to S$的图。

定理 *6.6* 的证明。 从第 4 节中取 $(e_0, e_1, ..., e_r) = (1, 1, ..., 1)$。并逐字重复证明定理 4.15 的论证。 □

显然, 定理 6.6 得出以下结论

推论 6.7。 *[=定理 5.7] 在定理 6.6* 的假设下, 令 S 为 $\mathbb{A}_k^{r-1}$ 中点 $\dot{q}(x) \in \mathbb{A}_k^{r-1}$ 的开邻域, 如推论 *5.3* 的第 *(iii)* 项所述。则$\dot{q}_S = (s_2/s_1, ..., s_r/s_1)$: $X_S \to S$, 且态射 $\dot{q}_S$是一个弱初等纤维化。

设 $Z \subset X$ 为一个闭子集, 满足 维数 $Z < r$, 并假设 W 和上述 $\mathbf{f}$ 满足推论 *5.3* 中的条件 *(i)* 至 *(iii)*, 且还满足 $w \cap Z = \emptyset$。在这种 $\dot{}$ 情况下, 态射 $\dot{q}_S$ 是一个弱初等 Z_S-纤维化。

7. The case of a finite field $k(b)$

本节的主要目的是陈述定理 7.4。A 是一个正则局部环; $m \subseteq A$ 是它的极大理想; K 是 A的分式域; $B = \mathrm{Spec}(A)$, 而 $b \in B$ 是它的闭点; $k(b)$是剩余域 A/m, 并且本节假设**它是有限的**; $p > 0$ 是域 $k(b)$的特征; 本笔记假设域 K 的特征为零; $m \geq 1$ 是一个整数;

对于一个 A-概形 Y, 我们将 Y_b 记作结构态射 $Y \to B$的闭纤维。

对于一个 A-概形态射 $q\colon Y'\to Y$，记 $q_b\colon Y'_b\to Y_b$ 为态射 $q\times_B b$；本节中的所有概形都是 B-概形，我们将 $Y\times Y'$ 记作 $Y\times_B Y'$。本节中的所有态射都是 B-态射。

记号 *7.1.* 令 $\mathbb{P}^n:=\mathbb{P}^n_B$ 为 B 上的射影空间。令 $S_A=A[T_0,...,T_n]$ 为 $\mathbb{P}^n_B$ 的齐次坐标环。令 $S_{A,d}\subset S_A$ 为齐次次数 d 多项式的 A-子模，令 $S_{A,\hom}=\sqcup_{d=0}^{\infty}S_{A,d}$（不交并）。令 $F\in S_{A,d}$ 为次数 d 的齐次多项式。令 $H_F\subset\mathbb{P}^n_B$ 为由齐次理想（F）$\subset S_A$ 定义的 $\mathbb{P}^n_B$ 的闭子概形。令 X 为 $\mathbb{P}^n_B$ 中相对维数为 $r\geq 1$ 的 B-光滑闭不可约子概形。令 $X\subset\mathbb{P}^n_B$ 为相对维数为 r 的不可约 B-光滑闭子概形。令 $x=\{x_1,...,x_l\}$ 为 X 中闭点的有限集。我们将用 $\mathcal{O}(e)$ 表示 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e)|_X$；令 $Z\subset X$ 为一个闭子集，使得 $\dim Z_b\leq r-1$。对每个 $F\in S_{A,\hom}$，令 $X_F=X-H_F$ 属于 X；令 $\mathbb{P}^n_b$ 为 b 上的射影空间。令 $S_{k(b)}=k(b)[T_0,...,T_n]$ 为 $\mathbb{P}^n_b$ 的齐次坐标环。令 $S_{k(b),d}\subset S_{k(b)}$ 为齐次次数 d 多项式的 $k(b)$-子空间，令 $S_{k(b),\hom}=\sqcup_{d=0}^{\infty}S_{k(b),d}$（不交并）。

令 $f_0,...f_r\in S_{k(b),\hom}$ 如定理 *3.2* 中所述，关于子概形 $X_b\subset\mathbb{P}^n_b$、其有限子集 x 及其闭子集 $Z_b\subset X_b$。令 $e_0,...,e_r$ 为 $f_0,...f_r$ 的次数，则对每个 $i=0,...,r-1$，e_i 整除 e_{i+1}。对所有满足 $j>i$ 的 $i,j=1,...,r$，令 $d_{i,j}=e_j/e_i$。令 $F_0,...,F_r\in S_{A,\hom}$ 满足 $F_i\ mod\ m\equiv f_i$。令 $X_i=X\cap H_F$（概形交）；它是 X 的闭子概形；对任意 $I\subset\{0,1,...,r\}$，记 X_I 为 X 中的概形交 $\cap_{i\in I}X_i$。令 $\mathbb{W}=X_{1,...,r}$。在此情形下，$\mathbb{W}_b\cap Z_b=\emptyset$ 且 $\mathbb{W}\cap Z=\emptyset$；将 $s_i\in\Gamma(X,\mathcal{O}(e_i))$ 记作 $F_i|_X$。令 $X_{s_i}=X_{F_i}$ 和 $X=X_{s_1}$。令 $\dot{q}=(s_2/s^{d_{1,2}},...,s_r/s^{d_{1,r}})\colon\dot{X}\to\mathbb{A}^{r-1}_B$；对于 $\mathbb{A}^{r-1}_B$ 中的扎里斯基开集 S，令 $\dot{X}_S=\dot{q}^{-1}(S)$ 和 $\dot{Z}_S=Z\cap\dot{X}_S$。将 $\dot{q}_S$ 记作 $\dot{q}|_{\dot{X}_S}\colon X_S\to S$。令 $\mathbb{P}^{r,w}_B$ 为加权射影空间，其齐次坐标为 $[t_0:t_1:...:t_m]$，权重依次为 $1,d_{0,1},...,d_{0,m}$。将 $\mathbb{P}^{r,w}_B$ 记作 $\mathbb{P}^{r,w}$。令 $\mathbb{P}^{r-1,w}_B$ 为加权射影空间，其齐次坐标为 $[x_1:...:x_m]$，权重依次为 $1,d_{1,2},...,d_{1,m}$。将 $\mathbb{P}^{r-1,w}_B$ 记作 $\mathbb{P}^{r-1,w}$。令 $X_{s_i}=X_{F_i}$，并且还考虑 $\mathbb{P}^{r,w}_{t_i}$ 和 $\mathbb{P}^{r-1,w}_{x_i}$。将 X_{s_1} 记作 X，并将 $\mathbb{P}^{r,w}_{t_1}$ 记作 $\mathbb{P}^{r,w}$。注意，$\mathbb{P}^{r-1,w}_{x_1}$ 是仿射空间 $\mathbb{A}^{r-1}_B$。该对应关系通过将 $[x_1:x_2:...:x_r]$ 映为 $(x_2/x^{d_{1,2}},...,x_r/x^{d_{1,r}})$ 给出。

注意， $\mathbb{P}^{r,\ t_0^{\ w}}$ 是仿射空间 $\mathbb{A}^r_B$。

该识别通过将 $[t_0:\ t_1:\ .....:\ t_r]$ 映射到 $(t_1/t^{d_{0,1}\,0},\cdots,t_r/t^{d_{0,0}\ r})$ 给出。

$X_{0,1,\ldots,r}=\emptyset$ ，这是由 $f_0,\cdots f_r\in S_{k(b),\mathrm{hom}}$ 的选取所决定的。

命题 7.2。 根据定理 *3.2* 的假设和记号 *7.1*，我们知道$X_{0,1,\ldots,r}=\emptyset$。因此，态射

$$\pi=[s_0:s_1:\ldots:s_r]:X\to\mathbb{P}^{r,w}_B \tag{10}$$

是良定义的。我们断言它是有限且满射的。

证明。 有 $X=\cup_{i=0}^r X_{s_i}$, $\mathbb{P}^{r,w}=\cup_{i=0}^r\mathbb{P}^{r,\ t_i^{\ w}}$ 以及 $\pi^{-1}(\mathbb{P}^{r,\ t_i^{\ w}})=X_{s_i}$。由于每个 X_{s_i} 都是仿射的，态射 π 是仿射的。同时， π 是射影的。因此， π 是有限的。□

命题 7.3。 在定理 *3.2* 和记号 *7.1* 的假设下，设 $M\subset X$ 为一个闭子概形，满足 $X_{1,\ldots,r}\cap M=\emptyset$。那么态射 $[s_1:\ldots:\ s_r]:\ M\to\mathbb{P}^{r-1,\ B}{}^{\ w}$是有限的。特别地，态射 $[s_1:\ldots:\ s_r]:\ Z\to\mathbb{P}^{r-1,\ B}{}^{\ w}$ 是有限的。

证明。 它是仿射且射影的。 □

以下结果将在第 8 节末尾证明。

定理 7.4。 在定理 *3.2* 和记号 *7.1* 的假设下，考虑仿射B-概形 $\dot{X}$ 及态射 $\dot{q}:\ \dot{X}\to\mathbb{A}^{r-1}_B$ 。那么存在点 $(0,b)$ 的一个扎里斯基开邻域 $S\subset\mathbb{A}^{r-1}_B$ ，使得态射 $\dot{q}_S:\ \dot{X}_S\to S$ 是一个弱初等 Z_S-纤维化。

8. Proof of the finite $k(b)$-case of Theorem 1.3

本节的主要目标是证明定理 7.4。本节沿用第 7 节中的记号。特别地,

设 $X\subset\mathbb{P}^n_B$ 是相对维数为 $r\geq 1$ 的不可约 B-光滑闭子概形。设 $\mathbf{x}=\{x_1,\ldots,x_l\}$ 是 X 中由闭点组成的有限集。

我们将用 $\mathcal{O}(e)$ 表示 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e)|_X$;

设 $Z\subset X$ 是一个满足 $dimZ_b\leq r-1$ 的闭子集。

对于每个 $F\in S_{A,\mathrm{hom}}$ 将 $X_F=X-H_F$ 放入 X 中;

令 $f_0,\cdots f_r\in S_{k(b),\mathrm{hom}}$ 如定理 3.2 中所述，关于

子概形 $X_b\subset\mathbb{P}^n_b$、其有限子集 $\mathbf{x}$ 及其闭子集 $Z_b\subset X_b$。

令 $F_0,\ldots,F_r\in S_{A,\mathrm{hom}}$，使得 $F_i\ mod\ m\equiv f_i$。

令 $X_i=X\cap H_{F_i}$ （概形交 ）；它是 X的闭子概形;

对于任意 $I\subset\{0,1,\ldots,r\}$，记 X_I 为 X 中的概形交 $\cap_{i\in I}X_i$。

回忆一下， $\mathbb{W}:=X_{1,\ldots,r}$;

还要回忆一下，根据 f_0 的选取， $\mathbb{W}_b\cap Z_b=\emptyset$ 和 $\mathbb{W}\cap Z=\emptyset\cdots f_r\in S_{k(b),\ \mathrm{hom}}$。还要回忆一下，根据 f_0 的选取，$X_{0,\ 1,\ .....,\ r}=\emptyset\ldots f_r\in S_{k(b),\ \mathrm{hom}}$。

记号 8.1. 根据上述关于 f_0 的假设，$\cdots f_r\in S_{k(b),\ \mathrm{hom}}$，概形 $\mathbb{W}$ 是 B 上的有限 ***étale*** 概形。

由于 $X_{0,\ 1,\ .....,\ r}=\emptyset$ ，存在定义良好的态射

$$\pi=[s_0:\ldots:s_r]:X\to\mathbb{P}^{r,w}_B.$$

如命题 *7.3* 所述。此外，根据命题 *7.3*， π 是有限满射。

构造 8.2. 将$\hat{X}$ 定义为 $X \times \mathbb{P}^{r-1,w}$ 的一个闭子概形，其方程为$s_j x^{d_{i,i}} = s^{d_{i,i}} x_j$ ($j > i$)。我们将$\hat{X}$ 视为在子概形 $\mathbb{W}$处对 X 进行的加权爆破。

若$\mathbb{P}^{r,w}$是$\mathbb{P}^{r,w} \times \mathbb{P}^{r-1,w}$中的闭子概形，由方程 $t_j x^{d_{i,i}} = t^{d_{i,i}} x_j$给出。我们将 $\hat{\mathbb{P}}^{r,w}$视为 $\mathbb{P}^{r,w}$ 在 B-点 $\mathbf{0} := [1 : 0 : ... : 0]$处的加权爆破。

为了陈述定理 8.5，我们还需要做一些准备。投影 $X \times \mathbb{P}^{r-1,w} \to \mathbb{P}^{r-1,w}$和 $\mathbb{P}^{r,w} \times \mathbb{P}^{r-1,w} \to \mathbb{P}^{r-1,w}$ 诱导态射 $\hat{q} : \hat{X} \to \mathbb{P}^{r-1,w}$ 和 $\hat{p} : \hat{\mathbb{P}}^{r,w} \to \mathbb{P}^{r-1,w}$，从而可以将概形 $\hat{X}$ 和 $\hat{\mathbb{P}}^{r,w}$ 视为 $\mathbb{P}^{r-1,w}$-概形。态射 $\pi \times id : X \times \mathbb{P}^{r-1,w} \to \mathbb{P}^{r,w} \times \mathbb{P}^{r-1,w}$ 诱导一个态射

$$\hat{\pi} : \hat{X} \to \hat{\mathbb{P}}^{r,w}.$$

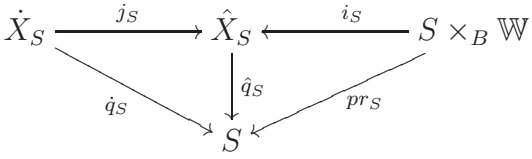
这是一个 $\mathbb{P}^{r-1,w}$-概形的态射。令 $\hat{X}_{x_1} = \hat{q}^{-1}(\mathbb{P}^{r-1,w}_{x_1})$ 和 $\hat{\mathbb{P}}^{r,w}_{x_1} = \hat{p}^{-1}(\mathbb{P}^{r-1,w}_{x_1})$。注意，$\mathbb{P}^{r-1,w}_{x_1}$是仿射空间 $\mathbb{A}^{r-1}_B$。该同一化由下式给出 $[x_1 : x_2 : ... : x_r] \mapsto (x_2/x_1^{d_{1,2}}, ..., x_r/x_1^{d_{1,r}})$。因此，我们有射影 B-态射 $\hat{q} : \hat{X}_{x_1} \to \mathbb{A}^{r-1}_B$、$\hat{p} : \hat{\mathbb{P}}^{r,w}_{x_1} \to \mathbb{A}^{r-1}_B$ 以及 $\hat{\pi} : \hat{X}_{x_1} \to \hat{\mathbb{P}}^{r,w}_{x_1}$，且 $\hat{q} = \hat{p} \circ \hat{\pi}_{x_1}$。

记号 8.3。投影 $X \times \mathbb{P}^{r-1,w} \to X$ 和 $\mathbb{P}^{r,w} \times \mathbb{P}^{r-1,w} \to \mathbb{P}^{r,w}$ 分别诱导 $\hat{}$ 态射 $\tau : \hat{X} \to X$ 和 $\sigma : \hat{\mathbb{P}}^{r,w} \to \mathbb{P}^{r,w}$。用 0 表示 $\mathbb{P}^{r,w}_B$ 中的闭子概形 $\{0 = t_1 = ... = t_r\}$。令 $E_{\mathbb{W}} := \tau^{-1}(\mathbb{W})$ 和 $E_{\mathbf{0}} := \sigma^{-1}(0)$。注意，$E_{\mathbb{W}} = \mathbb{P}^{r-1} \times_B \mathbb{W}$；用 $\hat{X} \xleftarrow{i} E_{\mathbb{W}} = \mathbb{P}^{r-1} \times_B \mathbb{W}$ 表示闭嵌入。用 $\dot{X}$ 表示 X_{s_1}。令 $Z \subset X$ 为满足 $Z \subset X - \mathbb{W}$的闭子集。令 $\dot{Z} = Z \cap \dot{X}$。

记号 8.4。写作 $j : \dot{X} \hookrightarrow \hat{X}_{x_1}$ 表示 $\dot{X} \xrightarrow{\tau^{-1}} \hat{X}_{x_1} - (E_{\mathbb{W}})_{x_1} \hookrightarrow \hat{X}_{x_1}$。显然，$j|_{\dot{Z}}$ 将 $\dot{Z}$ 与 Z_{x_1}对应起来；令 $\dot{q} = \hat{q} \circ j : \dot{X} \to \mathbb{A}^{r-1}_B$；显然，$\dot{q} = (s_2/s^{d_{1,2}}, ..., s_r/s^{d_{1,r}})$；对于 $\mathbb{A}^{r-1}_B$ 中的开 S，令$\dot{X}_S = \dot{q}^{-1}(S)$，$\hat{X}_S = \hat{q}^{-1}(S)$；$\dot{Z}_S = Z \cap \dot{X}_S$；$\hat{Z}_S = \hat{Z} \cap \hat{X}_S$；显然，$\dot{X}_S = j^{-1}(\hat{X}_S)$；令 $\dot{q}_S = \dot{q}|_{\dot{X}_S} : \dot{X}_S \to S$，并令 $\hat{q}_S = \hat{q}|_{\hat{X}_S} : \hat{X}_S \to S$ 以及 $j_S = j|_{\dot{X}_S} : \dot{X}_S \hookrightarrow \hat{X}_S$；显然，$j_S|_{\dot{Z}_S}$ 将 $\dot{Z}_S$ 与 $\hat{Z}_S$ 对应起来；显然，$\dot{q}_S = \hat{q}_S \circ j_S : \dot{X}_S \to S$；令 $\hat{X}_S \leftarrow S \times_B \mathbb{W} : i_S = i \times_V \mathbb{W}$；显然，$\hat{q}_S \circ i_S = pr_S : S \times_B \mathbb{W} \to S$。

定理 8.5。 设 $X \subset \mathbf{P}^n_B$ 是一个 B-光滑、不可约且相对维数为 $r \geq 1$ 的闭子概形，$\mathbf{x} \subset X$ 是一个有限的闭点集。设 $Z \subset X$ 是一个闭子集，使得维数 $Z_b \leq r - 1$。那么在本节的记号下（特别是记号 8.3 和 8.4），存在点 $(0, b) \in \mathbb{A}^{r-1}_B$ 的一个扎里斯基开邻域 S，使得

˙该x 属于 X_S，且交换图

(11)


˙是弱初等 Z_S-纤维化 $\dot{q}_S\colon\ X_S \to S$的图表。

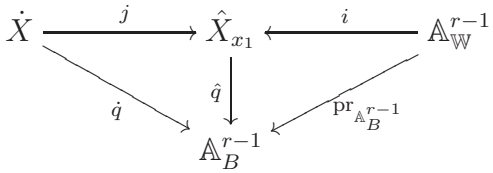
显然，定理 8.5 得出以下结果

推论 8.6。 *[= 定理 7.4]* 设满足定理 *8.5* 的假设并采用其记号，令S 为定理 *8.5* 中概形$\mathbb{A}_B^{r-1}$ 内点 $(0,b) \in \mathbb{A}_B^{r-1}$ 的开邻域。则˙ ˙态射 $\dot{q}_S\colon\ X_S \to S$ 是一个弱初等 Z_S-纤维化。

定理 *8.5* 的证明。 我们先给出以下结果，其证明可依照第 4 节（命题 4.10 和引理 4.9）中的论证。

命题 8.7。 概形ˆ X_{x_1} 是 B-光滑的。态射ˆ$q : \hat{}X_{x_1} \to \mathbb{A}_B^{r-1}$ 是平坦射影的。

现在使用记号 8.4，并按照第 4 节中的论证，构造一个如下形式的交换图，其所在范畴为 B-概形

(12)


ˆ B-概形 X_{x_1} 是 B-光滑的。态射 ˆq 是平坦射影的。态射 $\mathrm{pr}^{\mathbb{A}_B^{r-1}}$ 是有限 étale 的。态射 i 是闭嵌入，态射 j 是开嵌入，它将 $\dot{X}$ 识别为ˆ $X_{x_1} - i(\mathbb{A}_i^{r-1}(\mathbb{W}))$。x 包含在 $\dot{X}$ 中。对于上述闭子集 $Z \subset X$，有 $\dot{Z} \subset \dot{X}$。证明 $\dot{Z}$ 在 $\mathbb{A}_B^{r-1}$ 上有限。

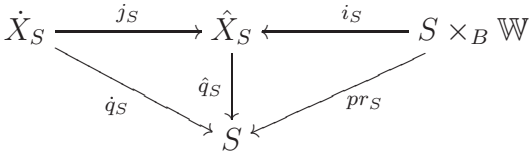
由定理 8.5 的假设可知 $\mathbb{W}_b \cap Z_b = \emptyset$。因此 $\mathbb{W} \cap Z = \emptyset$。由此可知，态射 $[s_1 : \ldots : s_r]\colon\ Z \to \mathbb{P}^{r-1}{}_{,B}$ ^{w} 定义良好。它既是仿射的又是射影的。因此它是有限的。这表明 $\dot{Z}$ 在 $\mathbb{A}_B^{r-1}$ 上有限。下面的引理是命题 4.11 的直接推论。

引理 8.8. 考虑概形 $C = \hat{}q^{-1}((0,b))$。则

ˆ*1)* C 是一个 $k(b)$-光滑射影曲线，它是 X_b 的闭子概形；*2)* $\tau_b|_C\colon\ C \to X_b$ 是一个闭嵌入；*3)* $\tau_b(C)$ 与 X_b 中的光滑闭一维子概形 $(X_b)_{2,\ldots,r}$ 重合。

根据命题 8.7，B-概形ˆ X_{x_1} 是 B-光滑的，且 ˆ$q : \hat{}X_{x_1} \to \mathbb{A}_B^{r-1}$ 是平坦射影的。现在，引理 8.8 表明，存在点 $(0,b) \in \mathbb{A}_B^{r-1}$ 的扎里斯基开邻域 S，使得对于ˆ $X_S := \hat{}q^{-1}(S)$，态射 ˆ$q : \hat{}X_S \to S$ 是光滑射影的。通过开嵌入对图表 (12) 作基变换

$S \hookrightarrow \mathbb{A}^{r-1}_B$

(13)


该图表表明，态射 $\dot{q}_S\colon X_S \to S$ 是一个弱初等纤维化。由引理 8.8 可得包含关系 $\mathbf{x} \subset \dot{q}_S^{-1}((0,b)))\subset \dot{X}_S$。由推论 8.6，对于 $\dot{Z}_S = Z \cap \dot{X}_S$，态射 $\dot{q}_S|_{\dot{Z}_S}\colon Z_S \to S$ 是有限的。因此，态射 $\dot{q}_S\colon X_S \to S$ 是一个弱初等 Z_S-纤维化。定理 8.5 得证。□

9. The case of an infinite field $k(b)$

本节的主要目的是陈述定理 9.2。A 是一个正则局部环，$m \subseteq A$ 是它的极大理想；K 是 A的分式域；$B =$Spec(A)，且 $b \in B$ 是它的闭点；$k(b)$是剩余域 A/m；**它在本节中是无限的**；$p > 0$ 是域 $k(b)$的特征；本文假设域 K 的特征为零；$m \geq 1$ 是一个整数；对于一个 B-概形 Y，我们用 Y_b 表示结构态射 $Y \to B$的闭纤维。对于一个概形态射 B-概形态射 $q\colon Y' \to Y$，记 $q_b\colon Y'_b \to Y_b$ 为态射 $q \times_B b$；本节中的所有概形都是 B-概形，且我们记 $Y \times Y'$ 为 $Y \times_B Y'$。

记号 *9.1.* 令 $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n_B$ 为 B上的射影空间。令 $S_A = A[T_0, ..., T_n]$ 为 $\mathbb{P}^n_B$的齐次坐标环。令 $S_{A,d} \subset S_A$ 为次数为 d的齐次多项式构成的 A-子模。令 $F \in S_{A,d}$ 为一个次数为 d 的齐次多项式。令 $H_F \subset \mathbb{P}^n_B$ 为由齐次理想 $(F) \subset S_A$定义的 $\mathbb{P}^n_B$ 的闭子概形。令 $S_{k(b)} = k(b)[T_0, ..., T_n]$ 为 $\mathbb{P}^n_b$的齐次坐标环。令 $S_{k(b),d} \subset S_{k(b)}$ 为次数为 d的齐次多项式构成的 $k(b)$-子空间。令 $X \subset \mathbb{P}^n_B$ 为一个 B-光滑、不可约且相对维数为 r的闭子概形。令 $\mathbf{x} \subset X$ 为一个由闭点构成的有限集。令 $Z \subset X$ 为一个维数为 $Z_b < r$的闭子集。对每个 $F \in S_{A,d}$，令 $X_F = X - H_F$ 属于 X；

设 $d \gg 0$、一般维数为 r 的向量 $k(b)$-子空间 W，以及 $S_{k(b)}$ 中的 d 和一般自由 $k(b)$-基 $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_r\}$，如定理 *5.2* 中相对于子概形 $X_b \subset \mathbb{P}^n_b$、其有限闭子集 $\mathbf{x}$ 及闭子集 $Z_b \subset X_b$ 所述。对于每个 $f_i \in \mathbf{f}$，记 $F_i \in S_{A,d}$ 为将 f_i 提升到 $S_{A,d}$ 中一个元素的结果。令 X_i 为 X 的闭子概形，等于 $H_{f_i} \cap X$ （概形交）。对于任意 $I \subset \{0, 1, ..., r\}$，记 X_I 为 X 中的概形交 $\cap_{i\in I} X_i$。记 $\mathbb{W} = X_{1,...,r}$ 为 X 中的闭子概形。闭子概形 $\mathbb{W}_b \subset X_b$ 仅取决于 W。记 $\mathcal{O}(d)$ 为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_X$。

对于 f_i，记 $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}(d))$ 为 $F_i|_X$。令 $X_{s_i} = X_{F_i}$ 和 $X = X_{s_1}$。令 $[x_1 : \ldots : x_r]$ 为 $\mathbb{P}^{r-1} = \mathbb{P}^{r-1}_B$ 上的齐次坐标。令 $\mathbb{P}^{r-1}_{x_i} = (\mathbb{P}^{r-1}_B)_{x_i}$。显然，$\mathbb{P}^{r-1}_{x_1} \cong \mathbb{A}^{r-1}_B$。只需将 $[x_1 : x_2 : \ldots : x_r]$ 与 $(x_2/x_1, \ldots, x_r/x_1)$ 等同。对于上述 $W \subset S_{k(b)}$、d 及其自由 $k(b)$-基 $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_r\}$，令 $\dot{q} = (s_2/s_1, \ldots, s_r/s_1) : \dot{X} \to \mathbb{A}^{r-1}_B$。对于 $\mathbb{A}^{r-1}_B$ 中的扎里斯基开集 S，令 $\dot{X}_S = \dot{q}^{-1}(S)$ 和 $\dot{Z}_S = Z \cap \dot{X}_S$。令 $\dot{q}_S = \dot{q}|_{\dot{X}_S} : \dot{X}_S \to S$。

下面的部分结果将在第 10 节末证明。

定理 9.2. 在记号 *9.1* 以及定理 *5.2* 的假设下，对每个整数 $d \gg 0$，对于**一般的**维数为 r 的向量 $k(b)$-子空间 W，其中 $S_{k(b),\, d}$ 以及**一般的**自由 $k(b)$-基底 $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_r\}$，其中 W，以下结论成立。

对于仿射簇 $\dot{X}$ 和态射 $\dot{q} : \dot{X} \to \mathbb{A}^{r-1}_B$，存在有限集 $\dot{q}(\mathbf{x})$ 的一个扎里斯基开邻域 $S \subset \mathbb{A}^{r-1}_B$，使得态射

$\dot{q}_S : X_S \to S$ 是一个弱初等 Z_S-纤维化。

命题 9.3. 在记号 *9.1* 下，态射

$$\pi = [s_0 : s_1 : \ldots : s_r] : X \to \mathbb{P}^r_B \tag{14}$$

是良定义且有限的。

证明。</style}有 $X = \cup_{i=0}^r X_{s_i}$、$\mathbb{P}^r = \cup_{i=0}^r \mathbb{P}^r_{t_i}$ 和 $\pi^{-1}(\mathbb{P}^r_{t_i}) = X_{s_i}$。由于每个 X_{s_i} 都是仿射的，态射 π 是仿射的。同时，π 是射影的。因此，π 是有限的。□

命题 9.4。在定理 *9.2* 的假设及记号 *9.1* 下，设 $M \subset X$ 是一个闭子概形，满足 $\mathbb{W} \cap M = \emptyset$。则态射 $[s_1 : \ldots : s_r] : M \to \mathbb{P}^{r-1}_B$ 是有限的。特别地，态射 $[s_1 : \ldots : s_r] : Z \to \mathbb{P}^{r-1}_B$ 是有限的。

证明。它是仿射且射影的。 □

10. 定理 1.3 的无限 k（b）情形的证明

本节的主要目标是证明定理 9.2。本节中我们沿用第 9 节中使用的记号。

构造 10.1。对于上述的 $X \subset \mathbb{P}^n_B$、W 和 $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_r\}$，假设闭子概形 $\mathbb{W}_b \subset X_b$ 在 $\mathrm{Spec}(k(b))$ 上是有限 *étale* 的。在此情形下，闭子概形 $\mathbb{W} \subset X$ 在 B上是有限 *étale* 的。将 $\hat{}X$ 定义为 $X \times \mathbb{P}^{r-1}_B$ $\hat{}$中由方程 $s_j x_i = s_i x_j$给出的闭子概形。我们将 X 视为沿子概形 $\mathbb{W}$对 X 的爆破。

投影 $X \times \mathbb{P}^{r-1} \to \mathbb{P}^{r-1}$ 和 $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^{r-1} \to \mathbb{P}^{r-1}$ 诱导出态射 $\hat{}q : \hat{}X \to \mathbb{P}^{r-1}_B$ 以及 $\hat{}p : \hat{}\mathbb{P}^r_B \to \mathbb{P}^{r-1}_B$，从而可以将概形 $\hat{}X$ 和 $\hat{}\mathbb{P}^r_b$ 视为一个 $\mathbb{P}^{r-1}_B$-概形。

记号 10.2. 投影 $X \times \mathbb{P}^{r-1} \to X$ 和 $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^{r-1} \to \mathbb{P}^r$ 分别诱导态射$\hat{}$ $\hat{}\tau : X \to X$ 和 $\sigma : \mathbb{P}^r \to \mathbb{P}^r$。将 $[1 : 0 : \ldots : 0]_B$ 在 $\mathbb{P}^r_B = \mathbb{P}^r$中记作$\mathbf{0}$。令 $E_{\mathbb{W}} = \tau^{-1}(\mathbb{W})$ 和 $E_0 = \sigma^{-1}(\mathbf{0})$。

注意，$E_{\mathbb{W}} = \mathbb{P}^{r-1}_B \times_B \mathbb{W} = \mathbb{P}^{r-1}_{\mathbb{W}}$；将$\hat{X} \xleftarrow{i} E_{\mathbb{W}} = \mathbb{P}^{r-1}_{\mathbb{W}}$记作闭嵌入。像上文一样，将 X 记作 X_{s_1}。令 $Z \subset X$ 为记号 *9.1* 中的闭子集；那么 $Z \subset X - \mathbb{W}$。将 $Z = Z \cap X$ 按记号 *9.1* 中的方式定义。

注记 10.3. 显然，态射 $\tau\colon X - E_{\mathbb{W}} \to X - \mathbb{W}$ 是一个同构。令 $\hat{Z}$表示 $\tau^{-1}(Z)$，并令 $Z_{x_1} = \hat{Z} \cap \hat{X}_{x_1}$。

命题 10.4. 令 $\tau_1 = \tau|_{\hat{X}_{x_1} - (E_{\mathbb{W}})_{x_1}}\colon X_{x_1} - (E_{\mathbb{W}})_{x_1} \to X$。则

1）态射 $\tau_1\colon X_{x_1} - (E_{\mathbb{W}})_{x_1} \to X$ 是一个同构；*2*）概形 $X_{x_1} - (E_{\mathbb{W}})_{x_1}$ 和 X 是 B-光滑的。*3*）态射 $\tau_1|_{\hat{Z}_{x_1}}\colon Z_{x_1} \to Z$ 是一个同构。

记号 *10.5.* 记 $j\colon \dot{X} \hookrightarrow \hat{X}_{x_1}$ 为 $\dot{X} \xrightarrow{\tau^{-1}} \hat{X}_{x_1} - (E_{\mathbb{W}})_{x_1} \hookrightarrow \hat{X}_{x_1}$。显然，$j|_{\dot{Z}}$ 将 Z 与 Z_{x_1}等同；显然，$\dot{q} = \hat{q} \circ j\colon \dot{X} \to \mathbb{A}^{r-1}_B$；其中 $\dot{q} = (s_2/s_1, \ldots, s_r/s_1)$ 如记号 *9.1* 所示；对于 $\mathbb{A}^{r-1}_B$ 中的一个开 S，令 $\hat{X}_S = \hat{q}^{-1}(S)$ 并令 $\dot{Z}_S = Z \cap \dot{X}_S$；显然，$\dot{X}_S = j^{-1}(\hat{X}_S)$；令 $\dot{q}_S = \dot{q}|_{\dot{X}_S}\colon X_S \to S$ 并令 $\hat{q}_S = \hat{q}|_{\hat{X}_S}\colon X_S \to S$ 以及 $j_S = j|_{\dot{X}_S}\colon X_S \hookrightarrow X_S$；显然，$j_S|_{\dot{Z}_S}$ 将 Z_S 与 Z_S等同；显然，$\dot{q}_S = \hat{q}_S \circ j_S\colon X_S \to S$；令 $X_S \leftarrow S \times_B \mathbb{W}\colon\ i_S = i \times_B \mathbb{W}$；显然，$\hat{q}_S \circ i_S = pr_S\colon S \times_B \mathbb{W} \to S$。

定理 10.6。设 $X \subset \mathbf{P}^n_B$ 是一个 B-光滑闭子概形，且不可约、相对维数为 r；设 $\mathbf{x} \subset X$ 是闭点的一个有限集。设 $d \gg 0$, W **in** $S_{k(b),d}$ **是**维数为 r 的一般向量子空间，且设 $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_r\}$ 是其一**般**自由 $k(b)$ 基，如推论 *5.3* 中所述。则存在 S 在 $\mathbb{A}^{r-1}_B$ 中包含有限集 $\dot{q}(\mathbf{x})$ 的一个邻域，使得在记号 *9.1*、*10.2* 和 *10.5* 下，B-概形及其 B-态射构成交换图

(15)
$$\begin{array}{ccccc} \dot{X}_S & \xrightarrow{j_S} & \hat{X}_S & \xleftarrow{i_S} & S \times_B \mathbb{W} \\ & {\scriptstyle \dot{q}_S}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \hat{q}_S} & \swarrow{\scriptstyle pr_S} & \\ & & S & & \end{array}$$

是弱初等纤维化 $\dot{q}_S\colon\ X_S \to S$ 的一个图。

设 $Z \subset X$ 是一个满足维数 $Z_b < r$ 的闭子集。则可以选择上述的 W 和 $\mathbf{f}$，使得推论 *5.3* 中的性质 *(i)* 至 *(iii)* 成立，并且 $\mathbb{W}_b \cap Z_b = \emptyset$。在这种情况下，图 (15) 是弱初等 Z_S-纤维化 $\dot{q}_S\colon\ X_S \to S$ 的一个图。

显然，定理 10.6 得出以下结论

推论 10.7. *[= 定理 9.2]* 在定理 *10.6* 的假设下，令 S 为定理 *10.6* 中有限集 $\dot{q}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbb{A}_B^{r-1}$ 中的开邻域。那么态射$\dot{q}_S: X_S \to S$ 是一个弱初等纤维化。

令 $Z \subset X$ 为一个闭子集，且 维数 $Z_v < r$。那么，可以选择满足推论 *5.3* 中条件 *(i)* 至 *(iii)* 的 W 和上述 f，并且还满足条件 $\mathbb{W}_b \cap Z_b = \emptyset$。在这种情况下，态射 $\dot{q}_S$：$X_S \to S$ 是一个弱初等 Z_S- 纤维化。

定理 *10.6* 的证明。投影 $X \times \mathbb{P}^{r-1} \to \mathbb{P}^{r-1}$ 和 $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^{r-1} \to \mathbb{P}^{r-1}$ 诱导出态射 $\hat{}q : \hat{}X \to \mathbb{P}^{r-1}$ 和 $\hat{}p : \hat{}\mathbb{P}^r \to \mathbb{P}^{r-1}$，从而可以将概形 $\hat{}X$ 和 $\hat{}\mathbb{P}^r$ 视为一个 $\mathbb{P}^{r-1}$-概形。令 $[x_1 : ... : x_r]$ 为 $\mathbb{P}^{r-1}$ 上的齐次坐标，并考虑其开子概形 $\mathbb{P}^{r-1}_{x_1}$。态射 $\pi \times id: X \times \mathbb{P}^{r-1} \to \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^{r-1}$ 诱导出一个态射

$$\hat{\pi} : \hat{X} \to \hat{\mathbb{P}}^r_B.$$

这是一个 $\mathbb{P}^{r-1}_B$ -概形的态射。令 $\hat{} X_{x_1} = q^{-1}(\mathbb{P}^{r-1}_{x_1})$ 和 $\hat{} \mathbb{P}^r_{x_1} = p^{-1}(\mathbb{P}^{r-1}_{x_1})$。回想一下，$\mathbb{P}^{r-1}_{x_1}$是仿射空间 $\mathbb{A}^{r-1}_B$ 。

取自第 4 节的 (e_0, e_1, ..., e_r) 等于 (1, 1, ..., 1)。现在逐字重复证明引理 4.9 的论证，可知态射 $\hat{}q : \hat{} X_{x_1} \to \hat{}\mathbb{P}^{r-1}_{x_1} = \mathbb{A}^{r-1}_B$ 是平坦射影的。接着，逐字重复证明命题 4.10 的论证，可知概形 $\hat{}X_{x_1}$ 是 B-光滑的。

由推论 5.3 的 (iii) 项，态射 $\hat{}q_b : \hat{}X_b \to \mathbb{P}^{r-1}_b$ 在 $\mathbb{A}^{r-1}_b$ 中有限集 $\dot{q}_b$(x) 的某个邻域上是相对维数为 1 的光滑射影态射。因此，态射 $\hat{}q_S : \hat{} X_S \to S$ 在 $\mathbb{A}^{r-1}_B$ 中有限集 $\dot{q}$ (x) 的某个邻域上是光滑射影的。定理 10.6 得证。□

参考文献

[A] *Artin, M.* 与经典上同调的比较：光滑预概形的情形，载于概形上同调十讲（*SGA 4*）。第 *3* 卷。数学讲义，卷 305，报告 XI，Springer-Verlag，柏林 - 纽约，1973 年。[Bh]*Bhatwadekar, S.M.* 解析同构与有限生成模范畴，《代数通讯》16（1988），1949–1958。[BT] *Borel, A.; Tits, J.* 简单代数群的“抽象”同态，《数学年刊》97（1973），第 3 期，499–571。[Ch]*Chernousov, V.* 关于由二次扩张分裂的群的若干变体及群概形的格罗滕迪克–塞尔猜想，F_4 其不变量平凡，g_3 《文献数学》，特刊：纪念 Andrei A. Suslin 六十华诞（2010），147–169。[C-T/O] *Colliot-Thélène, J.-L.; Ojanguren, M.* 局部平凡的主齐性空间，《高等科学研究所数学出版物》75（1992），第 2 期，97–122。[C-T/S] *Colliot-Thélène, J.-L.; Sansuc, J.-J.* 扁平环面下的主齐性空间：应用，《代数杂志》106（1987），148–205。[SGA3]*Demazure, M.; Grothendieck, A.* 群概形，数学讲义，卷 151–153，Springer-Verlag，柏林-海德堡-纽约，1970。[E] *Eisenbud, D.* 面向代数几何的交换代数。《数学研究生教材》150，Springer-Verlag，纽约，1995。[FP]*Fedorov, R.; Panin, I.* 关于含无限域的半局部正则环上主丛的格罗滕迪克–塞尔猜想的一个证明，预印本，2013 年 4 月，http://www.arxiv.org/abs/1211.2678v2。

[Ga] O. 加贝尔宣布过此结果，但尚未发表。[Gi] Ph. 吉尔，《克奈泽-蒂茨问题》，《布尔巴基研讨班》983（2007），983-01–983-39。[NG] N. 郭，《半局部戴德金环上的格罗滕迪克–塞尔猜想》，《变换群》27（2022），第 3 期，897-917，DOI 10.1007/s00031-020-09619-8（英文）。[Gr1] A. 格罗滕迪克，《同调挠元与有理截面》，载于《乔环及其应用》，切瓦利研讨班，第 2 年，数学秘书处，巴黎，1958。[EGAIII]A. 格罗滕迪克。《代数几何基础》（与让·迪厄多内合作撰写）：III.《相干层的上同调研究》，第一部分，《高等科学研究所数学出版物》11（1961），5–167。[EGAIV] A. 格罗滕迪克。《代数几何基础》（与让·迪厄多内合作撰写）：IV.《概形及概形态射的局部研究》，第二部分，《高等科学研究所数学出版物》24（1965），5–231。[Gr2] A. 格罗滕迪克，《布劳尔群 II》，载于《概形上同调十讲》，阿姆斯特丹，北荷兰出版社，1968。[GPan]N. 郭、I. 帕宁，离散赋值环上光滑射影概形的表示定理，预印本，2023。[Hab] W. J. 哈布什，约化群是几何约化的，《数学年刊》102（1975），第 1 期，67–83。[Mo] L.-F. 莫泽，《有理平凡主齐性空间与塞尔–格罗滕迪克猜想》，毕业论文，2008，http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~lfmoser/da.pdf。[MV] F. 莫雷尔；V. 沃沃茨基，A^1概形的 $\mathbf{A}^1$-同伦论，《高等科学研究所数学出版物》90（1999），45–143。[Mu] D. 芒福德，《阿贝尔簇》，牛津大学出版社，牛津，1970。[Na] M. 永田，仿射环中群的不变量，《京都大学数学杂志》3（1964），第 3 期，369–377。[Ni1] E. A. 尼斯涅维奇，函数域上关于仿射齐性空间与算术群有限子群，《泛函分析及其应用》11（1977），第 1 期，64–66。[Ni2] Y. 尼斯涅维奇，《戴德金环上约化群概形的有理平凡主齐性空间与算术》，《巴黎科学院报告》数学辑 I，299（1984），第 1 期，5–8。[OP1] M. 奥让居朗；I. 帕宁，维特群纯性定理，《高等师范学校科学年刊》（第 4 辑）32（1999），第 1 期，71–86。[OP2] M. 奥让居朗；I. 帕宁，有理平凡厄米空间局部平凡，《数学杂志》237（2001），181–198。[OPZ] M. 奥让居朗；I. 帕宁；K. 扎伊努林，关于二次型的范数原理，《拉马努金数学会杂志》19（2004），第 4 期，1–12。[OS] M. 奥让居朗；R. 斯里达兰，阿祖马亚代数的消去，《代数杂志》18（1971），501–505。[PS] I. 帕宁；A. 苏斯林，关于格罗滕迪克关于阿祖马亚代数的猜想，《圣彼得堡数学杂志》9（1998），第 4 期，851–858。[P1]I. 帕宁，线性代数群纯性定理，预印本，2005，http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0729。[P2] I. 帕宁，关于约化群概形上主 G丛的格罗滕迪克–塞尔猜想：II，预印本，2013 年 4 月，http://www.math.org/0905.1423v3。[Par] R. 帕里马拉，仿射平面上的不可分解二次空间，《数学进展》62（1986），1–6。[PPeSt] I. 帕宁；V. 彼得罗夫；A. 斯塔夫罗娃，关于类型为 E_6 和 E_7的单伴随群概形的格罗滕迪克–塞尔猜想，预印本，2009，http://www.math.uiuc.edu/K-theory/。[PeSt] V. 彼得罗夫；A. 斯塔夫罗娃，具有平凡 F_4 不变量的 f_3 型群的格罗滕迪克–塞尔猜想，预印本，2009，http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/LAG/man/374.html。[PSV] I. 帕宁；A. 斯塔夫罗娃；N. 瓦维洛夫，关于约化群概形上主G丛的格罗滕迪克–塞尔猜想：I，《组合数学》151（2015），535–567。[PanSt] I. 帕宁和 A. 斯塔夫罗娃，关于相对射影直线上的主丛，预印本，2023。[Po] D. 波佩斯库，一般诺龙消奇化与逼近，《名古屋数学杂志》104（1986），85–115。

[Poo] *Poonen, B.*，有限域上的贝尔蒂尼定理，《数学年刊》160 (2004)，1099—1127。[ChPoo] *Charles, F., Poonen, B.*，有限域上的贝尔蒂尼不可约性定理，arXiv:1311.4960v1，2013。[R1] *Raghunathan, M.S.* 具有有理截面的主丛，《数学发明》116 (1994)，第1–3期，409–423。[R2] *Raghunathan, M.S.* 勘误：具有有理截面的主丛，《数学发明》121 (1995)，第1期，223。[R3] *Raghunathan, M.S.* 仿射空间上的主丛与射影直线上的丛，Math. Ann. 285 (1989)，309–332。[RR] *Raghunathan, M.S.; Ramanathan, A.* 仿射直线上的主丛，Proc. Indian Acad. Sci., Math. Sci. 93 (1984)，137–145。[Se] *Serre, J.-P.* 《代数纤维空间》，载于乔环及其应用，《Chevalley 研讨会》，第2年，数学秘书处，巴黎，1958。[Sw] *Swan, R.G.* Néron—Popescu 去奇异化，载于《代数与几何》（台北，1995），Lect. Algebra Geom. 2，Internat. Press，剑桥，马萨诸塞州，1998，135–192。[T] *Tits, J.* 代数单群与抽象单群，《数学年刊》80 (1964)，第2期，313–329。[Vo] *Voevodsky, V.* 带转移的预层的上同调理论，载于循环、转移与动机同调理论，《数学年刊研究丛书》，2000，普林斯顿大学出版社。[Z] *Zainoulline, K.V.* 关于某些经典代数群的主齐性空间的 Grothendieck 猜想，《圣彼得堡数学杂志》12 (2001)，第1期，117–143。

V. A. Steklov 数学研究所圣彼得堡分部，丰坦卡街27号，俄罗斯圣彼得堡 191023电子邮件地址：guo.ning@eimi.ru电子邮件地址：paniniv@gmail.com