arXiv:2302.02840v1 [gr-qc] 6 Feb 2023

黎曼量子几何的涌现

Hal M. Haggard、Jerzy Lewandowski 和 Hanno Sahlmann

摘要 本章探讨时空空间切片的量子黎曼几何。尽管研究者仍面临观测量子引力的挑战，圈量子引力有一个几何核心，在很大程度上定义了这一研究路径。这个核心就是其几何可观测量的量子特性：空间和时空由普朗克尺度量子微粒构成。这些微粒之间的相互关系由自旋网络描述；自旋网络是一种图，其边表示相互连接的节点的边界面积，而节点则编码每个微粒的范围。我们阐释量子黎曼几何如何从两种不同路径中涌现：在本章上半部分，我们从连续几何的视角出发，说明量子几何如何从若干原理中涌现，例如场论正则量子化的一般规则、将广义相对论表述为嵌入杨–米尔斯理论相空间中的经典理论，以及广义协变性。在本章下半部分，我们则展示量子几何也如何从对离散几何所编码的引力场有限自由度进行直接量子化中涌现。这两种路径相辅相成，旨在帮助背景各异的读者进入引人入胜的量子黎曼几何领域。

Hal M. Haggard 巴德学院，30 Campus Road，安嫩代尔-哈德逊河畔，纽约州 12504，美国，电子邮箱：hhaggard@bard.edu，Jerzy Lewandowski 物理学院，华沙大学，Pasteura 5，02-093 华沙，波兰，电子邮箱：jerzy.lewandowski@fuw.edu.plHanno Sahlmann 物理系，埃尔朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学（FAU），Staudtstraße 7，91058 埃尔朗根，德国电子邮箱：hanno.sahlmann@fau.de

1 引言

既然广义相对论既是关于时空几何的理论，也是关于引力的理论，那么某种几何量子理论显然会成为量子引力理论的一个组成部分。本章讨论的是圈量子引力所采用的引力量子化中产生的量子几何（空间部分）。

本章的前半部分聚焦于连续体方法，它源自若干原则，而这些原则几乎没有留下可供修改的空间，令人惊讶。这些原则包括场论正则量子化的一般规则、一种经典的广义相对论表述（在这种表述中，广义相对论似乎嵌入杨–米尔斯理论的相空间），以及广义协变性原理。本章将详细说明，量子黎曼几何如何从这种圈量子引力的连续体方法中涌现。

值得注意的是，量子黎曼几何也在其他背景下涌现：早在圈量子引力出现几十年前，Penrose 就已预见到它的许多方面；而一种直接对离散 经典几何进行量子化的方法，既富有启发性，也出人意料地丰富。具体而言，这种方法着眼于欧几里得多面体几何所刻画的引力场有限个自由度。我们还将说明，对这些多面体进行量子化，如何在本章后半部分为量子黎曼几何的涌现提供另一条途径。

量子几何的状态由看似一维的激发构成。其基由自旋网络态给出，它们由一张图描述：图的边上标记着 SU(2) 的不可约表示，顶点上则标记着不变张量。令人惊讶的是，它们也可以解读为量子电路的线性组合，或者解读为某种费曼图（同样是线性组合）。在自旋网络中，群 SU(2) 扮演着费曼图中庞加莱对称性的角色，而相互作用顶点描述的是空间体积的形成，而不是粒子的散射和衰变。

这种几何的一个基本特征是几何算符的谱具有离散性，尤其是面积算符的谱。带有自旋-j表示标记的自旋网络边，会为

$$a_j = 8\pi\gamma\ell_P^2\sqrt{j(j+1)} \tag{1}$$

该边所穿过的任意曲面贡献一个面积量子。这里

$$\ell_P^2 = \frac{\hbar G}{c^3} \approx 2.6 \times 10^{-70}\ \mathrm{m}^2 \tag{2}$$

是普朗克面积，而 γ 是该理论的一个参数。这一惊人的尺度解释了观测量子几何为何如此困难，也为寻找其可观测后果这一挑战拉开了序幕。

我们将在第 2.2 节和2.4节阐述圈量子引力中量子黎曼几何涌现的一些细节，并在第 3节讨论其性质。我们

将在第 4节讨论如何通过对离散几何进行量子化而涌现出量子黎曼几何。本章前后两部分所涉及的文献浩如烟海；我们没有试图给出完全严谨且面面俱到的论述，而是希望让刚接触这一领域的研究者更容易读懂本章。我们鼓励读者查阅本章中提供的大量参考文献，以了解更多细节。

2 广义相对论的整体通量变量

在本节开头，我们将介绍广义相对论的量子化，这一量子化构成了圈量子引力的基础。其结果之一是内蕴和外蕴黎曼几何的量子理论。

该形式体系基于一种相空间形式，将广义相对论嵌入 SU(2)杨-米尔斯理论的相空间中；同时，它所使用的算子代数和希尔伯特空间不依赖于任何辅助性的经典结构，例如平直背景度量。因此，所有结构都会在微分同胚作用下协变变换。

我们将在第 2.1 节和 2.2 节首先介绍经典设置。然后我们将讨论量子化（第 2.3 节），最后在第 2.4 节和第 3 节介绍由此得到的量子几何。关于以下各节所涵盖理论的更详尽介绍，可参见 [1, 2, 3, 4, 5]。

2.1 杨–米尔斯理论相空间中的广义相对论

考虑一个固定的四维流形 M。令 $e^I = e^0$、……、e^3 为余标架，并构造度量张量

$$g = \eta_{IJ} e^I e^J \tag{3}$$

在 M 上；这里 $\eta_{IJ} = \mathrm{diag}(-1、1、1、1)$，用于升降大写拉丁字母指标。SO(3,1)联络 ω在选定规范后，可写成由 1-形式组成的矩阵 $\omega^I{}_J$, I、$J = 0$、……、3，使得 $\omega_{IJ} = -\omega_{JI}$。$\omega^I{}_J$ 的曲率2-形式为

$$\Omega^I{}_J := d\omega^I{}_J + \omega^I{}_K \wedge \omega^K{}_J .$$

根据这些定义，帕拉蒂尼-霍尔斯特作用量 [6] 定义为

$$S_{\mathrm{PH}}(e,\omega) = \frac{1}{4\kappa}\int_{\mathcal{M}} \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge \Omega^{KL} - \frac{1}{2\kappa\gamma}\int_{\mathcal{M}} e^I \wedge e^J \wedge \Omega_{KL}, \tag{4}$$

其中 $\kappa := 8\pi G$ 采用 $c = 1$单位，而 $\gamma > 0$是巴贝罗-因米尔齐参数，其重要性将在下文显现。由 S_{PH} 推导出的协变辛形式 [7] 为

$$-\frac{1}{\kappa\gamma}\int_\Sigma \delta_{[1}(e^I\wedge e^J)\wedge\delta_{2]}(\omega_{IJ}-\frac{\gamma}{2}\epsilon_{IJKL}\omega^{KL}), \tag{5}$$

其中 Σ 是任意柯西超曲面，而 δ_1 和 δ_2 是与所得场方程的解空间相切的向量。

M 的 3+1 分解依赖于选择一个由三维曲面构成的叶状结构。特别地，余标架 e^I 应满足：在对偶标架（e_0，..... e_3）中，向量场 $e_i = e_1$、e_2、e_3 与叶状结构的叶片相切。还假设该叶状结构的叶片是相应度量张量的柯西超曲面。在每个叶片上，都有一个诱导度量

$$q = q_{ij}e^ie^j = (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2. \tag{6}$$

张量 q_{ij} 用于降低和升高小写罗马指标，这些指标的取值范围为 1 到 3。相应的无挠联络 $\Gamma^i = \Gamma^1$、Γ^2、Γ^3由满足以下条件的 1-形式给出

$$de^i + \epsilon^i{}_{jk}\Gamma^j\wedge e^k = 0,$$

其中，ϵ_{ijk} 是交替符号。虽然外曲率可以用由以下条件定义的 1-形式 $K^i = K^1$、K^2、K^3 表示

$$K^i_a := e^i_b\nabla_a n^b,$$

其中 n 是叶状结构叶片的法向量，即 $n = e_0$，其中 e_0 是标架中的类时向量场 e_I。用 2-形式（5）表示的 3 + 1分解为

$$\frac{1}{\kappa\gamma}\int_\Sigma \left(\delta_1 E^a_i\delta_2 A^i_a - \delta_2 E^a_i\delta_1 A^i_a\right) d^3x, \tag{7}$$

其中

$$E^a_i := \sqrt{\det q}\, e^a_i, \quad A^i_a = \Gamma^i_a + \gamma K^i_a, \tag{8}$$

且标架向量 $e_i = e_1$，e_2，e_3 与 Σ 相切，并与余标架 e^i对偶。上述辛形式给出泊松括号

$$\{A^i_a(x), E^b_j(y)\} = \kappa\gamma\delta^j_i\delta^b_a\delta^{(3)}(x,y). \tag{9}$$

有必要澄清由此产生的对称性。帕拉蒂尼-霍尔斯特作用量（4）在 $\mathcal{M}$ 的微分同胚以及余标架场的局域洛伦兹旋转下保持不变，同时伴随着联络 1-形式 $\omega^I{}_J$：

$$e'^I = (g^{-1})^I_J e^J, \quad \omega'^I{}_J = (g^{-1})^I{}_K\omega^K{}_L g^L{}_J + (g^{-1})^I{}_K dg^K{}_J.$$

该 3 + 1 分解将该对称性约化为保持 $\mathcal{M}$ 叶状结构的微分同胚，以及保持标架元 $SO(3)$ 的余标架旋转e_0；该标架元与叶状结构正交（相对于度量张量 (3)）。在

处理这些对称性时，我们再向前一步，即考虑群 SU(2) 的李代数的一组基$\tau_i = \tau_1$, τ_2, $\tau_3 \in \mathfrak{su}(2)$，使得

$$[\tau_i, \tau_j] = \epsilon^k{}_{ij}\tau_k, \quad -2\mathrm{Tr}(\tau_i\tau_j) = q_{ij},$$

并用它将 1-形式 A^i_a 汇集为一个 $\mathfrak{su}(2)$ 值 1-形式 A，并将向量密度 E^a_i汇集为一个 $\mathfrak{su}(2)$ 值向量密度 E，

$$A = A^i_a\tau_i \otimes dx^a, \quad E = E^{ia}\tau_i \otimes \partial_i. \tag{10}$$

现在，局部旋转由 SU(2) 值映射 g 表示： $\Sigma \to \mathrm{SU}(2)$，并且

$$E' = g^{-1}Eg, \quad A' = g^{-1}Ag + g^{-1}dg. \tag{11}$$

在此设置下，与极限$\gamma \to 0$ 相一致的另一种正则变量选择是

$$P''^a_i := \kappa\sqrt{\mathrm{detq}}\, e^a_i, \quad A''^i_a = K^i_a + \gamma\Gamma^i_a.$$

然而，阿什特卡-巴贝罗变量（8）的特殊性质，见 [8, 9], ，在于 A^i_a 是定义在 1-形式，取值于覆盖 SU(2) 丛的连接，该丛覆盖 Σ上的正交标架丛。

2.2 经典整体通量变量

局部标架旋转(11) 显然涉及非物理自由度。能够体现几何（物理）自由度的是平行移动。考虑一条路径 $[\tau_0, \tau_1] \ni \tau \mapsto p(\tau) \in \Sigma$ 以及方程

$$\frac{dh(t, t_0; p, A)}{d\tau} = -A_a(p(\tau))\dot{p}^a(\tau)h(t, t_0; p, A), \quad h(t_0, t_0; p, A) = \mathrm{id}.$$

我们为每条路径 p 赋予相应的平行移动

$$h_p(A) := h(t_1, t_0; p, A) \in \mathrm{SU}(2), \tag{12}$$

稍微宽泛地说，我们将这种开路径整体量称为整体量。注意，$h_p(A)$ 与 p 的保定向重参数化无关；而定向反转会导致翻转，$h_{p^{-1}} = (h_p)^{-1}$，其中 p^{-1} 表示同一条路径，但定向相反，右侧则是 SU(2) 中的逆元素。整体量的一项重要性质是复合规则

$$h_{p_1\circ\ldots\circ p_n}(A) = h_{p_1}(A)\ldots h_{p_n}(A). \tag{13}$$

另一方面，对于每个定向二维曲面 $S \subset \Sigma$ （一个子流形）和涂抹函数 $f\colon S \to \mathfrak{su}(2)$，我们赋予其通量

$$P_{S,f}(E) := \frac{1}{2}\int E^a_i f^i \epsilon_{abc} dx^b \wedge dx^c. \tag{14}$$

请注意，涂抹函数 f 可能涉及 A的点依赖整体，其选取方式应使被积函数在（11）下保持不变。不过，也可以使用与 A无关的涂抹函数。

整体量与通量之间的泊松括号很容易计算，而且具有简单的几何结构。事实上，若路径 p 的起点或终点位于曲面 S 上，且不在其他任何位置与其相交，则 [10],

$$\{h_p, P_{S,f}\} = -\kappa\gamma\frac{\sigma(S,p)}{2}\begin{cases} h_p f(p(t_0)), & \text{if } p(t_0)\in S \\ -f(p(t_1))h_p, & \text{if } p(t_1)\in S, \end{cases} \tag{15}$$

其中

$$\sigma(S,p) = \begin{cases} 1, & \text{if } p \text{ lies above } S \\ -1, & \text{if } p \text{ lies below } S \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{16}$$

此处公式中的上方 和下方 应作如下解释。由于Σ 和 S 都是定向的，它们将交点$x = p \cap S$ 处的切空间 $T_x\Sigma$ 分成三类：那些与 S 的正向基拼接后构成 Σ的正向基的切向量；构成负向基的切向量；以及与 S相切的切向量。如果 p 的一个正向定向切向量属于第一类，我们就说 p 位于 S上方；若它属于第二类，则说 p 位于 S下方。

如果路径 p 可以分解为上文所述某一类别的路径，那么就可以通过（13）和莱布尼茨法则应用泊松括号（15）。另一方面，如果路径 p 不与 S 相交，或者包含在 S中，则泊松括号（15）为零。尚未处理的一种情况是路径 p 与曲面 S 在无限多个孤立点处相交。我们通过假定 Σ [11]具有半解析结构来排除这种情况；这种结构是分段解析性的适当推广（见第 2.5节）。

泊松括号关系（15）有一个显著的推论。变量$P_{S,f}$ 不满足泊松对易 [12]。根据雅可比恒等式，我们有

$$\{\{P_{S_1,f_1}, P_{S_2,f_2}\}, h_p\} = -\{\{P_{S_2,f_2}, h_p\}, P_{S_1,f_1}\} - \{\{h_p, P_{S_1,f_1}\}, P_{S_2,f_2}\}, \tag{17}$$

这意味着存在一个非平凡的括号 $\{P_{S_1,\ f_1},\ P_{S_2,\ f_2}\}$。仔细考察可知，它仅在 $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ 时非零，并且只有当 $S_1 \cap S_2 \cap p \neq \emptyset$ 时，才与 h_P 有非零括号。乍看之下， P 不满足泊松对易关系，这令人惊讶，因为正则对易关系似乎意味着场 E 与自身对易。然而，通过将 P 定义为（无限维）向量场 [12]，或者通过观察到以下事实，可以自然地理解这种非交换性：

$$P'_{R,f} = \frac{1}{2}\int_R d^A f^i \wedge E^a_i \epsilon_{abc} dx^b \wedge dx^c \tag{18}$$

对于 R 具有边界的区域 $\partial R = S$ 与 $P_{S\text{的差异为 }f}$ 一个在考虑高斯约束后会消失的项 [13]。此处 d^A 是关于 A的协变形式导数。因此 $P'_{R,\ f}$将重现括号（15），同时由于 A 和 E的存在，解释（17）。

整体变量能更好地控制局部旋转变换（11）。事实上，

$$h_p(g^{-1}Ag + g^{-1}dg) = g^{-1}(p(t_1))h_p g(p(t_0)). \tag{19}$$

接下来，我们将考虑仅依赖于 Σ 中有限条路径上的整体量的 A 函数。如果这些路径的选取使其构成一个图Γ（即它们仅在边界处相交），那么局部旋转变换就只作用于 Γ 的顶点。我们将此类函数称为柱面 [14]。

使用与 A 无关的涂抹函数的通量变量的变换性质为

$$P_{S,f}\,(g^{-1}Eg) = P_{S,gfg^{-1}}(E). \tag{20}$$

这就是为什么在某些情况下我们使用依赖于整体量的 f， [15]，使得

$$P_{S,f}\,(g^{-1}Eg, g^{-1}Agg^{-1}dg) = P_{S,f}\,(A, E). \tag{21}$$

2.3 量子整体量-通量变量

要确定一种与上一节讨论的经典结构相对应的量子理论，需要选择一个运动学量代数。对其代数结构唯一严格的要求是：在 $\hbar$ 的一阶近似下，泊松关系（9）应实现为对易子，这是经典极限的一致性要求。除此之外，仍有许多可能的选择。其他合理的要求包括微分同胚协变性、规范协变性和简洁性。微分同胚作用于 Σ，规范变换则由约束生成，并作用于场（8）。因此，可以预期它们会作用于量子理论所基于的代数。该代数应在这些变换下封闭。其代数结构也不应依赖固定的经典结构，例如固定的经典度规。这是因为这些结构不会随变换而改变，会区分出一个（规范或坐标）标架，因此在广义协变理论中并不自然。

通常选择的代数是由以下元素生成的整体量-通量代数

$$(\widehat{h}_p)^a{}_b, \qquad \widehat{P}_{S,f}\,. \tag{22}$$

这些可以理解为表示12）的整体量 A，沿着路径 p 在Σ中的通量（14），其中 f 是由三个涂抹函数组成的三元组，而 S 是一个定向曲面。经典量以简单的方式在 Σ 的微分同胚作用下变换，因为被积函数是所积分子流形上的顶形式。至于代数关系，代数元素继承了控制平行输运的关系，例如：

$$\widehat{h}_{p_2\circ p_1} = \widehat{h}_{p_2}\widehat{h}_{p_1}, \qquad \widehat{h}_p(\widehat{h}_p)^\dagger = \mathbb{1}, \tag{23}$$

此处这些方程现在必须理解为代数值条目的矩阵方程，其中 dagger 表示矩阵转置和代数伴随。同样，符号 $\sim P_{S,\ f}$ 也继承了其经典对应物的关系，例如：

$$\widehat{P}_{S,f_1+f_2} = \widehat{P}_{S,f_1} + \widehat{P}_{S,f_2}, \qquad \widehat{P}^\dagger_{S,f} = \widehat{P}_{S,\overline{f}}. \tag{24}$$

整体量-通量代数中的关键非经典关系是对易子

$$[P_{S,f}\,, h_p] = \begin{cases} 0 & \text{if } S\cap p = \emptyset \\ 8\pi\ell_{\rm P}, \sigma(S,p)\, h_2\, \tau_i\, f^i(x)\, h_1 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{25}$$

映射（15）。其中 x 是 S 与 p的一个交点，而 σ 是一个符号（16），取决于 p 与 S 的相对取向。如果 p 在 x处与 S 相切，σ 则为零。对于多个交点的情况，可以直接推广，结果是对所有交点求和，每个交点对应一项，形式如（25）。注意，式（25）具有闭合性，因为对易子给出整体矩阵元的乘积之和。由关系式（23）、（24）和（25）以及雅可比恒等式生成的代数称为整体量-通量代数 $\mathfrak{A}_{\rm HF}$。[1]

注意，式（25）仅使用交点、取值和相对取向等在微分同胚下保持不变的要素。这意味着微分同胚作为代数同态作用于 $\mathfrak{A}_{\rm HF}$。

（25）和 $\mathfrak{A}_{\rm HF}$ 的另一个重要方面是，空间几何的非交换性不可避免。正如经典关系（17）所预示的，可以得到

$$\left[[\widehat{P}_{S_1,f_1}, \widehat{P}_{S_2,f_2}], \widehat{h}_p\right] = -\left[[\widehat{P}_{S_2,f_2}, \widehat{h}_p], \widehat{P}_{S_1,f_1}\right] - \left[[\widehat{h}_p, \widehat{P}_{S_1,f_1}], \widehat{P}_{S_2,f_2}\right], \tag{26}$$

这意味着，通常情况下，P之间存在非平凡的对易子。由于这些对象对应于空间度量几何，因此我们讨论的是一种非交换黎曼几何。

现在可以研究这个代数的表示。其中一个重要的表示是*Ashtekar-Lewandowski* 表示 [14, 18, 1]，接下来我们将讨论它。

2.4 Ashtekar-Lewandowski 表示

要得到 Ashtekar-Lewandowski 表示，可以沿用传统策略，将变量（A，E）拆分为“位置” A 和“动量” E，并将量子态定义为位置的函数。经过一些假设后，最终结果将是唯一的。为此，我们使用柱函数代数 $\mathrm{Cyl}^{(\infty)}$，也就是柱

[1] 关于 $\mathfrak{A}_{\rm HF}$ 的严谨定义，参见例如 [11]。文献中对这个代数的定义略有不同，具体取决于是否要施加额外的高阶对易子关系，更多详情参见 [16, 17]。

函数，即可以按以下方式表示的函数：

$$\Psi(A) = \psi(h_{p_1}(A), ..., h_{p_n}(A)), \tag{27}$$

其中 p_1，……， p_n 是 Σ中的任意路径，数目 n 取决于 Ψ 且任意，而 $\psi \in C^\infty(\mathrm{SU}(2)^n)$。显然，这些函数构成了变量 A的所有函数所成代数的一个子代数。给定一个柱函数 Ψ，式（27）中的路径集合并不唯一。例如，我们总可以将一条路径细分为两条，或改变其方向，或仅仅添加一条新的、不必要的路径。关键观察是，两条半解析路径只能在有限个孤立点以及有限个连通线段上相交。因此，给定一个柱函数（27），我们可以对路径进行细分，使所得路径至多在一个或两个端点处相交，也就是说，它们描述了嵌入在 Σ 中的一个图。因此，每个柱函数都可以写成式（27）的形式，其中路径 p_1，……， p_n 是图 Γ 中嵌入于 Σ的边。

为定义两个状态 Ψ 和 Ψ'之间的原型希尔伯特内积，我们选取一个图 Γ，由路径 $\{p_1,..., p_n\}$指定，并使得每个状态都能写成形式（27），然后定义

$$(\Psi, \Psi') := \int dg_1 ... dg_n \overline{\psi(g_1, ..., g_n)} \psi'(g_1, ..., g_n). \tag{28}$$

重要的是，结果与所选图无关。量子态的希尔伯特空间 H_{AL}定义为 Cyl 在由内积 $(\cdot,\cdot)$ 所定义的范数下的完备化。

$\widehat{\ }$每个柱函数 Ψ 都自然地提升为作用于 $\mathrm{H}\widehat{\ }$ 中的量子算符 Ψ：$\Psi\Psi' = \Psi\Psi'$。而每个通量可观测量 $P_{S,f}$ 都会导出一个量子算符 $\widehat{P}_{S,f}$（最初）定义在 $\mathrm{Cyl}^{(\infty)}$ 上，其定义为 $\widehat{P}_{S,f}\Psi := i\hbar\{P_{S,f}, \Psi\}$。“位置”算符的性质显而易见。只要定义 f 时可能涉及的整体量都包含在曲面 S 中，且函数 f 为实值，通量算符就是对称的（甚至本质自伴）。

通量算符会产生一个量子自旋算符 $\hat{}J_i^{x[p]}$，它被赋予点$x \in \Sigma$ 以及一类 $[p]$ 从 x 出发且具有相同初始线段的曲线。给定一个柱函数 Ψ，我们将其写成形式 (27)，其中的图满足以下条件：其中一条边（例如 p_1）从 x 出发，且属于类 $[p]$。于是，

$$\hat{J}_i^{x[p]}\Psi(A) = i\hbar \frac{d}{ds}_{|_{s=0}} \psi(h_{p_1}(A)e^{s\tau_i}, h_{p_2}(A), ..., h_{p_n}(A)). \tag{29}$$

用量子自旋算符表示，量子通量算符为

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{S,f} &= \frac{\kappa\gamma}{2} \sum_{x\in S} f^i(x) \left(\sum_{[p] \text{ going up}} \hat{J}_i^{x,p} - \sum_{[p] \text{ going down}} \hat{J}_i^{x,p} \right) \\ &= \frac{\kappa\gamma}{2} \sum_{x\in S} f^i(x) \left(\hat{J}_i^{x,S\uparrow} - \hat{J}_i^{x,S\downarrow} \right). \end{aligned} \tag{30}$$

对 x 的求和遍及整个曲面 S，而对 $[p]$ 的求和则遍及 x 处所有（等价类的）边。不过，当该算子作用于柱函数时，这些求和仅遍及曲面与该函数所依赖的曲线之间孤立的交点，以及与柱函数所依赖的曲线重叠的边 $[p]$。

微分同胚 $\phi:\ \Sigma\to\Sigma$自然地作用于柱函数（27），其作用方式为

$$U_\phi\Psi(A)=\Psi(\phi^*A)=\psi(h_{\phi(p_1)}(A),...,h_{\phi(p_n)}(A)).$$

算子 U_ϕ 在 H 中是酉的。通量也是微分同胚协变的

$$U_\phi\widehat{P}_{S,f}U_\phi^{-1}=\widehat{P}_{\phi^{-1}(S),\phi^*f},$$

如果 f 涉及沿路径 q_1，……，q_k 的整体量，那么 ϕ^*f 对沿 $\phi^{-1}q_1$，……，$\phi^{-1}q_n$ 的整体量也有同样的依赖关系。不过需要指出的是，微分同胚并不存在作用于柱函数空间中的无穷小生成元。

局部旋转（11也通过（$\mathcal{H}$19）自然且酉地作用于希尔伯特空间。它们由局部旋转算子的李代数生成

$$\int_\Sigma d^3x(\widehat{(D_a\Lambda)E^a})=\frac{\kappa\gamma}{2}\Lambda^i(x)\sum_{x\in\Sigma}\sum_{[p]\text{ at }x}\hat{J}_i^{x,[p]}=:\frac{\kappa\gamma}{2}\Lambda^i(x)\sum_{x\in\Sigma}\hat{J}_i^{x,\text{tot}}.\qquad(31)$$

最终表达式中的简洁记法将刚刚引入的总自旋算符与总自旋算符 $S\uparrow$、$S\downarrow$ 和 $S\parallel$联系起来；后者涵盖了 S 中包含的曲线，其表达式为

$$\hat{J}_i^{x,\text{tot}}=\hat{J}_i^{x,S\uparrow}+\hat{J}_i^{x,S\downarrow}+\hat{J}_i^{x,S\parallel}.\qquad(32)$$

由柱函数和通量算符生成的代数满足整体量-通量代数 $\mathfrak{A}_{\text{HF}}$ 的关系，因此构成希尔伯特空间 H 上的$\mathfrak{A}_{\text{HF}}$ 表示。此外，空间微分同胚以如上所述的酉方式作用，并保持由常数柱函数表示的 Ashtekar-Lewandowski 真空不变。可以证明，这是唯一一种 $\mathfrak{A}_{\text{HF}}$ 表示，其中空间微分同胚是酉表示的，并且包含一个不变的循环向量 [11, 19]。

如果我们在柱函数的定义中固定一个由路径 p_1、……、$p_n\subset M$指定的图 Γ，那么彼得-外尔定理会给出一个正交归一基。设希尔伯特空间 H_{j_I} 中不可约表示 j_I的一组正交归一基，则可通过为每条边 p_I 指定维格纳矩阵$D_{(j_I)}{}^{m_I}{}_{m'_I}$的第（$n^I$, m_I）项来定义一个基元素。根据这些数据，我们在 SU(2)^{n}上构造一个函数，

$$\psi(g_1,...,g_n)=\sqrt{(2j_1+1)...(2j_n+1)}D_{(j_1)}{}^{m_1}{}_{m'_1}(g_1)...D_{(j_n)}{}^{m_n}{}_{m'_n}(g_n).\qquad(33)$$

为了控制该函数在规范变换下的性质，对于每个交点 v，在入边 p_{I_1}、……、p_{I_k} 和

出边（例如 p_{J_1}、……、p_{J_l}），我们引入张量 $\iota_{v\,m'_{I_1}\ldots\ldots m'_{I_k}}{}^{m_{J_1}\ldots\ldots m_{J_l}}_{m}$，称为交织算子，它们将相应的表示（对于出边则为对偶表示）交织为一个新的不可约表示 j_v，[2] 并对它们进行相应的缩并，

$$\otimes_v \iota_{v_\alpha} \lrcorner \otimes_I \sqrt{2j_I+1} D_{(j_I)}. \tag{34}$$

特别是，如果我们只取映到平凡表示的交织算符，即 SU(2)不变量，那么就得到一个规范不变圆柱函数，也称为自旋网络 [20]。

事实上，由于以下各族中的任一算子 $\{\hat{}J^{y}_{i}{}^{[p]}\hat{}J^{iy,[p]}\}_{y,[p]}$ 以及 $\{\hat{}J^{y,\mathrm{tot}}\}_y$ 中的任一算子都与这些族中的其他任一算子对易，因此存在一个由它们共同构成的共同特征基。这个基由状态（34）组成。特别地，由此可知，满足以下条件的 $\hat{}$ 算子 O 是

$$[\hat{O}, \hat{J}^{y,[p]}_i \hat{J}^{iy,[p]}] = 0 = [\hat{O}, \hat{J}^{y,\mathrm{tot}}] \qquad \text{for all } y, [p], \tag{35}$$

在这个基下也必须是对角的。

2.5 微分同胚与微分同胚不变性

在圈量子引力中，我们区分多种类型的微分同胚和光滑性。本小节讨论半解析范畴，以及相应的微分同胚；前文介绍的量子理论在这些微分同胚下保持不变。稍后在第 3.10 节中，我们将提及基于其他微分同胚的理论构建方向。这些方向尚未得到充分探索，尽管它们已经带来了有趣且有时在数学上极其精妙的成果。

在一维情形下，半解析函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是任意分段解析的可微函数。要将此定义推广到更高维，需要对“分段”作出恰当的定义。为严格表述圈量子引力的微分同胚不变性，人们提出了一个思路：通过半解析集和半解析分割理论引入一种新的可微性类别[21, 22, 11]。如果定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数在某个半解析分割的每个元素上作限制时都是解析的 $\mathbb{R}^n$，那么就称该函数为半解析函数。该性质的局部版本给出了其一般定义 [11]。注意，$\mathbb{R}^n$ 的每个半解析分割都包含开子集以及低维子集，例如立方体内部、面内部、格点内部和顶点。定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值半解析函数族具备定义

---

[2] 令 $D_\otimes = D_{(I_1)} \otimes \ldots \otimes D_{(I_k)} \otimes D^*{}_{(J_1)} \otimes \ldots \otimes D^*{}_{(J_l)}$ 为张量积表示。交织算子 $\iota_{v\,m'_{I_1}\ldots m'_{I_k}}{}^{m_{J_1}\ldots m_{J_l}}_{m}$ 由一个等变映射的矩阵元给出

$$\iota : \mathcal{H}_\otimes \longrightarrow \mathcal{H}_{j_v}, \qquad D_{(j_v)} \circ \iota = \iota \circ D_\otimes.$$

m 是 ι 的最终指标，用来标记 H_{j_v} 的状态；下文中我们还将考虑带有 $j_v = 0$ 的规范不变态，因此该指标并非总会出现。

半解析流形和子流形，以及半解析微分同胚[11]。半解析范畴一方面结合了解析范畴的重要性质，另一方面也结合了可微（或光滑）范畴的重要性质。在半解析范畴中，流形M 中包含的每一族有限条曲线都可以分割成有限个部分，从而确定一个嵌入图 M。给定一个2维曲面 S 位于一个 3维流形中，每条曲线都可以分割成有限个部分，使得每个部分要么不与 S相交，要么仅在一个点相交，要么与之重叠 S。这些性质取自解析范畴。另一方面，与可微范畴的情形一样，局部（半解析）微分同胚仍可具有任意小的紧支撑。

上述量子整体算符和量子通量算符具有微分同胚协变性，也就是说，微分同胚会将它们幺正映射为其他整体算符和通量算符。与之相反，总量子体积算符或量子标量曲率算符的积分则具有微分同胚不变性。还有哪些微分同胚不变算符？事实证明，任何定义域包含所有柱函数的自伴微分同胚不变算符都会保持图不变：由给定图定义的柱函数会被映射为一个仍可由同一图定义的柱函数[1]。这一定理是“代数圈量子引力”[23, 24, 25, 26]的基础。

浸入图的微分同胚不变刻画包含其全局和局部性质。前者是由图的边构成的广义纽结和链环；后者描述边如何在顶点处相交。任意一组三条边在一个顶点相交的通常情形，都可以通过微分同胚变换为与任意固定坐标系的三条轴相交的情形。如果有第四条边，则可利用剩余的轴缩放自由度，将这条边的位置任意确定在某个区域内，该区域代表八分之一的角度范围。此时，在该顶点相交的第五条边（如果存在）的位置便成为微分同胚不变特征。因此，从价数为五开始，图顶点会贡献一组连续的微分同胚不变自由度，见[27]。

3 量子几何

Ashtekar-Lewandowski 表示的状态描述了空间切片的外在几何和内在几何 Σ。通过用代表这种几何各个方面的算子对这些状态进行探测，便能最直接地看到这一点。本章将仅讨论空间切片的内在黎曼几何，并在3.1至3.6各节考察相应的算子及其性质。由此呈现出一种几何：它将自旋网络的顶点与空间区域的体积联系起来，将边与面积联系起来。

颇令人惊讶的是，通过研究广义相对论得到的量子几何，也可以视为对分片平坦离散几何的量子化。在 3.7 节中，我们将简要说明这一图景如何在圈量子

引力中形成。这也为本章 4 节奠定了基础；该节将从经典基础出发，发展量子离散几何。

在第3.9节中，我们讨论量子几何态和算子的某种极限；这种极限能够简化计算，并可用于量子宇宙学。最后，第3.10 节简要介绍了在存在物质的情况下、采用其他整体量与通量表示时，以及扩展整个形式体系时，量子几何图景的一些拓展。

3.1 面积算子

圈量子引力中最先定义的几何算子，也可能是最简单的一个，是面积算子 [28, 10]。在这一框架下，它的定义十分自然，因为面积2-形式本质上就是场 E [29] 在内部空间中的长度。

考虑一个2维曲面 $S \subset \Sigma$。对于每个经典标架密度场E^a_i，参见（8），d^2s 中的面积元 S 可通过（14）的通量穿过小块 S_n 来近似，这些小块构成了 S的一个分割。事实上，对于定义在 S上的任意函数 F，

$$\int_S F d^2 s = \lim_{N\to\infty} \kappa\gamma \sum_{n=1}^{N} F(x_n)\sqrt{P_{S_n,\tau_i} P_{S_n,\tau_i} q^{ij}}, \quad x_n \in S_n, \tag{36}$$

在分割均匀加细的极限下成立。在量子理论中，我们用量子通量算符替代经典通量，从而得到量子理论中的下列积分， [10],

$$\int_S F\widehat{d^2 s} = \frac{\kappa\gamma}{2} \sum_{x\in S} F(x)\sqrt{-\Delta_{S,x}}\,, \tag{37}$$

其中

$$-\Delta_{S,x} := q^{ij}\left(\hat{J}_i^{xS\uparrow} - \hat{J}_i^{xS\downarrow}\right)\left(\hat{J}_j^{x,S\uparrow} - \hat{J}_j^{x,S\downarrow}\right). \tag{38}$$

与通量算符的情形一样， x 遍历 S上的各点；不过，当该算子作用于柱函数时，只有曲面与该函数所依赖的曲线之间孤立的交点才会产生贡献。值得注意的是，该算子定义良好：不会出现无穷大。

算子$-\Delta_{S,x}$ 的本征态和本征值由自旋算子的代数性质决定，具体为

$$\lambda = \hbar^2\left(2j^\uparrow(j^\uparrow+1) + 2j^\downarrow(j^\downarrow+1) - j^{\downarrow\uparrow}(j^{\downarrow\uparrow}+1)\right), \tag{39}$$

其中 $j^\uparrow, j^\downarrow = 0, 1 2, ..., 且\ j^{\downarrow\uparrow} = |j^\uparrow - j^\downarrow|, |j^\uparrow - j^\downarrow|+1, ..., |j^\uparrow + j^\downarrow|$,并且我们采用与通量算符定义中相同的记号，见式（30）。

面积算符的本征值，

$$\hat{A}_S = \int_S d\hat{2}s = \frac{\kappa\gamma}{2}\sum_{x\in S} F(x)\sqrt{-\Delta_{S,x}},$$

都是基本面积的有限和 $a_S = \frac{\kappa\gamma}{2}\sum_v \sqrt{\lambda_v}$，其中每个 λ_v 都具有以下形式（39），[10]。

特征值（39）的一般情形出现在曲面 S 与一条横截曲线的交点处；该曲线在交点处被截断，分成两条边，且两条边的定向均为向外。此时 $j^{\uparrow} = j^{\downarrow} = j$ 且 $j^{\downarrow\uparrow} = 0$，相应的面积特征值为 $a_s = \kappa\gamma\hbar\sqrt{j}$（$j+1$）。另一方面，最简单的情形是一条向外的边，对应于 $j^{\uparrow} = j = j^{\downarrow\uparrow}$，$j^{\downarrow} = 0$ 且 $a_S = \frac{1}{2}\kappa\gamma\hbar\sqrt{j}$（$j+1$）。

如果 S 是一个连通闭曲面，并将 Σ 分成两个不连通的部分，而且如果我们只考虑规范不变的柱函数，那么还有额外的约束，即

$$\sum_v j_v^{\uparrow} \in \mathbb{N}, \text{ 以及 } \sum_v j_v^{\downarrow} \in \mathbb{N}。$$

量子面积算符在局部旋转下保持不变，即 $[\hat{A}_S, \hat{J}^{x,\,\mathrm{tot}\,i}] = 0$，并且它在微分同胚变换下是协变的：$U_\phi \hat{A}_S U_{(-1)\,\phi} = \hat{A}_{\phi^{-1}A}$。算符 $\hat{q}_x$ 也与它对易，$[\hat{A}_S, \hat{J}^{y,\,[p]}_i \hat{J}^{iy,\,[p]}] = 0$。

在某些具有边界的圈量子引力模型中，每个二维曲面都配备一个指定的 $\mathfrak{su}(2)$ 值函数 $r\colon S \to \mathrm{su}(2)$，且只允许使用 E^a_i 标架，使得向量场 $n^a := r^i E^a_i/\sqrt{\det E}$ 垂直于 S。于是，我们定义另一个面积算符，[30]，

$$\hat{A}'_S := \int_S |r^i E^a_i \epsilon_{abc} dx^b \wedge dx^c| = \frac{\kappa\gamma}{2}\sum_x |\hat{J}^{x,S\uparrow}_i r^i + \hat{J}^{x,S\downarrow}_i r^i|.$$

该算子的优点是具有等间距谱：特征值为 0 和 $\frac{\kappa\gamma}{2}N$，其中 $N \in \mathbb{N}$。这与二维曲面上的量子熵计算相一致（对于曲线与曲面的典型交点，N 甚至）。

3.2 角算符

有了量子三重态通量算符和量子面积算符，我们便可以定义一个量子算符，用于计算垂直于曲面的单位向量之间的标量积。

考虑两个定向曲面 S，$S' \subset \Sigma$ 以及一点 $x \in S \cap S'$。我们将从构造适用于 x 处单位法向量的经典表达式开始。令 $S(\epsilon) \subset S$ 为一个以 x 为中心、坐标半径为 ϵ 的圆盘。该极限

$$n_{Sxi} := \lim_{\epsilon\to 0} P_{S(\epsilon),\tau_i}/A_{S(\epsilon)} \tag{40}$$

给出了与 S 和 x 正交的单位余向量 $n_{Sxa} = n_{Sxi}e^i_a$ 的分量。与另一个余法向量 $n_{S'xi}e^i$ 的标量积不再涉及 e_i，因为 $q_{ij} = \delta_{ij}$，且 $n_{Sxa}n_{S'xb}q^{ab} = n_{Sxi}n_{S'xj}q^{ij} = 1$。

现在转向量子几何，并考虑算子 $\hat{}P_{S(\epsilon),\tau_i}/\hat{}A_{S(\epsilon)}$。分子和分母可对易，$[\hat{}P_{S(\epsilon),\tau_i}, \hat{}A_{S(\epsilon)}] = 0$，因此商与算子的排序无关。极限

$$\hat{n}_{Sxi} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\hat{P}_{S(\epsilon),\tau_i}}{\hat{A}_{S(\epsilon)}} = \frac{\hat{J}_i^{x_0S\uparrow} - \hat{J}_i^{x_0S\downarrow}}{\sqrt{q^{ij}\left(\hat{J}_i^{x_0S\uparrow} - \hat{J}_i^{x_0S\downarrow}\right)\left(\hat{J}_j^{x_0,S\uparrow} - \hat{J}_j^{x_),S\downarrow}\right)}} \tag{41}$$

在由算子 $\Delta_{S,x}$ 的非零本征值对应的本征态所张成的状态空间上定义良好，并且在量子层次上满足 $q^{ij}\hat{n}_{Sxi}\hat{n}_{Sxj}q^{ij} = 1$。最后，可定义一个算子，用来给出曲面 S 和 S' 在点 x 处夹角的余弦：

$$\cos(\hat{\alpha}_{SS'x}) := \frac{1}{2}q^{ij}\left(\hat{n}_{Sxi}\hat{n}_{S'xj} + \hat{n}_{S'xi}\hat{n}_{Sxj}\right). \tag{42}$$

要使该算子作用于自旋网络态后得到良好定义的状态，当且仅当图与每个曲面都有非平凡且一般的位置相交。事实上，此时 S 和 S'的面积算子的谱中都不包含 0 。这一界定的灵感源自 A_S 和 $A_{S'}$，但经过重新表述，使其适用于柱函数态的微分同胚协变框架，因此它具有一些不同的性质。

3.3 体积算子

由变量（A, E）定义的三维体积元为 $d^3x\sqrt{|\det E|}$。通过使用由 $\overline{\Sigma\text{的分}}$割所定义的曲面上的通量，可以近似计算定义在 Σ 上的任意函数 F 的积分；对于 $\{x_n\}$ $= S^a_n \cap S^b_n \cap S^c_n$，我们有

$$\int_\Sigma d^3x\sqrt{|\det E|}F = \lim_{N\to\infty}\sum_n F(x_n)\sqrt{|\frac{1}{3!}\epsilon^{ijk}\epsilon_{abc}P_{S^a_n,\tau_i}P_{S^b_n,\tau_j}P_{S^c_n,\tau_k}|}. \tag{43}$$

值得注意的是，只需将经典通量替换为量子算符，就再次得到了希尔伯特空间 H 中定义良好的有限算子，其定义域为柱函数， [28, 18, 32, 33]。然而，在这种情况下，结果强烈依赖于曲面的选择，尤其是会破坏微分同胚不变性。文献中采用了两种不同的选择，分别导出了两种不同的微分同胚不变量子体积算子。两种情况下，正则化二维曲面都根据用于构造柱函数的给定图进行调整。第一种情况下，内部正则化 [32, 33],这组三个二维曲面

与图的顶点相交（包括细化图中多余的顶点）。第二种情况下，外部正则化 [28],这些二维曲面构成包含顶点的胞腔。下面将介绍这两种结果。

在这两种正则化中，量子体积算符具有相似的形式，其中

$$\sqrt{|\widehat{\det E}|}(x) = (a_0\kappa\gamma)^{\frac{3}{2}} \sum_{y\in\Sigma} \delta^{(3)}(x,y)\sqrt{\hat{q}_y}\,, \tag{44}$$

此处 x 遍历 Σ的全部。两种正则化在处理和定义$\hat{q}_x$的方式上有所不同。我们先从内部正则化开始。通过对某一选择族进行适当的平均，可以确保微分同胚不变性，由此得到的$\hat{q}_x$ 为

$$\hat{q}_x^{\rm int} = \left| \frac{1}{3!} \sum_{e,e',e"} \epsilon^{ijk}\epsilon(e,e',e")\hat{J}_i^{x,e}\hat{J}_j^{x,e'}\hat{J}_k^{x,e"} \right|, \tag{45}$$

其中 $\epsilon(e,e',e") = \pm 1$ 或 0 取决于点 x处切向量的取向，求和遍历所有从 x出发的曲线三元组。注意，对于柱函数，只有 x（它是相应图的一个顶点），以及 e、e'、 $e"$在 x 处与图的边重叠的曲线才有贡献。取向敏感因子$\epsilon(\cdot,\cdot,\cdot)$ 会使所有平面三元组（即平面顶点）的贡献为零。在非退化情形下，它会为相应项赋予正负号。式（ a_0 中出现的常数是任意的，取决于用于平均的测度。

对于外部正则化，得到的则是

$$\hat{q}_x^{\rm ext} = \frac{1}{3!} \sum_{e\neq e'\neq e"\neq e} |\epsilon^{ijk}\hat{J}_i^{x,e}\hat{J}_j^{x,e'}\hat{J}_k^{x,e"}|, \tag{46}$$

其中常数 a_0 仍然任意。

每个算子$\hat{q}_x^{\rm int}$和$\hat{q}_x^{\rm ext}$都满足对易关系（35），因此它们保持上述相应的自旋网络子空间不变。而且，每个算子都具有微分同胚协变性，即

$$U_\phi \hat{q}_x U_\phi^{-1} = \hat{q}_{\phi^{-1}(x)}, \quad U_\phi \hat{q}'_x U_\phi^{-1} = \hat{q}'_{\phi^{-1}(x)}.$$

无论采用哪种正则化，体积算子（44）都与基于离散几何的体积量子化密切相关 [34], , 我们将在第 4.3 节讨论这一点。简而言之，对欧几里得四面体的相空间进行量子化所得到的体积谱，与算子（44）作用于四价顶点时的体积谱非常接近。这种不同方法之间的趋同令人惊讶，也令人欣慰。

虽然这些体积算符看起来相似，但它们之间存在本质的定性差异。算子 $\hat{q}_x^{\rm ext}$ 取决于汇聚于一个顶点的多条不同边，但它不受这些边的切向量之间关系的影响：所有边可以彼此相切，也可以都包含在同一个

切平面中。算子$\hat{q}_x^{\text{int}}$适用于假定存在底层流形并为其赋予量子几何的方法。事实上，我们期望标架场行列式能够区分平面向量组与一般的三向量组。[3] 另一方面，第二个算子$\hat{q}_x^{\text{ext}}$则用于这样的方法：在这些方法中，流形与几何一同从更为基础的离散结构中涌现。

算子（44）的谱通常尚不清楚，但已有大量部分解析 [37, 38, 39, 40, 36, 41, 34, 42] 和数值 [35] 结果。下面将简要介绍其中一些。

基于涉及体积和通量的经典等式（14），有人提出了关于体积量子化的一致性检验， [39, 40]。这些检验涉及平均常数 a_0 和正则化方案。在内部正则化的情况下，关于常数 a_0 的结果存在歧义，即 $a_0 = \frac{1}{2}$ 或$a_0 = 1/2(2)^{\frac{1}{3}}$。_ 在某些情况下，外部正则化并不受青睐。

我们将考察算子在一些特殊情况下的作用。最简单的非平凡情形是一个三价顶点，对于$\hat{q}_x^{\text{int}}$而言是一般的（即非平面的），而对于$\hat{q}_x^{\text{ext}}$而言是任意的。在这种情况下，两种正则化会得到相同的算子：

$$\epsilon^{ijk}\hat{J}_i^e \otimes \hat{J}_j^{e'} \otimes \hat{J}_k^{e''} : (V_e \otimes V_{e'} \otimes V_{e''})_m^j \to (V_e \otimes V_{e'} \otimes V_{e''})_m^j \tag{47}$$

定义在一组三个不可约 SU(2) 表示$V_e \otimes V_{e'} \otimes V_{e''}$其特征由总自旋 j 和算子 m 的特征值 $\hat{} J_3^e + \hat{} J_3^{e'} + \hat{} J_3^{e''}$ 确定。在这种情况下$j = 0$ 该算子为零。这让圈量子引力体积算符的发现者感到意外；他们原本希望将理论限制在 3价自旋网络态（因 Penrose 而闻名 [43, 44]），但现在回过头来看，很明显这些状态对应于退化的平面几何，参见第 4节。（事实上，对于任意 n价顶点，只要不变交织算子的空间，也就是具有 $j = 0$的状态空间，是1维的 [37]。）

非规范不变态的三价情形，其谱尚无封闭形式。不过，由于这一问题很重要，我们在此概述几种特殊情形。算子$\hat{q} = |\epsilon^{ijk}\hat{} J_i \otimes \hat{} J_j \otimes \hat{} J_k|$，作用于张量积空间$V_j \otimes V_{j'} \otimes V_{j''}$，并且

$$\text{Tr}\left(\hat{q}^2\right) = \frac{2}{9} j(j+1)j'(j'+1)j''(j''+1)(2j+1)(2j'+1)(2j''+1).$$

这给出了平均特征值的平方 $\langle \hat{} q^2 \rangle = \frac{2}{9} j(j+1)j'(j'+1)j''(j''+1)$。由 $j_* = j_1 + j_2 + j_3 - 1$ 定义的特殊情形给出了 $\hat{q}$ 的特征值 q，如下所示

$$j = j_* \implies q = \pm\sqrt{j_1 j_2 j_3 (j_*+1)}, \tag{48}$$

$$j = j_* - 1 \implies q = 0, \pm\sqrt{j_*(4j_1 j_2 j_3 - j_1 j_2 - j_2 j_3 - j_3 j_1) + j_1 j_2 j_3}. \tag{49}$$

另一个重要情形由一个规范不变四价顶点 v定义。在这种情形下，$\hat{q}$ 作用于 Inv $(V_j \otimes V_{j'} \otimes V_{j''} \otimes V_{j'''})$，即 $(V_j \otimes V_{j'} \otimes V_{j''} \otimes V_{j'''})$的子空间

[3] 事实上，因子 $\epsilon(\cdot,\cdot,\cdot)$ 的存在使$\hat{q}_x$的分析复杂得多，因为它会影响谱；而且对于较大的价数，会出现许多符号配置。对于一个七价顶点，已经有 O (10^6) [35, 36]。

在 SU(2) 的对角作用下保持不变。在这种情形下

$$\hat{q}_v^{\text{ext}} = 4|\epsilon^{ijk}\hat{J}_i^e \otimes \hat{J}_j^{e'} \otimes \hat{J}_k^{e"}| \quad \text{and} \quad \hat{q}_v^{\text{int}} = \chi(e,e',e",e'")|\epsilon^{ijk}\hat{J}_i^e \otimes \hat{J}_j^{e'} \otimes \hat{J}_k^{e"}|, \tag{50}$$

其中 χ 取决于顶点的微分同胚类，取值为$\chi(e,\ e',\ e",\ e'") \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$。对于这种情况，谱是非简并的，并且存在体积隙，即最小的非零体积本征值 [35, 45, 42]。最小非零和最大体积本征值的标度关系已在 [42]中推导出来，并且与四面体的经典几何恰好吻合。有关这些结果的更多讨论，请参见第 4 节和 [34, 42]。

对于价数高于 4 的顶点，目前只有关于体积谱的数值结果。在 [35] 中，计算了价数为 5 至 7、自旋最大达到$j_{\max} = 13/2$ 的 (44) 谱。研究特别关注最小非零特征值和最大特征值。结果发现，最小非零特征值随 $j_{\max}$ 变化的标度行为，关键取决于由顶点嵌入所产生的符号配置以及因子 $\epsilon(\cdot,\ \cdot,\ \cdot)$。通常，体积隙会随 $j_{\max}$的增加而增大。但在某些符号配置下，体积隙呈现相反的变化趋势：在这些情况下，最小非零特征值会保持不变，或随最大自旋增大而减小。事实上，有迹象表明，对于奇数价数，零附近的谱密度可能呈指数增长，但数值数据尚不足以得出确切结论。对于所有符号配置，最大特征值都会随 $j_{\max}$增大，但增长率取决于符号配置。

3.4 逆度量张量算符

用联络标架变量表示的逆度量张量为 $q^{ab} = q^{ij}e_i^a e_j^b = E_i^a E_j^b/|\det E|$。为简化 q^{ab}，其思路是用 1-形式 ω 对其进行探测，构造一个不涉及 E_i^a 的逆的权重为1的密度，并进行涂抹。结果得到的可观测量为

$$\int_\Sigma d^3x\sqrt{\det q}\sqrt{q^{ab}\omega_a\omega_b} = \int_\Sigma d^3x\sqrt{E^aE^b\omega_a\omega_b}.$$

相应的算子

$$\int_\Sigma d^3x\sqrt{\hat{E}^a\hat{E}^b\omega_a\omega_b}, \qquad \hat{E}_i^a = -i\kappa\gamma\hbar\delta/\delta A_a^i,$$

作用于自旋网络函数（27）和（33）时，结果证明定义良好且十分明确 [46]——它的作用是乘以特征值

$$\kappa\gamma\hbar\sum_{I=1}^n\sqrt{j_I(j_I+1)}\int_{p_I}|\omega_a\dot{p}_I^a|dt. \tag{51}$$

这个算子曾用于克莱因-戈尔登场哈密顿量的量子化 [47], 它也可应用于矢量场的情形。

3.5 长度算符

正交余标架 e^i_a 以一种颇为复杂的方式表示为密度化标架 E^a_i,

$$e^i_a = \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\epsilon^{ijk}E^b_j E^c_k/\sqrt{|\det| E}, \tag{52}$$

这似乎使量子化变得更加复杂。然而，令人沮丧的分母可以通过与体积可观测量 [48, 49], 的泊松括号吸收

$$e^i_a = \frac{2}{\kappa\gamma}\{A^i_a, V\}, \quad V := \int_\Sigma d^3x\sqrt{|\det E|}. \tag{53}$$

此外，曲线 p 的长度可以用整体量、体积以及泊松括号表示为： [50],

$$\int_p \sqrt{e^i e^j q_{ij}} = \kappa\gamma \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\sqrt{-2\mathrm{Tr}\left(h^{-1}_{\Delta p_n}\{h_{\Delta p_n}, V\}h^{-1}_{\Delta p_n}\{h_{\Delta p_n}, V\}\right)}, \tag{54}$$

其中， $p = \Delta p_1 \circ \ldots \circ \Delta p_n$ 是按照 $n \to \infty$进行均匀细化的分割。量子化后，量子长度算符变为（可能的形式之一， [50]）

$$\widehat{\int_p \sqrt{e^i e^j q_{ij}}} = \frac{\kappa\gamma}{\hbar}\sum_{x\in\Sigma}\sqrt{-2\mathrm{Tr}\left(\left(h^{-1}_{\Delta p_x}[h_{\Delta p_x}, \hat{V}]\right)^\dagger\left(h^{-1}_{\Delta p_x}[h_{\Delta p_x}, \hat{V}]\right)\right)}. \tag{55}$$

当该算子作用于自旋网络态时，只有对应于x 自旋网络中某个顶点的项会产生贡献；这是由量子体积算子的性质所决定的。

3.6 Regge 形式的里奇标量算符

黎曼曲率张量由三标架 E^a_i 的二阶导数定义。目前尚无针对这类表达式的量子化方案，能够在柱函数空间或自旋网络态上保持微分同胚不变性。然而，值得注意的是，里奇标量的积分可以表示为一个表达式的极限，该表达式仅使用曲线（铰链）的长度以及曲面之间的亏角 [51]。这些可观测量是可用的，前文各节已对此作过说明。具体来说，考虑 Σ 的一个三角剖分。它由三维四面体胞腔、二维三角形面、一维

边和零维顶点。给定一个度量张量 q，我们为三角剖分中的每条边 e 指定以下数据：(1.) 长度 l_e；以及 (2.) 总角度 θ_e，其值为包含 e的单形各面之间的角在点 $x \in e$处的总和。以下数值在细化三角剖分时收敛于 q_{ab}的标量曲率积分，[51]。

$$\sum_e l_e \,(2\pi - \theta_e) \;\to\; \int_\Sigma d^3\sqrt{\det q}R. \tag{56}$$

正如我们从前几节所知，算子 $\sum_e 2\pi\hat{l}_e - \frac{1}{2}\hat{l}_e\hat{\theta}_e - \frac{1}{2}\hat{\theta}_e\hat{l}_e$ 在 H 中定义良好且为自伴算子，[52]。它可能在某种弱意义下具有定义良好的极限；问题在于它依赖于原始三角剖分及一系列细化。通过增加一套针对所作选择进行平均的方案，可以消除这些困难 [52]。

3.7 多面体态

圈量子引力所呈现的几何量子态图景是：曲线构成一个图，贡献曲面面积的通量，并在顶点处相交，由此产生量子化的体积。由所谓的相干交织算符[53]构造的自旋网络态，则带来了更具体的几何结构。这些交织算子定义如下。考虑图中的一个顶点 v，其边标记有自旋。将各边定向为向外，并为其编号$I = 1, \ldots\ldots n_v$。对每条边 p_I，选取一个归一化向量 $u_I \in \mathfrak{su}(2)$ 和一个向量$|j_I, u_I\rangle$，使其属于相应的表示 H_{j_I}（同样经过归一化），并满足

$$u_I^i \hat{J}_i^{v,[p_I]} D_{(j_I)}{}^m{}_{m'}(h_{p_I})|j_I, u_I\rangle^{m'} = \hbar j_I \, D_{(j_I)}{}^m{}_{m'}(h_{p_I})|j_I, u_I\rangle^{m'}, \tag{57}$$

并且满足闭合条件

$$\sum_{I=1}^{n_v} j_I u_I = 0, \tag{58}$$

成立。相应的相干交织算子 $\iota(j_1, u_1; \ldots; j_{I_{n_v}}, u_{I_{n_v}})^{m_1\ldots m_{n_v}}$ 由 $\otimes_{I=1}^{n_v}|j_I, u_I\rangle$关于 SU(2) 旋转作用的平均给出。在 $\mathrm{Inv}\left(\otimes_{I=1}^{n_v} V_I\right)$中，相干交织算子构成恒等算符分解

$$1^{m_1\ldots m_{n_v}}_{m'_1\ldots m'_{n_v}} = \int d\mu(u_1, \ldots, u_{n_v}) \iota^{m_1\ldots m_{n_v}} \iota^\dagger_{m'_1\ldots m'_{n_v}}.$$

文献 [45], 提出了一种几何解释，其中指出，若满足闭合条件，闵可夫斯基定理便保证存在一个多面体 $\mathbb{R}^3$，其面片垂直于向量u_I，且面片面积为 j_I。这样，每个自旋网络的顶点都可以对应一个量子多面体。分配给不同顶点的多面体通过连接这些顶点的边相互关联。

因此，它们共享面面积。然而，连接的面通常具有不同的形状，例如，一个三角形面与一个四边形面粘合在一起。这种几何描述通常称为扭曲几何 [54]。值得注意的是，这将圈量子引力的自旋网络态与本章第4 节所述的离散几何量子化联系起来。

3.8 相干态

上一节讨论的状态以相干方式最小化并分配不对易 P-变量（30）中的不确定性。另一个有趣的任务是，尤其是在四维时空几何的量子化为最终目标的情况下，平衡 P-变量与整体量之间的不确定性。虽然自旋网络态最小化了密度化三标架的涨落，却使整体量的涨落达到最大，但理想情况下应找到能够平衡这些不确定性的不同状态。这类状态也常被笼统地称为半经典态。

一种发展得较为完善的此类状态方案是群相干态[15, 55, 56, 57, 58, 59, 60]。它建立在群上的相干态之上 [61, 62]。其基本思想不是考虑自旋网络态，而是考虑这类状态的无限相干线性组合，从而增加 P-变量的不确定性，并降低整体量的不确定性。主要技术工具是将标准相干态推广到相空间量子化后得到的状态，其相空间形式为 T^*G ，其中 G为紧致阿贝尔群，尤其是 T^*SU(2)。SU(2)上的相干态是 L^2(SU(2))的一个元素，其形式为

$$\Psi^t_k(g) = \lim_{h\to k} e^{-t\,\Delta_{\mathrm{SU}(2)}}\,\delta(gh^{-1}), \qquad k \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \tag{59}$$

其中 $\Delta_{\mathrm{SU}(2)}$ 是 SU(2) 上的拉普拉斯算子， δ 是峰值位于单位元处的群δ函数， k 是复化 $\mathrm{SU}(2)_{\mathbb{C}}$ =SL(2,$\mathbb{C}$) 的一个元素， t 是一个正实参数。作用于等式右侧狄拉克δ函数的算子有一项重要性质：它将该函数映射为 SU(2) 上的解析函数。得益于解析性，该函数可延拓至 SL(2,$\mathbb{C}$)，变量 gh^{-1}。可以证明，[15, 55, 56], 函数 $\Psi^t_k(g)$ 在 T^*SU(2) 的某个元素 $(h,\ t)$ 处达到峰值，也就是说， $|\Psi|^2$ 在 h 处达到峰值，而不变向量场函数 f的期望值接近 $f(t)$，且涨落很小。此外，参数 t 平衡了乘法算子与 L^2(SU(2)) 中不变导数的涨落。

由这些 L^2(SU(2)) 相干态，可以构造圈量子引力的相干态，使其成为乘积态

$$\Psi_\gamma = \prod_{p\in\gamma} \Psi^{t_p}_{k_p}(h_p), \tag{60}$$

其中参数 k_p, t_p 经过审慎选择，并适配于待近似的经典内在几何与外在几何 [15, 55, 56, 57, 58]。为确保规范不变性，必须对这些状态进行适当调整 [59, 63]。

这些想法也可以扩展到具有无限多条边的图 [64, 65]。这种构造已经超出了 Ashtekar-Lewandowski希尔伯特空间。对同一想法的进一步推广包括一般的复化子相干态 [66]以及 r-Fock测度，我们将在 3.10 节讨论。

3.9 量子约化引力

有一类自旋网络态，我们称之为约化态；对于这类状态，通量算符的作用，以及所有其他以通量表示的算子的作用，都大为简化。相关的近似是边所携带的自旋很大 $j_I \gg 1$，并且我们只考虑 j 的主导阶。'约化'一词源自圈量子引力的一类模型，在这些模型中，人们固定 Σ 中的坐标，并限制数据空间（A, E），使得所得度量张量为对角形式，且 E 在每一点都经过适当旋转，参见例如 [67, 68]。这些模型的状态可以被视为完整圈量子引力的状态，属于上文提到、并将在下文更精确描述的类型，但需注意它们并非规范不变 [69]。

约化自旋网络定义在 Σ 中的一个（拓扑上的）立方图上。利用这一拓扑结构，可以将图的边分为三类，分别对应于三种方向——如果 Σ 具有平坦几何且该图在几何上为立方图，这三种方向便会出现——记为 $i = x$、y、z，并据此定向。在边的方向与正交归一生成元 $\tau_i = \tau_x$、τ_y、$\tau_z \in \mathfrak{su}(2)$ 之间建立一一对应关系。在不可约表示 V_{p_I} 中，我们选取自旋算子 $D'_{(j_I)}(\tau_{i_I})$ 的本征向量构成的正交归一基，其中 $i_I = x$、y 或 z 是 p_I 的方向。我们用特征值 $m = -j_I, \ldots\ldots, j_I$ 标记基中的元素。给定这些数据后，为每条边 p_I 指定一个条目，可以是 $D_{(j_I)}{}^{j_I}_{j_I}$，也可以是 $D_{(j_I)}{}^{-j_I}_{-j_I}$。相应的柱函数为

$$\Psi(A) = \prod_I \sqrt{j_I(j_I+1)} D_{(j_I)}{}^{\pm J_I}_{\pm J_I}(h_{p_I}(A)), \tag{61}$$

其中，在图的每条边 p_I 上，$++$ 或 $--$ 均可独立选择，具体取决于状态，且选择方式任意。不过请注意，约化自旋网络并非规范不变。

本章中介绍的几何的所有算子都用顶点-边自旋算符（29）表示。它们对约化态的作用非常简单。事实上，如果 v 是给定约化自旋网络态的一个顶点，并且 p_I 是一条与 v 相交且方向为 x的边，那么

$$\hat{J}_i^{v[p_I]}\Psi = \begin{cases} \frac{\pm j_I \hbar}{2}\Psi, & \text{if } i = x \text{ and } p_I \text{ is outgoing} \\ \frac{\mp j_I \hbar}{2}\Psi, & \text{if } i = x \text{ and } p_I \text{ is incoming} \\ O(\sqrt{j_I}) & \text{if } i = y, z. \end{cases} \tag{62}$$

由于这些简化，从顶点 v 对量子体积元（44）的贡献为

$$\left(\frac{\kappa\gamma\hbar}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(j_x^- \pm j_x^+)(j_y^- \pm j_y^+)(j_z^- \pm j_z^+)} + O(\sqrt{j}), \tag{63}$$

其中，$j_i^\pm$是出射边或入射边所携带的自旋；如果两个磁量子数符号相同，自旋就相加。顺便提一下，根据约化态，未知因子 a_0 应取1 2，这是上文提到的几种特殊可能性之一。

约化态子空间在自旋为 $s \ll j$ 的整体算子作用下保持不变（除 j中的低阶项外）。具体而言，

$$\begin{aligned} D_{(j_J)}{}^m_n(h_{p_J}(A))\Psi(A) &= \prod_{I\neq J}\sqrt{j_I(j_I+1)}D_{(j_I)}{}^{\pm J_I}_{\pm J_I}(h_{p_I}(A)) \\ &\begin{cases} \sqrt{(j_J+m)(j_J+m+1)}D_{(j_J+m)}{}^{\pm J_I+m}_{\pm J_I+m}(h_{p_J}(A)) & \text{if } n=m \\ O(\frac{1}{\sqrt{j}}) & \text{if } n\neq m \end{cases} \end{aligned} \tag{64}$$

对于由立方自旋网络张成的状态子空间，除了上述曲率标量的量子化方法外，还有另一种方案。特别是，文献 [70, 71]已计算出曲率标量算子在约化态上的作用。

3.10 量子几何的其他相

本节将探讨对前几节所述量子化几何的一些扩展。我们将从形式体系的直接扩展，逐步讨论与之关联较不直接的量子几何相。图中示意了若干相关基态的性质：1。

第一个扩展是引入物质。标量场、规范场和费米子场可以与按照第2.4节所述量子化的引力耦合。由此得到的希尔伯特空间是张量积的一个子集

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{AL}} \otimes \mathcal{H}_{\text{matter}}. \tag{65}$$

具体细节取决于所耦合的物质种类：具有紧结构群的规范场 G 也可以用整体量和通量来量子化，因此实际上唯一的变化是结构群变成了张量积 $\text{SU}(2) \times G$， [72]。这不会改变第3节所述量子几何的任何特征。标量场也是如此 [73]，它们按照第2.4节所述，类比引力量子化。

量子几何性质的第一次变化发生在引入费米子之后。这是因为费米子场在与引力相同的规范群下变换。在圈量子引力中，费米子自然表现为

点状激发 [74, 75, 73, 76]。为了得到规范不变态，引力和费米子的激发必须耦合起来。对于量子几何而言，这意味着引力部分可以在规范变换下发生非平凡变换。在存在费米子的情况下，顶点处的交织算子现在也必须与费米子耦合。对于Weyl费米子，这意味着一个交织算子 ι存在于空间$\iota \in \mathrm{Inv}(j_1 \ldots, j_n, 12)$中。如第3.2节所述，这会改变体积谱，有时变化十分显著。对于携带费米子激发的三价顶点，体积算符现在也不再是平凡的。对于交织算子 $\iota \in \mathrm{Inv}(12, 12, 12, 12)$例如，通过式（$|q|\iota = \sqrt{3}\iota/4$，即（48）可得到。

物质还使我们能够构造新的几何算子，将物质与几何联系起来，例如参见 [47]（针对标量场）和 [77]（针对费米子）。

在圈量子引力的超对称扩展中 [78, 79, 80, 81, 82,83, 84], ，还必须考虑并量子化其他类型的物质 [80, 81, 82]。超群 $\mathrm{OSp}(\mathcal{N}|2)$ 取代了直积 (65) [83, 84]。因此，规范变换会混合物质和引力的自由度。在一种部分保留显式超对称性的表述中，费米子激发因而不能是点状的，而是会沿着边延展，见 Σ。有关这些构造的详情，参见本卷第 IX.3 章。

对第 2.4 节形式体系的扩展，可以通过整体量-通量代数的不同表示来实现 $\mathfrak{A}_{\mathrm{HF}}$ ，相关内容见第 2.3 节。Ashtekar-Lewandowski 表示是圈量子引力的基础，因为它是 $\mathfrak{A}_{\mathrm{HF}}$ 唯一既具有空间微分同胚的幺正表示，又具有微分同胚不变循环向量的表示。我们可以将这种情况与相对论性量子场论相比较。对于质量和自旋或螺旋度已指定的自由场，只有一种正能量表示具有庞加莱群的幺正表示，并包含一个庞加莱不变的循环向量：真空。这个表示无疑是基础性的，但也存在其他有趣且相关的表示，例如有限温度下量子场论的表示。圈量子引力也有类似情况。正如第 2.3 节已指出的，整体量-通量代数有若干种定义 $\mathfrak{A}_{\mathrm{HF}}$，它们在是否施加某些高阶对易关系方面有所不同。这也会影响表示论。详情见 [16, 17, 85, 86]。以下内容适用于 [17]中给出的定义。

给定一个经典背景场$^{(0)}E$，可以定义 [87, 88, 17]，

$$\pi(P_{S,f}) = \widehat{P}_{S,f} + P_{S,f}(^{(0)}E)\,\mathbb{1}, \tag{66}$$

其中，$\widehat{P}$ 是 Ashtekar-Lewandowski 表示中的算子（30）。希尔伯特空间及整体量的作用均保持不变。该表示描述了在由$^{(0)}E$给出的背景几何上的量子激发。考虑那些可通过与 Ashtekar-Lewandowski 表示中类似的正则化过程定义的几何算符时，这一点就更加清楚了[88]。例如，空间区域 R的体积算符变为 $V(R) = \widehat{V}_{\mathrm{AL}}(R) + {}^{(0)}V(R)\,\widehat{V}_{\mathrm{AL}}()()$，其中 是 Ashtekar-Lewandowski 表示中的体积算符，而$^{(0)}V(R)$是背景几何中 R 的体积。

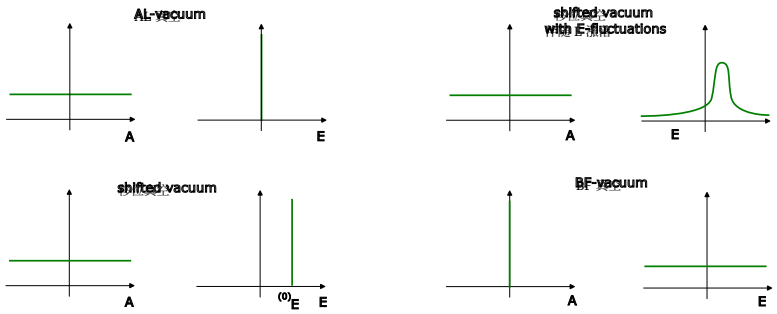


图 1 量子几何各种基态属性的示意图。图中勾画了在 A 和 E 表示中的行为。

也可以通过引入适当的算子值平移来纳入非零背景涨落，$\pi(P_{S,f}) = \widehat{P}_{S,f} + {}^{(0)}\widehat{P}_{S,f}$，例如，这可以在 P 真空态 [89]中引发高斯涨落。在这些构造中，背景几何是固定的，不能由 $\mathfrak{A}_{\mathrm{HF}}$中的元素改变。可以通过适当地扩充 [90, 85, 86]，加入以下形式的元素 $\mathfrak{A}_{\mathrm{HF}}$，以对此进行修改

$$\widehat{W}\left({}^{(0)}E\right) = \exp \int {}^{(0)}E \cdot \widehat{A} \tag{67}$$

（参见 [16]，了解非阿贝尔结构群情况下的细节）。考察表示可以发现，这些元素能够改变背景。关于这些表示属性的示意图，见图 1。

如果愿意偏离代数 $\mathfrak{A}_{\mathrm{HF}}$ 并引入额外结构，就可以采用其他构造。一种可能性是建立一种量子理论，其所依据的真空在某种意义上具有与 Ashtekar-Lewandowski 真空相反的属性。*BF* 真空 [91, 92, 93, 94, 95]是整体量的本征态，其本征值为平坦联络的特征值 ${}^{(0)}A$，也就是说，$h\,|0\rangle_{\mathrm{BF}} = {}^{(0)}h\,|0\rangle_{\mathrm{BF}}$。与 E 相关的可观测量具有最大不确定性，并通过在平坦联络 ${}^{(0)}A$ 上产生奇异二维激发而作用。构造这种新真空需要引入一种新的代数结构，其中包含整体量和通量，并以一类二维复形及其对偶为基础。不过，已有研究表明 [95]，对于结构群 U(1)，BF 真空的类似物可以在连续理论的某种表示中得到，而无需进行任何离散化。在该理论中，离散性仅在量子层次涌现，成为量子平行移动算子谱的一种属性。

以类似的思路，可以保持由平行移动泛函生成的代数不变，但通过对场 E 进行更规则的涂抹（再对光滑核积分三次），改变 $\mathfrak{A}_{\mathrm{HF}}$ 中的其余关系。由此得到一个新的代数 [96, 97],。值得注意的是，在将 SU(2) 替换为 U(1) 的阿贝尔情形下，该代数与量子电磁场福克表象所基于的代数同构。它可用于定义新的表示

U(1) 类比中的整体部分 $\mathfrak{A}_{\rm HF}$，其中整体具有高斯涨落，即 *r-Fock* 表示。与之密切相关的还有构造具有高斯涨落的新状态，即 复化子相干态 [15, 55, 56, 66]。其中一些构造可以推广到线性化引力的情形[98], 标量场 [99], ，甚至非阿贝尔规范场 [100]。此外，影子态 可以在 Ashterkar-Lewandowski 希尔伯特空间中利用 r-Fock 表示来定义， [101], 这些影子态保留了这些表示的部分性质。

圈量子引力形式体系的一种非常有趣的推广，是采用量子群值联络 [102]。在这种情况下，SU(2) 群上的柱函数代数被紧量子群上的函数（非交换）代数所取代。事实证明，量子群的余乘法以及某种量子群自同构，正是在这种情况下将柱函数代数定义为归纳极限所需的结构 [102]。

另一种推广是为几何的自旋网络态增添额外结构，以便能够编码空间切片的拓扑 Σ [103, 104, 105]。借助这种拓扑自旋形式体系，或许可以描述拓扑变化以及拓扑的量子叠加。

通过在联络空间上引入半有限谱三元组，建立了非交换几何与圈量子引力之间的联系[106]。该三元组包含一个整体回路代数，以及一个类似于全局泛函导子的狄拉克型算子。

扩展这一形式体系的另一种可能途径是群场论（群场论），同时对某些技术方面作出调整。[4] 一种可能的应用是将其视为几何中的多粒子理论的类比，其中单粒子态对应的是圈量子引力的单个顶点态。然而，通常并不认为用于描述这些状态的图嵌入在流形中。从数学上说，群场论可以通过对某些定义在群上的场论进行量子化而得到，其中传播子和相互作用项描述了顶点的价数以及粘合的细节。

希尔伯特空间$\mathcal{H}_{\rm GFT}$ 按定义是一个福克空间。面积算符和体积算符等几何算符（见第3 和4节）定义了单粒子操作，这些操作可以通过二次量子化提升到$\mathcal{H}_{\rm GFT}$ 中。规范不变性迫使不同顶点处的状态发生耦合，从而优雅地生成延展的量子几何。多粒子算子可以在这些几何上产生各种动力学。

此外，人们还尝试将整体性和通量变量的量子表示推广到可微或光滑范畴。突破在于将积分（28）推广到由所有分段光滑曲线定义的柱函数 [108]。为此，人们定义了嵌入图的一种光滑推广，即网；网的边可以相交和重叠无穷多次，从而形成流苏。由此得到的测度部分以及柱函数可观测量的量子表示，构成了一套完备且精确的理论

[4] 如今，关于该理论各个方面的文献已十分丰富。关于圈量子引力的入门介绍，请参见 [107]。

[109, 110]。网可用于定义自旋网络态的一种推广形式，并保留自旋网络的许多性质。然而，对于由具有无穷多个自交点，或与用于定义特定算子的二维曲面有无穷多个交点的网所给出的柱函数，通量算符、量子面积和量子体积都没有良好定义。换言之，这些算子不是稠密定义的。

另一个有趣的想法是，将微分同胚的可微性类别推广为解析微分同胚，并允许它们在有限个点之外成立 [111]。

微分同胚是经典广义相对论的规范对称性，而我们要对广义相对论进行量子化。因此，根据正则方法，流形及其微分同胚理应自然地、以某种牺牲性的形式进入量子理论。然而，圈量子引力还有一种激进的、纯组合方法；按照这种方法，流形并非作为背景结构而存在，其结构会以其他方式生成，例如通过对顶点的多面体解释 [112]。

4 离散几何

几何算符的量子离散性还有第二条引人注目的路径。这种方法从一开始就采用离散几何，即一种可用有限个自由度描述的几何；将这些自由度构造成一个动力系统，有助于直接理解离散几何的量子化。这种方法取得了大量明确的成果，涵盖从凸多面体形状相空间的一般描述，到最简单空间微粒——量子四面体的体积量子的具体数值。

本节回顾这一方法，并经常以量子四面体为例来说明相关方法和结果。四面体几何及其相空间虽然最为简单，却已相当丰富。不过，我们提醒读者，四面体情形的许多方面都颇为特殊。例如，四面体的体积会生成一个可积动力系统，而面数更多的凸多面体则并非如此。多面多面体和高维多胞体（如4-单形）的完整复杂性，以及通过粘合多面体构建的复形，都非常值得研究。事实上，这一领域的一项重大开放挑战，是构建相互作用丰富的离散几何网络，并证明它们能够由时空的连续区域近似。

4.1 动力学离散几何：演化多面体

在静态弱场中，时空的度量为

$$ds^2 = -(1+2\Phi)dt^2 + (1-2\Phi)(dx^2+dy^2+dz^2). \tag{68}$$

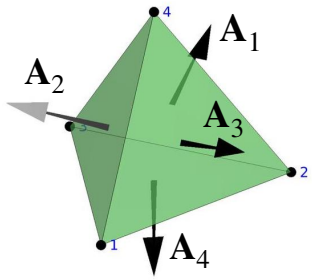


图 2 四面体及其面积向量。图由 GIBBON 创建， [114]。

在此极限下，我们可以引入牛顿引力场，记为$\mathbf{g} = -\nabla\Phi$；在无质量的区域中，该引力场满足 $\nabla\cdot\mathbf{g} = 0$。 利用散度定理，并聚焦于可将引力场视为常量的区域，我们有

$$\oint_S \mathbf{g}\cdot\mathbf{da} = \mathbf{g}\cdot\oint_S \mathbf{da} = 0. \tag{69}$$

对于引力场 $\mathbf{g}$ 的任意方向，这一结论都成立。因此，对于由曲面 S 围成的任意小区域，其边界的定向面积满足闭合条件

$$\oint_S \mathbf{da} = 0. \tag{70}$$

这是空间欧几里得几何中的一个事实，对下文将起到至关重要的作用。值得注意的是，这一事实在此作为理论的恒定引力场极限或小区域极限的结果而出现。引力场决定局部惯性系，而这一恒等式在时空的每个足够小的空间区域中都成立。

在区域为具有 N 个面片的空间多面体这一特殊情形下，对闭曲面 $\mathcal{S}$ 上的积分（70）可分解为 N 项，每一项都具有固定方向$\hat{n}_\ell$ ，由此得到

$$\mathbf{A}_1 + \cdots + \mathbf{A}_N = 0, \tag{71}$$

其中，每个面积向量$\mathbf{A}_\ell := A_\ell\hat{n}_\ell$ (不求和)均垂直于多面体的第l个面片，其大小 A_ℓ 等于该面片的面积。（我们用指标l 表示面片，当然，面积向量$\mathbf{A}_\ell$ 不应与阿什泰卡联络 A_a^i混淆；它与阿什泰卡变量的关系将在下文揭示。）令人惊讶的是，19世纪末，H. Minkowski（即那位以时空闻名的数学家）正是利用恒等式（71）对凸多面体作出了完整刻画。闵可夫斯基定理指出，满足闭合条件（ N向量$\{\mathbf{A}_\ell\}_{\ell=1}^N$（71）的集合与一个$N$ 面片的凸多面体在空间中整体旋转意义下唯一对应 [113, 45]，； 案例示意图见图2 ， 其中 $N = 4$。

我们将看到，离散闭合条件（71）是对多面体进行运动学刻画的有力工具。然而，只有认识到$\mathbf{A}_\ell$ 是动力学生成元，多面体方法的真正丰富内涵才会显现。遵循开普勒早期的洞见，我们将把每个$\mathbf{A}_\ell$ 视为角动量，确切地说，它们将是 SU（2）的李代数对偶空间中的元素，$\mathbf{A}_\ell \in \mathfrak{su}^*$（2） $\cong \mathbb{R}^3$。这种选择有诸多缘由，从 Penrose 引入自旋网络，到引力作用量积分的量纲必定为面积，不一而足。这里我们将强调，采用这种选择后，闭合条件（71）便成为引力高斯定律：它对运动学变量$\{\mathbf{A}_\ell\}_{\ell=1}^N$ 施加约束，以确定 N面片多面体的形状；与此同时，它还生成整体旋转规范对称性，这意味着该形状不受其在空间中的旋转方位影响。现在我们来证明这一点。

我们强调，这些角动量属于李代数的对偶空间，因为这正是它们会自动带有泊松括号——李-泊松括号 [115]——的深层原因。无需让这一构造的细节分散我们的注意力，因为对于每个 $\mathbf{A}_\ell$，这个括号就是我们熟悉的角动量括号，通常用列维-奇维塔 ϵ_{ijk} 表示；更一般地，完整角动量集合的两个函数 $f(\mathbf{A}_\ell)$ 和 $g(\mathbf{A}_\ell)$ 的括号由对各面片求和得到，形式与熟悉的括号相同：

$$\{f, g\} = \sum_{\ell=1}^{N} \mathbf{A}_\ell \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}_\ell} \times \frac{\partial g}{\partial \mathbf{A}_\ell} \right), \tag{72}$$

其中 $\partial f/\partial \mathbf{A}$ 是 $\partial f/\partial A^i (i = 1, 2, 3)$ 的一种简便简写。很容易验证，对于固定的 l，这给出 $\{A^i_\ell, A^j l\} = \epsilon^{ijk} A^k_\ell$。

这个括号具有这样的性质：A_ℓ 的任意有限和都会生成该和中这些向量绕其合成向量轴的旋转。例如，$A_{12} := |\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2|$ 会生成 A_1 和 A_2 绕 A_{12} 的旋转，并使 $\{\mathrm{A}_3, \ldots, \mathrm{A}_N\}$ 保持不变。更一般地，$\hat{n} \cdot (\mathrm{A}_1 + \cdots + \mathrm{A}_N)$ 是所有向量绕 $\hat{n}$ 轴整体旋转的对角生成元。当然，这种旋转不会改变这些向量的闭合条件，即式（71），也不会改变它们彼此之间的关系，因此多面体的形状保持不变；这就是它生成规范变换的含义。面积向量编码了多面体的内禀形状，并且对于其在空间中的整体方位具有规范对称性。

总而言之，我们得到了一个由三种结构组成的非凡体系：（i）任意 N面多面体的几何由其面积向量集合$\{\mathbf{A}_\ell\}_{\ell=1}^N$ 描述，其中每个$\mathbf{A}_\ell \in \mathfrak{su}^*(2)$，且整个集合满足闭合条件（71）；（ii）这些向量具有可用于生成动力学的泊松括号；（iii）闭合关系（71）的模长同时也是一个规范生成元，使我们关注多面体形状的旋转不变性质。这些结构使我们能够研究多面体的哈密顿动力学：只需选取任意一个关于 $H(\mathbf{A}_\ell)$的旋转不变函数$\{\mathbf{A}_\ell\}_{\ell=1}^N$，并将其视为流的哈密顿生成元

$$df/d\tau = \{f, H\}, \tag{73}$$

其中 τ 是沿流变化的参数。关于$\mathbf{A}_\ell$的旋转不变函数 H （除了 $|\mathbf{A}_1+\cdots+\mathbf{A}_N|$之外）通常会生成改变多面体形状的流；形状由各个$\mathbf{A}_\ell$之间的角决定，但面数和多面体的闭合条件保持不变。因此，我们得到了由 N 面多面体所描述的离散几何的动力学。

我们将刚才描述的由 N 个面片构成的多面体的泊松空间称为多面体空间 P_N，

$$\mathcal{P}_N := \left\{\mathbf{A}_\ell, \ell = 1,\dots,N \,|\, \textstyle\sum_\ell \mathbf{A}_\ell = 0\right\}/SO(3). \tag{74}$$

这个空间由 N 份角动量空间 $\mathfrak{su}^*(2)\times$的乘积给出 $\cdots\times\mathfrak{su}^*(2) = (\mathfrak{su}^*(2))^N$，每一份都与 $\mathbb{R}^3$ 同构，并对所有向量的整体旋转取商。

4.2 多面体的相空间与量子化

上文已将由 N 个面片构成的多面体空间表述为一个泊松空间。然而，由式（72）中泊松括号的定义可直接推出，每个模长 $A_\ell := |\mathbf{A}_\ell|$ 都是该括号的卡西米尔函数，也就是说，对于所有 f，$\{A_\ell, f\} = 0$。因此，该括号总是保持 $\mathbf{A}_\ell$ 的模长不变。事实上，关于泊松流形结构的一个基本定理指出，它们被辛叶分层，每个叶片由一个卡西米尔函数的取值标记。在我们的情形中，这些叶片是由模长 A_ℓ 确定的二维球面。每个叶片都是一个赋有 Kirillov-Kostant-Soriau 辛形式的辛流形；在此情形下，该形式为$\omega = A_\ell \sin\theta d\theta\wedge d\phi = A_\ell d\Omega$，其中（$\theta$，$\phi$）是球面上的坐标，$d\Omega$是立体角，[115, 117]。因此，每个角动量球面都是一个标准相空间，我们可以定义多面体的形状相空间。

令 Φ_N 为具有 N 个面片且面积给定为 A_l 的多面体形状空间，

$$\Phi_N = \left\{\mathbf{A}_\ell, \ell = 1,\dots,N \,|\, \textstyle\sum_\ell \mathbf{A}_\ell = 0, |\mathbf{A}_\ell| = A_\ell\right\}/SO(3). \tag{75}$$

这个空间由球面 N $S^2\times\cdots\times S^2 = (S^2)^N$ 的乘积给出，它通过固定模长 $A_1,\dots, A_N$ 得到，并对所有向量的整体旋转取商。其维数为 $\dim\ \Phi_N = 2N-6$，这是由这一组球面的维数 $2N$ 减去三（对应条件 $\sum_l \mathbf{A}_\ell = 0$），再减去三（对应对整体旋转取商）而确定的。M. Kapovich 和 J. J. Millson 在连杆系统这一略有不同的背景下引入并研究了这个相空间 [118]。这个相空间的优点在于，计算过程中可以将各面片的面积视为固定的参数依赖。尽管如此，我们仍会在泊松图景与辛图景之间自由切换，采用最适合当前讨论的图景。

4.2.1 关于量子化的第一个插曲：面积和自旋网络节点的量子化，以及将空间微粒量子化的含义

我们关于离散几何量子化的第一个结果，直接源于我们对动力学变量的选择，即 $\mathbf{A} \in \mathfrak{su}^*(2)$。我们为多面体的每个面片，或者等价地，为自旋网络图中横穿该面的边，关联一个希尔伯特空间 H_j。这是 $SU(2)$ 的酉不可约表示的载体空间，因此 $\dim \mathrm{H}_j = 2j+1$。$\mathbf{A}$ 是一个标准的角动量变量，其模平方的量子化形式为

$$\hat{A}^2|jm\rangle = (\hbar\kappa\gamma)^2 j(j+1)|jm\rangle, \tag{76}$$

其中，$|jm\rangle$ 是 H_j 的一组基；量子化的物理尺度是普朗克面积 $a_P = \hbar\kappa$，而零与最低面积本征态之间的间隔则由巴贝罗-因米尔齐参数 $\gamma > 0$ 参数化。这一非凡结果将这一变量选择与一个物理预言联系起来：连接空间相邻区域的面积具有普朗克尺度离散谱。

ˆ 此处引入的状态中的 m 量子数，即 A_z 的特征值，体现了这些状态的取向依赖性。这与任一面积向量 $\mathbf{A}_\ell$ 的取向依赖性相类似。只有在考察满足闭合条件的完整面积向量集合后，才有可能实现取向无关性。同样，在量子情形下，实现取向无关性的关键，是利用存在于各面片希尔伯特空间乘积中的旋转不变张量，将各面片状态组合成一个新状态。因此，我们引入张量积希尔伯特空间 $\mathrm{H}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{H}_{j_N}$ 中在 $SU(2)$ 旋转的整体作用下保持不变的子空间

$$\mathcal{H}_N = \mathrm{Inv}(\mathcal{H}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{j_N}). \tag{77}$$

我们将该空间的一个不变状态 $|\iota\rangle$称为**交织算子**，并将 H_N 称为交织子空间。每个状态 $|\iota\rangle \in \mathrm{H}_N$ 都可以针对每个面片展开为一个 $|jm\rangle$ 基，

$$|\iota\rangle = \sum_{m\text{'s}} \iota^{m_1\cdots m_N} |j_1 m_1\rangle \cdots |j_N m_N\rangle, \tag{78}$$

而其分量 $\iota^{m_1\ldots m_N}$ 在 $SU(2)$ 变换下按张量方式变换，参见第 2.4 节。状态 $|\iota\rangle$ 具有旋转不变性的定义条件，可以表述为这些分量在 $SU(2)$ 的对角作用下保持不变。

希尔伯特空间 H_N 中基的不同选择，会突出所得状态的不同方面；这里我们将着重讨论那些凸显多面体 [45]量子化不同方面的选择。也就是说，我们将重点关注量子多面体的几何。文献中探讨了丰富多样的其他选择，各有其特点与优势 [119, 54, 120, 121]。这里聚焦量子多面体，是为了使讨论具体而明确，并为读者了解相关文献提供一条途径。尽管如此，读者最好记住，对交织空间 H_N 的看法远不止本文所能涵盖的这些。

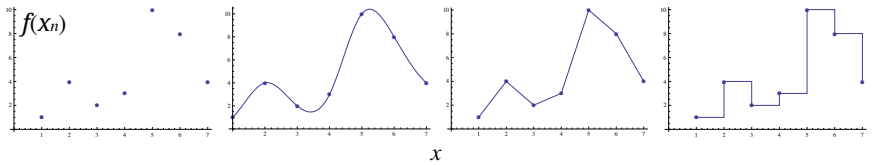


图 3 函数 f（x）的有限样本集，以及对这些样本的三种不同插值：多项式插值、分段线性插值和分段平坦插值。这些插值方法类似于宇宙学中的模采样、Regge 几何 [51], 和扭曲几何 [54]。

希尔伯特空间 H_N 与自旋网络的一个 N价节点相关。事实上，它们是构成与自旋网络图 Γ 相关联的希尔伯特空间的规范不变构件。建立这一联系后，便可以将本章前半部分的结果与本节的讨论联系起来。为简单起见，考虑自旋网络中的一个四价节点；如上所述，这个节点在经典情况下对应于一个四面体。此处讨论的面积向量 $\{\mathrm{A}_\ell\}_{\ell=1}^4$ 就是通量P_S、$_f$，定义见式（14）；其中积分曲面 S 分别是四面体的各个面片。取值于李代数的函数 f给出了面片法向量 $\hat{n}_\ell$的方向。每个 A_ℓ 分量丰富的非对易性，可以看作是以下需求的结果：沿路径 p，利用整体量 h_p（定义见式（12）），将四面体中心处内部标架的选取平行移动至面片；或者，也可以将其视为沿面片进行规范不变涂抹的结果，所用对象为f，分别见 [122] 和 [123], 。因此，A_ℓ 连同闭合条件（71）和泊松结构（72），构成了整体量-通量代数的离散概述；对于定义见式（22）的量子算符 A_ℓ 和 $\frown$ $\frown P_S$、$_f$、$(\mathrm{h}_p)^a{}_b$，也有与上述各项平行的表述。

更一般地说，一幅空间量子几何图景正逐渐浮现：它可以被视为一组量子多面体，在局部标架选择下保持不变，并沿着面积相等的面片拼接在一起。整体量描述了沿闭合路径穿行于这些多面体时遇到的曲率。这幅丰富、直观且具有数学内涵的图景，源自上文讨论的出人意料地简单的量子化，也是圈量子引力量子几何的基础。然而，对它的诠释颇为微妙，值得花些时间澄清这一结果的概念内涵。

量子多面体图景的具体形象可能会产生误导，除非着重考虑当前所讨论的量子化过程的两个方面：将引力场截断为有限个自由度，以及修饰语量子的含义。我们将依次探讨这两点。

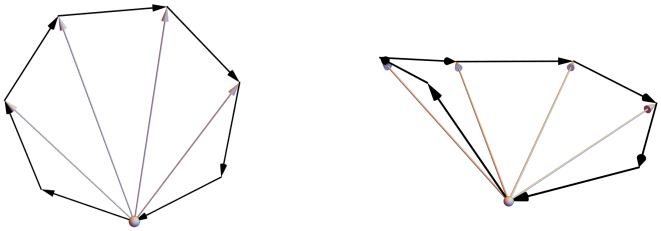
正如本节开篇所强调的，固定图上的圈量子引力 Γ 是将引力场的无限多个自由度截断为一个有限子集。Rovelli 和 Speziale [124], 指出，这类似于在有限多个点上对函数进行采样 $f(x)$，即在 $f_n = f(x_n)$这些点上采样，其中 $n \in \{1, \ldots, 7\}$，例如。仅凭这些有限的样本，不可能重构函数 $f(x)$所包含的全部信息，见3图，据 [124]所述。尽管如此，

与信号处理中的情况很相似，我们可以从这些数据的各种插值中获得明确的见解。本文所讨论的多面体，是量子引力中的一种插值选择；根据它们的粘接方式，它们可以类似于第 3 幅图中的分段线性插值，如 Regge 微积分所示[51], ，也可以类似于第 4 幅图中的分段平坦插值，如扭曲几何所示[54]。[5] 最好不要将这种插值选择与关于自然的基本论断混为一谈。圈量子引力所主张的并非构成空间的是一些微小的多面体块，而是多面体的离散几何能够模拟引力场的有限个自由度。值得注意的是，正如在连续情形中一样，这些自由度——离散多面体的自由度——能够用于描述动力系统，也就是这一近似空间区域不断演化的几何。

必须强调的是，紧接着需要指出的一点是，这里仍然声称存在根本性的物理离散性。这就是圈量子引力中几何算符的谱离散性。探测多面体面片面积，或者等价地探测自旋网络边面积的算子，具有离散谱，见式（76）。下文将看到，四面体的体积谱也是离散的。这些谱是圈量子引力的一项物理预言：如果我们能够对空间的普朗克尺度区域进行实验探测，该理论预言我们将直接测得这种离散性。因此，对空间量子颗粒这一概念应赋予的含义，并非某个特定多面体（或任何其他关于该颗粒部分自由度的模型），而是这样一种认识：如果测量该颗粒几何性质的某些方面，就会得到谱性的量子结果。

理解这一点的另一种方式，也与下文讨论的半经典方法相关：量子多面体是模糊的。也就是说，我们知道，当提到谐振子的能量本征态时，这一状态会分布在所有具有该能量的经典构型上；它并不对应于单一的经典状态，而是以概率方式分布在所有这些状态上。在半经典图像中，谐振子的经典相空间是 $\mathbb{R}^2$，其坐标为 $(x,\ p)$，辛2-形式为 $\omega = dp \wedge dx$。等值集 $H(x,\ p) = 1/2(\ p^2 + x^2) = E$是一个圆，并具有这样的性质：辛形式在该集合上的拉回为零；我们称具有这一性质的相空间子流形为拉格朗日子流形。振子的能量本征态可以看作是对相空间中这些延展的拉格朗日子流形进行量子化。类似地，我们将在下文展示，量子多面体（例如四面体的体积本征态）可以看作分布在所有具有该体积的经典形状上。从这个意义上说，这些形状在量子力学意义上是模糊的。在详细讨论这一观点之前，让我们先完成对多面体形状相空间的讨论。

[5] 正是这些多面体作为插值方案的性质，使研究者不再担忧上述闵可夫斯基定理中凸性假设的严格性。



(*a*) (*b*)

图 4 (a) 七个面积向量（黑色箭头）构成的一个平面构型示例，满足闭合条件。四个灰色向量的模定义了作用量 $\{I_k\}_{k=1}^4$，它们生成弯曲流。(b) 先沿 I_1 流转动 $\pi/4$ 弧度，再沿 I_2 流转动 $\pi/6$ 弧度后得到的结果。

4.2.2 作用-角坐标

Kapovich 和 Millson 所认识到的多面体形状空间 Φ_N 的一个显著特点是，它自然带有作用-角坐标。（例如，参见 [125],，了解相空间中这一特殊坐标类别的介绍。）在 Φ_N 上，这些坐标最容易通过几何方式构造。固定一组面积向量 $\{\mathrm{A}_\ell\}_{\ell=1}^N$ 的大小，并考虑这些 N 向量的一种特殊构型，即它们全部共面。这种特殊构型可视为位于一个 $\mathbb{R}^3$ 平面内的 N 边形，见图 4。现在，考虑向量 $\mathrm{I}_k = \sum_{l=1}^{k+1} \mathrm{A}_l$，其中 $k = 1$、……、$N-3$；它们定义了该多边形的一组对角线。我们将坐标 ϕ_k 定义为向量 $\mathrm{I}_k \times \mathrm{A}_{k+1}$ 与 $\mathrm{I}_k \times \mathrm{A}_{k+2}$之间的夹角，并将作用变量 $I_k = |\mathrm{I}_k|$ 定义为向量 I_k的范数。

作用量 I_k 使其定义中出现的每个面积向量都绕相应对角线 I_k旋转。这些变换称为弯曲流，见图 4(b)。稍微推广这一概念后，我们仍将面积向量所形成的构型称为 $\mathbb{R}^3$中的多边形，即使它已不再是平面的。此外，除去所有向量的整体旋转，给定 $\{A_\ell\}_{\ell=1}^N$取值的每个 $\mathbb{R}^3$多边形，都可以通过在其有限取值范围内改变 I_k 并考察它们所生成的弯曲流而得到，[118]。因此，$\{(\phi_k, I_k)\}_{k=1}^{N-3}$对为 $(2N–6)$ 维相空间 Φ_N提供了全局坐标。由式 (72) 可知，这些是正则共轭变量，$\{\phi_k, I_{k'}\} = \delta_{kk'}$，因此我们得到一组作用-角变量。

最简单的多面体 $N = 4$ 四面体（图2），我们现在就来讨论它。它是一个绝佳的例子，可以用来详细剖析我们刚刚回顾过的所有结构及其对应关系。

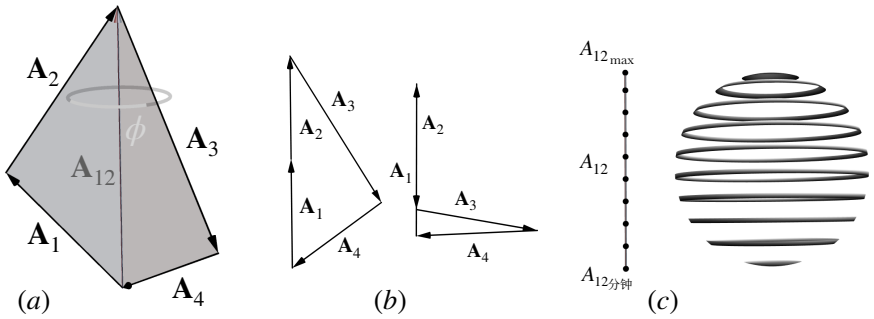


图5 (a) 四面体的四个面积向量构成的非平面构型。形状空间的作用坐标 Φ_4 为 $A_{12} = |\mathbf{A}_{12}|$。共轭角 ϕ由灰色的两个平面翼之间的夹角给出，它们分别由 $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2\}$ 和 $\{\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4\}$ 张成。(b) 在达到 $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ 极大值和极小值的向量构型上，弯曲流生成一个旋转等价的向量构型，因此对应于相空间中的单个点；也就是最后一个面板所示相空间球面的北极和南极。(c) 除区间端点外，作用 $A_{12} \in [A_{12\min}, A_{12\max}]$ 的每个允许取值都对应一个由旋转不等价的向量构型组成的圆。这些圆与极值处的单个点共同构成四面体的形状相空间，其拓扑结构为球面。

4.3 量子四面体

4.3.1 四面体形状空间的经典几何

在三维空间中能够构建的最简单离散几何是四面体。在这种情况下，作用-角变量和弯曲流尤其简单：对于 $N = 4$ 形状空间 Φ_4，其维数为二，唯一的作用变量为 $I_1 := A_{12} = |\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2|$。这个作用变量生成弯曲流，使角度 ϕ 递增；该角度位于四个面积向量闭合后形成的四边形的两翼之间：$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_4$, 见图5的第一幅图。

事实上，作用-角坐标有助于揭示四面体形状空间的拓扑结构 Φ_4。对于 A_{12}的一般取值，弯曲流会扫过一整圆周的面积向量构型。这些构型彼此不同，因为不存在任何对四个面积向量的整体旋转，能够将其中一个构型变换为另一个构型。然而，作用变量 A_{12} 的取值范围是有限的，横跨区间$\max(|A_1 - A_2|, |A_3 - A_4|) \leq A_{12} \leq \min(A_1 + A_2, A_3 + A_4)$，且该范围的端点具有特殊性。图5 的（b）面板展示了该范围两端面积向量的一般构型。这些特殊“旗形”构型的弯曲流不再生成在整体旋转四个向量后仍彼此不同的构型。这意味着在A_{12} 的极值处，构型不再构成一个完整的圆，而只剩下一个点。因此，从拓扑上看，空间 Φ_4 是一个区间与一个圆的笛卡尔积，而该圆在区间的两个端点处退化为一个点；这恰好就是球面的拓扑结构，见图5的（c）面板。

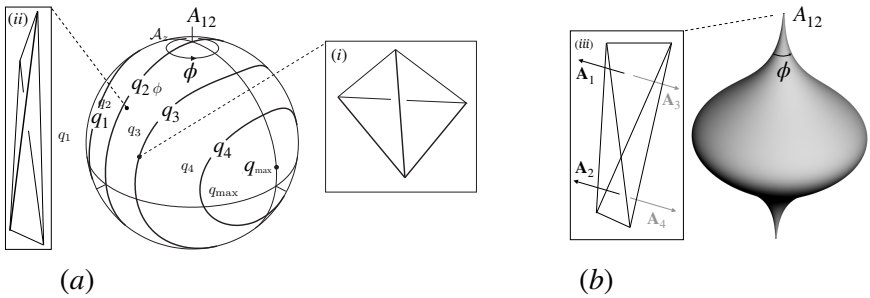


图 6 (*a*) 四面体 Φ_4 的形状相空间。插图 (*i*) 展示了与空间中一个一般点相对应的四面体。插图 (*ii*) 展示了当相空间中的点趋近于大圆 $V = 0$ 时，四面体如何变得如同铅笔一般细长。加深的等高线描绘了经典体积平方 $Q = V^2$ 的量子化等值集，其取值为 q_i。(*b*) 当面积大小固定为允许出现平面四面体的数值时，形状空间会在相应的极点处产生尖点奇异性。这里展示的是 $A_{12\min}$ 和 $A_{12\max}$ 均为奇异的情形。插图 (*iii*) 展示了 $A_{12\max}$ 处的平面四面体构型。

在发现四面体形状空间上的拓扑结构和辛结构后，本节的主要目标是引入一种由几何动机启发、定义在该空间上的交织算子，并对其进行量子化。这是迈向构建引力离散几何路径积分的关键一步；这类路径积分称为自旋泡沫模型，例如 Barret-Crane 模型 [126, 127], 以及第 IX.4 章详细讨论的 EPRL 模型。如上所述，这种交织算子应当是一个定义在形状空间上的旋转不变算子。从几何角度看，一个显而易见且有充分动机的选择是四面体 [128, 129]的体积。值得注意的是，对于欧几里得四面体，经典体积 V也可以用面积向量表示为一个简单的旋转不变表达式

$$V^2 = \frac{2}{9}\mathbf{A}_1 \cdot (\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3)\,. \tag{79}$$

通过将面积向量表示为沿四面体边延伸的向量的叉积，可以很快验证这一点。乍看之下，这个表达式似乎偏重于四个面积向量中的三个，但式（71）中的闭合关系允许你将此公式改写为关于任意三个面积向量的形式。图 6的左图展示了形状空间 Φ_4，其中一个典型点对应于插图 *i*)中的四面体，并给出了一些体积恒定的示例等高线 V。

在继续对这一体积进行量子化之前，我们需要澄清关于形状经典相空间的三个相互关联的细微问题。首先，考虑共面的面积向量，这正是前文用于引入作用-角坐标的构型。这些面积向量的平面构型当然会导向 $V = 0$，但其解释颇为棘手。人们或许会以为，它们都对应于四面体本身的平面构型，就像一顶帐篷被压扁在地面上，但其中大多数并非如此。注意，沿四面体各边指向的向量，可以通过对

任意两个面积向量取叉积得到。对于面积向量的平面构型，所有这些叉积都共线，因此四面体会进一步退化，超越平面状态，成为一维的“铅笔状”四面体。值得注意的是，尽管这些四面体是退化的，但从其中任意一个稍作变形后，所得四面体便不再退化，因此将这些极限点保留在相空间中是有用的。一般而言，在形状球面空间上，将经度 $\phi = 0$ 和$\phi = \pi$合并后得到的大圆——也就是所有满足 $V = 0$的构型——完全由铅笔状四面体构成。例外情况是形状空间包含平面四面体，这将在下面第三点中讨论。

其次，请注意，弯曲流不会因面积向量的平面构型而中断，而是会继续穿过这些构型。位于某一平面构型两侧、彼此对称的面积向量构型，可以通过令 $\mathbf{A}_\ell \mapsto -\mathbf{A}_\ell$，并对所有向量进行整体（规范）旋转而得到。在四面体层面上，这会将向外指的法向量映射为向内指的法向量。由于面积向量就是角动量，这在物理上相当于对角动量施加时间反演，因此，大圆 $V = 0$ 两侧的两个半球可以在这一意义下看作时间反演的四面体。因此，在许多情况下——包括下面的量子化——只研究具有向外指法向量的半球就足够了。

最后，第三个微妙之处在于，当四面体存在平面构型时，形状相空间会变得奇异。只有当固定的面积大小满足一个附加条件时，平面四面体才可能存在：要么是 $A_1+A_2 = A_3+A_4$，要么是 $A_1+A_2+A_3 = A_4$，或者是其中一个条件的指标置换。其原因在于，对于平面四面体，面积向量本身不仅必须共面，还必须共线，见图 (*iii*) 的插图。对于面积向量的共线构型，由 A_{12} 生成的弯曲流是奇异的，形状相空间会出现尖点状结构，见图 (*b*) 的面板 6。这些奇异相空间的特征也会烙印在接下来讨论的量子化中。

4.3.2 四面体的半经典量子化

四面体体积公式的量子化（79）为交织算子提供了一个具有充分物理依据的候选形式，可用于确定四价自旋网络节点处的规范不变态。这个表达式显然存在一个困难：即使采用本文引入的、经过精心设计的坐标，它仍是基本变量的三次函数。这意味着其量子化必然会带来算符排序歧义及其他微妙问题。虽然完整的谱尚无解析形式，但第 3.3 节介绍的自旋网络方法已经给出了特定基下相应体积算符$\hat{q}$ 的矩阵元的显式表达式；已知结果的概要参见 [42],。这些方法推动了一些解析结果的取得和数值研究 [37, 38, 39, 40, 36, 41, 34, 35]。四面体情形的一个优点是，此处第 3.3 节讨论的内部正则化和外部正则化彼此一致，且下文提出的方法为确定式（ a_0 44）中的任意常数 提供了有力依据。

本节将回顾另一种用于体积量子化的半经典方法。这种方法已得出若干明确的解析结果，目前研究者正积极推进相关工作，以将现有关于空间欧几里得四面体的结果推广至嵌入时空中的洛伦兹四面体情形。

体积的三次特性对于半经典方法而言并不是问题，并将我们引向椭圆曲线这一有趣领域。其策略是固定面积大小 $\{A_\ell\}_{\ell=1}^4$，并研究由 $Q := V^2 = \mathrm{A}_1 \cdot (\mathrm{A}_2 \times \mathrm{A}_3)$ 在相空间 Φ_4 上生成的哈密顿演化。取 Q 作为哈密顿量，式（72）的括号给出了任意函数 f 在 Φ_4 上的演化，其流方程为 $df/d\lambda = \{f, Q\}$，其中 λ 是体积流的参数，即 $\{\lambda, Q\} = 1$。

体积在 Φ_4 上的演化可以用作用角坐标以一种简洁的形式表示 $\{A_{12}, \phi\}$。利用 ϕ 的定义——它表示图 6的面板（a）中面积向量两翼之间的夹角——进行叉积计算可得，体积的平方满足关系式

$$Q A_{12} = 8/9 \Delta_{12} \Delta_{34} \sin\phi, \tag{80}$$

其中 Δ_{12} 和 Δ_{34} 由海伦公式确定

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &:= \frac{1}{4}\sqrt{[(A_1 + A_2)^2 - A_{12}^2][A_{12}^2 - (A_1^2 - A_2^2)]}, \\ \Delta_{34} &:= \frac{1}{4}\sqrt{[(A_3 + A_4)^2 - A_{12}^2][A_{12}^2 - (A_3^2 - A_4^2)]}. \end{aligned} \tag{81}$$

A_{12}^2 的体积演化可迅速得出，首先注意

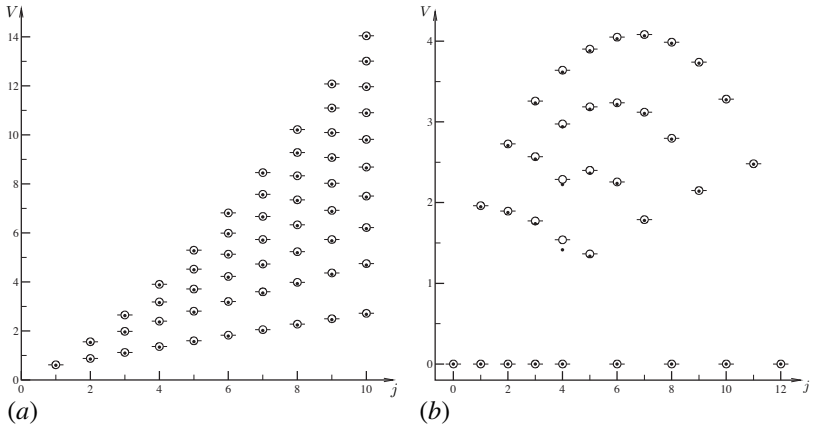
$$d(A_{12}^2)/d\lambda = \{A_{12}^2, Q\} = 2A_{12}\{A_{12}, Q\} = 2A_{12}\partial Q/\partial\phi, \tag{82}$$

其中，在最后一个等式中用到了 A_{12} 和 ϕ 互为共轭这一事实。利用表达式（80）计算偏导数并消去 ϕ 即可得到核心结果

$$d(A_{12}^2)/d\lambda = 1/9\sqrt{(4\Delta_{12})^2(4\Delta_{34})^2 - 18A_{12}^2 Q^2}. \tag{83}$$

平方根内的表达式是关于作用量平方A_{12}^2的四次多项式。

这一结果表明，体积演化是一条椭圆曲线。令 $x := A_{12}^2$ 且 $y := dx/d\lambda$，则这些变量中的椭圆曲线由 y^2 与 x的三次或四次多项式之间的等式定义。椭圆曲线在物理学中颇负盛名，因为它们在简单摆的完整非线性积分以及刚体动力学中发挥着重要作用。上述推导表明，体积演化是可积的。事实上，利用此方程可以求得 $A_{12}^2(\lambda)$ 关于雅可比 sn 函数$(\lambda,\ m)$ 的显式表达式，参见 [42]。函数 $A_{12}^2(\lambda)$ 关于 λ 是周期性的，并且是图6中 (a) 面板所示深色轮廓的参数化表示。这里直接相关的是，这些曲线可用于对体积进行半经典量子化。



(*a*) (*b*)

图 7 玻尔-索末菲与圈量子引力体积谱的比较。(*a*) 左侧：面积本征值由 $\{j、\ j、\ j、\ j+1\}$ 确定的四面体。(*b*) 右侧：自旋为 $\{4、\ 4、\ 4、\ j\}$ 且 j 在其允许范围内变化的四面体。体积的玻尔-索末菲值以黑点表示，圈量子引力体积算子的本征值以空心圆表示。回顾一下，自旋 j 与面积之间的关系为 $A_\ell = \sqrt{j_\ell(\ j_\ell+1)}\hbar\kappa\gamma$；对于这些图，$\hbar\kappa\gamma = 1$。

这个思路是回到旧量子论，并采用玻尔-索末菲量子化规则。该规则指出，可观测量 Q 的量子化值可通过以下条件求得：沿着 Q 的量子化等值集计算的作用量积分（记作 I）应等于普朗克常数的半整数倍

$$I(q) = \oint_{\gamma_q} A_{12}\, d\phi = 2\pi(n+1/2)\hbar, \tag{84}$$

其中，γ_q 是等值集轮廓 $Q=q$，n 是一个非负整数，$n \in \mathbb{Z}^*$。计算出作用量 $I(q)$ 后，将该表达式求逆，即可得到量子化可观测量 $\hat{q}$ 的量子化值 q_n。

通过将 A_{12} 和 ϕ 都参数化为 λ，可以显式地计算这个作用量积分，

$$I(q) = \Big(aK(m) - \textstyle\sum_{i=1}^{4} b_i \Pi(\alpha_i^2, m)\Big) q. \tag{85}$$

这里的结果用第一类完全椭圆积分 $K(m)$ 和第三类完全椭圆积分 $\Pi(\alpha^2, m)$ 表示。参数 $\{a, b_i\}$ 和模数 $\{m, \alpha_i^2\}$（两者的指标均为 $i \in \{1,2,3,4\}$）是 $\{A_\ell\}_{\ell=1}^{4}$ 以及 q 的函数，其关系由方程（83）平方根下出现的四次多项式的根给出；此处无需用到它们的显式表达式，但可在 [42]中找到。利用这一表达式，可以求出量子化等值集 q_n 的玻尔-索末菲值。图7将这些玻尔-索末菲值（黑点）与圈量子引力自旋网络结果的数值对角化值（空心圆）进行了比较。即使在 $\hbar$ 的最低阶近似下，两者也惊人地吻合。

4.3.3 量子四面体中的微扰/非微扰联系

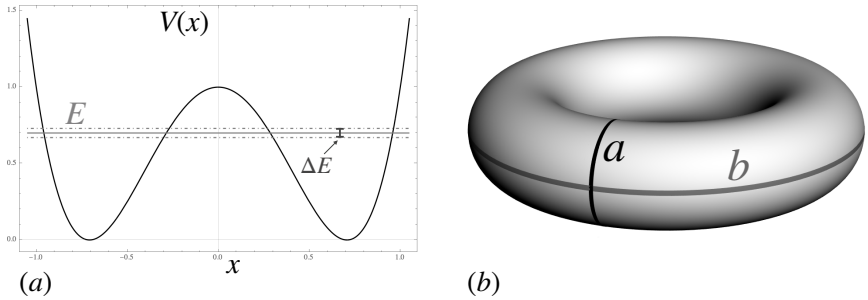
利用 WKB理论，可以进一步推广上述结果，求出体积本征态的解析半经典表达式 [130, 131]。除此之外，这些方法目前正在开发中的或许最有趣的应用是 [132]。这涉及上述结果与量子曲线理论之间的联系，
[133, 134, 135, 136, 137]。上文已经看到，体积流描绘出一条代数曲线，在此情形下为椭圆曲线。所有椭圆曲线都可以化为魏尔斯特拉斯标准形式，此时上文引入的 x 和 y 变量之间的关系可写为 $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$，而不变量 $\{g_2, g_3\}$ 则将椭圆曲线按同构分类。更一般地，代数曲线由关于 x 和 y的多项式为零定义，$P(x, y) = 0$。量子曲线是对这一关系的量子化，其中 x 和 y 按照标准方式提升为算子

$$\hat{x} = x, \qquad \hat{y} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}, \tag{86}$$

并且 $P(x, y)$ 被提升为算子 $\hat{P}(\hat{x}, \hat{y}; \hbar)$。算子 $\hat{P}$ 是关于 x 的微分算子，其系数是 x 的多项式，并且重要的是，可能还是 $\hbar$ 的幂级数。被此类算子 $\hat{P}(\hat{x}, \hat{y}; \hbar)\psi = 0$ 湮灭的状态 $\psi(x)$，已被证明在结理论、陈-西蒙斯理论和矩阵模型中具有核心重要性。

椭圆曲线的情形尤其有趣。在这种情况下，Basar、Dunne 和 Ünsal 在 [138],中借助 WKB理论阐明了一种引人入胜的微扰/非微扰联系。为具体说明，考虑一个非简谐四次振子的能量本征态。在经典层面，局限于势能左侧势阱中的粒子，其能量与局限于右侧势阱中的粒子的能量完全简并，见图 8 (a)。然而，在量子力学中，两个势阱之间的非微扰隧穿打破了这种简并。能量本征态之间存在指数级微小的能级劈裂 ΔE，图中以点划曲线示意。令人惊讶的是，能级 E_n 的量子化与该能级和其最近邻能级之间的劈裂 ΔE_n并非相互独立。通过将哈密顿量等值集 $H = E$ 视为椭圆曲线 $p^2 = 2m[E - (2x^2 - 1)^2]$，即可解释这两个量之间的联系。

如上所述，$H = E$ 能量的玻尔-索末菲量子化，是通过固定哈密顿量的等值集，并计算势能最左侧两个转折点之间一个完整周期上的作用量来完成的。另一个同样有趣的是连接势能中央两个转折点的作用量积分，结果发现它决定了能级分裂 ΔE_n， [139, 140]。若将变量 x 和p复数化，这两个作用量的性质便会更加清晰。此时，椭圆曲线 $p^2 = 2m[E - (2x^2 - 1)^2]$ 就是图 8第二个面板中描绘的亏格为一的黎曼曲面。两个作用量积分就是作用量一形式 pdx沿着该环面相互独立的 a-和 b-圈的积分。回到黎曼，两个周期由这些作用量对能量求导得到，



(a) (b)

图 8 (a) 对称四次振子的势能 $V(x)$，其哈密顿量为 $H(x,p) = p^2/2m + (2x^2-1)^2$。等值集 $H = E$ 以实心灰色曲线表示。对称与反对称能量本征态之间的量子能级劈裂，显示为点划水平线之间的间隙 ΔE。(b) 四次振子的椭圆曲线 $p^2 = 2m[E-(2x^2-1)^2]$与量子四面体的椭圆曲线(83)都可视为亏格为一的黎曼曲面。沿拓扑上不同的 a- 周期和 b- 周期的作用量积分，是计算量子系统能级量子化的半经典近似以及非微扰隧穿所必需的。

这些作用量的周期被发现彼此相关。事实上，这两个周期是所谓皮卡-福克斯方程的两个线性独立解。Basar、Dunne 和 Ünsal 证明，这种关系对 ħ 的每一阶都成立， [138]。这意味着，如果你知道某一阶的玻尔-索末菲能级 E_n ，就可以通过算法构造出同一 ħ 阶下它们的非微扰分裂 ΔE_n 。

上文回顾的四面体体积量子化中，也存在许多相同的数学结构。与体积对应的椭圆曲线，式（83），也可以视为一条复亏格一黎曼曲面。近期研究揭示了这一族黎曼曲面周期所满足的皮卡-福克斯方程；这些曲面由四面体的体积参数化 [131,132]。该研究确立了其中一个周期——沿 a-圈的周期——与这些黎曼曲面的一个实截面存在典范关联；这个周期对应于沿着上文用于求得玻尔-索末菲体积本征值的 $Q = q$ 轮廓计算出的作用量。更引人入胜的是，研究者还表明，第二个周期与一个纯虚轮廓相关，即 b-圈；这个轮廓可以与三维洛伦兹四面体对应起来。这些四面体嵌入在度规符号为 $(-,+,+)$ 的三维闵可夫斯基空间中。这些四面体仍满足闵可夫斯基定理，但其体积平方为负。该研究为从几何和解析角度理解空间颗粒与时空颗粒之间的非微扰隧穿开辟了道路。

4.4 离散几何总结

本节阐述了黎曼量子几何如何从其深植于欧几里得几何的经典根基中涌现。爱因斯坦对时空提出的同一深刻见解也适用于离散多面体几何：它们可以构造成形状不断演化的动力系统。值得注意的是，这些几何形状可以被量子化，并与圈量子引力的自旋网络态清晰对应。本节说明了如何将自旋网络中与规范不变节点相关联的状态视为量子多面体，并详细探讨了量子四面体的情形。篇幅所限，无法讨论其他几何算符；不过，离散几何方法也有助于理解第3节中介绍的其他算符。

具体而言，研究展示了量子四面体的面积和体积如何在半经典方法下的量子化过程中呈现离散谱；量子四面体对应于自旋网络的四价节点。事实上，这些谱为四价节点提供了一组完整的量子数。高价节点在多个方面都更加棘手。对于五价情形，多面体图景仍然为体积哈密顿量提供了一个明确的方案 [141]，但由该哈密顿量生成的动力学是混沌的 [141, 142]。即使已经获得了更为复杂的体积谱，仍然存在这样一个问题：对于高价节点，交织子空间的维数会增加，因此需要更多的量子标记。上文引入的作用角变量始终为相空间提供一组完备的坐标，并且存在一组相应的量子数，即角动量重耦合道 [143]。虽然重耦合道经常被采用，但人们还发展出了另一种方法：使用一个扩大的希尔伯特空间，其中仅固定空间量子颗粒的总包围面积；这被称为 U(N) 框架 [119, 144, 145, 146]。旨在寻找时空边界处完整守恒荷集合的更一般方法也正在发展之中 [147, 148, 149, 150]。

本节有许多内容未能涵盖。解释平面四面体出现时相空间为何会产生奇点的原因之一，见图6，在于这与渐近复兴的作用密切相关，[151, 152, 153]，尤其是在研究量子四面体时。平面构型表现为第三类椭圆函数的对数奇点，并为复兴超渐近级数贡献零模项 [132]。另一个引人入胜的研究方向是常曲率四面体与四单形。在三维时空中，常曲率四面体很快便引向泊松-李群和量子群这一丰富的数学领域 [154, 155, 156, 157]。四维常曲率单形的情形，则与上文讨论的代数曲线和量子曲线密切相关 [158, 159, 160, 161]。这项工作重新唤起了陈-西蒙斯理论与圈量子引力之间由来已久的交流，[162, 163, 164],尤其研究了与复陈-西蒙斯理论的联系 [165, 166, 167]。这项工作 [158] 开创了图补流形的研究，将有关结补空间的大量研究加以推广 [168]。

本章主要聚焦于空间几何。然而，离散几何方法并不止于此，也可以用于构建时空。这引出了自旋泡沫模型的路径积分方法 [169,170, 171, 172], , 这是本手册第 IX.4 章的主题。事实上，将自旋泡沫模型视为离散几何的粘合，已颇有成效；最近，这一观点促使研究者尝试简化这类路径积分的结构，并提出了称为 effectivespinfoams 的模型 [173, 174, 175]。

5 结论

我们在此简要总结，并着重联系本手册的其他部分。黎曼量子几何的涌现既影响着本手册各处讨论的发展，也受到这些发展的影响。量子几何的离散性引发了关于时空纠缠的有趣问题，由此与量子信息（第 IX.13 章）展开了富有成果的交流，也推动了黑洞物理学领域源远流长的思想发展，该主题见第 IX.9 章和第 IX.10 章。本章聚焦于空间几何，而关于这些几何的哈密顿动力学，则在第 IX.2 章和第 IX.3 章中作了丰富探讨；路径积分方法的发展（以自旋泡沫模型为例）则见第 IX.4 章。计算自旋泡沫振幅所需的计算方法，见第 IX.5 章。自旋网络概念的拓展，分别在第 IX.6 章关于图形演算的章节，以及第 IX.12 章关于圈量子引力中边界自由度的章节中讨论。宇宙学方面的应用见第 IX.7 章和第 IX.8 章，而圈量子引力的核心议题——连续统极限——则在第 IX.11 章中探讨。最后，本卷以第 IX.14 章对该理论哲学基础的讨论作结。

6 致谢

H.M.H. 获得了约翰·邓普顿基金会第 62312 号资助，该资助属于“时空的量子信息结构”项目（QISS），并获得了周界理论物理研究所的支持。周界理论物理研究所的研究部分由加拿大政府通过加拿大创新、科学与经济发展部，以及安大略省通过学院与大学部提供支持。

JL 获得了波兰国家科学中心的资助，编号为 2018/29/B/ST2/01250 和 2018/30/Q/ST2/00811。

H.S. 感谢 COST行动CA18108 的贡献。

参考文献

1. A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. Mourao, T. Thiemann, 《数学物理学杂志》**36**, 6456 (1995 531252 2 10 1063 1). DOI . / . . T. Thiemann, 现代正则量子广义相对论 (2001). arXiv 预印本 gr- qc/0110034 3. A. Ashtekar, J. Lewandowski, 《经典与量子引力》**21**, R53 (2004). DOI 10.1088/0264-9381/ 21/15/R01 4. T. Thiemann, 现代正则量子广义相对论. 剑桥数学物理专著（剑桥大学出版社，2007）。DOI 10.1017/ CBO9780511755682 5. C. Rovelli, 《相对论生活评论》**11**, 5 (2008) 6 5966 7**53**, 5966 1996 10 1103 53**31**, 725 1990 10 1063 1 . S. Holst, 《物理评论D》 ( ). DOI . / PhysRevD. . . J. Lee, R.M. Wald, 《数学物理学杂志》 ( ). DOI . / .528801 8**57**, 2244 1986 10 1103 . A. Ashtekar, 《物理评论快报》 ( ). DOI . /PhysRevLett.57 2244 9**51**, 5507 1995 10 1103 51 . . J.F. Barbero G., 《物理评论D》 ( ). DOI . /PhysRevD. .5507 10**14**, 55 1997 10 1088 . A. Ashtekar, J. Lewandowski, 《经典与量子引力》A ( ). DOI . / 0264-9381/ 14/1A/006 11. J. Lewandowski, A. Okolow, H. Sahlmann, T. Thiemann, 《数学物理通讯》**267**, 703 (2006 7 12 10 1007 00220 006 0100). DOI . /s - - - . A. Ashtekar, A. Corichi, J.A. Zapata, 《经典与量子引力》**15**, 2955 (1998). DOI 10.1088/ 0264-9381/15/10/006 13. A.S. Cattaneo, A. Perez, 《经典与量子引力》**34**(10), 107001 (2017). DOI 10.1088/1361-6382/ aa69b4 14 531037 15**36**, 2170 1995 10 1063 1**18**, 3293 2001 10 1088 0264 9381 18 17 . A. Ashtekar, J. Lewandowski, 《数学物理学杂志》 ( ). DOI . / . . T. Thiemann, 《经典与量子引力》 ( ). DOI . / - / / /301 16 1312 3657 2013 . A. Stottmeister, T. Thiemann, arXiv 预印本 arXiv: . ( ) 17 026 1**8**, 026 2012 10 3842 2012**17**, 191 1995 10 1016 0393 . T. Koslowski, H. Sahlmann, SIGMA ( ). DOI . / SIGMA. . . A. Ashtekar, J. Lewandowski, 《几何物理学杂志》 ( ). DOI . / -0440(95) 00028-G 19 3 20**285**, 67 2009 10 1007 00220 008 0593**117**, 253 1996 10 1006 1996 . C. Fleischhack, 《数学物理通讯》 ( ). DOI . /s - - - . J.C. Baez, 《数学进展》 ( ). DOI . / aima. .0012 21. S. Lojasiewicz, 比萨高等师范学校年刊 - 物理与数学科学**第3辑，18**(4), 449 (1964) 22. E. Bierstone, P.D. Milman, IHÉS数学出版物 **67**, 5 (1988) 23. K. Giesel, T. Thiemann, 《经典与量子引力》**24**, 2465 (2007). DOI 10.1088/0264-9381/24/ 10/003 24. K. Giesel, T. Thiemann, 《经典与量子引力》**24**, 2499 (2007). DOI 10.1088/0264-9381/24/ 10/004 25. K. Giesel, T. Thiemann, 《经典与量子引力》**24**, 2565 (2007). DOI 10.1088/0264-9381/24/ 10/005 26. K. Giesel, T. Thiemann, 《经典与量子引力》**27**, 175009 (2010). DOI 10.1088/0264-9381/ 27/17/175009 27 531527 28**37**, 3014 1996 10 1063 1**442**, 593 1995 10 1016 0550 . N. Grot, C. Rovelli, 《数学物理学杂志》 ( ). DOI . / . . C. Rovelli, L. Smolin, 《核物理B》 ( ). DOI . / - 3213(95)00150-Q. [456, 753 754 1995] 勘误：Nucl.Phys.B – ( ) **47**, 1703 1993 29 . C. Rovelli, 《物理评论 D 》 ( ). DOI 10.1103/PhysRevD.47.1703. [勘误： Phys.Rev.D 87, 089902 2013] ( ) . G.J. Fernando Barbero, J. Lewandowski, E.J.S. Villasenor, 《物理评论D》**80**, 044016 (2009). DOI 10 044016 31 1103 80 . /PhysRevD. . . S.A. Major, 《经典与量子引力》**16**, 3859 307 32 1999 10 1088 0264 9381 16 12**14**, 71 1997 10 1088 0264 9381 14 1 ( ). DOI . / - / / / . J. Lewandowski, 《经典与量子引力》 ( ). DOI . / - / / /010 33**1**, 388 1998 10 4310 . A. Ashtekar, J. Lewandowski, 《理论与数学物理进展》 ( ). DOI . /ATMP. 1997.v1.n2.a8 30

34. E. Bianchi, H.M. Haggard, 《物理评论快报》107, 011301 (2011). DOI 10.1103/PhysRevLett. 107.011301 35. J. Brunnemann, D. Rideout, 《经典与量子引力》25, 065001 (2008). DOI 10.1088/0264-9381/ 25/6/065001 36. J. Brunnemann, D. Rideout, 《经典与量子引力》27, 205008 (2010). DOI 10.1088/0264-9381/ 27/20/205008 37 532259 38 39, 3347 1998 10 1063 1 23, 1289 2006 . T. Thiemann, 《数学物理学杂志》( ). DOI . / . . J. Brunnemann, T. Thiemann, 《经典与量子引力》( ). DOI 10.1088/0264-9381/ 23/4/014 39. K. Giesel, T. Thiemann, 《经典与量子引力》23, 5667 (2006). DOI 10.1088/0264-9381/23/ 18/011 40. K. Giesel, T. Thiemann, 《经典与量子引力》23, 5693 (2006). DOI 10.1088/0264-9381/23/ 18/012 41. J. Schliemann, 《经典与量子引力》30, 235018 (2013). DOI 10.1088/0264-9381/30/23/ 235018 42. E. Bianchi, H.M. Haggard, 《物理评论D》86, 124010 (2012). DOI 10.1103/PhysRevD.86. 124010 124010 43 10 1103 86 . URL https://link.aps.org/doi/ . / PhysRevD. . . R. Penrose，载于《量子理论及其超越》，T. Bastin 编（剑桥大学出版社，剑桥，1971 180 44 151），第 – 页。R. Penrose，载于《无魔法的魔法》，J. Klauder 编（Freeman出版社，旧金山，1972），第 333–354 页 45. E. Bianchi, P. Doná, S. Speziale, 《物理评论D》83, 044035 (2011). DOI 10.1103/PhysRevD. 83 044035 46 044035 10 1103 83 62, 104021 2000 10 1103 62 . . URL https://link.aps.org/doi/ . / PhysRevD. . . Y. Ma, Y. Ling, 《物理评论D》( ). DOI . /PhysRevD. .104021 47 93 2 024042 2016 10 1103 . J. Lewandowski, H. Sahlmann, 《物理评论D》( ), ( ). DOI . / PhysRevD. 93.024042 48 011 49 15, 839 1998 10 1088 0264 9381 15 4 807 3 591 2009 10 . T. Thiemann, 《经典与量子引力》( ). DOI . / - / / / . E. Bianchi, 《核物理B》( ), ( ). DOI https://doi.org/ .1016/j. nuclphysb.2008.08.013. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/ pii/S0550321308004562 50. T. Thiemann, 《数学物理学杂志》39, 3372 532445 51 1998 10 1063 1 1955 1965 19, 558 1961 ( ). DOI . / . . T.E. Regge, 《新物理学》(-) ( ) 52. E. Alesci, M. Assanioussi, J. Lewandowski, 《物理评论D》89(12), 124017 (2014). DOI 10 124017 53 1103 89 . /PhysRevD. . . E.R. Livine, S. Speziale, 《物理评论D》76, 084028 084028 54 2007 10 1103 76 82, 084040 2010 10 1103 82 084040 ( ). DOI . / PhysRevD. . . L. Freidel, S. Speziale, 《物理评论D》( ). DOI . /PhysRevD. . . URL https://link.aps.org/doi/10 084040 55 1103 82 18, 2025 2001 10 1088 0264 . / PhysRevD. . . T. Thiemann, 《经典与量子引力》( ). DOI . / -9381 304 56 18 11 18, 4629 2001 10 1088 0264 9381/ / / . T. Thiemann, O. Winkler, 《经典与量子引力》( ). DOI . / - /18/ 21/315 57. T. Thiemann, O. Winkler, 《经典与量子引力》 18, 4997 (2001). DOI 10.1088/0264-9381/18/ 23/302 58. T. Thiemann, O. Winkler, 《经典与量子引力》18, 2561 (2001). DOI 10.1088/0264-9381/18/ 14/301 59. B. Bahr, T. Thiemann, 《经典与量子引力》26, 045011 (2009). DOI 10.1088/0264-9381/26/ 4/045011 60. A. Zipfel, T. Thiemann, 《物理评论D》93(8), 084030 (2016). DOI 10.1103/PhysRevD.93. 084030 61. B.C. Hall, 《泛函分析杂志》122(1), 103 (1994) 62. B.C. Hall, 《相干态及其应用》第 41–61 页 (2018) 63. B. Bahr, T. Thiemann, 《经典与量子引力》26, 045012 (2009). DOI 10.1088/0264-9381/26/ 4/045012 64. H. Sahlmann, T. Thiemann, O. Winkler, 《核物理B》606, 401 (2001). DOI 10.1016/ S0550-3213(01)00226-7

65. T. Thiemann, O. Winkler, 经典与量子引力 **18**(23), 4997 (2001) 66 013 67**23**, 2063 2006 10 1088 0264 9381 23 6**87**8 083521 2013 10 1103 . T. Thiemann, 《经典与量子引力》( ). DOI . / - / / / . E. Alesci, F. Cianfrani, 《物理评论D》( ), ( ). DOI . / PhysRevD.87. 083521 68 40002 69**11**4 40002 2015 10 1209 0295 5075 111**10**210 106010 2020 10 1103 102 . E. Alesci, F. Cianfrani, 《欧洲物理快报》( ), ( ). DOI . / - / / . I. Mäkinen, 《物理评论 D 》 ( ), ( ). DOI . /PhysRevD. .106010 70**106**4 046013 2022 10 1103 . J. Lewandowski, I. Mäkinen, 《物理评论D》( ), ( ). DOI . /PhysRevD. 106.046013 71. J. Lewandowski, I. Mäkinen, 《量子约化圈量子引力的标量曲率算符》(2022 04826 72 2211). arXiv 预印本 . . A. Corichi, K.V. Krasnov, 《现代物理快报A》 **13**, 1339 (1998). DOI 10.1142/ S0217732398001406 73 006 74**15**, 1487 1998 10 1088 0264 9381 15 6**72**, 3642 1994 10 1103 . T. Thiemann, 《经典与量子引力》( ). DOI . / - / / / . H.A. Morales-Tecotl, C. Rovelli, 《物理评论快报》 ( ). DOI . /PhysRevLett. 72.3642 75 532400 76**39**, 1251 1998 10 1063 1**78**, 064009 2008 10 1103 . J.C. Baez, K.V. Krasnov, 《数学物理学杂志》( ). DOI . / . . M. Bojowald, R. Das, 《物理评论D》( ). DOI . /PhysRevD.78 064009 77**103**6 066016 2021 10 1103 . . R. Mansuroglu, H. Sahlmann, 《物理评论D》( ), ( ). DOI . /PhysRevD. 103.066016 78. R. Gambini, O. Obregon, J. Pullin, 《核物理B》**460**, 615 (1996). DOI 10.1016/ 0550-3213(95)00582-X 79 044008 80**61**, 044008 2000 10 1103 61**711**, 205 2012 10 1016 . Y. Ling, L. Smolin, 《物理评论D》( ). DOI . /PhysRevD. . . N. Bodendorfer, T. Thiemann, A. Thurn, 《物理学快报B》( ). DOI . /j. physletb.2012 003 81 04. . . N. Bodendorfer, T. Thiemann, A. Thurn, 《经典与量子引力》**30**, 045006 (2013). DOI 10.1088/0264-9381/30/4/045006 82. N. Bodendorfer, T. Thiemann, A. Thurn, 《经典与量子引力》**30**, 045007 (2013). DOI 10.1088/0264-9381/30/4/045007 83. K. Eder, 《超卡当几何与超阿什tekar联络》(2020). arXiv 预印本 2010.09630 84 071 85**07**, 071 2021 10 1007 07 2021**31**, 075002 2014 . K. Eder, H. Sahlmann, 《高能物理学杂志》( ). DOI . /JHEP ( ) . M. Campiglia, M. Varadarajan, 《经典与量子引力》 ( ). DOI 10.1088/ 0264-9381/31/7/075002 86. M. Campiglia, M. Varadarajan, 《经典与量子引力》**31**, 175009 (2014). DOI 10.1088/ 0264-9381/31/17/175009 87. T.A. Koslowski, 《动力学量子几何》(DQG计划) (2007). arXiv 预印本 0709.3465 88 225007 89**27**, 225007 2010 10 1088 0264 9381 27 22**101**10 106018 2020 10 1103 101 . H. Sahlmann, 《经典与量子引力》( ). DOI . / - / / / . H. Sahlmann, R. Seeger, 《物理评论D》( ), ( ). DOI . /PhysRevD. . 106018 90. M. Varadarajan, 《经典与量子引力》**30**, 175017 (2013). DOI 10.1088/0264-9381/30/17/ 175017 91. R. Gambini, J. Griego, J. Pullin, 《物理学快报B》**413**, 260 (1997). DOI 10.1016/S0370-2693(97) 01048-4 92. B. Dittrich, M. Geiller, 《经典与量子引力》**32**(13), 135016 (2015). DOI 10.1088/0264-9381/ 32/13/135016 93. B. Dittrich, M. Geiller, 《经典与量子引力》**32**(11), 112001 (2015). DOI 10.1088/0264-9381/ 32/11/112001 94. B. Bahr, B. Dittrich, M. Geiller, 《经典与量子引力》**38**(14), 145021 (2021). DOI 10.1088/ 1361-6382/abfed1 95. P. Drobiński, J. Lewandowski, 《物理评论D》**96**(12), 126011 (2017). DOI 10.1103/PhysRevD. 96.126011 96 104001 97**61**, 104001 2000 10 1103 61**64**, 104003 2001 10 1103 64 104003 . M. Varadarajan, 《物理评论D》( ). DOI . / PhysRevD. . . M. Varadarajan, 《物理评论D》( ). DOI . /PhysRevD. .

98 024017 99 66, 024017 2002 10 1103 66 20, 11 2003 . M. Varadarajan, 《物理评论D》（）。DOI。/PhysRevD.。。A. Ashtekar、J. Lewandowski、H. Sahlmann, 《经典与量子引力》L（）。DOI 10.1088/0264-9381/20/1/103 100. M. Assanioussi、J. Lewandowski, 《物理评论D》105(10), 104025 (2022)。DOI 10.1103/ PhysRevD.105 104025 101 . . A. Ashtekar、J. Lewandowski, 《经典与量子引力》18, L117 (2001)。DOI 10.1088/0264-9381/ 18/18/102 102 3265923 103 50, 123522 2009 10 1063 1 29, 205015 2012 10 1088 0264 9381 29 20 . J. Lewandowski、A. Okolow, 《数学物理学杂志》（）。DOI。/。。C.L. Duston, 《经典与量子引力》（）。DOI。/-/ / /205015 104 13 . C.L. Duston, 载于第届马塞尔·格罗斯曼会议：理论与实验广义相对论、天体物理学和相对论场论最新进展（2015）, 页2177–2179。DOI 10.1142/9789814623995 0391_105. M. Villani, 《经典与量子引力》38(15), 155014 (2021)。DOI 10.1088/1361-6382/ac0e1a 106. J. Aastrup、J.M. Grimstrup、R. Nest, 《经典与量子引力》26, 065011 (2009)。DOI 10.1088/ 0264-9381/26/6/065011 107 085005 108 33 8 085005 2016 10 1088 0264 9381 33 8 1995 . D. Oriti, 《经典与量子引力》（）, （）。DOI。/-/ / / . J.C. Baez、S. Sawin, （）。109. J. Lewandowski、T. Thiemann, 《经典与量子引力》16, 2299 (1999)。DOI 10.1088/0264-9381/ 16/7/311 110 4 111 249, 331 2004 10 1007 00220 004 1052 45, 2802 2004 10 1063 1 . C. Fleischhack, 《数学物理通讯》（）。DOI。/s - - - . W. Fairbairn、C. Rovelli, 《数学物理学杂志》（）。DOI。/ .1763247 112 29, 055004 2012 10 1088 . C. Rovelli、M. Smerlak, 《经典与量子引力》（）。DOI。/0264-9381/ 29/5/055004 113. H. Minkowski, 《哥廷根科学学会通报·数学物理类》1897, 198 (1897)。URL http://eudml.org/doc/ 58391 114. K.M. Moerman, 《开放源代码软件杂志》3(22), 506 (2018)。DOI 10.21105/joss. 00506 00506 115 10 21105 . URL https://doi.org/ . /joss. . J. Marsden、T. Ratiu, 《力学与对称性：经典力学系统基础论述》。应用数学文本（S pringer New York, 2002）。URL https://books.google.com/books?id=I2gH9ZIs-3AC 116. A. Weinstein, 《微分几何杂志》18(3), 523 (1983)。DOI 10.4310/jdg/ 1214437787 1214437787 117 10 4310 . URL https://doi.org/ . /jdg/ . V. Aquilanti、H.M. Haggard、R.G. Littlejohn、L. Yu, 《物理学杂志A》40, 5637 (2007)。DOI 10.1088/1751-8113/40/21/013 118. M. Kapovich、J.J. Millson, 《微分几何杂志》44(3), 479 (1996)。DOI 10.4310/ jdg/1214459218 1214459218 119 10 4310 22, 3295 2005 10 1088 . URL https://doi.org/ . /jdg/ . F. Girelli、E.R. Livine, 《经典与量子引力》（）。DOI。/0264-9381/22/16/ 011 120. L. Freidel、J. Ziprick, 《经典与量子引力》31(4), 045007 (2014)。DOI 10.1088/0264-9381/ 31/4/045007 121. M. Dupuis、F. Girelli、E.R. Livine, 《广义相对论与引力》46(11), 1802 (2014)。DOI 10.1007/ s10714-014-1802-3 122. L. Freidel、M. Geiller、J. Ziprick, 《经典与量子引力》30(8), 085013 (2013) 123. A.S. Cattaneo、A. Perez, 《经典与量子引力》34(10), 107001 (2017) 124. C. Rovelli、S. Speziale, 《物理评论D》82, 044018 (2010)。DOI 10.1103/PhysRevD.82.044018。URL https://link.aps.org/doi/10 044018 125 1103 82 . /PhysRevD. . . J.V. José、E.J. Saletan, 《经典动力学：当代方法》（剑桥大学出版社, 1998）126. J.W. Barrett、L. Crane, 《数学物理学杂志》39(6), 3296 (1998) 127. J.W. Barrett、L. Crane, 《经典与量子引力》17(16), 3101 (2000) 128. A. Barbieri, 《核物理B》518(3), 714 (1998)。DOI https://doi.org/10.1016/ S0550-3213(98)00093-5。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/ pii/S0550321398000935

129. J.C. Baez、J.W. Barrett, 《理论与数学物理进展》3(4), 815 (1999)。DOI 10.4310/ATMP.1999. v3 3 130 4 3 10 4310 1999 3 4 .n .a . URL https://dx.doi.org/ . /ATMP. .v . n .a . H.M. Haggard, 《自旋网络的渐近分析及其在量子引力中的应用》。博士论文，加州大学伯克利分校（2011）131. H.M. Haggard，ILQGS报告："最简单的空间颗粒的体积量子化"。https://relativity.phys.lsu.edu/ilqgs/haggard101921 4 132 .mp . S. Antu、C. Doran、H.M. Haggard，准备中 133. S. Gukov, 《数学物理通讯》255, 577 (2005)。DOI 10.1007/s00220-005-1312-y 134 070 135 02, 070 2012 10 1007 02 2012 17 3 479 2013 10 4310 . S. Gukov、P. Sulkowski, 《高能物理学杂志》（）。DOI。/JHEP（）。T. Dimofte, 《理论与数学物理进展》（）, （）。DOI。/ATMP.2013 1 136 17 3 93, 41 2015 .v .n .a . P. Norbury, 《纯数学专题研讨会论文集》（）137. V. Bouchard、N.K. Chidambaram、T. Dauphinee, 《数论物理通讯》12, 253 (2018)。DOI 10.4310/CNTP.2018.v12.n2.a2 138 087 139 05, 087 2017 10 1007 05 2017 39 1983 39, 211 . G. Basar、G.V. Dunne、M. Unsal, 《高能物理学杂志》（）。DOI。/JHEP（）。A. Voros，载于《IHP理论物理年刊》，第（），第卷，页–338 140 27 14 4969 1994 . S.C. Creagh, 《物理学杂志A：数学与一般》（）, （）141. H.M. Haggard, 《物理评论D》87, 044020 (2013)。DOI 10.1103/PhysRevD.87.044020。URL https://link.aps.org/doi/10 044020 142 1103 87 87, 044047 2013 . /PhysRevD. . . C.E. Coleman-Smith、B. Müller, 《物理评论D》（）。DOI 10.1103/PhysRevD. 87 044047 143 044047 10 1103 87 . . URL https://link.aps.org/doi/ . /PhysRevD. . . A.P. Yutsis、I.B. Levinson、V.V. Vanagas, 《角动量理论》（S Monson，耶路撒冷，1962）144 3473786 145 51, 082502 2010 10 1063 1 52, 052502 2011 10 1063 1 . L. Freidel、E.R. Livine, 《数学物理学杂志》（）。DOI。/。。L. Freidel、E.R. Livine, 《数学物理学杂志》（）。DOI。/ .3587121 146 28, 055005 2011 . E.F. Borja、L. Freidel、I. Garay、E.R. Livine, 《经典与量子引力》（）。DOI 10.1088/0264-9381/28/5/055005 147 4100107 148 4 10 107 2018 10 3390 11, 026 2020 10 1007 11 . L. Freidel、A. Perez, 《宇宙》（）, （）。DOI。/universe . L. Freidel、M. Geiller、D. Pranzetti, 《高能物理学杂志》（）。DOI。/JHEP (2020 026 149 11, 027 2020 10 1007 11 2020) . L. Freidel、M. Geiller、D. Pranzetti, 《高能物理学杂志》（）。DOI。/JHEP（）。027 150 01, 100 2021 10 1007 01 2021 . L. Freidel、M. Geiller、D. Pranzetti, 《高能物理学杂志》（）。DOI。/JHEP（）。100 151. F. Fauvet、D. Manchon、S. Marmi、D. Sauzin, 《复苏、物理学与数》。高等师范学校出版社（高等师范学校，2017）。URL https://books.google.com/books?id=z0I_DwAAQBAJ 152 0010 153 2015, 010 2016 10 22323 1 251 2022 . G.V. Dunne、M. Ünsal，PoS LATTICE（）。DOI。/。。J. Gu、M. Marino, （）154. V. Bonzom、M. Dupuis、F. Girelli、E.R. Livine, （2014）155. C. Charles、E.R. Livine, 《经典与量子引力》32(13), 135003 (2015)。DOI 10.1088/0264-9381/ 32/13/135003 156. M. Dupuis、L. Freidel、F. Girelli、A. Osumanu、J. Rennert, （2020）157. V. Bonzom、M. Dupuis、F. Girelli、Q. Pan, （2022）158. H.M. Haggard、M. Han、W. Kamiński、A. Riello, 《核物理B》900, 1 (2015)。DOI 10 023 159 1016 2015 08 . /j.nuclphysb. . . . H.M. Haggard、M. Han、W. Kaminski、A. Riello, 《理论与数学物理进展》23(4), 1067 (2019)。DOI 10.4310/ATMP.2019.v23.n4.a3 160. H.M. Haggard、M. Han、W. Kamiński、A. Riello, 《物理学快报B》752, 258 (2016)。DOI 10 058 161 1016 2015 11 . /j.physletb. . . . H.M. Haggard、M. Han、A. Riello, 《亨利·庞加莱年刊》17(8), 2001 (2016)。DOI 10.1007/s00023-015-0455-4 162 531251 163 36, 6417 1995 10 1063 1 473, 267 1996 10 1016 . L. Smolin, 《数学物理学杂志》（）。DOI。/。。S. Major, 《核物理B》（）。DOI。/0550 3 164 3213 96 00259 2002 - ( ) - . L. Smolin, （）。165. E. Witten，AMS/IP《高等数学研究》50, 347 (2011) 166 1 167 339 2 619 2015 10 1007 00220 015 2401 2016 . T. Dimofte, 《数学物理通讯》（）, （）。DOI。/s - - - . S. Gukov、M. Marino、P. Putrov, （）。168. P. Kirk、E. Klassen, 《数学物理通讯》153(3), 521 (1993)

169. J. Engle, R. Pereira, C. Rovelli, 《物理评论快报》**99**, 161301 (2007). DOI 10.1103/PhysRevLett. 99.161301 170. L. Freidel, K. Krasnov, 经典与量子引力 **25**(12), 125018 (2008) 171. W. Kaminski, M. Kisielowski, J. Lewandowski, 《经典与量子引力》**27**, 095006 (2010). DOI 10 1088 0264 9381 29 4 049502 [29, 049502 2012] . / - / / / . 勘误：Class.Quant.Grav. ( ) . A. Perez, 《相对论生活评论》 ( ). DOI . /lrr- -3 173 172 **16**, 3 2013 10 12942 2013 **125**. S.K. Asante, B. Dittrich, H.M. Haggard, 《物理评论快报》(23), 231301 (2020). DOI 10 231301 174 1103 125 . /PhysRevLett. . . S.K. Asante, B. Dittrich, H.M. Haggard, 《经典与量子引力》**38**(14), 145023 (2021). DOI 10.1088/1361-6382/ac011b 175. S.K. Asante, B. Dittrich, J. Padua-Arguelles, 《经典与量子引力》**38**(19), 195002 (2021). DOI 10.1088/1361-6382/ac1b44