arXiv:2302.02841v1 [math.OC] 6 Feb 2023

黎曼流形上的强测地预不变凸性与强不变 η-单调性及其应用

Akhlad Iqbal[1], Askar Hussain[2] 和 Hilal Ahmad Bhat[3]数学系，阿里格尔穆斯林大学，阿里格尔-202002，印度[1]
akhlad6star@gmail.com，[2]askarhussain59@gmail.com 和[3]bhathilal01@gmail.com

摘要：本文介绍了黎曼流形（RM）上的强测地预不变凸性以及 RM 上的强 η-invex 性（阶数为 m ）。此外，我们定义了 RM 上的强不变 η-单调性（阶数为 m ）。在条件 C 下，研究了这些函数的一个重要刻画。我们构造了若干非平凡例子，以支持这些定义。随后，我们推导出 MOP 的严格 η-极小化解（η-极小化解）（阶数为 m ）的一个重要且有意义的刻画，以及拟变分不等式问题（$VVLIP$）的一个解。

关键词：强测地预不变凸性，强 η-不变凸函数，不变η-单调向量场， MOP， $VVLIP$，黎曼流形。

1. 引言

变分不等式问题和单调性在数学科学、物理学的诸多领域（如优化理论、科学和工程等）实际问题的解的存在性研究中发挥着至关重要的作用。广义单调性是研究变分包含和互补问题解的存在性与性质的有效工具。凸性与单调性密切相关。研究发现，相应梯度函数的单调性等价于实值函数的凸性。近年来，作者们拓展了凸性和单调性的概念，参见 [6, 7, 8]。一般而言，流形是不同于线性空间的空间。Rapcsak[3] 和 Udriste [4] 运用线性空间中的技术将凸性拓展到黎曼流形，这一概念称为测地凸性。Barani [2]介绍了黎曼流形上的多种不变单调向量场。研究表明，从欧几里得空间推广到黎曼流形的许多结果和性质，对于不变单调向量场仍然成立。此外，黎曼流形上的优化研究也取得了更多进展，参见 [22, 23]。Pini [5] 定义了黎曼流形上的不变凸函数，并讨论了其若干性质。广义不变凸性推动了凸分析的发展，并且与广义不变单调性密切相关，相关研究见 [18]。Yang等人 [22]提出了不变单调性，这是单调性的推广。在广义单调性条件下，推导出了 $VLIP$ 的解的存在性 [18]。Nemeth [9], 提出了黎曼流形上的单调向量场，这是单调算子的一种重要推广。Noor [14] 讨论了 α- 不变凸性和 α- 单调性的概念。Iqbal 等人

将其拓展到黎曼流形上，称为强 [21] -不变凸性和不变 α-单调性。

受相关研究成果的启发，参见[2, 11, 12, 14, 16, 21, 24], ，我们在黎曼流形上引入了阶数为 m的强测地预不变凸性、阶数为 η的强 m-invex 性、阶数为 η的强拟 m -invex 性以及阶数为 η的强伪 m-invex 性。这些概念是对阶数为m 的强测地凸函数的推广，该函数由[10], 定义；而强 α-invex 性和不变 α-单调性由 Iqbal 等人定义。本文安排如下：第2 节给出若干定义和基本事实，重点介绍在本文中发挥主要作用的黎曼几何基本概念。我们构造了非平凡且恰当的例子来支持这些定义，并证明了若干有趣的性质和结果。第3节引入了阶数为 m 的强测地预不变凸性和阶数为 η的强 m-invex 性的一个重要刻画。

在黎曼流形上定义了序为 m 的广义不变 η-单调性，例如强不变 η-单调性和强不变伪 η-单调性。在第 4 节中建立了强 η-不变凸性（强伪 η-不变凸性）与强不变 η-单调性（强不变伪 η-单调性）之间的关系，这表明强 η-不变凸性（强伪 η-不变凸性）与强不变 η-单调性（强不变伪 η-单调性）密切相关。在第 5 节中，我们在黎曼流形上引入了序为 m 的 η-极小解。随后给出了序为 m 的强 η-不变凸函数的 MOP 应用。最后，介绍了 MOP 的序为 m 的严格 η-极小解与 $VVLIP$ 的一个解之间的关系。

2. 预备知识

本节回顾黎曼流形相关的一些定义和基本结果，这些内容将在全文中使用。有关微分几何的标准材料，请参阅 [18]。这里，将 M 视为以希尔伯特空间 H 为模型的 C^∞ 光滑流形，该空间可以是有限维的，也可以是无限维的，并赋予黎曼度量 $\langle\cdot;\ \cdot\rangle_p$ 表示在点 $p \in M$ 处 T_pM 上的度量 $T_pM \cong M$。因此，我们可以为每个 T_pM 得到 $\langle\cdot、\ \cdot\rangle_p$ 的光滑赋值。通常，我们可以写成

$$g_p(X_1, X_2) = \langle X_1, X_2\rangle_p \ \forall X_1, X_2 \in T_pM.$$

因此， M 是一个黎曼流形。与内积 $\langle .,.\rangle_p$ 对应的切向量的范数长度记为 $\|\cdot\|_p$。分段 C^1 曲线 r：$[a, b] \to M$的长度定义为

$$L(r) = \int_a^b \|r'(s)\|_{r(s)} ds.$$

对于 $x_1, x_2 \in M$，$x_1 \neq x_2$，我们定义 x_1 与 x_2之间的距离。

$$d(x_1, x_2) = \inf\{L(r) : r \text{ is piecewise } C^1 \text{ curve joining } x_1 \text{ to } x_2\}.$$

于是， M 上的原有拓扑由距离 d诱导。光滑流形 M 上的所有向量场的集合记为 $\chi(M)$。该度量诱导出一个

映射 $h \to grad\ h \in \chi(M)$，它将每个 h 与其梯度对应。即，

$$\langle dh, X\rangle_p = dh(X),\ \forall X \in \chi(M).$$

众所周知，在每个黎曼流形上，∃ 恰有一个协变导数，称为 Levi-Civita 联络，记作 $\nabla_X Y$，对任意 X、$Y \in \chi$（M）均成立。再回顾一下，测地线是一条 C^∞ 光滑路径 r，连接 x_1和 $x_2 \in M$，使得 L（r）$= d$（x_1，x_2） $x_1 \neq x_2$，称为曲线 C 的长度；满足方程 $\nabla_{\frac{dr(t)}{dt}}{}^{dr}$（$t$）$_{dt} = 0$的曲线称为最短测地线。常微分方程存在性定理指出，$\forall v \in TM$存在一个包含 0 的开区间 ∃（$J$），以及唯一一条测地线$v$: r_v（J）v，满足 $\to M$（0）$\frac{dr}{dt}_{\circ}$这意味着，流形$= v$存在一个开邻域 ∃，使得$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$测地线 TM（M）对 $\forall\ v \in TM$有定义。利用沿光滑曲线的向量平行移动算子，对于光滑曲线 r_v：t，向量$|t| < 2$） r，$I \to M$，存在唯一的沿$v_0 \in T_{r(t_0}$（M）的平行向量场 $\forall\ t_0 \in I$（∃），使得 V（t） $r_\circ$希尔伯特空间（t， V）与其对偶空间（t_0，$= v_0$）之间存在一个线性等距对应。切空间T_pM）$\|\cdot\|_p$与T_p^*M，$\|\cdot\|_p$之间的线性等距映射定义为$T_{r(t_0}$（M），记作 $T_{r(t)}M$，$\forall\ t \in I$；我们称其为沿 $v_0 \to V$（t）从$P_{t_0}^t$）$_r$到$T_{r(t_0}$的平行移动。若M 是从流形 $T_{r(t)}M$ 到流形 r的可微映射，则存在一个线性映射t： dh_p，其中 $T_pM \to T_{h(p)}N$表示 h 在 M 处的微分。有限维黎曼流形称为完备的，如果其测地线对 N的所有取值都有定义。霍普夫-里诺定理保证，若 dh_p中的任意两点都能由一条（不一定唯一的）最短测地线段连接，则黎曼流形 h 是完备的。对于所考虑的黎曼流形 p，令 t： M 为满足 M，M，η（$M \times M \to TM$，$\forall\ u$）$v \in M$的映射，以下给出一些基本定义：

Pini [5]给出的定义如下：

定义 1. [5] 设 $r_{u,v}$：$[0,1] \to M$ 是 RM 上的一条曲线 M 满足 $r_{u,v}$(0) $= v$ 和$r_{u,v}$(1) $= u_\circ$ 则，曲线 $r_{u,v}$称为关于 $v, u \in M$具有性质（P），如果

$$r_{u,v}{}'(t)(s-t) = \eta(r_{u,v}(s), r_{u,v}(t)),\ \forall\ s,t \in [0,1].$$

定义 2. [5] 对于 RM M，映射 η：$M \times M \to TM$称为可积的，如果$\forall\ u, v \in M$，∃至少存在一条曲线 $r_{u,v}$关于 $v, u \in M$具有性质（P）。

注 1. [1] 设 M为一个 RM。映射 η：$M \times M \to TM$称为可积的。如果我们得到

$$r_{u,v}{}'(0) = \eta(r_{u,v}(1), r_{u,v}(0)) = \eta(u,v).$$

在这种情况下，如果 $r_{u,v}$(t) 是一条测地线，则满足条件 C

$\mathbf{C_1}$ $\eta(v, r_{u,v}(s)) = -sr_{u,v}(0) = -sP_{0,r_{u,v}}^s\,[r_{u,v}{}'(0)] = -sP_{0,r_{u,v}}^s\,[\eta(u,v)]$

$\mathbf{C_2}$ $\eta(r_{u,v}(1), r_{u,v}(s)) = (1-s)r_{u,v}(0) = (1-s)P_{0,r_{u,v}}^s\,[r_{u,v}{}'(0)]$

$= (1-s)P_{0,r_{u,v}}^s\,[\eta(u,v)]\,.$

$\mathbf{C_1}$ 和 $\mathbf{C_2}$ 合称为由 Barani 等人 [1] 定义的条件 C。

阶数为 m由 Akhlad 等人定义的强测地凸 [10]。

定义 3.[10] 若函数 $h: S \to R$ 在测地凸集 S上是 m 阶强测地凸函数，则称其为强测地凸函数，其中 $\exists\, \delta > 0$ s.t.

$$h(r_{u,v}(s)) \le sh(u) + (1-s)h(v) - \delta s(1-s)\|r'_{u,v}(s)\|^m,$$

对任意 u、$v \in S$、$s \in [0,1]$。

测地不变凸集的概念由 Barani 等人定义[1], ，其定义如下:

定义 4.[1] 设 M为一个黎曼流形，且 η: $M \times M \to TM$为映射，使得对于每个 u、$v \in M$、$\eta(u$、$v) \in T_vM$。若非空集合 $S \subseteq M$满足：对于 η，$\exists$ 恰有一条测地线 $r_{u,v}$: $[0,1] \to M$ s.t.，则称其为关于（w.r.t.） η 的测地不变凸集。

$$r_{u,v}(0) = v,\ r_{u,v}{}'(0) = \eta(u,v),\ r_{u,v}(s) \in S,\ \forall\ s \in [0,1],\ u,v \in S.$$

定义 5.[1] 若函数 $h: S \to R$ 在测地不变凸集 S上是测地 η-预不变凸函数，则对于 $\forall\, u$、$v \in S$、$s \in [0,1]$，有

$$h(r_{u,v}(s)) \le sh(u) + (1-s)h(v).$$

定义6. [2] 设 M 为一个黎曼流形。若存在 $\exists\, \delta > 0$ 使得：可微函数 h: $M \to R$ 关于 η是二阶强 η-invex 的。

$$h(u) \ge h(v) + dh_v(\eta(u,v)) + \delta\|\eta(u,v)\|_v^2,\ \forall\ u,v \in M.$$

3. 黎曼流形上的强测地预不变凸性

本节中，我们介绍黎曼流形 M 上的强测地预不变凸性，以及黎曼流形 M上函数的 m 阶强 η-invex 性。

定义7. 设 m 为正整数。设 $S \subseteq M$ 为黎曼流形 M的测地线 invex 子集。若存在 $\exists\, \delta > 0$, 使得对于 $\forall\, u$、$v \in S$、$s \in [0,1]$，我们有：函数 h: $S \to R$ 关于 η是 m 阶强预不变凸的

$$h(r_{u,v}(s)) \le sh(u) + (1-s)h(v) - \delta s(1-s)\,\|\eta(u,v)\|_v^m,$$

其中$r_{u,\ v}(s)$ 是定义4中给出的唯一测地线。

注2. 若 $\eta(u,v) = u - v,\ \forall u,v \in S$，则其化为 m阶强测地凸性，见 [10]。

Re标记 3. 对于 $\delta = 0$，定义 7 退化为 [1 中定义的测地线预不变凸性].

定理1. 如果 $h_1, h_2, ..., h_k$ 是定义在测地不变凸集 S 上的 m_k 阶强测地预不变凸函数，那么 $h = \sum_{j=1} a_j h_j$ 和 $H = \max\limits_{1 \le j \le k} h_j$ 也都是 m 阶强测地预不变凸函数，其中 $a_j > 0,\ 1 \le j \le k$。

证明。由于 h_j、$1 \le j \le k$ 是 m 阶强测地线预不变凸函数，对于任意 u、$v \in S$、$s \in [0,1]$，有

$$h_j(r_{u,v}(s)) \le sh_j(u) + (1-s)h_j(v) - \delta s(1-s)\|\eta(u,v)\|_v^m,\ 1 \le j \le k.$$

k现在对两边取 $\sum a_j$，得到$j=1$

$$\sum_{j=1}^{k} a_j h_j(r_{u,v}(s)) \leq s\sum_{j=1}^{k} a_j h_j(u) + (1-s)\sum_{j=1}^{k} a_j h_j(v) - \sum_{j=1}^{k} a_j \delta s(1-s)\left\|\eta(u,v)\right\|_v^m,$$

$$h(r_{u,v}(s)) \leq sh(u) + (1-s)h(v) - \delta' s(1-s)\left\|\eta(u,v)\right\|_v^m,$$

k取 $\delta' = \sum a_j \delta > 0$. 因此，函数 h 是$j=1$阶强测地预不变凸函数。

另一方面，由于 $h_j, 1 \leq j \leq k$ 是 m阶强测地线预不变凸函数，我们有

$$h_j\left(r_{u,v}(s)\right) \leq sh_j(u) + (1-s)h_j(v) - \delta s(1-s)\left\|\eta(u,v)\right\|_v^m, \ \forall\ 1 \leq j \leq k.$$

现在取最大值$\max\limits_{1\leq j\leq k} h_j$，得到

$$\max_{1\leq j\leq k} h_j(r_{u,v}(s)) \leq s\max_{1\leq j\leq k} h_j(u) + (1-s)\max_{1\leq j\leq k} h_j(v) - \delta s(1-s)\left\|\eta(u,v)\right\|_v^m.$$

$$H\left(r_{u,v}(s)\right) \leq sH(u) + (1-s)H(v) - \delta s(1-s)\left\|\eta(u,v)\right\|_v^m.$$

□

定理 2. 设 M 是一个完备 RM，$S \subseteq M$ 是关于 η 的测地不变凸集，且 F: $S \times S \to R$ 是关于 (η,η) 的m 阶连续强测地预不变凸函数；$i.e.$, F 是关于每个变量的 m 阶强测地预不变凸函数。那么，由 Ψ: $S \to R$ 定义的函数为

$$\Psi(u) = \inf_{v\in S} F(u,v),$$

是关于 η 的 m 阶强测地预不变凸函数。

证明。设 u_0、$u_1 \in S$ 和 $\epsilon > 0$ 已知。由于 S 是关于 η 的测地不变凸集，因此存在一条测地线 $r_{u_0,\ u_1}$: $[0,1] \to M$，使得

$$r_{u_0,u_1}(0) = u_1,\ {r_{u_0,u_1}}'(0) = \eta(u_0,u_1),\ r_{u_0,u_1}(s) \in S,\ \forall\ s \in [0,1].$$

根据下确界的定义，$\exists\ v_0$、$v_1 \in S$，使得

$$F(u_1,v_1) < \Psi(u_1) + \epsilon, F(u_0,v_0) < \Psi(u_0) + \epsilon.$$

根据 S 关于 η 的测地不变凸性，存在一条测地线 $t_{v_0,\ v_1}$: $[0,1] \to M$，使得

$$t_{v_0,v_1}(0) = v_1,\ {t_{v_0,v_1}}'(0) = \eta(v_0,v_1),\ t_{v_0,v_1}(s) \in S,\ \forall\ s \in [0,1].$$

显然，曲线 $\alpha_{(u_0,v_0),\ (u_1,\ v_1)} = (r_{u_0,\ u_1},\ t_{u_0,\ u_1})$: $[0,1] \to M \times M$在$S \times S$中是测地线，且满足 $\alpha_{(u_0,v_0),\ (u_1,\ v_1)}(0) = (u_1,v_1)$，使得对任意 $s \in [0,1]$，我们都有

$$\alpha_{(u_0,v_0),(u_1,v_1)}(s) = (r_{u_0,u_1}(s), t_{v_0,v_1}(s)) \in S \times S$$

and

$$\begin{aligned} {\alpha_{(u_0,u_1),(v_0,v_1)}}'(0) &= ({r_{u_0,u_1}}'(0), {t_{v_0,v_1}}'(0)) \\ &= (\eta(u_0,u_1), \eta(v_0,v_1)) \\ &= \eta_0\left((u_0,v_0),(u_1,v_1)\right), \end{aligned}$$

其中映射 η_0: $(M\times M)\times(M\times M)\to TM\times TM$。根据下确界的定义以及 F的 m 阶强测地预不变凸性，我们有

$$\begin{aligned}
&\Psi\left(r_{u_0,u_1}(s)\right)\\
&\quad= \inf_{v\in S} F\left(r_{u_0,u_1}(s),v\right)\\
&\quad\le F\left(r_{u_0,u_1}(s),t_{v_0,v_1}(s)\right)\\
&\quad\le sF\left(u_0,v_0\right)+(1-s)F\left(u_1,v_1\right)-\delta s(1-s)\left\|\eta_0\left((u_0,v_0),(u_1,v_1)\right)\right\|^m_{(u_1,v_1)}\\
&\quad= sF\left(u_0,v_0\right)+(1-s)F\left(u_1,v_1\right)-\delta s(1-s)\left\|(\eta(u_0,u_1),\eta(v_0,v_1))\right\|^m_{(u_1,v_1)}\\
&\quad= sF\left(u_0,v_0\right)+(1-s)F\left(u_1,v_1\right)-\delta s(1-s)\left\{\|\eta(u_0,u_1)\|^m_{u_1}+\|\eta(v_0,v_1)\|^m_{v_1}\right\}\\
&\quad\le s\left(\Psi(u_0)+\epsilon\right)+(1-s)\left(\Psi(u_1)+\epsilon\right)-\delta s(1-s)\left\|\eta(u_0,u_1)\right\|^m_{u_1}\\
&\quad= \left(s\Psi(u_0)+(1-s)\Psi(u_1)\right)+\epsilon-\delta s(1-s)\left\|\eta(u_0,u_1)\right\|^m_{u_1}\\
&\quad\le s\Psi(u_0)+(1-s)\Psi(u_1)-\delta s(1-s)\left\|\eta(u_0,u_1)\right\|^m_{u_1}.
\end{aligned}$$

因此，函数 $\Psi(u)=\inf\limits_{v\in S}F(u,v)$ 关于 η 是 m 阶强测地预不变凸函数。□

现在，我们定义关于 η 的 m 阶强拟凸函数。

定义8. 设 m 为正整数， M 为黎曼流形。若存在 $\exists\,\delta>0$ ，使得.....，则称可微函数 $h:M\to R$ 关于 η 是 m 阶强 η-不变凸函数。

$$h(u)\ge h(v)+dh_v^T(\eta(u,v))+\delta\|\eta(u,v)\|^m_v,\ \forall u,v\in M.$$

注 4. 对于 m=2，则定义8可化为关于η 的二阶强 η-不变凸函数，其定义为[2]。

在下面的例子中，我们展示 m 阶强 η-不变凸函数的存在性。

例1. 设 $h:M\to R$ 是黎曼流形上的可微函数， M 使得 $\forall v\in M, dh_v\neq 0$。映射 η: $M\times M\to TM$ 定义如下:

$$\eta(u,v)=\frac{h(u)-h(v)-\delta\|\eta(u,v)\|^m_v}{\|dh_v\|^2_v}dh_v,\forall u,v\in M.$$

由于 M是黎曼流形，因此对于每个 u、$v\in M$，我们得到

$$\begin{aligned}
\left\langle dh_v,\eta(u,v)\right\rangle_v &= \left\langle dh_v,\frac{h(u)-h(v)-\delta\|\eta(u,v)\|^m_v}{\|dh_v\|^2_v}dh_v\right\rangle_v\\
&= h(u)-h(v)-\delta\|\eta(u,v)\|^m_v\frac{\langle dh_v,dh_v\rangle_v}{\|dh_v\|^2},\\
&= h(u)-h(v)-\delta\|\eta(u,v)\|^m_v.
\end{aligned}$$

$$h(u)=h(v)+\left\langle dh_v,\eta(u,v)\right\rangle_v+\delta\|\eta(u,v)\|^m_v.$$

因此， h 是阶数为 m的强 η-不变凸函数。

例2. 设 $M = \{(u_1, u_2) \in R^2 : u_1, u_2 > 0\}$ 是一个具有黎曼度量 $\langle \cdot, \cdot \rangle = < Q(u)x, y >$的黎曼流形，其中对任意 $x, y \in T_u(M)$， $Q(u) = (g_{ij}(u))$定义了一个由 $g_{ij}(u) = \frac{\delta_{ij}}{u_i u_j}$给出的 2×2 矩阵。满足$r(0) = u = (u_1, u_2) \in M$且 $r'(0) = x = (x_1, x_2) \in T_u(M) = \mathbb{R}^2$的测地曲线 $r : \mathbb{R} \to M$为

$$r(t) = (u_1 e^{\frac{x_1}{u_1}t},\ u_2 e^{\frac{x_2}{u_2}t}).$$

对于任意 $u = (u_1, u_2) \in M$以及任意 $x = (x_1, x_2) \in T_u(M)$，映射 $exp_u : T_u(M) \to M$定义如下

$$exp_u(x) = r(1) = (u_1 e^{\frac{x_1}{u_1}},\ u_2 e^{\frac{x_2}{u_2}})$$

定义函数 $h : M \to R$，对于任意 $u = (u_1, u_2) \in M$，定义如下

$$h(u_1, u_2) = u_1 + u_2^2.$$

则， h 是关于 η的任意阶强不变凸函数 η （参见定义8），其中 η : $M \times M \to TM$是一个映射，对任意 $u = (u_1,\ u_2)\ v = (v_1,\ v_2) \in M$定义如下

$$\eta\left((u_1, u_2), (v_1, v_2)\right) = \left(-1 - v_1, -v_2\right),$$

$$\text{and} \quad dh_v^T(\eta(u, v)) = \frac{d}{dt} h(\exp_v(\eta(u, v)))|_{t=0} = -(1 + v_1 + 2v_2^2).$$

然而， h 不是任意阶强测地预不变凸函数。为此，令$u = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $v = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$和 $s = \frac{1}{10}$，则对于任意 $\delta > 0$和任意 $m \geq 1$，容易看出下式成立:

$$h(r_{u,v}(s)) \nleq sh(u) + (1 - s)h(v) - \delta s(1 - s)\|\eta(u, v)\|_v^m,$$

其中连接 $u = (u_1, u_2)$ 和 $v = (v_1, v_2)$ 的测地线段由 b 给出 y

$$r_{(u,v)}(s) = \left(u_1 \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^s, u_2 \left(\frac{v_2}{u_2}\right)^s\right).$$

在下述定理中，我们证明可微的强测地预不变凸函数是强 η-不变凸的。

定理 3. 设 $S \subseteq M$ 为开测地不变凸集，且 $h : S \to R$ 为连续可微函数。若 h 关于 η是 m阶强测地预不变凸的，则 h 关于 η是 m 阶强 η-不变凸的。

证明. 假设对于每个 u、 $v \in S$、 $\exists$， h 关于η是 m 阶强测地预不变凸的，恰有一条测地线 $r_{u,\ v} : [0, 1] \to M$ 使得

$$r_{u,v}(0) = v,\ r_{u,v}{}'(0) = \eta(u, v),\ r_{u,v}(s) \in S,\ \forall\ s \in [0, 1],$$

and

$$h(r_{u,v}(s)) \leq sh(u) + (1 - s)h(v) - \delta s(1 - s)\|\eta(u, v)\|_v^m,$$

$$h(r_{u,v}(s)) - h(v) \leq s\{h(u) - h(v)\} - \delta s(1 - s)\|\eta(u, v)\|_v^m.$$

Si由于 h 可微，两边同时除以 s 并取 $s \to 0$，我们得到 t

$$dh^T_{r_{u,v}(0)}(r_{u,v}{}'(0)) \leq h(u) - h(v) - \delta\|\eta(u, v)\|_v^m.$$

or

$$h(u) \geq h(v) + dh_v^T(\eta(u, v)) + \delta\|\eta(u, v)\|_v^m.$$

□

然而，当3 满足 η 时，若满足条件 C，定理的逆命题成立，如下所示:

定理 4. 设 $S \subseteq M$ 是关于 η 的开测地不变凸集。假设 h: $S \to R$ 是连续可微函数。函数 h 是关于 η 的 m 阶强 η-不变凸函数，且 η 满足条件 C，当且仅当 h 是关于 η 的 m 阶强测地线预不变凸函数。

证明. 根据定理 3，函数 h 是关于 η 的 m 阶强 η-不变凸函数。反之，假设 h 是开测地不变凸集 S 上关于 η $i.e.$ 的 η 阶强 η-不变凸函数，对于每个 $u, v \in S$ ∃，恰有一条曲线 $r_{u,v}$: $(0, 1) \to M$ 使得

$$r_{u,v}(0) = v,\ {r_{u,v}}'(0) = \eta(u, v),\ r_{u,v}(s) \in S,\ \forall\ s \in (0, 1).$$

固定 $s \in (0, 1)$，并令 $\bar{v} = r_{u,v}(s)$。于是，我们有

$$h(u) \geq h(\bar{v}) + dh_{\bar{v}}^{T}(\eta(u, \bar{v})) + \delta\|\eta(u, \bar{v})\|^{m} \tag{3.1}$$

$$h(v) \geq h(\bar{v}) + dh_{\bar{v}}^{T}(\eta(v, \bar{v})) + \delta\|\eta(v, \bar{v})\|^{m}. \tag{3.2}$$

将 s 乘以 (3.1) 和 $(1 - s)$ 乘以 (3.2)，分别相加并应用$dh_{\bar{v}}^{T}(s\eta(u, \bar{v}) + (1 - s)\eta(v, \bar{v}))$

$$\begin{aligned} &= dh_{\bar{v}}\left(s(1-s)P_{0,r_{u,v}}^{s}[\eta(u,v)] + (1-s)(-s)P_{0,r_{u,v}}^{s}[\eta(u,v)]\right) \\ &= dh_{\bar{v}}(0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

we have

$$h(\bar{v}) + \delta s\left\|(1-s)P_{0,r_{u,v}}^{s}[\eta(u,v)]\right\|_{v}^{m} + \delta(1-s)\left\|(-s)P_{0,r_{u,v}}^{s}[\eta(u,v)]\right\|_{v}^{m} \leq sh(u) + (1-s)h(v)$$

$$h(\bar{v}) + \delta s(1-s)^{m}\left\|P_{0,r_{u,v}}^{s}\eta(u,v)\right\|_{v}^{m} + \delta(1-s)s^{m}\left\|P_{0,r_{u,v}}^{s}\eta(u,v)\right\|_{v}^{m} \leq sh(u) + (1-s)h(v)$$

$$h(\bar{v}) + \delta s(1-s)\left[(1-s)^{m-1} + s^{m-1}\right]\left\|P_{0,r_{u,v}}^{s}\eta(u,v)\right\|_{v}^{m} \leq sh(u) + (1-s)h(v). \tag{3.3}$$

Since $P_{0,r_{u,v}}^{s}\eta(u, v) = \eta(u, v)$, then (3.3) become

$$h(\bar{v}) + \delta s(1-s)\left[(1-s)^{m-1} + s^{m-1}\right]\|\eta(u,v)\|_{v}^{m} \leq sh(u) + (1-s)h(v). \tag{3.4}$$

情形 (i) $0 < m \leq 2$，则 $(1 - s) + s = 1 \leq (1 - s)^{m-1} + s^{m-1}$。

情形 (ii) $m > 2$，则实值函数 $\phi(s) = s^{m-1}$ 在 $(0, 1)$ 上是凸的，因此我们有

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{m-2} \leq (1-s)^{m-1} + s^{m-1}.$$

由此可得（3.4），∃ $\delta' > 0$，它与 u、v、s 无关，使得$h(r_{u,v}(s)) \leq sh(u) + (1 - s)h(v) - \delta' s(1 - s)\|\eta(u, v)\|_{v}^{m}$、$\forall u$、$v \in S$、$s \in (0, 1)$。

因此，函数 h 是阶数为 m的强测地预不变凸函数。 □

现在，我们将强 η 阶不变凸函数推广如下：

定义9. 设 m 为正整数。设 h: $M \to R$ 是黎曼流形 M 上的可微函数。那么，函数 h 称为：

(i) 若 $\exists\, \delta > 0$ s.t.，则称为强伪 η 型1 m 阶不变凸函数，

$$dh_v^T \eta(u,v) \geq 0 \implies h(u) \geq h(v) + \delta \|\eta(u,v)\|_v^m,\ \forall u, v \in M,$$

或等价地，

$$h(u) < h(v) + \delta \|\eta(u,v)\|_v^m \implies dh_v^T \eta(u,v) < 0.$$

(ii) 若 $\exists\, \delta > 0$ s.t.，则称为强伪 η 型2 m 阶不变凸函数，

$$dh_v^T \eta(u,v) + \delta \|\eta(u,v)\|_v^m \geq 0 \implies h(u) \geq h(v),\ \forall u, v \in M.$$

在下面的例子中，我们将展示强伪 η 阶 m 不变凸函数的存在性。

例3. 设 $M = \{(u_1,\ u_2) \in R^2 :\ u_1,\ u_2 > 0\}$ 是一个黎曼流形，其黎曼度量如例 2中所定义。

定义函数 $h:\ M \to R$，对任意 $u = (u_1, u_2) \in M$，定义如下：

$$h(u_1, u_2) = ln(u_1) + (ln(u_2))^3.$$

那么， h 关于 η 是任意阶的强伪 η-不变凸1型，其中 $\eta:\ M \times M \to TM$ 是一个映射，对任意 $u = (u_1, u_2)$ $v = (v_1, v_2) \in M$，定义如下：

$$\eta\left((u_1,u_2),(v_1,v_2)\right) = \left(-v_1^2, 0\right),$$

$$\text{and} \quad dh_v^T(\eta(u,v)) = \frac{d}{dt} h(\exp_v(\eta(u,v)))|_{t=0} = -v_1.$$

然而， h 不是任意阶的强 η-不变凸函数。为此，设 $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), v = (1, e^2)$，则容易得到如下结论

$$h(u) \ngeq h(v) + dh_v^T \eta(u,v) + \delta \|\eta(u,v)\|_v^m.$$

定义10. 设 m 为正整数。设 $h: M \to R$ 是在黎曼流形 M 上的可微函数。那么，函数 h 称为：

(i) 若满足 $\exists\, \delta > 0$ ，则称为 m 的强拟 η-广义凸型 1 阶。

$$h(u) \leq h(v) \implies dh_v^T \eta(u,v) + \delta \|\eta(u,v)\|_v^m \leq 0,\ \forall\ u, v \in M.$$

(ii) 若满足 $\exists\, \delta > 0$ ，则称为 m 的强拟 η-广义凸型 2 阶。

$$h(u) \leq h(v) + \delta \|\eta(u,v)\|_v^m \implies dh_v^T \eta(u,v) \leq 0,\ \forall\ u, v \in M.$$

在下面的例子中，我们展示了强拟 η-广义凸函数（阶数为 m）的存在性。

例 4. 设 $M = \{(u_1,\ u_2) \in R^2 :\ u_1,\ u_2 > 0\}$ 是一个黎曼流形，其黎曼度量定义如例 2。

定义函数 $h:\ M \to R$，对任意 $u = (u_1, u_2) \in M$，有

$$h(u_1, u_2) = u_1^3 + ln(u_2).$$

那么， h 是关于 η 的任意阶强拟 η-逆凸型 1，其中 η： $M\times M\to TM$是一个映射，对任意 $u=(u_1,u_2)$ $v=(v_1,v_2)\in M$，有

$$\eta\left((u_1,u_2),(v_1,v_2)\right)=\left(-v_1^2,-v_2^2\right),$$

$$\text{and}\quad dh_v^T(\eta(u,v))=\frac{d}{dt}h(\exp_v(\eta(u,v)))|_{t=0}=-3v_1^4-v_2\leq 0.$$

然而， h 不是任何阶的强 η-不变凸函数。为此，令 $u=\left(1,\frac{1}{e^5}\right)$ $v=$(1,1)，则容易得到如下结论

$$h(u)\ngeq h(v)+dh_v^T\eta(u,v)+\delta\|\eta(u,v)\|_v^m.$$

4. 黎曼流形上的强不变 η-单调性

Nemeth 定义在黎曼流形上的向量场的单调性[9] 如下：

定义 11. [9] 设 X 是黎曼流形 M上的一个向量场。那么，如果 $\forall\ u,v\in M$，则称 X 在 M上是单调的，得到

$$\left\langle r_{u,v}{}'(0),\ P^0_{1,r_{u,v}}\left[X(u)-X(v)\right]\right\rangle_v\geq 0,$$

其中 $r_{u,\ v}$ 是连接 u 和 v的一条测地线。

Barani 等人 [2] 对其进行了推广，并定义了黎曼流形 M上的不变单调性。随后，Iqbal 等人[10] 将不变单调性的概念扩展为黎曼流形 M上的强不变 α-单调性。受 Iqbal 等人[10], 的启发，我们将其扩展如下：

定义 12. 设 m 是一个正整数， M 是一个黎曼流形。若 M 上的向量场 X 满足以下条件，则称其为：

(i) η-阶强不变单调，即 $\exists\ \delta>0$ 满足以下条件。

$$\langle X(v),\eta(u,v)\rangle_v+\langle X(u),\eta(v,u)\rangle_u\leq-\delta\left\{\|\eta(u,v)\|_v^m+\|\eta(v,u)\|_u^m\right\}.$$

当 $m=2$ 时，它退化为 Barani 等人 [2] 定义的强不变单调。(ii) m -阶强不变伪 η-单调，即 $\exists\ \delta>0$ 满足以下条件。

$$\langle X(u),\eta(v,u)\rangle_u\geq 0\implies\langle X(v),\eta(u,v)\rangle_v\leq-\delta\left\|\eta(u,v)\right\|_v^m.$$

当 $m=2$ 时，它退化为 Barani 等人[2] 定义的强不变伪单调。

为支持定义 12，我们给出以下例子。

例 5. 设 h: $M\to R$ 是定义在黎曼流形 M 上的可微函数，满足 $\forall\ v\in M$, $dh_v\neq 0$。映射 η: $M\times M\to TM$ 定义为

$$\eta(u,v)=-\frac{\|\eta(u,v)\|_v^m}{\|dh_v\|_v^2}dh_v,\ \forall u,v\in M.$$

给定 M 是黎曼流形，则对任意 $u, v \in M$，有

$$\begin{aligned}\langle dh_v, \eta(u,v)\rangle_v &= \left\langle dh_v, \frac{-\|\eta(u,v)\|_v^m}{\|dh_v\|_v^2} dh_v \right\rangle_v \\ &= -\|\eta(u,v)\|_v^m \frac{\langle dh_v, dh_v\rangle_v}{\|dh_v\|^2}, \\ &= -\|\eta(u,v)\|_v^m, \\ \langle dh_v, \eta(u,v)\rangle_v &= -\|\eta(u,v)\|_v^m. \end{aligned} \tag{4.1}$$

同理，我们有

$$\langle dh_u \eta(v,u)\rangle_u = -\|\eta(v,u)\|_u^m. \tag{4.2}$$

将（4.1）与（4.2）相加，得

$$\langle dh_v, \eta(u,v)\rangle_v + \langle dh_u, \eta(v,u)\rangle_u = -\left\{\|\eta(u,v)\|_v^m + \|\eta(v,u)\|_u^m\right\},$$

因此， dh_v 是阶数为 m的强不变 η-单调向量场。

在接下来的定理中，我们讨论阶数为 m 的强 η-不变凸性与阶数为 m的强不变 η-单调性之间的关系。

定理5. 设 $h: M \to R$ 是在 M上的可微函数。假设 h 是阶数为 m的强 η-不变凸函数。则， dh 是阶数为m的强不变 η-单调函数。

证明. 设 h 是在 M上阶数为 m 的强 η-不变凸函数。则，

$$h(u) - h(v) \geq dh_v(\eta(u,v)) + \delta\|\eta(u,v)\|_v^m, \ \forall\ u, v \in M, \tag{4.3}$$

$$h(v) - h(u) \geq dh_u(\eta(v,u)) + \delta\|\eta(v,u)\|_u^m, \ \forall\ u, v \in M. \tag{4.4}$$

将 (4.3) 与 (4.4) 相加，得到

$$dh_v(\eta(u,v)) + dh_u(\eta(v,u)) + \delta\{\|\eta(u,v)\|_v^m + \|\eta(v,u)\|_u^m\} \leq 0,$$

or

$$dh_v(\eta(u,v)) + dh_u(\eta(v,u)) \leq -\delta\{\|\eta(u,v)\|_v^m + \|\eta(v,u)\|_u^m\}, \ \forall u, v \in M.$$

因此， dh 是阶数为 m的强不变 η-单调函数。 □

定理6. 设 $h: M \to R$ 是测地完备 RM M上的可微函数。若映射 $\eta: M \times M \to TM$可积，且 dh是阶数为 m的强不变η-单调函数，则 h 是阶数为 m的强 η-凸函数。

证明. 由于 M是测地完备 RM， $\forall\ u$， $v \in M$，因此存在一条测地线$r_{u,\ v}: [0,1] \to M$使得$r_{u,\ v}(0) = v$， $r_{u,\ v}(1) = u$。令$w = r_{u,\ v}(\frac{1}{2})$，则根据中值定理（MVT），存在 $\exists\ s_1, s_2 \in (0,1)$使得 $0 < s_2 < \frac{1}{2} < s_1 < 1$，得到

$$h(u) - h(w) = \frac{1}{2} dh_x\left(r_{u,v}'(s_1)\right), \tag{4.5}$$

$$h(w) - h(v) = \frac{1}{2} dh_y\left(r_{u,v}'(s_2)\right), \tag{4.6}$$

其中 $x = r_{u,\ v}(s_1)$ $y = r_{u,\ v}(s_2)$。由于 dh 是强不变 η-单调的，阶数为 m，因此我们得到

$$dh_x^T\left(\eta(v,x)\right) + dh_v^T\left(\eta(x,v)\right) \leq -\delta\left\{\|\eta(v,x)\|_x^m + \|\eta(x,v)\|_v^m\right\}. \tag{4.7}$$

由于 η 是可积的，因此我们得到

$$\eta\left(v, r_{u,v}(s_1)\right) = -s_1 P^{s_1}_{0,r_{u,v}}\left[\eta(u,v)\right] \tag{4.8}$$

and

$$\eta\left(v, r_{u,v}(s_1)\right) = s_1\eta(u,v). \tag{4.9}$$

将（4.8）和（4.9）代入（4.7），得到

$$dh^T_x\left(-s_1 P^{s_1}_{0,r_{u,v}}\left[\eta(u,v)\right]\right) + dh^T_v\left(s_1\eta(u,v)\right)$$
$$\leq -\delta\left\{\| - s_1 P^{s_1}_{0,r_{u,v}}[\eta(u,v)]\|^m_x + \|s_1\eta(u,v)\|^m_v\right\}$$

or

$$-dh^T_x\left(P^{s_1}_{0,r_{u,v}}\eta(u,v)\right) + dh^T_v\left(\eta(u,v)\right) \leq -2s_1^{m-1}\delta\left\|\eta(u,v)\right\|^m_v$$

由条件 C，$P^{s_1}_{0,\,r_{u,\,v}}[\eta(u,v)] = r_{u,\,v}{}'(s_1)$，可得

$$\frac{1}{2}dh^T_x\left(r_{u,v}{}'(s_1)\right) \geq \frac{1}{2}dh^T_v\left(\eta(u,v)\right) + s_1^{m-1}\delta\|\eta(u,v)\|^m_v, \tag{4.10}$$

类似地，可得

$$\frac{1}{2}dh^T_y\left(r_{u,v}{}'(s_2)\right) \geq \frac{1}{2}dh^T_v\left(\eta(u,v)\right) + s_2^{m-1}\delta\|\eta(u,v)\|^m_v \tag{4.11}$$

因此，（4.5）和（4.6）变为

$$h(u) - h(w) \geq \frac{1}{2}dh^T_v(\eta(u,v)) + s_1^{m-1}\delta\|\eta(u,v)\|^m_v, \tag{4.12}$$

$$h(w) - h(v) \geq \frac{1}{2}dh^T_v(\eta(u,v)) + s_2^{m-1}\delta\|\eta(u,v)\|^m_v. \tag{4.13}$$

将（4.12）和（4.12）相加，得到

$$\begin{aligned} h(u) - h(v) &\geq dh^T_v(\eta(u,v)) + \delta\left\{s_1^{m-1} + s_2^{m-1}\right\}\|\eta(u,v)\|^m_v \\ &= dh^T_v\left(\eta(u,v)\right) + \delta'\left\|\eta(u,v)\right\|^m_v, \end{aligned}$$

其中 $\delta' = \delta\left(s_1^{m-1} + s_2^{m-1}\right) > 0$。

□

定理 7. 设 M 是一个测地完备 RM，且 $h: M \to R$ 是一个可微函数。若映射 $\eta: M \times M \to TM$ 可积，且 dh 是 η 阶强不变伪单调的，则 h 是 m 阶强伪 η-预不变的。

证明. 由于 M 是测地完备 RM，因此 $\forall\ u、\ v \in M、\ \exists$ 是一条测地线 $r_{u,\,v}$: $[0,1] \to M$ 使得 $r_{u,\,v}(0) = v$，$r_{u,\,v}(1) = u$。令 $w = r_{u,\,v}(\frac{1}{2})$，则由（中值定理），$\exists\ s_1$，存在 $s_2 \in (0,1)$ 使得 $0 < s_2 < \frac{1}{2} < s_1 < 1$，我们得到

$$h(u) - h(w) = \frac{1}{2}dh^T_x\left(r_{u,v}{}'(s_1)\right), \tag{4.14}$$

$$h(w) - h(v) = \frac{1}{2}dh^T_y\left(r_{u,v}{}'(s_2)\right), \tag{4.15}$$

其中 $x = r_{u,\,v}(s_1)$ $y = r_{u,\,v}(s_2)$。利用性质（P），（4.14）可写为

$$h(u)-h(w)=-\frac{1}{2s_1}dh_x^T\left(\eta(v,x)\right) \tag{4.16}$$

and

$$h(w)-h(v)=-\frac{1}{2s_2}dh_y^T\left(\eta(v,y)\right). \tag{4.17}$$

假设

$$dh_v^T\left(\eta(u,v)\right)\geq 0, \tag{4.18}$$

利用（P）中的（4.18）性质，可得

$$0\leq dh_v^T\left(\eta(u,v)\right)=\frac{1}{s_1}dh_v^T\left(\eta(v,x)\right)=\frac{1}{s_2}dh_v^T\left(\eta(v,y)\right). \tag{4.19}$$

由于 dh 是 η强不变伪单调的，阶数为 m，因此有

$$\begin{aligned} dh_x^T\left(\eta(v,x)\right)&\leq -\delta\left\|\eta(v,x)\right\|_x^m\\ &=-\delta\left\|-s_1P_{0,r_{u,v}}^{s_1}\left[\eta(u,v)\right]\right\|_x^m\\ &=-\delta s_1^m\left\|P_{0,r_{u,v}}^{s_1}\left[\eta(u,v)\right]\right\|_x^m\\ &=-\delta s_1^m\left\|\eta(u,v)\right\|_v^m, \end{aligned} \tag{4.20}$$

and

$$\begin{aligned} dh_y^T\left(\eta(v,y)\right)&\leq -\delta\left\|\eta(v,y)\right\|_y^m\\ &=-\delta\left\|-s_2P_{0,r_{u,v}}^{s_2}\left[\eta(u,v)\right]\right\|_y^m\\ &=-\delta s_2^m\left\|P_{0,r_{u,v}}^{s_2}\left[\eta(u,v)\right]\right\|_y^m\\ &=-\delta s_2^m\left\|\eta(u,v)\right\|_v^m. \end{aligned} \tag{4.21}$$

分别将（4.20）和（4.21）代入（4.16）和（4.17），可得

$$h(u)-h(w)\geq\frac{\delta s_1^{m-1}}{2}\left\|\eta(u,v)\right\|_v^m \tag{4.22}$$

其中 $\frac{\delta s_1^{m-1}}{2}>0$,

$$h(w)-h(v)\geq\frac{\delta s_2^{m-1}}{2}\left\|\eta(u,v)\right\|_v^m, \tag{4.23}$$

其中 $\frac{\delta s_2^{m-1}}{2}>0$。将（4.22）和（4.23）相加，可得

$$h(u)-h(v)\geq\delta^{'}\left\|\eta(u,v)\right\|_v^m$$

or

$$h(u)\geq h(v)+\delta^{'}\left\|\eta(u,v)\right\|_v^m,$$

其中 $\delta^{'}=\frac{\delta\left(s_1^{m-1}+s_2^{m-1}\right)}{2}>0$。

□

5. 黎曼流形上的向量变分型不等式问题

本节中，我们将考虑多目标优化问题（MOP），并将其作为强 η-阶 m不变凸函数的应用，称为强 η-不变凸多目标优化问题，它推广了 Iqbal 等人[10]得到的结果。

假设 $H=(h_1,h_2,...,h_k)$，其中 h_i：$M\to 2^{TM}$ 是定义在 M 上的集值向量场。向量变分型不等式问题（$VVLIP$）是求一个解 $u^*\in M$，且 $X\in H(u^*)$ 满足：

$$\langle X,\eta(u,u^*)\rangle \not< 0,\ \forall\ u\in M,$$

where $\langle X,\eta(u,u^*)\rangle=\langle X_1,\eta(u,u^*)\rangle,\langle X_2,\eta(u,u^*)\rangle,...,\langle X_k,\eta(u,u^*)\rangle.$

其目标是求严格的 η 阶 m 极小元：

$$\text{Min } H(u)=(h_1(u),h_2(u),...,h_k(u)),\ u\in M.$$

受 Iqbal 等人 [10] 和 Bhatia 等人 [17], 的启发，我们针对 MOP，定义黎曼流形上相对于非线性函数的局部严格 η 阶 m 极小元。

定义 13. 点 $u^*\in M$ 是局部严格极小元，如果 $\exists\ \epsilon>0$ 满足 $h(u)\not< h(u^*)$ $\forall\ u\in B(u^*,\epsilon)\cap M$，$i.e.$，则不存在 $u\in B(u^*,\epsilon)\cap M$，使得 $h(u)<h(u^*)$。

定义 14. 设 m 为正整数。若 $\exists\ \epsilon>0$ 且 $\delta>0$ s.t.，则点 $u^*\in M$ 是阶数为 m 的局部严格η-极小点。

$$h(u)\not< h(u^*)+\delta\|\eta(u,u^*)\|^m,\ \forall\ u\in B(u^*,\epsilon)\cap M.$$

若将开球$B(u^*,\epsilon)$替换为黎曼流形 M，则局部严格 η-极小点变为严格 η-极小点。

定义 15. 设 m 为正整数。若 $\exists\ \delta>0$ s.t.，则点 $u^*\in M$ 是阶数为 m 的严格 η-极小点。

$$h(u)\not< h(u^*)+\delta\|\eta(u,u^*)\|^m,\ \forall\ u\in M.$$

在下一个定理中，我们将给出$VVLIP$的一个解与 MOP的阶数为 m的严格 η-极小点之间的重要刻画。

定理 8. 设 h_i、$1\le i\le k$是定义在 M上的阶数为 m的强 η-不变凸函数。则，$u^*\in M$ 是 $VVLIP\iff u^*$ 的一个解，当且仅当它是 MOP的阶数为m的严格 η-极小点。

证明。假设 u^*是 $VVLIP$的一个解，但 u^*不是 MOP的严格 η-极小解（阶数为 m）。那么，对于所有 $\delta>0$，存在某个 $\exists$和某个 $\bar{u}\in M$，使得

$$h(\bar{u})<h(u^*)+\delta\|\eta(\bar{u},u^*)\|^m,$$

$i.e.$,
$$h_i(\bar{u})<h_i(u^*)+\delta\|\eta(\bar{u},u^*)\|^m. \tag{5.1}$$

由于 $h_i,\ \ 1\le i\le k$ 是强 η-不变凸函数，阶数为 m，那么由方程（5.1）可得

$$\langle X_i,\eta(\bar{u},u^*)\rangle<0,\ \forall X_i\in T_i(u^*)=\nabla h_i(u^*),\ 1\le i\le k,$$

$i.e.$,

$$\langle X, \eta(\bar{u}, u^*)\rangle < 0,\ \forall X \in T(u^*), \bar{u} \in M,$$

这与 u^* 是 $VVLIP$ 的解相矛盾。因此， u^* 是 MOP 的严格 η-阶 m 极小解。

反过来，假设 MOP 是 $VVLIP$ 的严格 η-阶 m 极小解，但 u^* 不是 $VVLIP$ 的解。那么，存在 $\bar{u} \in M$，使得

$$\langle X_i, \eta(\bar{u}, u^*)\rangle < 0,\ \forall\ X_i \in T_i(u^*) = \nabla h_i(u^*),\ 1 \le i \le k.$$

根据定义8，可得

$$h_i(\bar{u}) < h_i(u^*) + \delta\|\eta(\bar{u}, u^*)\|^m,\ 1 \le i \le k,$$

$i.e.$,

$$h(\bar{u}) < h(u^*) + \delta\|\eta(\bar{u}, u^*)\|^m,$$

这与 u^* 是严格 η-阶 m 极小解相矛盾。因此， u^* 是 $VVLIP$ 的解。□

6. 结论

本文提出了测地 invex 集上关于 η 的阶为 m 的强测地预不变凸性这一强概念、阶为 m 的强 η-不变凸函数，以及黎曼流形上阶为 m 的强不变 η-单调性。本文所给出的定义均有非平凡实例作为佐证，并讨论了若干有趣的性质。本文还介绍了阶为 m 的强 η-不变凸函数在 MOP 中的一项有趣应用，并推导出 MOP 的阶为 m 的严格 η-极小解的刻画以及 $VVLIP$ 的一个解。我们的结果推广了不同作者此前证明的已知结果。

References

[1] A. Barani, M.R. Pouryayevali, 《黎曼流形上的 invex 集与预 invex 函数》, J. Math. Anal. Appl., 328 (2007) 767-779。[2] A. Barani, M.R. Pouryayevali, 《黎曼流形上的不变单调向量场》, Nonlinear Anal., 70 (2009) 1850-1861[3] T. Rapcsak, 《Kluwer Academic Publishers 中的光滑非线性优化》, Dordrecht (1997)。[4] C. Udriste (1994). 《黎曼流形上的凸函数与优化方法》。Math. Appl., 297. Kluwer Acadmic, 纽约。[5] R. Pini (1994).《沿曲线的凸性与 invex 性》。Optimization. 29:301-309。[6] R. Pini and C. Singh (1999).《广义凸性与广义单调性》 J. Inform. Optim. Sci. 20:215-233。[7] R. Correa, A. Jofre, and L. Thibault (1992).《下半连续凸函数的刻画》。Proc. Ame. Soc. 116:67-72。[8]L. Fan, S. Liu, and S. Gao (2003).《非可微函数的广义单调性与凸性》。J. Math. Anal. Appl. 279:276-289。[9] S. Z. Nemeth, (1999).《单调向量场》。Publ. Mat. 54:437-449。[10] A. Iqbal, I. Ahmad, 《高阶强测地凸函数》 m, Numerical Functional Analysis and Optimization, 40:15,1840-1846。[11] A. Hussain, A. Iqbal, 《具有应用的拟强 E-凸函数》, Nonlinear Functional Analysis and Applications 26 (2021) 1077-1089。[12]A. Iqbal, A. Hussain, 《强 E-invex 集与强 E-预 invex 函数的非线性规划问题》, RAIRO-Operation Research (2022)。

[13] A. Ben-Israel, B. Mond, 1986。《什么是 invex 性? 》澳大利亚数学学会杂志 28, 1-9。[14] M. A. Noor, 《关于广义预不变凸函数与单调性》, 纯粹与应用数学不等式杂志, 第5卷, 第4期, 文章110, 2004年。[15] X.M. Yang, X.Q. Yang, K.L. Teo, 《广义不变凸性与广义不变单调性》, J. Optim. Theory Appl. 117 (2003) 607?625。[16] M.A. Hanson, 1981年。《关于 Kuhn-Tucker 条件的充分性》。数学分析与应用杂志 80, 545-550。[17] G. Bhatia, R.R. Sahay, 《多目标优化中的严格全局极小值点与高阶广义强不变凸性》, 不等式与应用杂志 2013, 2013:31。[18] S. Lang (1999).《微分几何基础》, 数学研究生教材。施普林格, 纽约。[19] S. Karamardian, S. Schaible, 《单调映射的七种类型》, 优化理论与应用杂志, 第66卷, 第37-46页, 1990年。[20] A. Iqbal, S. Ali, I. Ahmad, 《测地半E-凸函数的一些性质》Nonlinear Analysis, Nonlinear Anal. 74 (2011), 6805-6813。[21] A. Iqbal, I. Ahmad, S. Ali, 《黎曼流形上的强测地 α-预不变凸性与不变 α-单调性》, Numerical Functional Analysis and optimization. 31(12): (2010), 1342-1361。[22] W. H. Yang, L. H. Zhang, R. Song, 《黎曼流形上非线性规划问题的最优性条件》, 太平洋优化杂志 (2013)。[23] G.R. Garzon, R.O. Gomez, A.R.Lizana, B. H. Jimenez, 《黎曼流形上的最优性与对偶性》, 台湾数学杂志 (2018)。[24] D. Azagra, J. Ferrera, 《非正曲率黎曼流形上凸函数的下卷积与正则化》, Rev. Mat. Complut., 即将发表。