arXiv:2302.02842v1 [math.AG] 6 Feb 2023

关于离散赋值环上射影光滑概形的格罗滕迪克–塞尔猜想

郭宁和伊万·帕宁

摘要。格罗滕迪克–塞尔猜想预言：正则局部环 R 上约化群概形 G 下的每个在一般点处平凡的托orsor 都是平凡的。该猜想的混合特征情形在很大程度上仍未解决。我们考虑如下设置。设 A 是一个混合特征离散赋值环，G 是定义在 A 上的约化群概形， X 是一个不可约光滑射影 A-概形， $\mathcal{G}$ 是其上的一个主 G-丛 X。假设 $\mathcal{G}$ 在一般点处平凡。我们证明，在此情形下， $\mathcal{G}$ 是 Zariski 局部平凡的。该结果证实了这一猜想。

1. 主要结果

关于这一主题的一篇综述论文 [P] 发表在 2018 年国际数学家大会的会议录中。关于该主题历史的其他重要参考文献包括 [FP] 和 [C]。设 R 为一个含幺交换环。回顾一下，如果一个 R-群概形 G 是仿射的，并且作为 R-概形是光滑的，此外对于每个代数闭域 Ω 以及每个环同态 $R \to \Omega$，其标量扩张 G_Ω 是 Ω 上的连通约化代数群，那么称该 R-群概形是约化 的。约化 [-群概形的这一定义与 SGA3，Exp. XIX，定义 2.7] 一致。

假设 X 是一个正则概形，G 是一个约化 X群概形。回忆一下，带有 G 作用的X概形 $\mathcal{G}$ 称为 G-主丛，定义在 X上，如果 $\mathcal{G}$ 到 X 是忠实平坦且拟紧的，并且该作用是单传递的，也就是说，自然态射 $\mathrm{G} \times_X \mathcal{G} \to \mathcal{G} \times_X \mathcal{G}$是一个同构，参见 [Gr4，第 6]章节。众所周知，这样的丛在 étale 拓扑下局部平凡，但一般而言在 Zariski 拓扑下并非如此。Grothendieck 和 Serre 猜想，若 $\mathcal{G}$ 在一般点处平凡，则它在 Zariski 拓扑下局部平凡。

更确切地说，J.-P. Serre 和 A. Grothendieck 提出的一个著名猜想（参见 [Se，注记，第 31], [Gr1，注记 3，第 26 页-27], 以及 [Gr2，注记 1.11.a]）断言：给定一个正则局部环 R 及其分式域 K，并给定一个定义在 R上的约化群概形 G，则映射

$$H^1_{\text{ét}}(R, \mathbf{G}) \to H^1_{\text{ét}}(K, \mathbf{G}),$$

由 R 到 K的包含映射诱导，核是平凡的。关于这一主题的综述论文 [P] 发表于2018 年国际数学家大会论文集。

如果 R 包含一个域，那么该猜想已在 [Pan3]中得到证明。如果 R 包含一个无限域，那么该猜想更早已在 [FP]中得到证明。

日期：2023年2月7日。2010 年数学主题分类。 主要分类 14F22；次要分类 14F20、14G22、16K50。关键词和短语。 主丛、托orsor、群概形、格罗滕迪克–塞尔。

该猜想的混合特征情形仍有大量未解决的问题。不过， [NG], [C], [Tsy]中证明了若干相当一般的结果。请注意，本预印本中用到了 [NG] 和 [Tsy] 的主要定理。

本预印本的主要目的是证明定理 1.1。
A 是一个离散赋值环， $m_A \subseteq A$ 是它的极大理想；K 是 A的分式域； $V = Spec(A)$, $v \in V$ 是它的闭点；$k(v)$是剩余域 A/m_A； $p > 0$ 是域 $k(v)$的特征；本预印本假设域 K 的特征为零；对于一个 A-概形 Y，我们用 Y_v 表示结构态射 $Y \to V$的闭纤维。对于一个 A-概形态射 $q\colon\ Y' \to Y$，记 $q_v\colon\ Y'_v \to Y_v$ 为态射 $q \times_V v$；本章节中的所有概形都是 V-概形，我们用 $Y \times Y'$ 表示 $Y \times_V Y'$。

设 X 是一个不可约的 V-概形，它是 V-光滑且 V-射影的，相对维数为 $d \geq 1$ ，底域为 V。设 $\mathcal{K}$ 是 X 的有理函数域， $\eta = Spec\ \mathcal{K}$ 是 X的泛点。设 G 是 A上的约化群概形。**设 $\mathcal{O}$ 是 X中有限多个闭点的半局部环**。置 $U\colon = Spec\ \mathcal{O}$。

定理 1.1。 设 A、**G**、 $X, \eta \in X$ 如上。则拉回映射的核

$$H^1_{\acute{e}t}(X, \mathbf{G}) \to H^1_{\acute{e}t}(\eta, \mathbf{G}),$$

由 X 上的主**G**-丛组成，这些丛在 *Zariski* 拓扑下半局部平凡。

对于一个 V-概形 W，我们用 $\mathbb{A}^1_W$ 表示 W 上的仿射直线，用 $\mathbb{P}^1_W$ 表示 W 上的射影直线。设 T 是一个 W-概形。我们将 T 上的主 G-丛理解为主 $\mathbf{G}\times_W T$-丛。关于概形上的单连通单群概形和半单单连通群概形的定义，参见 [SGA3，第 XXIV 卷，第 5 节。3]

在第 5 节中，我们由以下两个结果推导出定理 1.1。

定理 1.2。 *(*[GPan]) 设 A、**G**、 $X, \eta \in X, U$ 如定理 ***1.1*** 中所述。设 $\mathcal{G}$ 是 X 上的一个主**G**-丛，在 X 的泛点 η 处平凡。则存在一个主**G**-丛 $\mathcal{G}_t$，定义在 $\mathbb{P}^1_U$ 上，以及一个闭子集 $\mathcal{Z}$，包含于 $\mathbb{A}^1_U$ 中且在 U 上有限，使得

(i) **G**丛在 $\mathbb{P}^1_U$ 中的开子概形 $\mathbb{P}^1_U - \mathcal{Z}$ 上是平凡的；***(ii)*** $\mathcal{G}_t$ 到 $\{0\} \times U$ 的限制与 $\mathcal{G}$ 到 U 的限制相一致；***(iii)*** $\mathcal{Z} \cap \{1\} \times U = \emptyset$;

定理 1.3。 （弱同伦不变性）设 U 如定理 ***1.1*** 中所述。这次令**G** 为一个约化的 U-群概形。设 $\mathcal{Z} \subset \mathbb{A}^1_U$ 为一个在 U 上有限的闭子概形，且满足 $\mathcal{Z} \cap \{1\} \times U = \emptyset$。设 $\mathcal{G}$ 为 $\mathbb{P}^1_U$上的一个主**G**-丛，其在 $\mathbb{P}^1_U - \mathcal{Z}$ 上的限制是平凡的。那么，对于投影 $pr_U\colon\ \mathbb{P}^1_U \to U$ 的零截面 $i_0\colon\ U \to \mathbb{P}^1_U$， $i_0^*(\mathcal{G})$ 上的**G**-丛 U 是平凡的。

显然，定理 1.1 是定理 1.2 和定理 1.3 的推论。定理 1.2 是预印本 [GPan] 的主要结果之一。定理 1.3 可由本预印本中的两个近期结果轻易推出。**即，依据** [PSt, Thm. Main] **和定理 1.4**。 后两个结果陈述如下。定理 1.4 在本预印本中得到证明。

定理 1.4. （Gille 定理的有限域版本）。假设 k（v）是一个**有限**域。设 U 与定理 ***1.1*** 中相同。这次令 $\mathbf{G}$ 为一个半单的 U-群概形。设 $\mathcal{Z} \subset \mathbb{A}^1_U$ 是一个在 U 上有限的闭子概形，且满足 $\mathcal{Z} \cap \{1\} \times U = \emptyset$。设 $\mathcal{G}$是 $\mathbb{P}^1_U$ 上的一个主 $\mathbf{G}$-丛，其在 $\mathbb{P}^1_U - \mathcal{Z}$ 上的限制是平凡的。那么存在一个在 U 上有限且 ***étale*** 的闭子概形 $Y \subset \mathbb{P}^1_U$，使得 $\mathcal{Z} \cap Y = \emptyset$，并且 $\mathcal{G}$ 在 $\mathbb{P}^1_U - Y$ 上是平凡的。

定理 1.5. [PSt, Main Thm.]（Gille 定理的无限域版本）。假设k（v）是一个**无限**域。设 U 与定理 ***1.1*** 中相同。这次令 $\mathbf{G}$ 为一个半单的 U-群概形。设 $\mathcal{Z} \subset \mathbb{A}^1_U$ 是一个在 U 上有限的闭子概形，且满足$\mathcal{Z} \cap \{1\} \times U = \emptyset$。设 $\mathcal{G}$是 $\mathbb{P}^1_U$ 上的一个主 $\mathbf{G}$-丛，其在 $\mathbb{P}^1_U - \mathcal{Z}$ 上的限制是平凡的。那么存在一个在 U 上有限且 ***étale*** 的闭子概形 $Y \subset \mathbb{P}^1_U$，使得$\mathcal{Z} \cap Y = \emptyset$，并且 $\mathcal{G}$ 在 $\mathbb{P}^1_U - Y$ 上是平凡的。

注 1.6. 显然，定理 1.4 和定理 1.5 非常相似。然而，定理 1.5 的证明需要一**种额外的新方法**。

为陈述命题 1.7，先回顾以下概念。设 $\mathbf{H}$ 是半局部概形 W 上的半单群概形。回忆一下，若 W-群概形 $\mathbf{H}$ 含有一个博雷尔群子概形，则称 $\mathbf{H}$ 为准分裂。

命题 1.7. 假设剩余域 $k(v)$ 是有限的。设 U 如定理 ***1.3*** 所述，且 $\mathcal{Z} \subset \mathbb{A}^1_U$ 是 U 上有限的任意闭子集。这次假设$\mathbf{G}$ 是一个半单U-群概形。那么存在一个闭子概形 $Y \subset \mathbb{A}^1_U$，它在U 上 ***étale*** 且有限，并满足

(i) Y-群概形 $\mathbf{G}_Y := \mathbf{G} \times_U Y$ 是准分裂；***(ii)*** $Y \cap \mathcal{Z} = \emptyset$, $Y \cap (\{0\} \times U) = \emptyset$, $Y \cap (\{1\} \times U) = \emptyset$; ***(iii)*** 对任意闭点 $u \in U$，有 $Pic(\mathbb{P}^1_u - Y_u) = 0$，其中 $Y_u := \mathbb{P}^1_u \cap Y$；（注意，$Y$ 和 $\mathcal{Z}$ 在 $\mathbb{P}^1_U$ 中是闭的，因为它们在 U 上有限）。

这篇预印本的结构如下。第2节证明一个有用的引理，即引理 2.1。第3节证明命题 1.7。第 4 节证明定理 1.4。第5节根据 [PSt, Thm. Main] 和定理 1.4 推导出定理 1.3。定理 1.1 在第 5 节末尾证明。

致谢。作者感谢 POMI 国际数学中心提供的优良环境。本研究得到俄罗斯联邦科学与高等教育部的资助，协议编号为 075-15-2022-289。

2. 一个有用的引理

我们将需要以下引理来证明命题 1.7。引理本身将在本章节末尾证明。设 k(*v*) 是一个**有限**域。在本章节中，记 k 为 k(*v*) 的

设 $\mathcal{O}$ 为 V-光滑不可约 V-射影 V-概形 X 上有限个**闭点**的半局部环。令 $U=$ 为 Spec $\mathcal{O}$。令 $\mathfrak{u} \subset U$ 为 U 中所有闭点的集合。对于点 $u \in \mathfrak{u}$，令 $k(u)$ 为其剩余域。它是域 k 的有限扩张，因此是有限的。注意 $\mathcal{O}=\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$。以下引理是 [Pan3，引理 3.1] 在我们这一情形下的版本。它将在本章节末尾证明。

引理 2.1。设 $\mathcal{Z} \subset \mathbb{A}^1_U$ 是一个在 U 上有限的闭子概形。设 $Y' \to U$ 是一个有限 *étale* 态射，使得对于 U 中的任意闭点 u_i，Y' 在 u_i 上的纤维 Y'_{u_i} 包含一个 k（u_i）-有理点。那么，存在有限域 k 的有限域扩张 k_1 和 k_2，以及有限 *étale* 扩张 A_1/A 和 A_2/A，它们分别带有局部 A-代数 A_1，A_2，剩余域分别为 k_1 和 k_2，并且满足

(i) $[k_1 : k]$ 和 $[k_2 : k]$ 的次数互素；*(ii)* 对于 $r=1$ 和 $r=2$，$k(u_i) \otimes_k k_r$ 是一个域；*(iii)* $[k_1 : k]$ 和 $[k_2 : k]$ 的次数严格大于 $[k(z) : k(u)]$, 的任一次数，其中 z 遍历 $\mathcal{Z}$ 的所有闭点；*(iv)* 存在一个 U-概形的闭嵌入 $Y''=(Y' \otimes_A A_1) \coprod (Y' \otimes_A A_2) \xrightarrow{i} \mathbb{A}^1_U$；*(v)* 对于 $Y=i(Y'')$，有 $Y \cap \mathcal{Z}=\emptyset$, $Y \cap (\{0\} \times U)=\emptyset$, $Y \cap (\{1\} \times U)=\emptyset$；*(vi)* 对于 U 中的任意闭点 u_i，有 $Pic(\mathbb{P}^1_{u_i}-Y_{u_i})=0$。

记号 2.2. 设 k 为特征为 p的有限域，k'/k 为有限域扩张。令 $c=\sharp(k)$ 为 k的基数。对于正整数 r，令 $k'(r)$ 为域 k'的次数为 r 的唯一域扩张。

记号 2.3. 对于任意 *étale* k-概形 W，令 $d(W)=max\{deq_k k(v) | v \in W\}$。

引理 2.4. 设 k 为引理 *2.1* 中的有限域。设 U 为引理 *2.1* 中的半局部概形。设 $u \in U$ 为一个闭点，并令 $k(u)$ 为其剩余域（它是有限域 k的有限扩张）。设 $\mathcal{Z}_u \subset \mathbb{A}^1_u$ 为一个在 u上有限的闭子概形。设 $Y'_u \to u$ 为一个有限 *étale* 态射，使得 Y'_u 包含一个 $k(u)$-有理点。那么，对于任意两个不同的素数 $q_1, q_2 \gg 0$，有限域 k 的有限扩张 $k(q_1)$ 和 $k(q_2)$ 满足以下条件

(i) 对于 $j=1$，*2* 有 $q_j > d(Y'_u)$；*(ii)* 对任意 $j=1$、*2* 以及任意点 $v \in Y'_u$，k-代数 $k(v) \otimes_k k(q_j)$ 是一个域；*(iii)* 两个素理想 q_1, q_2 都严格大于 $max\{[k(z) : k] | z \in \mathcal{Z}_u\}$；*(iv)* 存在一个 u-概形的闭嵌入 $Y''_u=(Y'_u \otimes_k k_1) \coprod (Y'_u \otimes_k k_2) \xrightarrow{i_u} \mathbb{A}^1_u$，*(v)* 对于 $Y_u=i_u(Y''_u)$，有 $Y_u \cap \mathcal{Z}_u=\emptyset$, $Y_u \cap (\{0\} \times u)=\emptyset$, $Y_u \cap (\{1\} \times u)=\emptyset$；*(vi)* $Pic(\mathbb{P}^1_u-Y_u)=0$。

引理 *2.1* 的证明。我们先证明局部 U 的情形，一般情形留给读者。因此，可以假设U 中只有一个闭点 u 。令 $k(u)$为它的剩余域。令 $Y' \to U$ 为引理 2.1 中的有限 étale 态射。令 $Y'_u = Y' \times_U u$ 为 Y' 在 u上的纤维。根据引理 2.1 的假设，Y'_u 这个 $k(u)$-概形包含一个 $k(u)$-有理点。令 k_1/k 和 k_2/k 为引理 2.4 中的域扩张。显然，存在有限 étale 扩张 A_1/A 和A_2/A，以及局部 A-代数 A_1 和 A_2，其剩余域分别为 k_1 和 k_2。令 $Y''=(Y' \otimes_A A_1) \sqcup (Y' \otimes_A A_2)$和 $Y''_u = Y'' \times_U u$。于是有 $Y''_u=(Y'_u \otimes_k k_1) \sqcup (Y'_u \otimes_k k_2)$。

令 i_u : $Y''_u \hookrightarrow \mathbb{A}^1_u$ 为引理 2.4 中的闭嵌入。那么， $k(u)$-代数的拉回映射 i_u^* : $k(u)[t] \to \Gamma(Y''_u, \mathcal{O}_{Y''_u})$是满射。考虑元素$b = i_u^*(t) \in \Gamma(Y''_u, \mathcal{O}_{Y''_u})$。令 $B \in \Gamma(Y'', \mathcal{O}_{Y''})$为元素 b的一个提升。

考虑唯一的 $\mathcal{O}$-代数同态 $\mathcal{O}[t] \xrightarrow{I^*} \Gamma(Y'', \mathcal{O}_{Y''})$，它将 t 映到 B。由于 $\Gamma(Y'', \mathcal{O}_{Y''})$ 是有限生成的 $\mathcal{O}$-模，且 $I^* \otimes_{\mathcal{O}} k(u) = i^*$，由中山引理可知映射 I^* 是满射。因此，所诱导的概形态射 $I : Y'' \to \mathbb{A}^1_U$ 是一个闭嵌入。断言（iv）得证。令 $Y = I(Y'')$。

显然，两个闭嵌入 $Y''_u \to Y'' \xrightarrow{I} \mathbb{A}^1_U$ 和 $Y''_u \xrightarrow{i_u} \mathbb{A}^1_u \to \mathbb{A}^1_U$ 重合。引理 2.4 现在完成了引理 2.1 的证明。□

3. 命题 1.7 的证明

本章节的主要目的是证明命题 1.7。回顾以下结果[Pan3，引理 3.1]，这是 [Pan1，引理 3.3] 的简化版本。

引理 3.1。*(*[Pan3，引理 3。1]*)* 设 $S = Spec(R)$ 是一个正则半局部不可约概形，使得其任意闭点处的剩余域都是有限的。设 T 是 S的一个闭子概形。设 W 是射影空间 $\mathbb{P}^n_S$ 的一个闭子概形。假设在 T 上存在一个典范投影 $W \to S$的截面 $\delta : T \to W$ 。进一步假设 W 在 S上光滑且等维，相对维数为 r。那么存在˜一个 W 的闭子概形 S，它在 S 上有限 *étale*，且包含 $\delta(T)$。

引理 *3.1* 的证明。形式上，这个引理与 [Pan1, 引理 3.3] 略有不同。不过可以如下由 [Pan1, 引理 3.3] 推得。存在一个 Veronese 嵌入 $\mathbb{P}^n_S \hookrightarrow \mathbb{P}^d_S$，以及 $\mathbb{P}^d_S$ 上的线性齐次坐标 $X_0, X_1, ..., X_d$，使得以下结论成立：

(1) 若 $W_\infty = W \cap \{X_0 = 0\}$ 是 W 与超平面 $X_0 = 0$的交，那么对于每个闭点 $s \in S$， W_∞ 的闭纤维满足 dim(W_∞(s)) $< r =$ dim(W(s))；(2) δ将 T映入由 $X_1 = \cdots = X_d = 0$定义的 $\mathbb{P}^d_T$的闭子概形中。

˜现在将 Pan1 引理 3.3] 应用于 $X = W$、 $X_\infty = W_\infty$ 和 $X = W - W_\infty$，我们得到 $W - W_\infty$ 的一个有限 étale 覆盖 S，它在 S上有限 étale，且包含 δ(*T*)。由于 S在 S 上有限，因此它在 W 中也是闭的。□

证明。（命题 1.7 的证明）。设 U和 G 如命题 1.7 中所述，并设 u_1、.....、 u_n为 U 的所有闭点。设 k(u_i)为 u_i的剩余域。由于 k(v)有限，域 k(u_i)也都有限。考虑 U的约化闭子概形 u，其点为 u_1、.....、 u_n。于是

$$\mathbf{u} \cong \coprod_i \operatorname{Spec} k(u_i). \tag{1}$$

令 $G_u = G \times_U u$。记 G_{u_i} 为 G 在 u_i 上的纤维。对于 u 中的每个 u_i，选取 G_{u_i} 中的一个博雷尔子群 B_{u_i}。之所以可行，是因为域 k(u_i) 是有限的。令$\mathcal{B}$ 为 G 的博雷尔子群概形的 U-概形。它是一个光滑射影 U-概形（见 [SGA3，第 XXVI 篇，推论 3.5]）。G_{u_i} 中的子群 B_{u_i} 是 $\mathcal{B}$在点 u_i 处的纤维中的一个 k(u_i)-有理点 b_i。现在对概形 U （关于 S）、概形 u（关于 $_u$ = ）、概形 $\times_U$ （关于 u_i ）以及截面 u_i 应用引理 3.1：

该截面将点u_i 映射到点 $b_i \in \mathcal{B}$。由于概形 $\mathcal{B}$ 在 U上是 U-光滑且等维的，我们满足引理 3.1 的假设。因此，存在 $\mathcal{B}$的一个闭子概形 Y'，使得 Y'在 U 上是有限 étale 的，并且所有 b_i都属于 Y。Y'这个 U-概形满足引理 2.1 的假设。

取引理 2.1第 (v) 项中的闭子概形 Y of $\mathbb{A}^1_U$。对于这个特定的Y，命题的条件 (ii) 和 (iii) 显然成立。条件 (i) 也成立，因为它对 U-概形 Y'已经成立。这就证明了命题。□

4. 定理 1.4 的证明

本章节旨在证明定理 1.4。

为简单起见，只考虑局部 U的情形。设 $u \in U$ 为其唯一的闭点。设 $\Pi : \mathbf{G}^{sc} \to \mathbf{G}$ 为半单 G 的单连通覆盖，$\Pi_u : \mathbf{G}^{sc}_u \to \mathbf{G}_u$为闭纤维上的群态射。众所周知，$\Pi_u$ 是半单 $\mathbf{G}_u$的单连通覆盖。令 $\mu = Ker(\Pi)$。那么 μ 属于 $\mathbf{G}^{sc}$的中心。

注意到，将 $\mathcal{G}$ 提升为 $\mathbb{P}^1_U$ 上的 $\mathbf{G}^{sc}$-丛所遇到的障碍消失。因此，存在一个 $\mathbb{P}^1_U$ 上的 $\mathbf{G}^{sc}$-丛 $\mathcal{G}^{sc}$，使得 $\mathcal{G} = \Pi_*(\mathcal{G}^{sc})$。这个对 $\mathcal{G}^{sc}$ 的选择可以通过任意 $\mathbb{P}^1_U$ 上的 μ-丛进行“层化”。利用这一观察，我们可以且将假设，此外 $\mathcal{G}^{sc}$ 满足 $\mathcal{G}^{sc}|_{1\times U}$ 是平凡的。

在这种情况下，$\mathcal{G}^{sc}_u$ 在 $\mathbb{P}^1_u$ 的点 1 处是平凡的。因此，由 Gille 定理 [Gil1]，限制 $\mathcal{G}^{sc}_u$ 到 $\mathbb{P}^1_u$ 是一个 Nisnevich 局部平凡的 $\mathbf{G}^{sc}_u$-丛。

令 Y 为 $\mathbb{A}^1_U$ 中如命题 1.7 所述的闭子概形。我们断言 $\mathbf{G}^{sc}$-丛 $\mathcal{G}^{sc}|_Y$ 是平凡的。为验证这一点，回忆 $Y \subset \mathbb{P}^1_U - \mathcal{Z}$，因此 $\mathcal{G}^{sc}|_Y$，具有如下形式：$in_*(\mathcal{K})$，其中 $\mathcal{K}$ 是 Y 上的一个 μ_Y-丛。由于 μ_Y 包含在 $\mathbf{G}^{sc}_Y$ 的每个极大 Y-环面 T 中，类 $[\mathcal{G}^{sc}|_Y] \in H^1_{et}(Y, \mathbf{G}^{sc}) = H^1_{et}(Y, \mathbf{G}^{sc}_Y)$ 来自 $H^1_{et}(Y, T)$。由于 $\mathbf{G}^{sc}_Y$ 是准分裂的，我们可以选取 $\mathbf{G}^{sc}_Y$ 的一个准分裂极大 Y-环面 T。在这种情况下，$H^1_{et}(Y, T) = *$，因此 $\mathcal{G}^{sc}|_Y = in_*(\mathcal{K})$ 是一个平凡的 $\mathbf{G}^{sc}$-丛。由此，$\mathbf{G}^{sc}$-丛 $\mathcal{G}^{sc}|_{Y^h}$ 也平凡。

令 $(\mathcal{G}^{sc})' = \mathcal{G}^{sc}|_{\mathbb{P}^1_U - Y}$。由于 $\mathbf{G}^{sc}$-丛 $\mathcal{G}^{sc}|_{Y^h}$是平凡的，我们可以将 $\mathcal{G}^{sc}$表示为 $\mathcal{E}((\mathcal{G}^{sc})', \varphi)$ 的形式，其中 $\varphi : \dot{Y}^h \times_U \mathbf{G}^{sc} \to \mathcal{G}^{sc}|_{\dot{Y}^h}$是一个 $\mathbf{G}^{sc}_Y$-丛同构。在这种情况下，$\mathcal{G}^{sc}_u$表示为 $\mathcal{E}((\mathcal{G}^{sc})'_u, \varphi_u)$ 的形式，其中 $\varphi_u : \dot{Y}^h_u \times_u \mathbf{G}^{sc}_u \to \mathcal{G}^{sc}|_{\dot{Y}^h_u}$是一个 $\mathbf{G}^{sc}_u$-丛同构。

回顾一下，$\mathcal{G}^{sc}_u$是 $\mathbb{P}^1_u$上的一个 Nisnevich 局部平凡 $\mathbf{G}^{sc}_u$-丛。回顾一下，$Pic(\mathbb{P}^1_u - Y_u) = 0$。因此，根据 Gille 定理，[Gil1] $(\mathcal{G}^{sc}_u)|_{\mathbb{P}^1_u - Y_u}$ 是平凡的。这表明存在一个元素 $\alpha_u \in \mathbf{G}^{sc}_u(\dot{Y}^h_u)$，使得 $\mathcal{E}((\mathcal{G}^{sc})'_u, \varphi_u \circ \alpha_u)$ 这个定义在 $\mathbb{P}^1_u$ **上的 G-丛是平凡的**。

u-群概形 $\mathbf{G}^{sc}_u$是单连通的。因此，群 $\mathbf{G}^{sc}_u(\dot{Y}^h_u)$ 等于 $\mathbf{E}(\mathbf{G}^{sc}_u(\dot{Y}^h_u))$。概形 $\dot{Y}^h$ 是仿射的。因此，群同态

$$\mathbf{E}(\mathbf{G}^{sc}(\dot{Y}^h)) \to \mathbf{G}^{sc}_u(\dot{Y}^h_u)$$

是满射。因此，群同态 $\mathbf{G}^{sc}(\dot{Y}^h) \to \mathbf{G}^{sc}_u(\dot{Y}^h_u)$ 是满射。于是，存在元素 $\alpha \in \mathbf{G}^{sc}(\dot{Y}^h)$，使得 $\alpha|_{\dot{Y}^h_u} = \alpha_u$属于 $\mathbf{G}^{sc}_u(\dot{Y}^h_u)$。令

$$\mathcal{G}^{sc}_{mod} = \mathcal{E}((\mathcal{G}^{sc})', \varphi \circ \alpha) \quad \text{and} \quad \mathcal{G}^{mod} = \Pi_*(\mathcal{G}^{sc}_{mod}).$$

我们已经知道， $\mathbb{P}^1_u$ 上的 G$^{sc}_u$-丛 $\mathcal{E}((\mathcal{G}^{sc})'_u, \varphi_u \circ \alpha_u)$ 在 $\mathbb{P}^1_u$ 上是平凡的。因此，G$_u$-丛 $\mathcal{G}^{mod}_u$ 也平凡。根据 [Tsy] 的主要结果，G- 丛 $\mathcal{G}_{mod}$ 是通过沿投影 $pr_U : \mathbb{P}^1_U \to U$ 拉回而从 U 延拓得到的。另一方面， $\mathcal{G}^{mod}|_{1\times U}$ 是平凡的，因为 $1 \times U \subset \mathbb{P}^1_U - Y$、$\mathcal{G}^{mod}|_{\mathbb{P}^1_U - Y} = \mathcal{G}|_{\mathbb{P}^1_U - Y}$，且 $\mathcal{G}|_{\mathbb{P}^1_U - Y}$ 是平凡的。因此，G-丛 $\mathcal{G}^{mod}$ 在 $\mathbb{P}^1_U$ 上是平凡的。由于 $\mathcal{G}|_{\mathbb{P}^1_U - Y} = \mathcal{G}^{mod}_{\mathbb{P}^1_U - Y}$，可知 G-丛 $\mathcal{G}|_{\mathbb{P}^1_U - Y}$ 是平凡的。**定理 1.4 得证**。

5. 有限域 $k(v)$ 情形下定理 1.3 的证明

本节证明有限域 k（v） 情形下的定理 1.3。我们还将在本节末尾证明定理 1.1。

先证明有限域 $k(v)$ 情形下的定理 1.3。若 G 是半单的，且域 $k(v)$ 有限，则定理 1.3 是第 4 节中所证定理 1.4 的直接推论。因此，我们可以并且将假设 G 不是半单的。在此情形下，根基 Rad(G) 是一个正秩 U-环面。

在本节以下内容中，记 T= Rad(G)。于是 T 包含于 G 的中心中，而 U-群概形 G^{ss} := G/T 是半单的。考虑 U-群态射q : G $\to$ G^{ss}。令 $\mathcal{G}^{ss} = q_*(\mathcal{G})$（即 $\mathcal{G}^{ss}$ 是一个 $\mathcal{G}^{ss}$-丛，由 $\mathcal{G}$ 通过沿 U-群态射 q : G $\to$ G^{ss} 进行群变换得到）。令 Π : G$^{sc} \to$ G^{ss} 为 G^{ss} 的单连通覆盖，令 j : G$^{ss} \to$ G$^{der} \subset$ G 为典范的 U-群概形态射。于是 $q \circ j = \Pi$。令 in : T $\hookrightarrow$ G 为包含映射。

令 S := $Corad$(G) = G/G^{der} ，并令 can: G $\to$ S 为典范态射。已知复合态射 $can \circ in$: T = Rad(G) $\to$ $Corad$(G) = S 是一个同源。利用这一事实，可以找到 $d : \mathbb{P}^1_U \to \mathbb{P}^1_U$， $t \mapsto t^d$, $d \geq 1$ 以及一个在 Zariski 拓扑下半局部平凡的 T-丛 $\mathcal{T}_0$，使得 $can_*([\mathcal{T}_0] \cdot d^*([\mathcal{G}])) = 0$属于 $H^1_{et}(\mathbb{P}^1_U$, S)。

显然， $d^*(\mathcal{G})$ 在 $\mathbb{P}^1_U - d^{-1}(\mathcal{Z})$ 上是平凡的。此外，存在一个包含 $d^{-1}(\mathcal{Z})$ 的 U 中的有限 $\mathbb{A}^1_U$，使得 $\mathcal{T}_0|_{\mathbb{P}^1_U - \mathcal{Z}'}$ 是平凡的，并且 $\mathcal{Z}' \cap \{1\} \times U = \emptyset$。将 $\mathcal{G}$ 替换为$[\mathcal{T}_0] \cdot d^*([\mathcal{G}])$，并利用等式 $i_0^*([\mathcal{T}_0]) = 0$ 和 $d \circ i_0 = i_0$，可知在有限域 $k(v)$ 的情形下，以下结果给出定理 1.3。

命题 5.1. 在定理 *1.3* 的假设下，进一步假设域$k(v)$ 是有限的。设 $\mathcal{G}$ 是 $\mathbb{P}^1_U$ 上的一个 G-丛，使得 $can_*(\mathcal{G})$ 是平凡的S-丛，且$\mathcal{G}|_{\mathbb{P}^1_U - \mathcal{Z}'}$ 是平凡的，则 $i_0^*(\mathcal{G})$ 是平凡的。

命题 *5.1* 的证明. 由于 $can_*(\mathcal{G})$ 是平凡的 S-丛，存在一个元素 $\gamma \in H^1_{et}(\mathbb{P}^1_U$, G$^{der})$，使得 $in_*(\gamma) = [\mathcal{G}]$属于 $H^1_{et}(\mathbb{P}^1_U$, G)。 U-群概形 G^{der}是半单的。令 Y 为命题 1.7 中所述的 $\mathbb{A}^1_U$ 中的闭子概形。

此处指出， $k(v)$ **的有限性保证** $k(v)$-群G$_v$ 是准分裂的。 **如果G$_v$ 不是准分裂的，那么命题 1.7 很可能不成立**。

令 G^{der}(tw) 为通过元素 $\gamma_1 := pr_U^*(i_1^*(\gamma))$ 扭曲的群 G^{der} 。令 G(tw) 为通过元素 $in_*(\gamma_1)$ 扭曲的群 G。存在集合之间的双射

$$H^1_{et}(\mathbb{P}^1_U, \mathbf{G}^{der}) \xrightarrow{Twist^{der}_{\mathbb{P}^1\times U}} H^1_{et}(\mathbb{P}^1_U, \mathbf{G}^{der}(tw)),$$

$$H^1_{et}(U, \mathbf{G}^{der}) \xrightarrow{Twist^{der}_{U}} H^1_{et}(U, \mathbf{G}^{der}(tw)).$$

设 $\gamma_{tw} = Twist_{\mathbb{P}^1\times U}(\gamma)$。由于 $Twist_U^{der}\circ i_1^* = i_1^*\circ Twist_{\mathbb{P}^1\times U}^{der}$和 $Twist_U^{der}(i_1^*(\gamma)) = *$，我们得出

$$i_1^*(\gamma_{tw}) = * \in H^1_{et}(U, \mathbf{G}^{der}(tw)).$$

设 $\mathcal{G}^{der}(tw)$ 是一个定义在 $\mathbb{P}^1_U$ 上、具有 $[\mathcal{G}^{der}(tw)] = \gamma_{tw}$ 的 $\mathrm{G}^{der}(tw)$-丛。等式 $* = i_1^*(\gamma_{tw})$ 表明 $\mathrm{G}^{der}(tw)$-丛 $i_1^*(\mathcal{G}^{der}(tw))$ 是平凡的。现在根据 Gille 定理 [Gil1]，$\mathrm{G}^{der}(tw))_u$-丛 $\mathcal{G}^{der}(tw)_u$ 是 Nisnevich 局部平凡的。因此，存在一个沿 Y 对 $\mathrm{G}^{der}(tw)$-丛 $\mathcal{G}^{der}(tw)$ 进行的 $\mathrm{EG}^{der}(tw)$-修改 $\mathcal{G}^{der}(tw)_{mod}$，使得 $\mathcal{G}^{der}(tw)_{mod}$ 是平凡的。

在这种情况下，$\Pi_*(\mathcal{G}^{der}(tw)_{mod})$ 是平凡的，并且它是沿 Y 对 $\mathrm{G}^{ss}(tw)$-丛 $\mathcal{G}^{ss}(tw)$ 进行的 $\mathrm{EG}^{ss}(tw)$-修改 $\mathcal{G}^{ss}(tw)_{mod}$。

若令 $\mathcal{G}(tw)_{mod} = in_*(\mathcal{G}^{der}(tw)_{mod})$，则 $\mathcal{G}(tw)_{mod}$ 是沿Y对 $\mathrm{G}(tw)$-丛 $\mathcal{G}(tw)$ 进行的 $\mathrm{EG}(tw)$-修改。此外，

(a) $q_*(\mathcal{G}(tw)_{mod}) = \mathcal{G}^{ss}(tw)_{mod}$ 是平凡的；

(b) $\mathcal{G}(tw)_{mod}|_{\mathbb{P}^1_U - Y} = \mathcal{G}(tw)|_{\mathbb{P}^1_U - Y}$.

由性质 (a)，存在一个 T-丛 $\mathcal{T}$，其定义在 $\mathbb{P}^1_U$ 上，使得 $\mathcal{G}(tw)_{mod} = in_*(\mathcal{T})$。由于 T 是一个 U-环面，T-丛 $\mathcal{T}|_{\mathbb{A}^1_U}$ 是从 U 扩张而来的。因此，$\mathrm{G}(tw)$-丛 $\mathcal{G}(tw)_{mod}|_{\mathbb{A}^1_U}$ 是从 U 扩张而来的。回顾一下，$\{1\}\times U$ 属于 $\mathbb{P}^1_U - Y$。现在，性质 (b) 表明 $\mathcal{G}(tw)_{mod}|_{\mathbb{A}^1_U}$ 是一个平凡的 $\mathrm{G}(tw)$-丛。特别地，$\mathcal{G}(tw)_{mod}|_{\mathbb{A}^1_U - Y}$ 是平凡的。由于 $\mathcal{G}(tw)_{mod}$ 是沿着 Y 对 $\mathcal{G}(tw)$ 的一次修改，可知

$$\mathcal{G}(tw)_{mod}|_{\mathbb{A}^1_U - Y} = \mathcal{G}(tw)|_{\mathbb{A}^1_U - Y}.$$

因此，$\mathcal{G}(tw)|_{\mathbb{A}^1_U - Y}$ 是一个平凡的 $\mathrm{G}(tw)$-丛。由于 $\{0\}\times U$ 属于 $\mathbb{P}^1_U - Y$，可知 $i_0^*(\mathcal{G}(tw))$ 是一个平凡的 $\mathcal{G}(tw)$-丛。**现在应用集合之间的同构** $Twist_U^{-1}: H^1_{et}(U, \mathrm{G}(tw)) \to H^1_{et}(U, \mathrm{G})$**，我们得到一个等式**

$$i_0^*(in_*(\gamma)) = i_1^*(in_*(\gamma)) \in H^1_{et}(U, \mathbf{G}).$$

由于 $in_*(\gamma) = [\mathcal{G}] \in H^1_{et}(U, \mathbf{G})$ **和** $\{1\}\times U$ **属于** $\mathbb{P}^1_U - \mathcal{Z}'$**，我们得到**

$$i_1^*(in_*(\gamma)) = [\mathcal{G}|_{\{1\}\times U}] = * \in H^1_{et}(U, \mathbf{G}).$$

因此， $i_0^*([\mathcal{G}]) = * \in H^1_{et}(U, G)$。**命题 5.1 得证。有限剩余域** $k(v)$ **情形下的定理 1.3 得证。** □

定理 *1.3* 的证明。如果 U-群概形 G 是半单的，则由 [PSt，第 Main 定理]（见定理 1.5）和定理 1.4，可容易得到该结论。

假设 U-群概形 G 的根基是非平凡的。有限域 $k(v)$ 情形下的定理 1.3 已在本章节中由定理 1.4 推导得到。

无限域 $k(v)$ 情形下的定理 1.3 已在 [PSt] 中得到证明。也就是说，其中利用 [PSt，第 Main 定理] (= 定理 1.5），通过与本章节前述论证**非常相似**的论证推导出了该结论。**然而，在** [PSt] **中无法使用命题 1.7，因为该命题很可能在域** $k(v)$**为无限域时并不成立。这就是为什么在** [PSt] **中用另一个命题替代了命题 1.7。**

定理 1.3 已得证。 □

定理 *1.1* 的证明。 我们已经完成了定理 1.3 的证明。定理 1.2 在 [GPan] 中得到证明。显然，定理 1.1 是定理 1.2 和定理 1.3 的直接推论。因此，定理 1.1 得证。□

参考文献

[A] Artin, M. 与经典上同调的比较：光滑预概形的情形，载于《拓扑斯理论与概形的 étale 上同调》（SGA 4）。第 3 卷。《数学讲义》，第 305 卷，Exp. XI，施普林格出版社，柏林-纽约，1973。[Bh] Bhatwadekar, S.M. 解析同构与有限生成模范畴，《代数通讯》16（1988），1949–1958。[C] Cesnavicius, K. 准分裂非分歧情形下的格罗滕迪克–塞尔猜想，《数学论坛：Pi》（2022），第 10 卷：e9，1–30；可见 arxiv.org/abs/2009.05299v2。[C-T/O] Colliot-Thélène, J.-L.; Ojanguren, M. 《局部平凡的主齐性空间》，《高等科学研究所数学出版物》75（1992），第 2 期，97–122。[C-T/S] Colliot-Thélène, J.-L.; Sansuc, J.-J. 柔性环面下的主齐性空间：应用，《代数杂志》106（1987），148–205。[SGA3]Demazure, M.; Grothendieck, A. 《群概形》，《数学讲义》，第 151–153 卷，施普林格出版社，柏林-海德堡-纽约，1970。[D-G] Demazure, M.; Grothendieck, A. 约化群概形的结构。《数学讲义》，第 153 卷。[E] Eisenbud, D. 《交换代数：以代数几何为视角》。数学研究生教材 150，施普林格出版社，纽约，1995。[Fed]Fedorov, R. 关于主丛的格罗滕迪克–塞尔猜想及其推广，《代数与数论》（2021），即将出版，可见 https://arxiv.org/abs/1810/11844v2。[FP] Fedorov, R.; Panin, I. 关于含无限域的半局部正则环上主丛的格罗滕迪克–塞尔猜想的证明，《高等科学研究所数学出版物》，第 122 卷，2015，第 169–193 页。http://www.arxiv.org/abs/1211.2678v2。[Ga] Gabber, O. 已宣布，尚未发表。[Gil1] Gille, Ph. 《仿射直线上的挠子》，《变换群》7(3):231–245，2002。[Gil2] Gille, Ph. Kneser-Tits 问题，《数学星丛》(326):Exp. No. 983, vii, 39–81 (2010), 2009。《布尔巴基研讨班》，2007/2008 年卷。[GPan]Guo, N., Panin, I. 离散赋值环上光滑射影概形的表示定理，预印本，2023。[Gr1] Grothendieck, A. 同调挠元与有理截面，载于《肖氏环及其应用》，Chevalley 研讨班，第 2 年，数学秘书处，巴黎，1958。[Gr2] Grothendieck, A. Brauer 群 II，载于《概形上同调十讲》，阿姆斯特丹，North-Holland，1968。[Gr3] Grothendieck, A. Brauer 群 III：例子与补充，载于《概形上同调十讲》，阿姆斯特丹，North-Holland，1968。[Gr4] Grothendieck, A. 代数几何中的下降技术与存在定理：I. 一般理论。经平坦态射的下降。载于《布尔巴基研讨班》，第 5 卷，Exp. No. 190，第 299–327 页。法国数学会，巴黎，1995。[EGAIII]Grothendieck, A. 《代数几何基础》（与 Jean Dieudonné 合作撰写）：III. 相干层的上同调研究，第一部分，《高等科学研究所数学出版物》11（1961），5–167。[EGAIV] Grothendieck, A. 《代数几何基础》（与 Jean Dieudonné 合作撰写）：IV. 概形及概形态射的局部研究，第二部分，《高等科学研究所数学出版物》24（1965），5–231。[MV] Morel, F.; Voevodsky V. A^1-概形的同伦理论，《高等科学研究所数学出版物》90（1999），45–143。

[NG] Guo, N. 半局部戴德金环上的格罗滕迪克–塞尔猜想，《变换群》，2021，即将出版，arXiv:1902.02315v2[Ni1] Nisnevich, E.A. 函数域上算术群的仿射齐性空间与有限子群，《泛函分析及其应用》11（1977），第 1 期，64–66。[Ni2] Nisnevich, Y. 戴德金环上的有理平凡主齐性空间与约化群概形的算术，巴黎科学院报告，第一辑，299（1984），第 1 期，5–8。[OP1] Ojanguren, M.; Panin, I. Witt 群的纯性定理，高等师范学校科学年刊（第 4 辑）32（1999），第 1 期，71–86。[OP2] Ojanguren, M.; Panin, I. 有理平凡厄米空间局部平凡，《数学杂志》237（2001），181–198。[P] Panin, I. 关于主丛的格罗滕迪克–塞尔猜想，2018 年国际数学家大会论文集，里约热内卢，第 1 卷，201–222。[Pan0] Panin, I. 动机空间中的良三元组与移动引理，《俄罗斯科学院学报》，数学系列，第 83 卷，第 4 期，第 158–193 页。arXiv:1707.01755[Pan1] Panin, I. 约化群概形上的主 G-丛的良三元组与格罗滕迪克–塞尔猜想，《杜克数学杂志》，第 168 卷，第 2 期，2019；DOI 10.1215/00127094-2018-0042 arXiv:1707.01756[Pan2] Panin, I. 正则半局部环上主 G-丛的两个纯性定理及格罗滕迪克–塞尔猜想，arXiv:1707.01763[Pan3] Panin, I. 含域的正则局部环上主丛的格罗滕迪克–塞尔猜想证明，《数学学报》84:4（2020），780–795。[PSt] Panin, I.; Stavrova, A. 关于相对射影直线上的主丛。预印本，2023。[PSV] Panin, I.; Stavrova, A.; Vavilov, N. 关于约化群概形上主G-丛的格罗滕迪克–塞尔猜想：I，《Compositio Mathematica》151（2015），535–567。[Po] Popescu, D. 一般 Néron消奇异化与逼近，《名古屋数学杂志》104（1986），85–115。[Poo] Poonen, B. 有限域上的贝尔蒂尼定理，《数学年刊》160（2004），1099–1127。[ChPoo] Charles, F., Poonen, B. 有限域上的贝尔蒂尼不可约性定理，arXiv:1311.4960v1，2013。[R1] Raghunathan, M.S. 存在有理截面的主丛，《数学创刊》116（1994），第 1–3 期，409–423。[R2] Raghunathan, M.S. 勘误：存在有理截面的主丛，《数学创刊》121（1995），第 1 期，223。[R3] Raghunathan, M.S. 仿射空间上的主丛与射影直线上的丛，《数学年鉴》285（1989），309–332。[RR] Raghunathan, M.S.; Ramanathan, A. 仿射直线上的主丛，印度科学院学报，数学科学 93（1984），137–145。[Se] Serre, J.-P. 代数纤维丛，载于《肖氏环及其应用》，Chevalley 研讨班，第 2 年，数学秘书处，巴黎，1958。[SV] Suslin, A., Voevodsky V. 抽象代数簇的奇异同调，《数学创刊》123（1996），第 1 期，61–94[Sw] Swan, R.G. Néron–Popescu消奇异化，《代数与几何》（台北，1995），《代数几何讲义》2，国际出版社，马萨诸塞州剑桥，1998，135–192。[Tsy] Tsybyshev, A. 向非等特征格罗滕迪克–塞尔猜想迈出的一步，《代数与分析》31（2019），第 1 期，246-254，DOI 10.1090/spmj/1591（俄文，附俄文摘要）；英文译本，《圣彼得堡数学杂志》31（2020），第 1 期，181–187。MR3932824[Vo] Voevodsky, V. 带转移的预层的上同调理论，载于《循环、转移与动机同调理论》，《数学年刊研究》，2000，普林斯顿大学出版社。

关于离散赋值环上射影光滑概形的格罗滕迪克–塞尔猜想11俄罗斯科学院斯捷克洛夫数学研究所圣彼得堡分部，丰坦卡河堤27号，191023 圣彼得堡，俄罗斯电子邮箱: guo.ning@eimi.ru电子邮箱: paniniv@gmail.com