arXiv:2302.02880v1 [math.RA] 6 Feb 2023

关于中山代数的导出等价

TARO UEDA

Abstract. 本文研究中山代数 $N(n,\ell)=K\mathbb{A}_n/\mathrm{rad}(K\mathbb{A}_n)^\ell$的导出范畴。我们构造了中山代数 $N(n,\ell)$ 与 $N(n,\ell+1)$ 之间的导出等价，其中 $n=p(p+1)q+p(p-1)r$ 且 $\ell=(p+1)q+pr$ 对任意整数 $p\geqslant 2, q\geqslant 1, r\geqslant 0$均成立。为此，我们引入了 $K\mathbb{A}_s\otimes K\mathbb{A}_t$的幂等子代数族，并通过某类称为 S-族的对象族的存在性来刻画它们的导出范畴。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 4 2.1. K-线性范畴与模 4 2.2. Serre函子 6 2.3. 半正交分解与可容许子范畴 6 2.4. 倾斜对象与例外序列 8 3.S-族 11 3.1. 弱 S-族 11 3.2. 代数 $L(S)$ 13 3.3.S-族 13 3.4. S-族的一个性质 17 4. 中山代数导出范畴中的S-族 18 4.1. 代数 $L(\mathrm{p};\mathrm{q})$ 与 $L^!(\mathrm{p};\mathrm{q})$ 18 4.2. $\Upsilon(p,q,r)$-族 22 5. S-族的变异 23 5.1. S-族的粘合 24 5.2. S-族的变异 25 5.3. S-族变异的应用 29 参考文献 32

1. Introduction

在有限维代数的表示论中，判定给定的两个有限维代数是否导出等价是一个重要问题。关于导出等价，请参阅[11, 19] 。

本文研究域 K上某一类中山代数（即右串代数和左串代数 [17]）的这一问题。中山代数上有限维模的模范畴结构众所周知 [1], ，但对其导出范畴结构却知之甚少。

我们考虑中山代数

$$N(n,\ell)=K\mathbb{A}_n/(\operatorname{rad}K\mathbb{A}_n)^\ell$$

其中

$$\mathbb{A}_n = [1 \xrightarrow{a_1} 2 \xrightarrow{a_2} 3 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} n]$$

且 rad $K\mathbb{A}_n$ 是路径代数 $K\mathbb{A}_n$ 的雅各布森根基。对于任意整数 $s \geqslant 1$, $t \geqslant 1$,$0 \leqslant u \leqslant t$, 令

$$L(s,t,u) = (N(s,2)^{\mathrm{op}} \otimes N(t,2)^{\mathrm{op}})/\langle \sum_{i=0}^{u-1} e_s \otimes e_{t-i} \rangle$$

$$L^!(s,t,u) = (K\mathbb{A}_s \otimes K\mathbb{A}_t)/\langle \sum_{i=0}^{u-1} e_s^! \otimes e_{t-i}^! \rangle$$

其中 $\otimes = \otimes_K$和 $e_i \otimes e_j$（分别为 $e_i^! \otimes e_j^!$）是 N（s, 2）$^{\mathrm{op}}\otimes N$（t, 2）^{op}（分别为 $K\mathbb{A}_s \otimes K\mathbb{A}_t$）中对应于顶点（$i, j$）的幂等元。根据定义显然可知, L（s,t,t）$= L$（$s-1,t,0$）。在其论文 [14, Cor.1.2], 中, Ladkani 给出了一个三角等价

(1.1) per N（$st, t+1$）$\to$per（$K\mathbb{A}_s \otimes K\mathbb{A}_t$）, 对于任意满足 $st > t+$的整数 $s \geqslant 1, t \geqslant 1$ 1.

我们将此等价推广如下:

定理 1.1（命题 4.2, 定理 4.7）。存在三角等价

$$\operatorname{per} N(st-u, t+1) \to \operatorname{per} L(s,t,u) \to \operatorname{per} L^!(s,t,u)$$

对于任意整数 s、$t \geqslant 1$、$0 \leqslant u \leqslant t$。特别地, $N(st-u, t+1)$ 与一个整体维数为 62 的 aK-代数导出等价。

对于 $u = 0$, 我们得到一个三角等价（1.1）。等价地, $N(n, \ell)$ 与 $L\left(\lceil \frac{n}{\ell-1} \rceil, \ell-1, r\right)$ 导出等价, 其中任意整数 $n \geqslant 3$ 和 $\ell \geqslant 2$, $r =(\ell-1)\lceil \frac{n}{\ell-1} \rceil - n$; 对于任意实数 x, $\lceil x \rceil =\sup\{m \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant m\}$。本文证明如下结果。

定理 1.2（定理 5.14）。设 s、t、u 为三个正整数, 满足 $1 \leqslant u \leqslant t$。假设以下条件之一成立。

(a) $u \in \mathbb{Z}s$ 和 $t-u \in \mathbb{Z}$（$s+1$）。(b) $s = 2$ 和 $t-u \in 3\mathbb{Z}$。则存在三角等价 per L（s, t, u）$\to$per L（s, $t-1$, $u-s$）。

满足定理 1.2 (a) 中条件的整数可写为

$$(s,t,u) = (p, (p+1)q + pr, pr).$$

将其应用于定理 1.2, 可得到三角等价

$$\operatorname{per} L(p, (p+1)q+pr, pr) \to \operatorname{per} L(p, (p+1)q+pr-1, p(r-1))$$

对任意整数 $p \geqslant 1$、$q \geqslant 0$、$r \geqslant 1$均成立。由定理 1.1, 我们得到以下结果:

Coro论 1.3（推论 5.15）。设 p、q 为两个整数, 满足 $p \geqslant 2$、$q \geqslant 1$。假设 o 件列条成立。

(a) $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。(b) $p = 2$ 和 $r \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。

那么存在一个三角等价

$$\operatorname{per} N(n, \ell+1) \to \operatorname{per} N(n, \ell) \quad \textit{where } n = p(p+1)q + p(p-1)r,\ \ell = (p+1)q + pr.$$

对于 $p = 2$、$r = \frac{s}{2}$, 我们得到一个三角等价

(1.2) per $N(s+6q, s+3q+1) \to$per $N(s+6q, s+3q)$, 其中 $q \geqslant 1$、$s \geqslant 0$为任意整数。

对于 $q = 1$, (1.2) 是一个三角等价

$$\operatorname{per} N(s+6, s+4) \to \operatorname{per} N(s+6, s+3) \ \text{ for any integer } s \geqslant 0$$

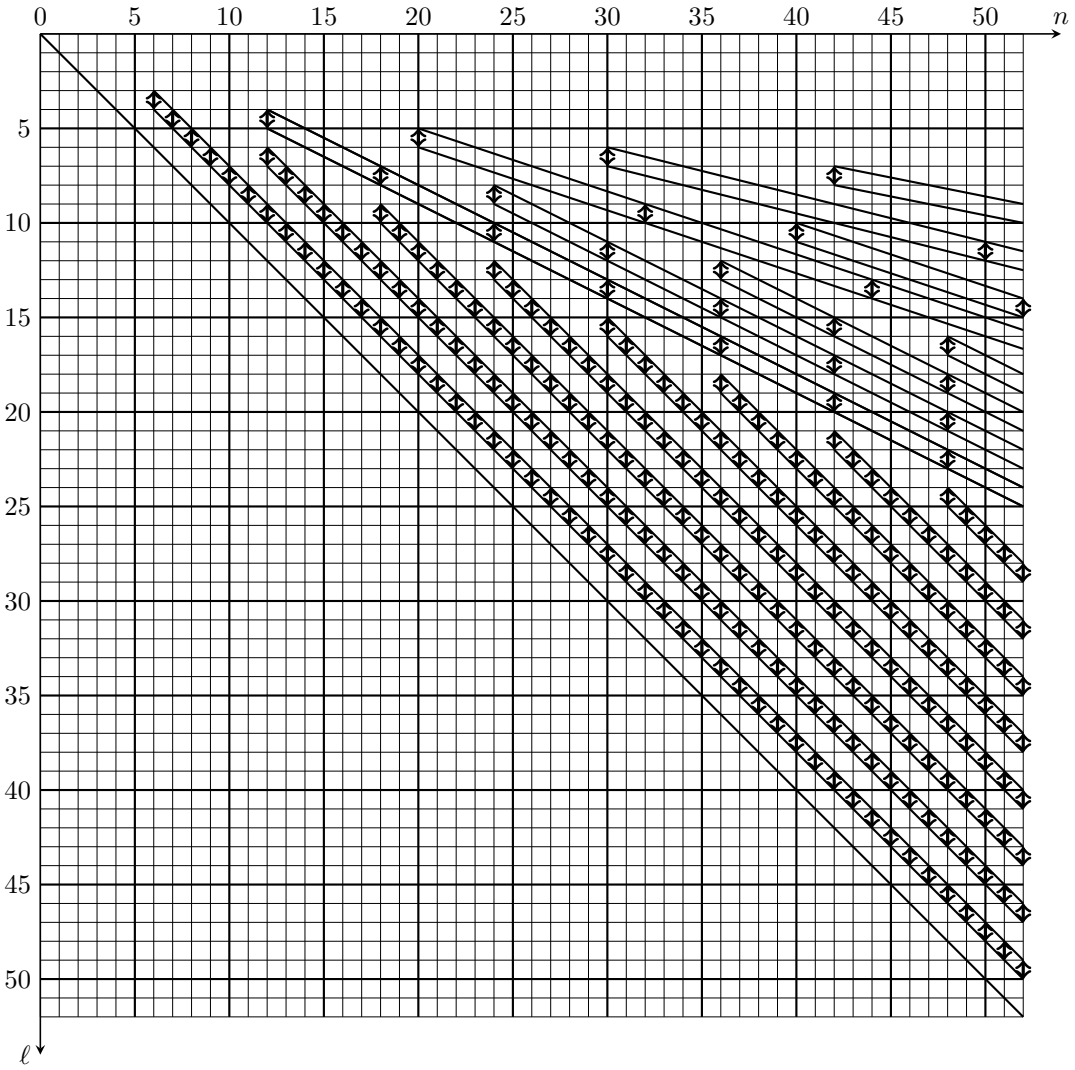


FIGURE 1. 在上图中，箭头 $\leftrightarrow$ 表示推论 1.3 中的中山代数对。

这归功于 Happel-Seidel [9, Prop.2.3]，他们证明上述两个导出范畴分别与一个路径代数的导出范畴三角等价，该路径代数对应于一个具有三条分支、长度分别为 2、3、$s+3$ 的星形箭图。

对于 $q=2$，（1.2）是一个三角等价

$$\operatorname{per} N(s+12, s+7) \to \operatorname{per} N(s+12, s+6) \text{ for any integer } s \geqslant 0$$

这是由 Lenzing-Meltzer-Ruan [15, 定理 6.3] 证明的，他们证明了上述两个导出范畴与加权射影直线 $\mathbb{X}(2, 3, s+7)$ 上的向量丛稳定范畴三角等价。

在上述证明中，S-族的概念发挥了核心作用（见定义 3.8）。利用以下结果，我们可以在给定的三角范畴与 per $L(S)$ 之间构造一个三角等价。

定理 1.4（定理 3.11）。设 $\mathcal{D}$ 是一个具有 Serre函子的代数的、幂等完备且 Ext-有限的三角范畴。若存在一个满的 S-族 $(X_{i,\ j})_{(i,j)\in S}$，则存在一个三角等价 $F\colon \mathcal{D} \to \operatorname{per} L(S)$，使得对任意 $(i,j) \in S$，$F(X_{i,\ j}) \simeq P(i,j)$。

下图展示了 S-族各定义之间的关系。

弱 S-族 定义 3.2 (L1), (L2)	$\Leftarrow$	S-族 定义 3.8 (S1)-(S3)	$\Leftarrow$	Y(p; q)-族 命题 4.3 (Y1)-(Y4)

作为定理 1.4 的另一个应用，我们得到以下与 (1.1) 相关的结果。

定理 1.5（定理 5.16）。存在一个三角等价

$$\operatorname{per} L(p+1,q,q-1) \to \operatorname{per} L(q+1,p,p-1) \quad \textit{for any integers } p \geqslant 2,\ q \geqslant 2.$$

由定理 1.1，上述结果给出了以下由 Lenzing-Meltzer-Ruan 得到的三角等价 [15, 命题4.1]。

推论 1.6（推论 5.17）。存在一个三角等价

$$\operatorname{per} N(pq+1,q+1) \to \operatorname{per} N(pq+1,p+1) \quad \textit{for any integers } p \geqslant 2,\ q \geqslant 2.$$

接下来，我们概述本文各章的内容。第二章给出了关于 Serre 函子、半正交分解、可容许子范畴、倾斜对象和例外序列的基本结果。第三章利用 S-族这一术语刻画代数 $L(S)$ 的完美导出范畴； S-族是满足某些条件的例外对象序列（定义 3.8）。通过证明 S-族的存在性，我们可以构造一个满足某些条件的三角范畴与代数 $L(S)$ 的完美导出范畴之间的三角等价（定理 3.11）。第四章研究 S 为杨图时的 S-族。并且我们证明，若 S 是杨图 $Y(s,t,u)$，则代数 $L(S)$ 与中山代数 $N(st-u,t+1)$ 导出等价（定理 4.7）。第五章在关于 S 的某些假设下，引入 S-族的变异，其中 S 是例外序列的变异（定理 5.6、5.12）。利用关于 S-族变异的结果，我们证明了本文的主要结果（定理 5.14）。

约定 在本文中， K 是一个域，且所有 K-线性范畴上的模都是右模。我们用 $\otimes$ 表示关于 K的张量积。对于任意 K-向量空间 V，我们用 V^* 表示 V的对偶。对于三角范畴 $\mathcal{D}$中任意由对象构成的集合 $\{X_i \mid i \in J\}$，我们用 $\langle X_i \mid i \in J\rangle$ 表示由 $\{X_i \mid i \in J\}$生成的 $\mathcal{D}$ 的厚子范畴。对于任意 K-线性范畴 $\mathcal{C}$，我们用 $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{C}$的导出范畴，并用 $\operatorname{per}\mathcal{C}$ 表示 $\mathcal{C}$ 的完美导出范畴，即 $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ 的厚子范畴 $\langle P_{\mathcal{C}}(i) \mid i \in \mathcal{C}\rangle$，其中 $P_{\mathcal{C}}(i) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-,i)$。

对于箭图 Q中的任意两条箭 $\alpha\colon i \to j$ 和 $\beta\colon j \to k$，我们用 $\beta\alpha\colon i \to k$表示它们的复合。对于 KQ的任意容许理想 I，我们用 $S_{KQ/I}(i)$（分别用 $P_{KQ/I}(i)$、$I_{KQ/I}(i)$）表示与 Q的顶点 i相对应的简单（分别为投射、内射） KQ/I-模。按照我们的约定，对于 Q中的任意源点 i， $S_{KQ/I}(i) \simeq P_{KQ/I}(i)$。我们通常简写为 $S(i)$（分别为 $P(i)$、 $I(i)$），而不写作 $S_A(i)$（分别为 $P_A(i)$、 $I_A(i)$）。

致谢 我感谢 Osamu Iyama 对本文提出的意见，也感谢 Ryo Takahashi 对我的支持。我还要感谢各位审稿人认真审阅本文。

2. Preliminaries

2.1. K-线性范畴与模。关于 K-线性范畴的表示论，请参阅 [6] 。若范畴 $\mathcal{C}$ 的每个同态集都是一个 K-向量空间，且每个复合映射

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z); (f,g) \mapsto g \circ f$$

都是双线性映射，则称其为 $\mathcal{C}$ -线性范畴。设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 是两个 K-线性范畴。若函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 的每个映射都是K-线性的，则称其为K-线性函子

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),F(X')); f \mapsto F(f)$$

是任意两个对象 X 和 X' 在 $\mathcal{C}$中的 K-线性映射。

令 $\operatorname{Mod} K$ 为由 K-向量空间组成的 K-线性范畴。一个（右） $\mathcal{C}$-模是一个K-线性函子 $X\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \operatorname{Mod} K$。对于任意小的 K-线性范畴 $\mathcal{C}$，我们用 $\operatorname{Mod}\mathcal{C}$ 表示由 $\mathcal{C}$-模组成的K-线性范畴。于是我们将 $P_{\mathcal{C}}(i)$ 定义为 $\mathcal{C}$-模

$$P_{\mathcal{C}}(i) = P(i) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, i).$$

那么，对于任意 $i \in \mathcal{C}$， $P_{\mathcal{C}}(i)$ 都是一个投射模。对于任意 $\mathcal{C}$-模 X，存在一个满射态射

$$\bigoplus_{i\in\mathcal{C}} P_{\mathcal{C}}(i)^{\oplus E_i} \to X$$

其中 E_i 是 $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Mod}\mathcal{C}}(P_{\mathcal{C}}(i)\ X)$ 的一组基。特别地，任意投射 $\mathcal{C}$-模 P 都是投射模 $P_{\mathcal{C}}(i)$ 的直和的直和项。

如果存在一个由非负整数 n_i 构成的族 $(n_i)_{i\in I}$ ，其指标集为 $\mathcal{C}$ 中对象的一个有限集 I ，并且存在一个满射态射 $p : \bigoplus_{i\in I} P_{\mathcal{C}}(i)^{\oplus n_i} \to X$，则称 $\mathcal{C}$-模 X 是有限生成的。我们

将有限生成模范畴记为 $\operatorname{mod}\mathcal{C}$。如果一个 K-线性范畴 $\mathcal{C}$ 对 K 是 Hom-有限的，即对于任意 $i, j \in \mathcal{C}$，$\dim_K \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(i, j) < \infty$ ，则称其为 Hom。设 $\mathcal{C}$ 是一个 Hom-有限的 K-线性范畴。对于任意 $i \in \mathcal{C}$，定义

$$S_{\mathcal{C}}(i) := P_{\mathcal{C}}(i)/\operatorname{rad} P_{\mathcal{C}}(i).$$

那么 $S_{\mathcal{C}}(i)$ 是一个有限生成的半单 $\mathcal{C}$-模。

若一个范畴 $\mathcal{C}$ 对任意对象 i、 $j \in \mathcal{C}$，关系 $i \simeq j$ 都蕴含关系 $i = j$，则称其为稀疏范畴。若一个稀疏的 K- 线性范畴 $\mathcal{C}$ 对任意 $i \in \mathcal{C}$，集合

$$\{j \in \mathcal{C} \mid \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(i, j) \neq 0 \text{ or } \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(j, i) \neq 0\}$$

是一个有限集。我们将 $\mathcal{C}$-模 X 的支撑定义如下:

$$\operatorname{supp} X = \{i \in \mathcal{C} \mid X(i) \neq 0\}.$$

A s稀疏的 K-线性范畴 $\mathcal{C}$ 是局部有界的，当且仅当对于某个 y
object i.

设 $\mathcal{C}$ 是一个 Hom-有限且局部有界的 K-线性范畴， $X \in \operatorname{Mod}\mathcal{C}$。显然，以下条件等价:

(i) X 是一个有限生成模。
(ii) $\operatorname{supp} X$ 是一个有限集，并且对于任意 $i \in \mathcal{C}$，$\dim_K X(i) < \infty$ 。

若 $\mathcal{C}$ 是一个 Hom-有限且局部有界的 K-线性范畴，则 $\operatorname{mod}\mathcal{C}$ 是一个 Hom-有限阿贝尔范畴。我们将 $\mathcal{C}$- 模 $I_{\mathcal{C}}(i)$ 定义为

$$I_{\mathcal{C}}(i) = I(i) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(i, -)^*.$$

我们用 $\operatorname{proj}\mathcal{C}$（分别用 inj $\mathcal{C}$）表示 $\operatorname{mod}\mathcal{C}$ 的满子范畴，其中的对象是有限生成投射（分别是内射） $\mathcal{C}$-模。

设 C 是一个 Hom-有限且局部有界的 K-线性范畴。则 K-线性函子$D = (-)^* : (\operatorname{mod}\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \to \operatorname{mod}\mathcal{C}$ 是 K-线性范畴之间的等价，而限制函子 $D|_{(\operatorname{proj}\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}} : (\operatorname{proj}\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \to \operatorname{inj}\mathcal{C}$ 是 K-线性范畴之间的等价。令

$$\nu = (-)\otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{C}^* : \operatorname{Mod}\mathcal{C} \to \operatorname{Mod}\mathcal{C}, \quad \nu^- = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}^*, -) : \operatorname{Mod}\mathcal{C} \to \operatorname{Mod}\mathcal{C}$$

称为中山函子。更确切地说，它们定义为

$$\nu(X)(i) = \operatorname{Coker}(\bigoplus_{j,k\in\mathcal{C}} X_j \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(k, j) \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(k, i)^* \xrightarrow{f} \bigoplus_{k\in\mathcal{C}} X_k \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(k, i)^*),$$

$$\nu^-(X)(i) = \operatorname{Hom}_{\operatorname{Mod}\mathcal{C}}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(i, -)^*, X)$$

对于任意的 $X \in \operatorname{Mod}\mathcal{C}$ 和 $i \in \mathcal{C}$，其中

$$f : x \otimes \alpha \otimes y \mapsto x\alpha \otimes y - x \otimes \alpha y.$$

根据 ν 和 ν^-的定义，(ν^-, ν) 是一对伴随函子。

命题 2.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 Hom-有限且局部有界的 K-线性范畴。那么函子

$$\nu|_{\operatorname{proj}\mathcal{C}} : \operatorname{proj}\mathcal{C} \to \operatorname{inj}\mathcal{C}$$

是满足 $\nu(P_{\mathcal{C}}(i)) \simeq I_{\mathcal{C}}(i)$ 的 K-线性范畴之间的等价，并且存在一个函子性同构

$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{mod}\mathcal{C}}(P, \nu(Q)) \simeq \operatorname{Hom}_{\operatorname{mod}\mathcal{C}}(Q, P)^* \text{ for any } P, Q \in \operatorname{proj}\mathcal{C}.$$

2.2. Serre函子。设 $\mathcal{D}$ 是一个三角范畴。回顾一下，$\mathcal{D}$ 的Serre函子是一个 K-线性自等价 $\mathbb{S}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$，使得存在一个函子性同构

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{S}(Y)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, X)^*$$

对于任意两个对象 X、$Y \in \mathcal{D}$。根据 Serre函子的定义，任意两个 Serre函子都是同构的。

命题 2.2. [4] 设 $\mathcal{D}$ 是一个具有 Serre函子 $\mathbb{S}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ 的三角范畴。
(a) 存在一个自然同构 $\alpha : \mathbb{S}[1] \to [1]\mathbb{S}$，使得 $(\mathbb{S}, \alpha)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ 是一个三角自等价。(b) $\mathcal{D}$ 的任意 Serre函子都同构于 $\mathbb{S}$。(c) 对任意三角等价 $F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$，$F\mathbb{S}F^{-1}\colon \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ 都是 $\mathcal{D}'$ 的 Serre 函子。

若一个 K-线性范畴 $\mathcal{C}$ 满足：$\mathcal{C}$ 是 Hom-有限的，且对任意$i \in \mathcal{C}$，$I_{\mathcal{C}}(i) \in \operatorname{per}\mathcal{C}$，并且 $I_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(i) \in \operatorname{per}\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$，则称其为 Iwanaga-Gorenstein 范畴。以下结果众所周知 [8]:

命题 2.3. 对任意 Hom-有限 K-线性范畴 $\mathcal{C}$，以下条件等价:
(i) $\mathcal{C}$ 是一个 Iwanaga-Gorenstein范畴。(ii) $\operatorname{per}\mathcal{C}$具有一个 Serre函子 $\mathbb{S}\colon \operatorname{per}\mathcal{C} \to \operatorname{per}\mathcal{C}$。

若上述条件成立，则函子 $\nu = (-) \mathbin{\mathbb{L}\otimes_{\mathcal{C}}} \mathcal{C}^* : \operatorname{per}\mathcal{C} \to \operatorname{per}\mathcal{C}$是 $\operatorname{per}\mathcal{C}$的 Serre函子，并且 $\nu^{-1} = \mathrm{R}\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C^*, -) : \operatorname{per}\mathcal{C} \to \operatorname{per}\mathcal{C}$是 ν的逆函子。

证明. (i)⇒(ii)：由 [12, 10.4]可知。(ii)⇒(i)：
设 $\mathcal{D} = \operatorname{per}\mathcal{C}$。由于

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(P_{\mathcal{C}}(j), \mathbb{S}(P_{\mathcal{C}}(i))[n]) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(P_{\mathcal{C}}(i), P_{\mathcal{C}}(j)[-n])^* \simeq \begin{cases} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(P_{\mathcal{C}}(j), I_{\mathcal{C}}(i)) & n = 0, \\ 0 & n \neq 0, \end{cases}$$

对任意 $j \in \mathcal{C}$，我们有

$$H^n\mathbb{S}(P_{\mathcal{C}}(i)) \simeq \begin{cases} I_{\mathcal{C}}(i) & n = 0, \\ 0 & n \neq 0. \end{cases}$$

因此 $I_{\mathcal{C}}(i) \simeq \mathbb{S}(P_{\mathcal{C}}(i)) \in \mathcal{D}$。对偶地，我们看到 $I_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(i) \in \operatorname{per}\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$。故结论成立。□

引理 2.4. 对任意正整数 p，范畴 $\operatorname{per} K\mathbb{A}_p$ 是维数为 $\frac{p-1}{p+1}$ 的分数 Calabi–Yau 范畴，即存在函子同构 $\nu_{K\mathbb{A}_p}^{p+1} \xrightarrow{\sim} [p-1]$。

2.3. 半正交分解与可容许子范畴。设 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 是 $\mathcal{D}$的满子范畴。我们将由满足以下条件的对象 X 构成的满子范畴 $\mathcal{D}_1 * \mathcal{D}_2$ 记为：这些对象属于 $\mathcal{D}$，且存在对象 $X_1 \in \mathcal{D}_1$、$X_2 \in \mathcal{D}_2$ 以及一个三角形

$$X_1 \to X \to X_2 \to X_1[1] \text{ in } \mathcal{D}.$$

则运算 $*$是结合的，并且我们对满子范畴 $\mathcal{D}_1$、$\mathcal{D}_2$、……、$\mathcal{D}_n$归纳地定义满子范畴 $\mathcal{D}_1 * \mathcal{D}_2 * \cdots * \mathcal{D}_n$。

厚子范畴 $\mathcal{D}_i$ of $\mathcal{D}$ 的序列 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_n)$ 称为 $\mathcal{D}$ 的半正交分解，如果 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 * \mathcal{D}_2 * \cdots * \mathcal{D}_n$ 且对于满足 $k < k'$ 的任意整数 $k, k' \in [1, n]$，都有 $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_k, \mathcal{D}_{k'}) = 0$。在这种情况下，我们将 $\mathcal{D}_1 * \mathcal{D}_2 * \cdots * \mathcal{D}_n$ 记作

$$\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2 \perp \cdots \perp \mathcal{D}_n.$$

可容许子范畴的性质详见 [10]。设 $\mathcal{D}$ 为一个三角范畴。若厚子范畴 $\mathcal{E}$ of $\mathcal{D}$ 的自然嵌入 $\mathbb{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ 存在右伴随函子 $\mathbb{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$（分别地，左伴随函子 $\mathbb{F}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$），则称其为右可容许（分别地，左可容许）。若厚子范畴 $\mathcal{E}$ of $\mathcal{D}$ 既右可容许又左可容许，则称 $\mathcal{E}$ 为可容许子范畴。我们通常将 $\mathbb{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}$（分别地，$\mathbb{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}, \mathbb{F}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}$）简记为 $\mathbb{I}_{\mathcal{E}}$（分别地，$\mathbb{T}_{\mathcal{E}}, \mathbb{F}_{\mathcal{E}}$）。根据 $\mathbb{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}$ 和 $\mathbb{F}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}$ 的定义，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}(X')) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathbb{F}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}(X), X') \text{ for any objects } X \in \mathcal{D},\ X' \in \mathcal{E}, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}(Y'), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(Y', \mathbb{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}(Y)) \text{ for any objects } Y \in \mathcal{D},\ Y' \in \mathcal{E}. \tag{2.2}$$

$\mathcal{E}$ 的厚子范畴 $\mathcal{E}$ 当且仅当

$$\mathcal{D} = \mathcal{E} \perp \mathcal{E}^{\perp} = {}^{\perp}\mathcal{E} \perp \mathcal{E} \tag{2.3}$$

其中

$$\mathcal{E}^{\perp_{\mathcal{D}}} = \mathcal{E}^{\perp} := \{X \in \mathcal{D} \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, X) = 0 \text{ for any } Y \in \mathcal{E}\},$$

$${}^{\perp_{\mathcal{D}}}\mathcal{E} = {}^{\perp}\mathcal{E} := \{X \in \mathcal{D} \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = 0 \text{ for any } Y \in \mathcal{E}\}.$$

特别地，单位态射和余单位态射诱导出三角

$$\mathbb{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}(X) \to X \to \mathbb{F}_{\mathcal{E}^{\perp}}^{\mathcal{D}}(X) \to \mathbb{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}(X)[1], \tag{2.4}$$

$$\mathbb{T}_{{}^{\perp}\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}(X) \to X \to \mathbb{F}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}(X) \to \mathbb{T}_{{}^{\perp}\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}(X)[1]. \tag{2.5}$$

以下三个事实是初等的：

引理 2.5。 [16] 设 $\mathcal{D}$ 为一个三角范畴， $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{D}$的一个可容许子范畴， $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{E}$的一个厚子范畴。

(a) $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个可容许子范畴，当且仅当 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{D}$的一个可容许子范畴。(b) 若 (a) 中的条件成立，则

$$\mathbb{T}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{D}} \simeq \mathbb{T}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}\mathbb{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}},\ \ \mathbb{F}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{D}} \simeq \mathbb{F}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}\mathbb{F}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}},\ \ \mathbb{T}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \simeq \mathbb{T}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{D}}|_{\mathcal{E}},\ \ \mathbb{F}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \simeq \mathbb{F}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{D}}|_{\mathcal{E}}.$$

引理 2.6。设 $\mathcal{D}$ 为一个三角范畴， $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{D}$的一个厚子范畴。若存在 $\mathcal{D}$ 的可容许子范畴 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}'$，使得 $\mathcal{E} = \mathcal{F} \perp \mathcal{F}'$，则 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{D}$的一个可容许子范畴。

证明。由于 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{D}$的一个可容许子范畴，因此有 $\mathcal{D} = \mathcal{F} \perp \mathcal{G}$，其中 $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{\perp_{\mathcal{D}}}$。由于 $\mathcal{F}'$是 $\mathcal{D}$ 的一个可容许子范畴且 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{G}$，由引理 2.5可知， $\mathcal{F}'$ 是 $\mathcal{G}$的一个可容许子范畴。因此 $\mathcal{G} = \mathcal{F}' \perp \mathcal{G}'$，其中 $\mathcal{G}' = \mathcal{F}'^{\perp_{\mathcal{G}}}$。由于

$$\mathcal{D} = \mathcal{F} \perp \mathcal{G} = \mathcal{F} \perp \mathcal{F}' \perp \mathcal{G}' = \mathcal{E} \perp \mathcal{G}',$$

$\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{D}$的右可容许子范畴。对偶地， $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{D}$的左可容许子范畴。 □

引理 2.7. 设 $\mathcal{D}$ 是一个三角范畴，且 $\mathcal{E}$、 $\mathcal{E}'$、 $\mathcal{F}$、 $\mathcal{F}'$ 是 $\mathcal{D}$ 的四个可容许子范畴，使得 $\mathcal{D} = \mathcal{E} \perp \mathcal{F}$、 $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$、 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. 。那么对于 $\mathcal{D}' = \mathcal{E}' \perp \mathcal{F}'$，有

$$\mathbb{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}|_{\mathcal{D}'} \simeq \mathbb{T}_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{D}'},\ \ \mathbb{F}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{D}}|_{\mathcal{D}'} \simeq \mathbb{F}_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{D}'}.$$

证明. 对任意 $X \in \mathcal{D}'$，存在一个三角形

$$\mathbb{T}_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{D}'}(X) \to X \to \mathbb{F}_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{D}'}(X) \to \mathbb{T}_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{D}'}(X)[1].$$

由于$\mathbb{T}_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{D}'}(X) \in \mathcal{E}$ 且$\mathbb{F}_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{D}'}(X) \in \mathcal{F}$，结论得证。 □

下面的观察应该是众所周知的，但我们未能找到相关参考文献。为方便读者，我们给出一个证明。

命题 2.8. 设 $\mathcal{D}$ 是一个带有Serre函子 $\mathbb{S} = \mathbb{S}_{\mathcal{D}}$的三角范畴， $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{D}$的左可容许或右可容许子范畴。

(a) $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{D}$ 的可容许子范畴，当且仅当 $\mathcal{E}$ 具有 Serre函子 $\mathbb{S}_{\mathcal{E}}$。
如果满足 (a) 中的条件，则以下两个断言成立：

(b) (a) 中的函子 $\mathbb{S}_{\mathcal{E}}$ 满足 $\mathbb{S}_{\mathcal{E}} \simeq \mathbb{T}_{\mathcal{E}}\mathbb{S}|_{\mathcal{E}}$ 和 $\mathbb{S}_{\mathcal{E}}^{-1} \simeq \mathbb{F}_{\mathcal{E}}\mathbb{S}^{-1}|_{\mathcal{E}}$。(c) 如果 X， $\mathbb{S}(X) \in \mathcal{E}$，那么 $\mathbb{S}_{\mathcal{E}}(X) \simeq \mathbb{S}(X)$。

证明。（a）我们证明“仅当”部分。我们证明 $\mathbb{T}_{\mathcal{E}}\mathbb{S}|_{\mathcal{E}}$ 是一个 Serre函子。由于对任意 X、$Y \in \mathcal{E}$，存在函子同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, \mathbb{T}_{\mathcal{E}}\mathbb{S}(Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{S}(Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, X)^* \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(Y, X)^*, \tag{2.6}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathbb{F}_{\mathcal{E}}\mathbb{S}^{-1}(X), Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^{-1}(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, X)^* \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(Y, X)^*, \tag{2.7}$$

由 [18, 引理 1.1.5], 可知， $\mathbb{T}_{\mathcal{E}}\mathbb{S}|_{\mathcal{E}}$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个 Serre函子，其逆函子为 $\mathbb{F}_{\mathcal{E}}\mathbb{S}^{-1}|_{\mathcal{E}}$。我们证明“如果”部分。设 $\mathbb{T}_{\mathcal{E}}$ 是 $\mathbb{I}_{\mathcal{E}}$ 的一个右伴随函子， $\mathbb{S}_{\mathcal{E}}$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个 Serre 函子。对任意 X 、 $Y \in \mathcal{E}$，存在函子同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathbb{S}_{\mathcal{E}}^{-1}\mathbb{T}_{\mathcal{E}}\mathbb{S}_{\mathcal{D}}(Y), X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, \mathbb{T}_{\mathcal{E}}\mathbb{S}_{\mathcal{D}}(Y))^* \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{S}_{\mathcal{D}}(Y))^* \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, X).$$

因此， $\mathbb{S}_{\mathcal{E}}^{-1}\mathbb{T}_{\mathcal{E}}\mathbb{S}_{\mathcal{D}}$ 是 $\mathbb{I}_{\mathcal{E}}$ 的一个左伴随函子。

（b）在（a）的证明中，我们证明了 $\mathbb{T}_{\mathcal{E}}\mathbb{S}|_{\mathcal{E}}$ 是一个 Serre函子。由 Serre函子的唯一性，结论得证。

（c）由（b）显然可得。 □

以下结果的证明由命题 2.8 显然可得。

引理2.9. 设 $\mathcal{D}$ 是一个带有 Serre函子 $\mathbb{S} = \mathbb{S}_{\mathcal{D}}$ 的三角范畴，且 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{D}$ 的两个可容许子范畴。

(a) 函子 $\mathbb{F}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{D}}|_{\mathcal{E}} \colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 有一个右伴随函子 $\mathbb{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}|_{\mathcal{F}} \colon \mathcal{F} \to \mathcal{E}$。(b) 若 $\mathbb{S}^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}$，则存在函子同构 $\mathbb{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}|_{\mathcal{F}} \simeq \mathbb{S}_{\mathcal{E}}\mathbb{S}^{-1}|_{\mathcal{F}} \colon \mathcal{F} \to \mathcal{E}$。(c) 若 $\mathbb{S}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$，则存在函子同构 $\mathbb{F}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{D}}|_{\mathcal{E}} \simeq \mathbb{S}_{\mathcal{F}}^{-1}\mathbb{S}|_{\mathcal{E}} \colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$。(d) 若 $\mathbb{S}(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$，则函子 $\mathbb{F}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{D}}|_{\mathcal{E}} \colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 和 $\mathbb{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}|_{\mathcal{F}} \colon \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ 互为逆三角等价。

证明. (a) 对任意 $X \in \mathcal{E}$ 和 $Y \in \mathcal{E}$，我们有函子同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{D}}(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, \mathbb{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}(Y)).$$

因此断言得证。

(b) Since $\mathcal{E}$ 是一个可容许子范畴， $\mathcal{E}$ 有一个Serre函子 $\mathbb{S}_{\mathcal{E}} = \mathbb{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}\mathbb{S}|_{\mathcal{E}} \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$，根据命题 2.8。由于 $\mathbb{S}^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}$，引理 2.8 (b) 推出 $\mathbb{S}_{\mathcal{E}}\mathbb{S}^{-1}|_{\mathcal{F}} \simeq \mathbb{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}\mathbb{S}\mathbb{S}^{-1}|_{\mathcal{F}} \simeq \mathbb{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}|_{\mathcal{F}}$.

(c) 这是(b)的对偶。

(d) 由 (c) 可知，函子 $\mathbb{F}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{D}}|_{\mathcal{E}}$ 是 $\mathbb{S}|_{\mathcal{E}} \colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 与 $\mathbb{S}_{\mathcal{F}} \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ 的复合，因此它是一个三角等价。由 (a)， $\mathbb{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}|_{\mathcal{F}}$是 $\mathbb{F}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{D}}|_{\mathcal{E}}$的逆函子。□

2.4. 倾斜对象与例外序列. 设 $\mathcal{D}$ 是一个三角范畴。若对象$T \in \mathcal{D}$满足：对任意整数 $n \neq 0$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T, T[n]) \simeq 0$，则称其为预倾斜对象。若预倾斜对象$T$ 满足 $\mathcal{D} = \langle T \rangle$，则称其为倾斜对象。若加性范畴 $\mathcal{D}$ 中的任意幂等态射 $e \colon X \to X$ （即满足 $e^2 = e$的自同态 $e \colon X \to X$ ）都存在两个态射 $f \colon X \to Y$和 $g \colon Y \to X$ ，且它们属于 $\mathcal{D}$ 并满足 $fg = 1_Y$ 和 $gf = e$，则称 $\mathcal{D}$ 为幂等完备。若三角范畴 $\mathcal{D}$ 与某个 Frobenius范畴的稳定范畴三角等价，则称其为代数的。

命题 2.10. [12] 设 $\mathcal{D}$ 是一个代数的三角范畴， T 是 $\mathcal{D}$中的一个预倾斜对象，且$A = \mathrm{End}_{\mathcal{D}}(T)$。若 $\mathcal{D}$是幂等完备的，则存在一个三角等价 $F \colon \langle T \rangle \to \mathrm{per}\ A$，使得 $F(T) \simeq A$。

由命题 2.10 可知以下结果显然成立，且 F 可直接给出。

例 2.11. 设 A 是一个 K-代数，满足 gl.dim $A<\infty$，并设 $(e_k)^{k\in[1,n]}$ 是 A 的一组完备本原正交幂等元，且 $e=\sum^{k\in[1}$

e_k, $B=eAe$。

m令]

$$P=eA=\bigoplus_{k\in[1,m]}P_A(k),\quad P'=(1-e)A=\bigoplus_{k\in[m+1,n]}P_A(k),$$

$$S=\bigoplus_{k\in[1,m]}S_A(k),\quad S'=\bigoplus_{k\in[m+1,n]}S_A(k).$$

(a) 序列 $(e_k)^{k\in[1,m]}$ 是 B 的一组完备本原正交幂等元，并且存在一个三角等价 $F=$导出 $\mathrm{Hom}_A(P,-):\langle P\rangle\to\mathrm{per}\ B$，使得

$$F(P_A(i))\simeq P_B(i)\ for\ any\ i\in[1,m]. \tag{2.8}$$

(b) 若 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{per}\,A}(P',P)=0$，则满足以下条件：

$$\mathrm{per}\,A=\langle P'\rangle\perp\langle P\rangle=\langle S\rangle\perp\langle S'\rangle,\ \langle P\rangle=\langle S\rangle. \tag{2.9}$$

$$F(S_A(i))\simeq S_B(i),\ \text{对任意}\ i\in[1,m]\ \text{均成立。} \tag{2.10}$$

证明。(a) 函子 $F=(-)\mathbf{L}\otimes_A Ae:\mathrm{per}\ A\to\mathrm{per}\,B$ 有一个左伴随函子 $G=(-)\mathbf{L}\otimes_B eA:\mathbf{L}\mathrm{per}\ B\to\mathrm{per}\ A$。由于 $eA\otimes_A Ae\simeq B$ 作为 (B,B)-双模，我们有 $FG\simeq\mathrm{Id}$。因此 F: $\langle P\rangle\to\mathrm{per}\,B$ 是一个三角等价，使得

$$F(P_A(i))\simeq\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(P,P_A(i))\simeq\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}\,A}(P,P_A(i))\simeq e_iAe\simeq P_B(i).$$

(b) 由于对于任意整数 n，$\mathrm{Hom}^{\mathrm{per}\,A}(P,P'[n])\simeq 0$，因此有 $\langle P\rangle=\langle S\rangle$。由于对于任意整数 n，$\mathrm{Hom}^{\mathrm{per}\,A}(P,S'[n])\simeq 0$，因此 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{per}\,A}(S,S'[n])\simeq 0$ 对任意整数 n成立。于是

$$\mathrm{per}\,A=\langle S\oplus S'\rangle=\langle S\rangle\perp\langle S'\rangle.$$

由于

$$F(S_A(i))\simeq\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(P,S_A(i))\simeq\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}\,A}(P,S_A(i))\simeq(e_iA/A(1-e_i)A)e\simeq S_B(i)$$

作为 B-模，我们有 $F(S_A(i))\simeq S_B(i)$。 □

预倾斜对象 E 在 $\mathcal{D}$ 中称为例外对象，若 $\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(E)\simeq K$。

引理 2.12. [10, Lem.1.58] 设 E 是 $\mathcal{D}$ 中的例外对象。那么对于任意对象 $X\in\langle E\rangle$,

$$X\simeq\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}E^{\oplus d_n}[n]$$

其中 $d_n=\dim_K\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E,X[-n])=\dim_K\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,E[n])$。

我们回顾一下例外序列的概念；为便于本文后续使用，该概念作了略微修改。实际上，我们允许指标集为有限全序集。

定义 2.13. [10] 设 $\mathcal{D}$ 为三角范畴， S 为有限全序集。范畴 $\mathcal{D}$ 中由 S 索引的一族对象 $(E_k)_{k\in S}$ 称为例外序列，若满足以下条件：

(E1) 对任意 $k\in S$， E_k 都是例外对象。(E2) 若 $k<k'$，则对任意整数 n，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_k,E_{k'}[n])=0$。(E3) $\langle E_k\mid k\in S\rangle$ 是 $\mathcal{D}$的可容许子范畴。

若例外序列 $(E_k)_{k\in S}$ 满足以下条件，则称其为满的

$$\langle E_k\mid k\in S\rangle=\mathcal{D}.$$

例外序列的性质详见 [10]。一般而言，对于任意有限全序集合 S，利用唯一的保序同构 $s\colon [1,n]\to S$，我们可以将 $(E_k)_{k\in S}$ 与 $(E_{s(k)})^{k\in[1,n]}$ 视为相同。若 $S=[1,n]$，我们将族 $(E_k)_{k\in S}$ 记为 $(E_1,E_2,\dots,E_n)$。

若对任意对象 $X,Y\in\mathcal{D}$，$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y[n])$ 都具有有限维数，则称三角范畴 $\mathcal{D}$ 在 K 上是 Ext-有限的。

Lem题 2.14. [10, 引理 1.58] 设 $\mathcal{D}$ 是一个 Ext-有限三角范畴，E 是一个例外对象。$\mathcal{D}$中的对象。则 (E3) 成立。

设 $(E_k)_{k\in S}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个例外序列。对于任意 $T\subset S$，定义

$$E_T:=\bigoplus_{k\in T}E_k.$$

引理 2.15. 设 $\mathcal{D}$ 是一个 Ext-有限三角范畴，$(E_k)_{k\in S}$ 是$\mathcal{D}$中的一个例外序列。对于任意 $T\subset S$，$\langle E_T\rangle$ 是 $\mathcal{D}$的一个可容许子范畴。

证明. 不失一般性，我们可以假设 $T=[1,n]$。由于

$$\langle E_T\rangle=\langle E_1\rangle\perp\langle E_2\rangle\perp\cdots\perp\langle E_n\rangle$$

并且 $\langle E_k\rangle$ 是 $\mathcal{D}$ 的可容许子范畴，由引理 2.14，$\langle E_T\rangle$ 也是 $\mathcal{D}$ 的可容许子范畴，由引理 2.6。□

引理 2.16. 设 $\mathcal{D}$ 是一个具有 Serre函子 $\mathbb{S}\colon\mathcal{D}\to\mathcal{D}$的 Ext-有限三角范畴，并设

$$(E_1,E_2,\dots,E_n)$$

是 $\mathcal{D}$中的一个例外序列。

(a) 序列

$$(E_2,\dots,E_n,\mathbb{S}_{\langle E_{[1,n]}\rangle}(E_1))$$

is an exceptional sequence and $\langle E_{[1,n]}\rangle=\langle E_{[2,n]}\rangle\perp\langle\mathbb{S}_{\langle E_{[1,n]}\rangle}(E_1)\rangle$.

(b) 也$\mathcal{D}$序列

$$(\mathbb{S}^{-1}_{\langle E_{[1,n]}\rangle}(E_n),E_1,\dots,E_{n-1})$$

是一个例外序列，且 $\langle E_{[1,n]}\rangle=\langle\mathbb{S}^{-1}_{\langle E_{[1,n]}\rangle}(E_n)\rangle\perp\langle E_{[1,n-1]}\rangle$.

证明。(a) 由于 $\mathbb{S}_{\langle E_{[1,n]}\rangle}\colon\langle E_{[1,n]}\rangle\to\langle E_{[1,n]}\rangle$ 是一个三角等价，且 E_1 是一个例外对象，因此 $\mathbb{S}_{\langle E_{[1,n]}\rangle}(E_1)$ 也是一个例外对象。若 $k\in[2,n]$，则

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_k,\mathbb{S}_{\langle E_{[1,n]}\rangle}(E_1)[n])\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_1,E_k[-n])^*=0$$

对任意整数 n 均成立。因此序列

$$(E_2,\dots,E_n,\mathbb{S}_{\langle E_{[1,n]}\rangle}(E_1))$$

是一个例外序列。由于

$$\mathbb{T}_{\langle E_1\rangle}\mathbb{S}_{\langle E_{[1,n]}\rangle}(E_1)\overset{2.8(\mathrm{b})}{=}\mathbb{S}_{\langle E_1\rangle}(E_1)\overset{2.12}{=}E_1,$$

存在一个三角形

$$E_1\to\mathbb{S}_{\langle E_{[1,n]}\rangle}(E_1)\to\mathbb{F}_{\langle E_{[2,n]}\rangle}\mathbb{S}_{\langle E_{[1,n]}\rangle}(E_1)\to E_1[1],$$

因此，最后一个断言得证。

(b) 这是 (a) 的对偶。 □

引理 2.17. 设 $\mathcal{D}$ 是一个带有 Serre函子 $\mathbb{S}\colon \mathcal{D}\to\mathcal{D}$ 的 Ext-有限三角范畴，并设 $(E_k)_{k\in[1,n]}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个完全例外序列。若存在整数 $p<q$ 使得

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_{[q+1,n]},\mathbb{S}_{\langle E_{[p,q]}\rangle}(E_p)[n])=0 \text{ for any integer } n, \tag{2.11}$$

then

$$\mathbb{T}^{\mathcal{D}}_{\langle E_{[1,n]\setminus\{p\}}\rangle}(E_p)\simeq \mathbb{T}^{\langle E_{[p,q]}\rangle}_{\langle E_{[p+1,q]}\rangle}(E_p).$$

证明。令 $\mathcal{D}'=\langle E_{[p,q]}\rangle$、$\mathcal{E}=\langle E_{[1,n]\setminus\{p\}}\rangle$、$\mathcal{F}=\langle \mathbb{S}_{\langle E_{[p,q]}\rangle}(E_p)\rangle$、$\mathcal{E}'=\langle E_{[p+1,q]}\rangle$。于是我们有半正交分解

$$\mathcal{D}'=\langle E_p\rangle\perp\langle E_{[p+1,q]}\rangle \overset{2.16_{(a)}}{=} \mathcal{E}'\perp\mathcal{F} \text{ and}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}&=\langle E_{[1,p-1]}\rangle\perp\langle E_p\rangle\perp\mathcal{E}'\perp\langle E_{[q+1,n]}\rangle \overset{2.16_{(a)}}{=} \langle E_{[1,p-1]}\rangle\perp\mathcal{E}'\perp\mathcal{F}\perp\langle E_{[q+1,n]}\rangle\\ &\overset{(2.11)}{=}\langle E_{[1,p-1]}\rangle\perp\mathcal{E}'\perp\langle E_{[q+1,n]}\rangle\perp\mathcal{F}=\mathcal{E}\perp\mathcal{F}.\end{aligned}$$

因此 $\mathbb{T}^{\mathcal{D}}_{\mathcal{E}}(E_p)\overset{2.7}{=}\mathbb{T}^{\mathcal{D}'}_{\mathcal{E}'}(E_p)$，断言得证。 □

引理 2.18。设 A、B 是两个 K-代数，E 是 $\mathrm{per}\,A$ 中的一个例外对象。则

$$F=E\otimes(-):\mathrm{per}\,B\to\mathrm{per}(A\otimes B)$$

这是一个全忠实三角函子，并诱导出一个三角等价 $F\colon \mathrm{per}\,B\to\langle E\otimes B\rangle$。

证明。由于 $E\otimes B$ 是一个预倾斜对象，且态射 $f\colon B\to\mathrm{REnd}_{A\otimes B}(E\otimes B)$；$b\to 1\otimes b$ 是微分分次代数之间的拟同构，因此函子

$$F'=\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{A\otimes B}(E\otimes B,-):\langle E\otimes B\rangle\to\mathrm{per}\,B$$

是一个三角等价。由于 $F'F\simeq\mathrm{Id}$，断言得证。 □

引理 2.19. 设 A 是一个 K-代数，B 是一个 Iwanaga-Gorenstein K-代数，$C=A\otimes B$。则 $G=(-)\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_C(A\otimes B^*):\mathrm{per}\ C\to\mathrm{per}\ C$ 是一个三角自等价，并且对于任意例外对象 $E\in\mathrm{per}\,A$，$G|_{\langle E\otimes B\rangle}\colon\langle E\otimes B\rangle\to\langle E\otimes B\rangle$ 是一个 Serre函子。

证明。由于 B 是一个 Iwanaga-Gorenstein 代数，$G=(-)\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_C(A\otimes B^*):\mathrm{per}\ C\to\mathrm{per}\,C$ 是一个三角等价。由引理 2.18，对于任意对象 $X\in\langle E\otimes B\rangle$，存在一个对象 $Y\in\mathrm{per}\,B$，使得 $X\simeq E\otimes Y$。由于存在函子同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}\,C}(E\otimes Y,G(E\otimes Y'))\simeq\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}\,C}(E\otimes Y,E\otimes\nu_B(Y'))\simeq\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}\,C}(E\otimes Y',E\otimes Y)^*,$$

我们有 $G|_{\langle E\otimes B\rangle}$ 是一个Serre函子。 □

3. S-FAMILIES

3.1. 弱 S族。本节中，设 $\mathcal{D}$ 是一个满足以下条件的三角范畴:

$$\mathcal{D}\text{ 是代数的、幂等完备的、Ext-有限的，并且具有Serre函子 }\mathbb{S}。 \tag{3.1}$$

设 S 是 $\mathbb{Z}^2$ 的有限子集。对于任意元素 $(i,j)\in S$，

$$S_{i,j}:=([i-1,i]\times[j-1,j])\cap S.$$

例 3.1. 设 $I_1 = [1,5]$、$I_2 = I_3 = [1,3]$、$I_4 = \{1\}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的区间。$S = \bigsqcup_{i\in[1,4]} \{i\} \times I_i$ 的图形如下：

$$\begin{array}{ccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) \\ (2,1) & \boxed{(2,2)} & \boxed{(2,3)} & & \\ (3,1) & \boxed{(3,2)} & \boxed{(3,3)} & & \\ (4,1) & & & & \end{array}$$

在上图中，方框表示子集 $S_{3,\ 3}$。

定义 3.2. 设 $\mathcal{D}$ 是满足 (3.1) 的三角范畴。对象 $\mathcal{D}$ 中由 S 的有限子集索引的族 $(X_{i,\ j})_{(i,j)\in S}$ 称为弱 S-族，如果满足以下条件：

(L1) 对任意 $(i,j) \in S$，$X_{i,\ j}$ 是例外对象。(L) H
2 $\mathrm{om}_{\mathcal{D}}(X_{i,j}, X_{i',j'}[n]) = 0$ f或任意整数 $n$un $l$ess $(i',j') \in S_{i,\ j}$。
若一个弱 S-族 $(X_{i,\ j})_{(i,j)\in S}$ 是满的，则称其为满的，当且仅当

$$\langle X_{i,j} \mid (i,j) \in S \rangle = \mathcal{D}.$$

S-族这一名称源自格。

注 3.3。条件（L2）成立，当且仅当以下条件成立：（L2.1）对于任意整数 n，除非 $i' \in [i-1, i]$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,\ j}、\ X_{i',\ j'}[n]) = 0$。（L2.2）对于任意整数 n，除非 $j' \in [j-1, j]$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,\ j}、\ X_{i',\ j'}[n]) = 0$。

如果 $(X_{i,\ j})_{(i,j)\in S}$ 是一个弱 S-族，那么对于任意 $T \subset S$，族 $(X_{i,\ j})_{(i,j)\in T}$ 是一个弱 T-族。设 $(X_{i,\ j})_{(i,j)\in S}$ 是 $\mathcal{D}$中的对象族。对于 S的任意有限子集 T，令

$$X_T := \bigoplus_{(i,j)\in T} X_{i,j} \in \mathcal{D}. \tag{3.2}$$

特别地，X_k 和 X^k 定义为

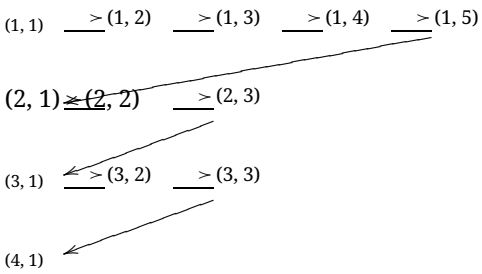
$$X_k := X_{\{k\}\times S_k} = \bigoplus_{j\in S_k} X_{k,j}, \quad X^k := X_{S^k\times\{k\}} = \bigoplus_{i\in S_k} X_{i,k} \tag{3.3}$$

$$\text{where } S_k = \{j \in \mathbb{Z} \mid (k,j) \in S\}, \quad S^k = \{i \in \mathbb{Z} \mid (i,k) \in S\}.$$

引理 3.4. 设 $(X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是 $\mathcal{D}$中的一个弱 S-族。则 $\langle X_S \rangle$ 是 $\mathcal{D}$的一个可容许子范畴。特别地，$\langle X_i \rangle$ 和 $\langle X^j \rangle$ 是可容许子范畴。

证明. 将 $\mathbb{Z}^2$的字典序 4 限制后，我们将 S 视为一个全序集。例 3.1 中 S 的字典序如下所示。

(3.4)



条件（L2）推出以下条件：

若 $(i,j) \prec (i',j')$，则对于任意整数 n，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,\ j}, X_{i',\ j'}[n]) = 0$。(E2)

因此，我们可以将弱 S-族 $(X_{i,\ j})_{(i,j)\in S}$ 视为一个例外序列。于是，该断言由引理 2.
15 □得出。

由 (L2) 可知，以下观察显而易见。

引理 3.5. 设 $(X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是 $\mathcal{D}$中的一个弱 S-族。那么，对于任意 $(i,j) \in S$， X_S 是一个预倾斜对象，当且仅当$X_{S_{i,j}}$ 是一个预倾斜对象。

证明. 只需证明，对于每个 (i,j)、$(i',j') \in S$和 $n \neq 0$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j}, X_{i',j'}[n]) = 0$。若 $(i',j') \notin S_{i,j}$，则由 (2.9) 可得此结论。否则，由于$X_{S_{i,j}}$ 是一个预倾斜对象，结论成立。□

3.2. 代数 $L(S)$。令 $\mathcal{N}$ 为如下定义的 K-线性范畴

$$\mathcal{N} := (K\mathbb{A}_\infty^\infty)^{\mathrm{op}}/(\mathrm{rad}(K\mathbb{A}_\infty^\infty)^{\mathrm{op}})^2$$

其中 $\mathbb{A}_\infty^\infty$ 是箭图

$$\mathbb{A}_\infty^\infty = [\cdots \xrightarrow{a_{-3}} -2 \xrightarrow{a_{-2}} -1 \xrightarrow{a_{-1}} 0 \xrightarrow{a_0} 1 \xrightarrow{a_1} 2 \xrightarrow{a_2} \cdots],$$

以及 $\mathrm{rad}\, K\mathbb{A}_\infty^\infty = \langle a_n \mid n \in \mathbb{Z}\rangle$。对于 $\mathbb{Z}$ 的任意子集 I，设 Q_I 为 $\mathbb{A}_\infty^\infty$ 中顶点集合为 I 的全子箭图。我们将 $N(I)$ 定义为

$$N(I) := KQ_I^{\mathrm{op}}/(\mathrm{rad}\, KQ_I^{\mathrm{op}})^2.$$

特别地，我们将 $N(k)$ 定义为

$$N(k) := N([1,k]).$$

弱 S-族的典型例子如下：

例 3.6。设 $\mathcal{L} = \mathcal{N} \otimes \mathcal{N}$. per $\mathcal{L}$ 是满足 (3.1) 的三角范畴。对于 $\mathbb{Z}^2$ 的任意有限子集 S，族 $(P_{\mathcal{L}}(i,j))_{(i,j)\in S}$ 是 $\mathrm{per}\,\mathcal{L}$ 中的弱 S-族。

对于 $\mathbb{Z}^2$ 的任意有限子集 S，我们将代数 $L(S)$ 定义为

$$L(S) = \mathrm{End}_{\mathrm{per}\,\mathcal{L}}(\bigoplus_{(i,j)\in S} P_{\mathcal{L}}(i,j)).$$

于是存在一个三角等价

$$\langle P_{\mathcal{L}}(i,j) \mid (i,j) \in S\rangle_{\mathrm{per}\,\mathcal{L}} \to \mathrm{per}\, L(S).$$

引理 3.7。 K-线性范畴 $\mathcal{L}$ 是自内射的，而范畴 $\mathrm{per}\,\mathcal{L}$ 是满足 (3.1) 的三角范畴。

证明。由于

$$I_{\mathcal{L}}(i,j) = P_{\mathcal{L}}(i-1, j-1)$$

对于任意 $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$， $\mathcal{L}$ 都是自内射的。由命题 2.3，结论得证。 □

3.3. S-族。

定义 3.8。设 $\mathcal{D}$ 为满足 (3.1) 的三角范畴。设 S 为 $\mathbb{Z}^2$的有限子集。若 $\mathcal{D}$ 中的弱 S-族 $(X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 满足以下条件，则称其为 S-族：
(S1) 若 (i,j)、$(i,j-1) \in S$，则 $\mathbb{S}_{\langle X_i\rangle}(X_{i,j}) \simeq X_{i,j-1}$。(S2) 若 (i,j)、$(i-1,j) \in S$，则 $\mathbb{S}_{\langle X^j\rangle}(X_{i,j}) \simeq X_{i-1,j}$。(S3) 若 (i,j)、$(i-1,j-1) \in S$，则 $\mathbb{S}_{\langle X_S\rangle}(X_{i,j}) \simeq X_{i-1,j-1}$。
如果满足以下条件，则称 S-族 $(X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是满的：

$$\langle X_{i,j} \mid (i,j) \in S\rangle = \mathcal{D}.$$

以下结果给出了一个典型的 S-族例子：

Exa例 3.9. 对于任意有限子集 $S \subset \mathbb{Z}^2$，族 $(P_{\mathcal{L}}(i,j))_{(i,j)\in S}$ 是 per $\mathcal{L}$ 中的一个 S-族 .

证明. 令 $X_{i,j} = P_{\mathcal{L}}(i,j)$。根据例 3.6，族 $(X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是 per $\mathcal{L}$ 中的弱 S-族。若 (i,j)，$(i,j-1) \in S$，因为

$$\nu_{\langle P_{\mathcal{L}}(i,j')\mid j'\in\mathbb{Z}\rangle}(X_{i,j}) = X_{i,j-1} \in \langle X_i\rangle,$$

我们有 $\nu_{\langle X_i\rangle}(X_{i,j}) \overset{2.8(c)}{=} X_{i,j-1}$. 对偶地，我们有：若 (i,j), $(i-1,j) \in S$，则 $\nu_{\langle X^j\rangle}(X_{i,j}) \simeq X_{i-1,j}$. 因此 (S1) 和 (S2) 得以满足。若 (i,j), $(i-1,j-1) \in S$，

$$\nu(X_{i,j}) \simeq X_{i-1,j-1} \in \langle X_S\rangle.$$

因此我们有 $\nu_{\langle X_S\rangle}(X_{i,j}) \overset{2.8(c)}{=} X_{i-1,j-1}$ 且 (S3) 得以满足。因此断言成立。 □

例 3.10. 设 $S = [1,p]\times[1,q]$。族 $(S(i,j)[-i-j])_{(i,j)\in S}$ 是 per$(K\mathbb{A}_p \otimes K\mathbb{A}_q)$ 中的一个满 S-族。存在一个三角等价 $F\colon \mathrm{per}(K\mathbb{A}_p \otimes K\mathbb{A}_q) \to \mathrm{per}(N(p) \otimes N(q))$，使得 $F(S(i,j)[-i-j]) \simeq P(i,j)$。

证明。令 $A = K\mathbb{A}_p \otimes K\mathbb{A}_q$，$B = N(p) \otimes N(q)$，

$$X_{i,j} = S_A(i,j)[-i-j].$$

我们构造一个三角等价 $G\colon \mathrm{per}\ A \to \mathrm{per}\ B$，使得 $G(X_{i,j}) = P_B(i,j)$。由于

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}\,K\mathbb{A}_m}(S_{K\mathbb{A}_m}(j)[-j], S_{K\mathbb{A}_m}(i)[-i+k]) \simeq \begin{cases} K & j \in \{i, i+1\},\ k = 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

对象 $T_m = \bigoplus_{i\in[1,m]} S_{K\mathbb{A}_m}(i)[-i]$ 是 per $K\mathbb{A}_m$ 中的一个倾斜对象，使得 $\mathrm{End}^{\mathrm{per}\,K\mathbb{A}_m}(T_m) \simeq N(m)$。于是存在一个三角等价 $F\colon \mathrm{per}\ K\mathbb{A}_m \to \mathrm{per}\ N(m)$，使得 $F(S_{K\mathbb{A}_m}(i)[-i]) \simeq P_{N(m)}(i)$。因此，$T = T_p \otimes T_q$ 是一个倾斜对象，使得 $\mathrm{End}^{\mathrm{per}\,A}(T) \simeq B$，并且存在一个三角等价 $G\colon \mathrm{per}\ A \to \mathrm{per}\, B$，使得 $G(X_{i,j}) \simeq P_B(i,j)$。根据例 3.9，断言得证。□

一般而言，利用以下结果，如果在 $\mathcal{D}$ 中存在一个满的 S-族 $(X_{i,j})_{(i,j)\in S}$，那么就存在一个三角等价 $F\colon \mathcal{D} \to \mathrm{per}\ L(S)$，且 F 将 Example 3.9 中的 $(X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 映射为 $(P(i,j))_{(i,j)\in S}$。

定理 3.11. 设 $\mathcal{D}$ 是满足 (3.1) 的三角范畴，S 是 $\mathbb{Z}^2$ 的一个有限子集。对于 $\mathcal{D}$ 中任意的S-族 $(X_{i,j})_{(i,j)\in S}$，X_S 是一个预倾斜对象，满足 $\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(X_S) \simeq L(S)$，并且存在一个三角等价

$$F : \langle X_S\rangle \to \mathrm{per}\, L(S)$$

使得对于任意 $(i,j) \in S$，$F(X_{i,j}) \simeq P_{\mathcal{L}}(i,j)$。特别地，存在一个全忠实三角函子 $G\colon \langle X_S\rangle \to \mathrm{per}\,\mathcal{L}$，使得对于任意 $(i,j) \in S$，$G(X_{i,j}) = P_{\mathcal{L}}(i,j)$。

下面的结果是定理 3.11 证明中的关键一步：

命题 3.12. 设 $(X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是满足 (S3) 的弱 S-族。
(a) 条件 (S1) 等价于以下条件：(S1′) 若 (i,j), $(i,j-1) \in S$，则 $\mathbb{F}_{\langle X^{j-1}\rangle}(X_{i,j}) = X_{i,j-1}$。(b) 条件 (S2) 等价于以下条件：
(S2′) 若 (i,j), $(i-1,j) \in S$，则 $\mathbb{F}_{\langle X_{i-1}\rangle}(X_{i,j}) = X_{i-1,j}$。

为证明命题 3.12，我们证明以下结果：

引理 3.13. 设 S 是 $\mathbb{Z}^2$ 的有限子集，i 是满足 $S_i \neq \emptyset$ 的整数。设 $(X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是满足 (S1′) 的弱 S-族。则 X_i 是一个预倾斜对象，使得 $\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(X_i) \simeq N(S_i)$，且存在一个三角等价 $F\colon \langle X_i\rangle \to \mathrm{per}\ N(S_i)$，使得 $F(X_{i,j}) \simeq P(j)$。

证明. 若 $j, j-1 \in S_i$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j}, X_{i,j-1}[n]) &\overset{(2.1)}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{F}_{\langle X^{j-1}\rangle}(X_{i,j}), X_{i,j-1}[n]) \\ &\overset{(\mathrm{S1}')}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j-1}, X_{i,j-1}[n]) \overset{(\mathrm{L1})}{=} \begin{cases} K & n=0, \\ 0 & n \neq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

由引理 3.5，X_i 是一个预倾斜对象。若 $j' \notin [j-1, j]$，由于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,\ j}, X_{i,\ j'}) \overset{(\mathrm{L2})}{=} 0$，我们有 $\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(X_i) \simeq N(S_i)$。□

由对称性，我们得到以下结果：

引理 3.14. 设 S 是 $\mathbb{Z}^2$的一个有限子集，j 是一个整数，使得 $S^j \neq \emptyset$. 令 $(X_{i,\ j})_{(i,j)\in S}$为满足 (S2′) 的弱 S-族。那么 X^j 是一个预倾斜对象，且 $\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(X^j) \simeq N(S^j)$，并且存在一个三角等价 $G\colon \langle X^j\rangle \to \mathrm{per}\ N(S^j)$，使得 $G(X_{i,\ j}) \simeq P(i)$。

现在我们准备好证明命题 3.12。

命题 3.12 的证明。(a) 我们证明“若”部分。由于满足 (S1)′，根据引理 3.13，存在一个三角等价 $F\colon \langle X_i\rangle \to \mathrm{per}\ A$，使得 $F(X_{i,\ j}) \simeq P_A(j)$，其中 $A = N(S_i)$。若 (i,j)、$(i,j-1) \in S$，则

$$\mathbb{S}_{\langle X_i\rangle}(X_{i,j}) \simeq \mathbb{S}_{\langle X_i\rangle} F^{-1}(P_A(j)) \overset{2.2}{=} F^{-1}(\nu_A(P_A(j))) \simeq F^{-1}(P_A(j-1)) \simeq X_{i,j-1}.$$

因此满足 (S1)。

我们证明“仅若”部分。设 (i,j)、$(i,j-1) \in S$。若 $(i-1,j-1) \notin S$，则

$$\begin{aligned}\langle X^{j-1}\rangle &= \langle X_{\leqslant i-2,j-1}\rangle \perp \langle X_{i,j-1}\rangle \perp \langle X_{\geqslant i+1,j-1}\rangle \\ &\overset{(\mathrm{L2})}{=} \langle X_{i,j-1}\rangle \perp \langle X_{\leqslant i-2,j-1}\rangle \perp \langle X_{\geqslant i+1,j-1}\rangle.\end{aligned}$$

由于

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{F}_{\langle X^{j-1}\rangle}(X_{i,j}), X_{\geqslant i+1,j-1}[n]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j}, X_{\geqslant i+1,j-1}[n]) \overset{(\mathrm{L2})}{=} 0 \quad \text{and}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{F}_{\langle X^{j-1}\rangle}(X_{i,j}), X_{\leqslant i-2,j-1}[n]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j}, X_{\leqslant i-2,j-1}[n]) \overset{(\mathrm{L2})}{=} 0$$

对于任意整数 n，我们有 $\mathbb{F}_{\langle X^{j-1}\rangle}(X_{i,\ j}) \in \langle X_{i,\ j-1}\rangle$。由于

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{F}_{\langle X^{j-1}\rangle}(X_{i,j}), X_{i,j-1}[n]) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j}, X_{i,j-1}[n]) \overset{(\mathrm{S1})}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j}, \mathbb{S}_{\langle X_i\rangle}(X_{i,j})) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j}, X_{i,j}[n])^* \overset{(\mathrm{L1})}{=} \begin{cases} K & n=0, \\ 0 & n \neq 0, \end{cases}\end{aligned}$$

我们有 $\mathbb{F}_{\langle X^{j-1}\rangle}(X_{i,\ j}) \overset{2.12}{=} X_{i,\ j-1}$。若 $(i-1,j-1) \in S$，则

$$\mathbb{F}_{\langle X^{j-1}\rangle}(X_{i,j}) \overset{(\mathrm{S3})}{=} \mathbb{F}_{\langle X^{j-1}\rangle}\mathbb{S}^{-1}(X_{i-1,j-1}) \overset{2.8(b)}{=} \mathbb{S}^{-1}_{\langle X^{j-1}\rangle}(X_{i-1,j-1}). \tag{3.5}$$

由于

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^{-1}_{\langle X^{j-1}\rangle}(X_{i-1,j-1}), X_{\geqslant i+1,j-1}[n]) &\overset{(3.5)}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{F}_{\langle X^{j-1}\rangle}(X_{i,j}), X_{\geqslant i+1,j-1}[n]) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j}, X_{\geqslant i+1,j-1}[n]) \simeq 0\end{aligned}$$

对于任意整数 n，我们有 $\mathbb{S}^{-1}_{\langle X^{j-1}\rangle}(X_{i-1,\ j-1}) \in \langle X_{\leqslant i,\ j-1}\rangle$，因此

$$\mathbb{F}_{\langle X^{j-1}\rangle}(X_{i,j}) \overset{(3.5)}{=} \mathbb{S}^{-1}_{\langle X^{j-1}\rangle}(X_{i-1,j-1}) \overset{2.8(c)}{=} \mathbb{S}^{-1}_{\langle X_{\leqslant i,j-1}\rangle}(X_{i-1,j-1}). \tag{3.6}$$

设 $T = X_{i,\ j-1} \oplus X_{i-1,\ j-1}$。由于

$$\mathbb{T}_{\langle X_i\rangle}(X_{i-1,j-1}) \overset{(\mathrm{S3})}{=} \mathbb{T}_{\langle X_i\rangle}\mathbb{S}_{\langle X_S\rangle}(X_{i,j}) \overset{(\mathrm{S1})}{=} X_{i,j-1},$$

我们有

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j-1},X_{i-1,j-1}[n]) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j-1},\mathbb{T}_{\langle X_i\rangle}(X_{i-1,j-1})[n]) \tag{3.7}$$

$$\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j-1},X_{i,j-1}[n]) \overset{(\mathrm{L1})}{=} \begin{cases} K & n=0,\\ 0 & n\neq 0. \end{cases}$$

因此，T是一个预倾斜对象，使得 $\operatorname{End}_{\mathcal{D}}(T)\simeq N(2)$，从而存在一个三角等价$F\colon \langle T\rangle \to \operatorname{per} B$，满足 $F(P_B(1))\simeq X_{i-1,\,j-1}$ 且 $F(P_B(2))\simeq X_{i,\,j-1}$ 其中 $B=N(2)$。令 $\mathcal{E}=\langle X_{\leqslant i,\,j-1}\rangle$, $\mathcal{F}=\langle X_{\leqslant i-2,\,j-1}\rangle$ 和 $\mathcal{F}'=\langle \mathbb{S}^{-1}_{\langle T\rangle}(X_{i,\,j-1})\rangle$。那么

$$\mathcal{E} \overset{(\mathrm{L2})}{=} \mathcal{F}\perp\langle X_{i-1,j-1}\rangle\perp\langle X_{i,j-1}\rangle \overset{2.16(b)}{=} \mathcal{F}\perp\mathcal{F}'\perp\langle X_{i-1,j-1}\rangle$$

$$\overset{2.16(b)}{=} \langle \mathbb{S}^{-1}_{\mathcal{E}}(X_{i-1,j-1})\rangle\perp\mathcal{F}\perp\mathcal{F}'.$$

另一方面，

$$\mathcal{E} \overset{(\mathrm{L2})}{=} \mathcal{F}\perp\langle X_{i-1,j-1}\rangle\perp\langle X_{i,j-1}\rangle \overset{2.16(a)}{=} \mathcal{F}\perp\langle X_{i,j-1}\rangle\perp\langle \mathbb{S}_{\langle T\rangle}(X_{i-1,j-1})\rangle$$

$$\overset{(\mathrm{L2})}{=} \langle X_{i,j-1}\rangle\perp\mathcal{F}\perp\langle \mathbb{S}_{\langle T\rangle}(X_{i-1,j-1})\rangle \overset{2.4}{=} \langle X_{i,j-1}\rangle\perp\mathcal{F}\perp\mathcal{F}'.$$

因此 $\langle \mathbb{S}^{-1}_{\mathcal{E}}(X_{i-1,\,j-1})\rangle = \langle X_{i,\,j-1}\rangle$。由于

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^{-1}_{\mathcal{E}}(X_{i-1,j-1}),X_{i,j-1}[n]) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j-1},X_{i-1,j-1}[-n])^* \overset{(3.7)}{=} \begin{cases} K & n=0,\\ 0 & n\neq 0, \end{cases}$$

我们有 $\mathbb{S}^{-1}_{\mathcal{E}}(X_{i-1,\,j-1}) \overset{2.12}{=} X_{i,\,j-1}$，因此 $\mathbb{F}_{\langle X^{j-1}\rangle}(X_{i,\,j}) \overset{(3.6)}{=} \mathbb{S}^{-1}_{\mathcal{E}}(X_{i-1,\,j-1}) \simeq X_{i,\,j-1}$。因此 (S1)′成立。

(b) 这是 (a) 的对偶。 □

根据 $L(S)$ 的定义，以下结果显然成立。证明留给读者：

引理 3.15. 设 $(X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是一个对象族 $X_{i,j}\in\mathcal{D}$。假设存在一个态射族 $(v^{i,i'^{\,j}}{}_{,j'}\colon X_{i,j}\to X_{i',j'})_{(i,j),\,(i',j')\in S}$（态射可能为零），以及非零标量族 $(c_{i,j})_{(i,j)\in S}$、$(c'_{i,j})_{(i,j)\in S}$，满足以下条件：

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j},X_{i',j'}) = Kv^{i,i'^{\,j}}{}_{,j'}. \tag{3.8}$$

$$(i',j')\in S_{i,j} \text{ 当且仅当 } v^{i,i'^{\,j}}{}_{,j'}\neq 0. \tag{3.9}$$

若 (i,j)、$(i,j-1)$、$(i-1,j-1)\in S$，则 $c_{i,j}v^{i,i-1^{\,j-1}}{}_{,j-1}v^{i,i^{\,j}}{}_{,j-1}=v^{i,i^{\,j}}{}_{,i-1,j-1}$。(3.10) 若 (i,j)、$(i-1,j)$、$(i-1,j-1)\in S$，则 $c'_{i,j}v^{i-1,i-1^{\,j}}{}_{,j-1}v^{i,i^{\,j}}{}_{,i-1,j}=v^{i,i^{\,j}}{}_{,i-1,j-1}$。(3.11)

那么存在一个同构 $f\colon \operatorname{End}_{\mathcal{D}}(X_S)\to L(S)$，它是 K-代数，并且 $P(i,j)_f\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X_S,X_{i,j})$ 作为 $\operatorname{End}_{\mathcal{D}}(X_S)$-模，其中 $P(i,j)_f$ 是与 f 和 $P(i,j)$ 相关联的 $\operatorname{End}_{\mathcal{D}}(X_S)$-模。

现在我们准备证明定理 3.11。

定理 3.11 的证明。由于 $(X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是一个弱 S-族，我们有

$$\dim_K \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j},X_{i-1,j}[n]) \overset{3.13}{=} \begin{cases} 1 & n=0,\\ 0 & n\neq 0, \end{cases}$$

$$\dim_K \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j},X_{i,j-1}[n]) \overset{3.14}{=} \begin{cases} 1 & n=0,\\ 0 & n\neq 0, \end{cases}$$

$$\dim_K \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j},X_{i-1,j-1}[n]) \overset{(\mathrm{S3})}{=} \dim_K \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j},\mathbb{S}_{\langle X_S\rangle}(X_{i,j})[n])$$

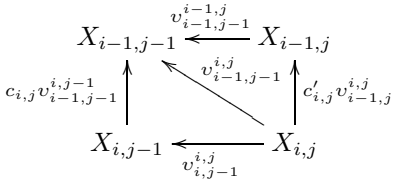
$$= \dim_K \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j}, X_{i,j}[-n])^* \overset{(\mathrm{L1})}{=} \begin{cases} 1 & n = 0, \\ 0 & n \neq 0. \end{cases}$$

特别地，$X_{S_{i,j}}$ 是一个预倾斜对象。因此，根据引理 3.5，X_S 是一个倾斜对象。

根据上述计算，满足以下条件：

(3.12) 若 $(i', j') \in S_{i,j}$，则 $\dim_K \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j}, X_{i',j'}) = 1$。

由条件 (L2) 和 (3.12)，存在一族 $(\upsilon^{i}{}_{i'}{}^{j}{}_{,j'} : X_{i,j} \to X_{i',j'})_{(i,j),(i',j')\in S}$ 态射满足 (3.8) 和 (3.9)。由 (S1′) 和 (S2′)，条件 (3.10) 和 (3.11) 得以满足。



因此，该断言由引理 3.15 得出。 □

3.4. S-族的一个性质。设 $(X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是一个 S-族。对于任意 $J \subset \mathbb{Z}$，定义

$$X_{i,J} = \bigoplus_{j \in J \cap S_i} X_{i,j}.$$

特别是

$$X_{i,>j} = X_{(j,\infty)}, \quad X_{i,\geqslant j} = X_{[j,\infty)}, \quad X_{i,<j} = X_{(-\infty,j)}, \quad X_{i,\leqslant j} = X_{(-\infty,j]}.$$

在本节中，我们证明以下结果，这是下一节定理 4.3 证明的关键步骤。设 $(X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是一个 S-族，且 $(i,j) \in S$。若 $(i-1,j)$、$(i-1,j-1) \in S$，则由 (S1) 和 (S3)，有 $\mathbb{S}_{\langle X_S\rangle}(X_{i,j}) \simeq X_{i-1,j-1} \simeq \mathbb{S}_{\langle X_{i-1}\rangle}(X_{i-1,j})$。下面将说明，在不假设 $(i-1,j-1) \in S$ 的情况下，只要满足 $S_i \subset S_{i-1}$，$\mathbb{S}_{\langle X_S\rangle}(X_{i,j}) \simeq \mathbb{S}_{\langle X_{i-1}\rangle}(X_{i-1,j})$ 仍然成立。

命题 3.16. 设 $(X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个 S-族，且 $(i,j) \in S$。若 $S_i \subset S_{i-1}$，则 $\mathbb{S}_{\langle X_S\rangle}(X_{i,j}) \simeq \mathbb{S}_{\langle X_{i-1}\rangle}(X_{i-1,j}) \in \langle X_{i-1}\rangle$。

为证明命题 3.16，我们证明以下结果：

引理 3.17. 设 $(X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个 S-族，且 (i,j)、$(i,j-1) \in S$。则

$$\mathbb{T}^{\langle X_i\rangle}_{\langle X_{i,\geqslant j}\rangle}(X_{i,j-1}) = \mathbb{S}_{\langle X_{i,S_i\setminus\{j-1\}}\rangle}(X_{i,j}).$$

证明. 设 $Y = \mathbb{T}^{\langle X_i\rangle}_{\langle X_i\rangle}{}_{,\geqslant j)}(X_{i,j-1})$。由于 $(X_{i,j})_{j\in S_i}$ 被视为例外序列 ，

$$\langle X_{i,\geqslant j}\rangle = \langle X_{i,j}\rangle \perp \langle X_{i,>j}\rangle \overset{2.16(a)}{=} \langle X_{i,>j}\rangle \perp \langle E\rangle$$

其中 $E = \mathbb{S}_{\langle X_{i,\geqslant j}\rangle}(X_{i,j})$。于是

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,>j}, Y[n]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,>j}, X_{i,j-1}[n]) = 0$$

对任意整数 n。我们有 $Y \in \langle E\rangle$. 。由于 E 是一个例外对象，且

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, E[n]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j}, Y[-n])^* \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j}, X_{i,j-1}[-n])^* \overset{(\mathrm{S1})}{=} \begin{cases} K & n = 0, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

我们有 $Y \overset{2.12}{=} E$. 。由于

$$\langle X_{i,S_i\setminus\{j-1\}}\rangle = \langle X_{i,<j-1}\rangle \perp \langle X_{i,\geqslant j}\rangle \overset{(\mathrm{L2})}{=} \langle X_{i,\geqslant j}\rangle \perp \langle X_{i,<j-1}\rangle,$$

我们有

$$\mathbb{S}_{\langle X_{i,S_i\setminus\{j-1\}}\rangle}(X_{i,j}) \simeq \mathbb{T}^{\langle X_i\rangle}_{\langle X_{i,S_i\setminus\{j-1\}}\rangle}\mathbb{S}_{\langle X_i\rangle}(X_{i,j}) \simeq \mathbb{T}^{\langle X_i\rangle}_{\langle X_{i,S_i\setminus\{j-1\}}\rangle}(X_{i,j-1}) \simeq Y \simeq E.$$

因此结论得证。 □

现在我们准备证明命题 3.16。

命题 3.16 的证明。由定理 3.11，我们可以假设 $\mathcal{D} = \mathrm{per}\ \mathcal{L}$, $X_{i,\ j} = P_{\mathcal{L}}(i,j) \in \mathrm{per}\ \mathcal{L}$。如果 $(i-1, j-1) \in S$,

$$\mathbb{S}_{\langle X_S\rangle}(X_{i,j}) \simeq X_{i-1,j-1} \simeq \mathbb{S}_{\langle X_{i-1}\rangle}(X_{i-1,j}).$$

如果 $(i-1, j-1) \notin S$，令 $T := S \cup \{(i-1, j-1)\}$。那么 $(X_{i,\ j})_{(i,j)\in T}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个 T-族。通过对 $\mathbb{Z}^2$ 限制字典序 4，我们将 T 视为一个全序集（见图 (3.4)）。令 $s\colon [1,n] \to T$ 为保序同构，并令 $E_k = X_{s(k)}$。令 p, q 为两个整数，使得

$$p = s^{-1}(i-1, j-1),\ q = s^{-1}(i-1, j_0) \text{ where } j_0 = \sup\{j' \in \mathbb{Z} \mid (i-1, j') \in T\}, \tag{3.13}$$

并令 $Y = \mathbb{S}_{\langle X_{i-1,\ \geqslant j-1}\rangle}(X_{i-1,\ j-1}) = \mathbb{S}_{\langle E_{[p,q]}\rangle}(E_p)$。
如果 $(i', j') \in S$ 且 $i' > i$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i',j'}, Y[n]) \overset{(\mathrm{L2})}{=} 0 \text{ for any integer } n.$$

若 $(i', j') \in S$, $i' = i$，且 $j' < j-1$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i',j'}, Y[n]) \overset{(\mathrm{L2})}{=} 0 \text{ for any integer } n.$$

若 $(i', j') \in S$, $i' = i$，且 $j' > j-1$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i',j'}, Y[n]) \overset{(\mathrm{S2}')}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i-1,j'}, Y[n]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i-1,j-1}, X_{i-1,j'}[-n])^* \overset{(\mathrm{L2})}{=} 0$$

对任意整数 n。因此我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_{[q+1,n]}, \mathbb{S}_{\langle E_{[p,q]}\rangle}(E_p)[n]) = 0 \text{ for any integer } n.$$

Thus

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_{\langle X_S\rangle}(X_{i,j}) &\overset{2.8(b)}{=} \mathbb{T}_{\langle X_S\rangle}\mathbb{S}_{\langle X_T\rangle}(X_{i,j}) \simeq \mathbb{T}_{\langle X_S\rangle}(X_{i-1,j-1}) = \mathbb{T}_{\langle E_{[1,n]\setminus\{p\}}\rangle}(E_p)\\ &\overset{2.17}{=} \mathbb{T}^{\langle E_{[p,q]}\rangle}_{\langle E_{[p+1,q]}\rangle}(E_p) \overset{(3.13)}{=} \mathbb{T}^{\langle X_{i-1,J}\rangle}_{\langle X_{i-1,J}\setminus\{j-1\}\rangle}(X_{i-1,j-1}) \overset{3.17}{=} \mathbb{S}_{\langle X_{i-1}\rangle}(X_{i-1,j})\end{aligned}$$

其中 $J = [j-1, j_0] \cap S_{i-1}$。 □

4. S-families in derived categories of Nakayama algebras

4.1. 代数 $L(\mathsf{p};\mathsf{q})$ 和 $L^!(\mathsf{p};\mathsf{q})$。设 $\mathsf{p} = (p_k)_{k\in[1,r]}$ 和 $\mathsf{q} = (q_k)_{k\in[1,r]}$ 为两个正整数序列。对任意整数 $s \in [0,r]$，定义

$$\bar{p}_s := \sum_{k=1}^{s} p_k,\quad \bar{q}_s := \sum_{k=1}^{s} q_k,\quad \bar{p} := \bar{p}_r,\quad \bar{q} := \bar{q}_r.$$

考虑杨图

$$\mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q}) := \bigcup_{k\in[0,r-1]} [1+\bar{p}_k, \bar{p}_{k+1}] \times [1, \bar{q}_{r-k}] = \bigcup_{k\in[0,r-1]} [1, \bar{p}_{r-k}] \times [1+\bar{q}_k, \bar{q}_{k+1}]$$

（见图2）。令

$$e(\mathsf{p};\mathsf{q}) := \sum_{(i,j)\in \mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})} e_i \otimes e_j,\quad e^!(\mathsf{p};\mathsf{q}) := \sum_{(i,j)\in \mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})} e^!_i \otimes e^!_j$$

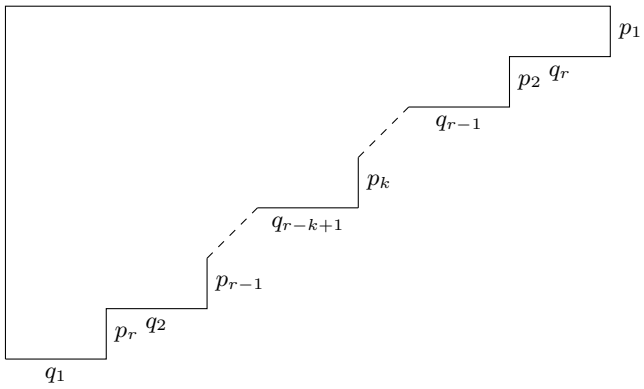


FIGURE 2. 杨图 Y(p; q) 的形状

其中， $e_i \otimes e_j$（分别地， $e_i^! \otimes e_j^!$）是 $N(\bar{p}) \otimes N(\bar{q})$（分别为 $K\mathbb{A}_{\bar{p}} \otimes K\mathbb{A}_{\bar{q}}$）中对应于顶点（$i$， j）∈Y(p; q)的本原幂等元。那么，代数 L(p; q)和 $L^!$(p; q)定义如下：

$$L(\mathsf{p};\mathsf{q}) = L(p_1,\dots,p_r;\ q_1,\dots,q_r) := L(\mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})) = e(\mathsf{p};\mathsf{q})(N(\bar{p}) \otimes N(\bar{q}))e(\mathsf{p};\mathsf{q}) \simeq (N(\bar{p}) \otimes N(\bar{q}))/\langle 1 - e(\mathsf{p};\mathsf{q})\rangle, \tag{4.1}$$

$$L^!(\mathsf{p};\mathsf{q}) = L^!(p_1,\dots,p_r;\ q_1,\dots,q_r) := e^!(\mathsf{p};\mathsf{q})(K\mathbb{A}_{\bar{p}} \otimes K\mathbb{A}_{\bar{q}})e^!(\mathsf{p};\mathsf{q}) \simeq (K\mathbb{A}_{\bar{p}} \otimes K\mathbb{A}_{\bar{q}})/\langle 1 - e^!(\mathsf{p};\mathsf{q})\rangle. \tag{4.2}$$

根据 L(p; q) 和 $L^!$(p; q) 的定义，存在自然同构 $L(\mathsf{p};\mathsf{q}) \to L(\mathsf{q};\mathsf{p})$ 和$L^!(\mathsf{p};\mathsf{q}) \to L^!(\mathsf{q};\mathsf{p})$。

例 4.1。 L(3; 4) 和 $L^!$(3; 4) 的箭图分别如下：

$$\begin{array}{ccccccc}
(1,1) & \xleftarrow{u_{1,1}} & (1,2) & \xleftarrow{u_{1,2}} & (1,3) & \xleftarrow{u_{1,3}} & (1,4) \\
\uparrow{\scriptstyle v_{1,1}} & & \uparrow{\scriptstyle v_{1,2}} & & \uparrow{\scriptstyle v_{1,3}} & & \uparrow{\scriptstyle v_{1,4}} \\
(2,1) & \xleftarrow{u_{2,1}} & (2,2) & \xleftarrow{u_{2,2}} & (2,3) & \xleftarrow{u_{2,3}} & (2,4) \\
\uparrow{\scriptstyle v_{2,1}} & & \uparrow{\scriptstyle v_{2,2}} & & \uparrow{\scriptstyle v_{2,3}} & & \uparrow{\scriptstyle v_{2,4}} \\
(3,1) & \xleftarrow{u_{3,1}} & (3,2) & \xleftarrow{u_{3,2}} & (3,3) & \xleftarrow{u_{3,3}} & (3,4)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
(1,1) & \xrightarrow{u^!_{1,1}} & (1,2) & \xrightarrow{u^!_{1,2}} & (1,3) & \xrightarrow{u^!_{1,3}} & (1,4) \\
\downarrow{\scriptstyle v^!_{1,1}} & & \downarrow{\scriptstyle v^!_{1,2}} & & \downarrow{\scriptstyle v^!_{1,3}} & & \downarrow{\scriptstyle v^!_{1,4}} \\
(2,1) & \xrightarrow{u^!_{2,1}} & (2,2) & \xrightarrow{u^!_{2,2}} & (2,3) & \xrightarrow{u^!_{2,3}} & (2,4) \\
\downarrow{\scriptstyle v^!_{2,1}} & & \downarrow{\scriptstyle v^!_{2,2}} & & \downarrow{\scriptstyle v^!_{2,3}} & & \downarrow{\scriptstyle v^!_{2,4}} \\
(3,1) & \xrightarrow{u^!_{3,1}} & (3,2) & \xrightarrow{u^!_{3,2}} & (3,3) & \xrightarrow{u^!_{3,3}} & (3,4)
\end{array}$$

L(1, 2, 1; 1, 2, 2) 和 $L^!$(1, 2, 1; 1, 2, 2) 的箭图分别如下：

$$\begin{array}{ccccccccc}
(1,1) & \xleftarrow{u_{1,1}} & (1,2) & \xleftarrow{u_{1,2}} & (1,3) & \xleftarrow{u_{1,3}} & (1,4) & \xleftarrow{u_{1,4}} & (1,5) \\
\uparrow{\scriptstyle v_{1,1}} & & \uparrow{\scriptstyle v_{1,2}} & & \uparrow{\scriptstyle v_{1,3}} & & & & \\
(2,1) & \xleftarrow{u_{2,1}} & (2,2) & \xleftarrow{u_{2,2}} & (2,3) & & & & \\
\uparrow{\scriptstyle v_{2,1}} & & \uparrow{\scriptstyle v_{2,2}} & & \uparrow{\scriptstyle v_{2,3}} & & & & \\
(3,1) & \xleftarrow{u_{3,1}} & (3,2) & \xleftarrow{u_{3,2}} & (3,3) & & & & \\
\uparrow{\scriptstyle v_{3,1}} & & & & & & & & \\
(4,1) & & & & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
(1,1) & \xrightarrow{u^!_{1,1}} & (1,2) & \xrightarrow{u^!_{1,2}} & (1,3) & \xrightarrow{u^!_{1,3}} & (1,4) & \xrightarrow{u^!_{1,4}} & (1,5) \\
\downarrow{\scriptstyle v^!_{1,1}} & & \downarrow{\scriptstyle v^!_{1,2}} & & \downarrow{\scriptstyle v^!_{1,3}} & & & & \\
(2,1) & \xrightarrow{u^!_{2,1}} & (2,2) & \xrightarrow{u^!_{2,2}} & (2,3) & & & & \\
\downarrow{\scriptstyle v^!_{2,1}} & & \downarrow{\scriptstyle v^!_{2,2}} & & \downarrow{\scriptstyle v^!_{2,3}} & & & & \\
(3,1) & \xrightarrow{u^!_{3,1}} & (3,2) & \xrightarrow{u^!_{3,2}} & (3,3) & & & & \\
\downarrow{\scriptstyle v^!_{3,1}} & & & & & & & & \\
(4,1) & & & & & & & &
\end{array}$$

相应的关系分别如下：

$$u_{i,j}u_{i,j+1} = 0, \quad v_{i,j}v_{i+1,j} = 0, \quad u_{i,j}v_{i,j+1} - v_{i,j}u_{i+1,j} = 0, \quad v^!_{i,j+1}u^!_{i,j} - u^!_{i+1,j}v^!_{i,j} = 0.$$

由以下结果可知， L(p; q) 与 $L^!$(p; q) 导出等价。

命题 4.2. 对象族 $(X_{i,j})_{(i,j)\in \mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})}$

$$X_{i,j} = S_{L^!(\mathsf{p};\mathsf{q})}(i,j)[-i-j]$$

是 per $L^!(\mathsf{p};\mathsf{q})$ 中的满 $\mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})$-族。那么，对象 $X_{\mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})} = \bigoplus X_{i,j}$ 是 per $L^!(\mathsf{p};\mathsf{q})$ 中的倾斜对象$_{(i,j)\in\mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})}$，使得 $\mathrm{End}_{\mathrm{per}\,L^!(\mathsf{p};\mathsf{q})}(X_{\mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})}) \simeq L(\mathsf{p};\mathsf{q})$，并且存在一个三角等价$F\colon \mathrm{per}\ L^!(\mathsf{p};\mathsf{q}) \to \mathrm{per}\ L(\mathsf{p};\mathsf{q})$，使得对于任意 $(i,j)\in\mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})$，都有 $F(X_{i,j}) \simeq P(i,j)$。

证明。设 $A = L^!(\bar{p};\bar{q}) = K\mathbb{A}_{\bar{p}}\otimes K\mathbb{A}_{\bar{q}}$, $B = N(\bar{p})\otimes N(\bar{q})$。根据例 3.10，存在一个三角等价 $G\colon \mathrm{per}\ A \to \mathrm{per}\ B$，使得对于任意 $(i,j)\in\mathrm{Y}(\bar{p},\bar{q})$，有 $G(S_A(i,j)[-i-j]) \simeq P_B(i,j)$。令

$$P = e^!(\mathsf{p};\mathsf{q})A,\ \ P' = (1-e^!(\mathsf{p};\mathsf{q}))A,\ \ T = \bigoplus_{(i,j)\in\mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})} S_A(i,j)[-i-j],\ \ R = G(T) \simeq e(\mathsf{p};\mathsf{q})B.$$

由于 $\mathrm{End}_{\mathrm{per}\,B}(R) \simeq L(\mathsf{p};\mathsf{q})$，根据例 2.11，存在一个三角等价 $F_1\colon \langle R\rangle \to \mathrm{per}\ L(\mathsf{p};\mathsf{q})$，使得对于任意 $(i,j)\in\mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})$，有$F_1(P_B(i,j)) \simeq P_{L(\mathsf{p};\mathsf{q})}(i,j)$。

由于 $\mathrm{End}_{\mathrm{per}\,A}(P) \simeq L^!(\mathsf{p};\mathsf{q})$ 且 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}\,A}(P',P) \simeq 0$，根据例 2.11，存在一个三角等价 $F_2\colon\langle P\rangle \to \mathrm{per}\ L^!(\mathsf{p};\mathsf{q})$，使得对于任意 $(i,j)\in\mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})$，有 $F_2(P_A(i,j)) \simeq P_{L^!(\mathsf{p};\mathsf{q})}(i,j)$ 且 $F_2(S_A(i,j)) \simeq S_{L^!(\mathsf{p};\mathsf{q})}(i,j)$。由于

$$F_1GF_2^{-1}(X_{i,j}) \simeq P_{L(\mathsf{p};\mathsf{q})}(i,j),$$

三角等价 $F_1GF_2^{-1}\colon \mathrm{per}\ L^!(\mathsf{p};\mathsf{q}) \to \mathrm{per}\ L(\mathsf{p};\mathsf{q})$ 将族 $(X_{i,j})_{(i,j)\in\mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})}$ 映为 per $L(\mathsf{p};\mathsf{q})$ 中由例 3.9 给出的满 $\mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})$-族 $(P_{L(\mathsf{p};\mathsf{q})}(i,j))_{(i,j)\in\mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})}$。因此断言得证。

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{per}\,L^!(\mathsf{p};\mathsf{q}) & \xleftarrow[\simeq]{F_2} & \langle P\rangle & = & \langle T\rangle & \xrightarrow[\simeq]{G} & \langle R\rangle & \xrightarrow[\simeq]{F_1} & \mathrm{per}\,L(\mathsf{p};\mathsf{q}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathrm{per}\,A & = & \mathrm{per}\,A & \xrightarrow[G]{\simeq} & \mathrm{per}\,B. & & \end{array} \tag{4.3}$$

□

回顾一下，$\mathcal{D}$ 满足条件 (3.1)，当且仅当

$\mathcal{D}$ 是代数的、幂等完备的、Ext-有限的，并且具有 Serre函子 $\mathbb{S}$。

对于任意两个正整数序列 $\mathsf{p} = (p_k)_{k\in[1,r]}$ 和 $\mathsf{q} = (q_k)_{k\in[1,r]}$，定义

$$\lambda_{\mathsf{p};\mathsf{q}}(i) = \lambda(i) := \sup\{j' \in \mathbb{Z} \mid (i,j') \in \mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})\}.$$

当 $S = \mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})$ 时，S-族的定义可由以下比 (L1)、(L2)、(S1)-(S3) 简单得多的条件刻画。

定理 4.3. 设 $\mathcal{D}$ 是满足 (3.1) 的三角范畴，$(X_{i,j})_{(i,j)\in\mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})}$ 是 $\mathcal{D}$ 中由例外对象组成的族。那么，$(X_{i,j})_{(i,j)\in\mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})}$是 $\mathcal{D}$ 中的满 $\mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})$-族，当且仅当 $(X_{i,j})_{(i,j)\in\mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})}$满足以下条件：

(Y1) $\mathcal{D} = \langle X_1\rangle \perp \langle X_2\rangle \perp \cdots \perp \langle X_{\bar{p}}\rangle$。(Y2) $\langle X_1\rangle = \langle X_{1,1}\rangle \perp \langle X_{1,2}\rangle \perp \cdots \perp \langle X_{1,\lambda(1)}\rangle$。(Y3) $\mathbb{S}_{\langle X_1\rangle}(X_{1,j}) \simeq X_{1,j-1}$ 对任意整数 $j \in (1,\lambda(i)]$。(Y4) $\mathbb{S}(X_{i,j}) \simeq \mathbb{S}_{\langle X_{i-1}\rangle}(X_{i-1,j})$ 对任意整数 $i \in (1,\bar{p}]$ 和 $j \in [1,\lambda(i)]$。

在这种情况下，存在一个三角等价

$$F : \mathcal{D} \to \mathrm{per}\,L(\mathsf{p};\mathsf{q})$$

使得 $F(X_{i,j}) \simeq P(i,j)$ 对任意 $(i,j)\in\mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})$。

为了证明定理 4.3，我们准备以下两个结果。

引理 4.4. 设 $\mathcal{D}$ 是满足 (3.1) 的三角范畴，$(X_i)_{i\in[1,n]}$ 是$\mathcal{D}$中的一个对象族。若条件

$$\mathcal{D} = \langle X_1\rangle \perp \langle X_2\rangle \perp \cdots \perp \langle X_n\rangle \tag{4.4}$$

$\mathbb{S}(X_i) \in \langle X_{i-1}\rangle$ 对任意整数 $i \in (1,n]$ (4.5)

均成立，则

(4.6) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_i, X_{i'}[n]) = 0$ 对任意整数 n，除非 $i' \in [i-1, i]$。

证明。若 $i < i'$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_i, X_{i'}[n]) \overset{(4.4)}{=} 0$ 对任意整数 n。若 $i - i' \geqslant 2$，则根据 (4.5)，$\mathbb{S}(X_i) \in \langle X_{i-1} \rangle$，并且 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_i, X_{i'}[n]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i'}, \mathbb{S}(X_i)[-n])^* \overset{(4.4)}{=} 0$ 对任意整数 n。因此结论成立。□

引理 4.5。设 $\mathcal{D}$ 是满足 (3.1) 的三角范畴，$(X_{i,\ j})_{(i,j)\in \mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})}$ 是 $\mathcal{D}$ 中满足 (Y1)-(Y4) 的一族例外对象。那么 $(X_{i,\ j})_{(i,j)\in \mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})}$ 满足以下条件：

(Y2′) $\langle X_i \rangle = \langle X_{i,1} \rangle \perp \langle X_{i,2} \rangle \perp \cdots \perp \langle X_{i,\lambda(i)} \rangle$ 对任意整数 $i \in [1, \bar{p}]$.

(S1) $\mathbb{S}_{\langle X_i \rangle}(X_{i,j}) \simeq X_{i,j-1}$ 对任意整数 $i \in [1, \bar{p}]$, $j \in (1, \lambda(i)]$.

证明。当 $i = 1$ 时，(Y2′) 只不过是 (Y2)。假设 (Y2′) 对 i 成立。若 $j < j'$，

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i+1,j}, X_{i+1,j'}[n]) &\overset{(\mathrm{Y4})}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^{-1}\mathbb{S}_{\langle X_i \rangle}(X_{i,j}), \mathbb{S}^{-1}\mathbb{S}_{\langle X_i \rangle}(X_{i,j'})[n]) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j}, X_{i,j'}[n]) = 0\end{aligned}$$

对任意整数 n。因此 (Y2′) 对 $i+1$ 成立。

当 $i = 1$ 时，(S1) 只不过是 (Y3)。假设 (S1) 对 i 成立。于是 $F = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{S}_{\langle X_i \rangle} : \langle X_{i,\leqslant \lambda(i+1)} \rangle \to \langle X_{i+1} \rangle$ 由 (Y4) 可知是一个三角等价，并且

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_{\langle X_{i+1} \rangle}(X_{i+1,j}) &\overset{(\mathrm{Y4})}{=} \mathbb{S}_{\langle X_{i+1} \rangle} F(X_{i,j}) \overset{2.2(b)(c)}{=} F\mathbb{S}_{\langle X_{i,\leqslant \lambda(i+1)} \rangle}(X_{i,j}) \\ &\overset{2.8(c)}{=} F\mathbb{S}_{\langle X_i \rangle}(X_{i,j}) \overset{(\mathrm{S1})}{=} F(X_{i,j-1}) \overset{(\mathrm{Y4})}{=} X_{i+1,j-1}.\end{aligned}$$

因此 (S1) 对 $i+1$ 成立。

$$\begin{array}{ccccc}
\langle X_i \rangle & \hookleftarrow & \langle X_{i,\leqslant \lambda(i+1)} \rangle & \xrightarrow{F} & \langle X_{i+1} \rangle \\
\downarrow{\scriptstyle \mathbb{S}_{\langle X_i \rangle}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{S}_{\langle X_{i,\leqslant \lambda(i+1)} \rangle}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{S}_{\langle X_{i+1} \rangle}} \\
\langle X_i \rangle & \xrightarrow[\mathbb{T}_{\langle X_{i,\leqslant \lambda(i+1)} \rangle}]{} & \langle X_{i,\leqslant \lambda(i+1)} \rangle & \xrightarrow{F} & \langle X_{i+1} \rangle
\end{array}$$

□

现在我们准备证明定理 4.3。

定理 4.3 的证明。若 $(X_{i,\ j})_{(i,j)\in \mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})}$ 是一个满 Y(p; q)-族，则根据定理 3.11，存在一个三角等价 $F\colon\ \mathcal{D} \to \mathrm{per}\, L(\mathsf{p};\mathsf{q})$。因此，我们将证明两个条件的等价性。

我们证明“仅当”部分。由于 $(X_{i,\ j})_{(i,j)\in \mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})}$ 是一个满弱 Y(p; q)-族，(Y1) 和 (Y2) 得到满足。由 (S2) 可知，(Y3) 得到满足。根据命题 3.16，(Y4) 得到满足。因此，断言成立。

我们证明“如果”部分。根据假设，(L1) 得到满足。由 (Y1) 和 (Y4)，根据引理 4.4 可知 (L2.1) 得到满足。由于

$$\mathbb{F}_{\langle X_{i-1} \rangle}(X_{i,j}) \simeq \mathbb{S}^{-1}_{\langle X_{i-1} \rangle}\mathbb{S}(X_{i,j}) \overset{(\mathrm{Y4})}{=} \mathbb{S}^{-1}_{\langle X_{i-1} \rangle}\mathbb{S}_{\langle X_{i-1} \rangle}(X_{i-1,j}) \simeq X_{i-1,j},$$

(S2)′ 得到满足。若 $j - j' \geqslant 2$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j}, X_{i-1,j'}[n]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{F}_{\langle X_{i-1} \rangle}(X_{i,j}), X_{i-1,j'}[n]) \overset{(\mathrm{S2})'}{=} \mathrm{Hom}(X_{i-1,j}, X_{i,j'}) \overset{(\mathrm{L2.1})}{=} 0.$$

因此 (L2.2) 得到满足。故 $(X_{i,\ j})_{(i,j)\in \mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})}$ 是满足 (S2)′ 的一个弱 S-族。

最后，我们证明 $(X_{i,\ j})_{(i,j)\in \mathrm{Y}(\mathsf{p};\mathsf{q})}$ 是一个 S-族。由引理 4.5，(S1) 成立。由 (S1) 和 (Y4) 可知，(S3) 成立。因此，断言得证。□

4.2. Y(p,q,r)-族。本节的目标是证明定理 4.7。设 p、 q 和 r 为三个正整数，使得 $pq>q+1$, $0\leqslant r\leqslant q$。令

$$\mathrm{Y}(p,q,r)=\begin{cases}\mathrm{Y}(p-1,1;q-r,r) & r<q,\\ \mathrm{Y}(p-1;q) & r=q,\end{cases}$$

$$L(p,q,r)=L(\mathrm{Y}(p,q,r)).$$

下面定理 4.3 的一个应用可用于构造 Y$(p;q)$-族：

命题 4.6. 设 $\mathcal{D}$ 是满足 (3.1) 的三角范畴，$(E_k)_{k\in[1,q]}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个例外序列，且 $E=\bigoplus_{k\in[1,q]}E_k$。假设满足以下条件：

$$\mathcal{D}=\langle\mathbb{S}^{p-1}(E)\rangle\perp\langle\mathbb{S}^{p-2}(E)\rangle\perp\cdots\perp\langle E\rangle. \tag{4.7}$$

$$\mathbb{S}_{\langle E\rangle}(E_i)\simeq E_{i-1}\ \text{对任意整数}\ i\in(1,p]. \tag{4.8}$$

那么，$(X_{i,j})_{(i,j)\in\mathrm{Y}(p;q)}$ 这一对象族

$$X_{i,j}:=\mathbb{F}_{\langle\mathbb{S}^{p-i}(E)\rangle}\mathbb{F}_{\langle\mathbb{S}^{p-i-1}(E)\rangle}\cdots\mathbb{F}_{\langle\mathbb{S}(E)\rangle}(E_j)$$

是 $\mathcal{D}$ 中的一个满 Y$(p;q)$-族。特别地，存在一个三角等价

$$F:\mathcal{D}\to\operatorname{per}L(p;q)$$

使得对于任意 $(i,j)\in\mathrm{Y}(p;q)$，$F(X_{i,j})\simeq P(i,j)$。

证明。只需验证条件 (Y1)-(Y4)。由引理 2.9(d)，对于每个 $i\in\mathbb{Z}$，$\mathbb{F}_{\langle\mathbb{S}^{i+1}(E)\rangle}\colon\langle\mathbb{S}^{i}(E)\rangle\to\langle\mathbb{S}^{i+1}(E)\rangle$ 是三角等价F，故 $\langle X_i\rangle=\langle\mathbb{S}^{p-i}(E)\rangle$。由于 (4.7) 成立，(Y1) 成立。于是我们看到 $\mathbb{S}(\langle X_i\rangle)=\langle X_{i-1}\rangle$. 由于

$$\mathbb{S}^{-1}_{\langle X_{i-1}\rangle}\mathbb{S}(X_{i,j})\overset{2.9(c)}{=}\mathbb{F}_{\langle X_{i-1}\rangle}(X_{i,j})=X_{i-1,j},$$

(Y4) 成立。由引理 2.9(d)，对于每个 $i\in\mathbb{Z}$，$\mathbb{F}_{\langle\mathbb{S}^{i+1}(E)\rangle}\colon\langle\mathbb{S}^{i}(E)\rangle\to\langle\mathbb{S}^{i+1}(E)\rangle$ 是三角等价F，

$$G=\mathbb{F}_{\langle\mathbb{S}^{p-1}(E)\rangle}\mathbb{F}_{\langle\mathbb{S}^{p-2}(E)\rangle}\cdots\mathbb{F}_{\langle\mathbb{S}(E)\rangle}:\langle E\rangle\to\langle X_1\rangle$$

是三角等价。由于 G将例外序列 $(E_i)_{i\in[1,q]}$ 映为族 $(X_{1,j})_{j\in[1,q]}$，因此 (Y2) 成立。若 $j\in(1,q]$，

$$\mathbb{S}_{\langle X_1\rangle}(X_{1,j})\simeq\mathbb{S}_{\langle X_1\rangle}G(E_j)\simeq G\mathbb{S}_{\langle E\rangle}(E_j)\overset{(4.8)}{=}G(E_{j-1})\simeq X_{1,j-1}.$$

因此，(Y3) 得到满足。于是，该断言由定理 4.3 得出。 □

下面的结果是我们的主要结果之一：

定理 4.7。设 p、 q 和 r 为三个正整数，满足 $pq>q+1$、 $0\leqslant r\leqslant q-1$。则存在一个满的 Y$(p,q,r)$-族 $(X_{i,\ j})_{(i,j)\in\mathrm{Y}(p,q,r)}$，属于每个 $N(pq-r,q+1)$。特别地，存在一个三角等价

$$F:\operatorname{per}N(pq-r,q+1)\to\operatorname{per}L(p,q,r)$$

使得对于任意 $(i,j)\in\mathrm{Y}(p,q,r)$，$F(X_{i,\ j})=P_{L(p,q,r)}(i,j)$。

我们首先通过应用命题 4.6 证明定理 4.7 的 $r=0$ 情形。

命题 4.8. 设 p和 q是两个正整数，使得 $pq>q+1$, $A=N(pq,q+1)$。(a) 令 $(X_{i,j})_{(i,j)\in\mathrm{Y}(p;q)}$ 为一个对象族 $X_{i,j}\in$，按 A 定义为

$$X_{i,j}=\mathbb{F}_{\langle\nu^{p-i}(P)\rangle}\mathbb{F}_{\langle\nu^{p-i-1}(P)\rangle}\cdots\mathbb{F}_{\langle\nu(P)\rangle}(S(j))[-j]$$

where $P=\bigoplus_{k\in[1,q]}P(k)$. *Then* $(X_{i,j})_{(i,j)\in\mathrm{Y}(p;q)}$ *is a full* $\mathrm{Y}(p;q)$*-family in* $\operatorname{per}A$.

(b) 令 $(X'_{i,j})_{(i,j)\in \mathrm{Y}(p;q)}$ 为一个对象族 $X'_{i,j}\in$ ，按 A 定义为

$$X'_{i,j}=\mathbb{F}_{\langle \nu^{p-i}(S)\rangle}\mathbb{F}_{\langle \nu^{p-i-1}(S)\rangle}\cdots\mathbb{F}_{\langle \nu(S)\rangle}(S((p-1)q+j))[-j]$$

where $S=\bigoplus\limits_{k\in[1,q]}S((p-1)q+k)$. *Then* $(X'_{i,j})_{(i,j)\in \mathrm{Y}(p;q)}$ *is a full* $\mathrm{Y}(p;q)$*-family in* $\operatorname{per}A$.

证明。(a) 根据命题 4.6，只需验证条件 (4.7)-(4.8)。令 $E_i=S(i)[-i]$，$E=\bigoplus\limits_{i\in[1,q]}E_i$。由于 $\langle E\rangle=\langle P\rangle$ 和 $\nu^k(P(i))\simeq P(pk+i)$，我们有

$$\mathcal{D}=\langle\nu^{p-1}(P)\rangle\perp\langle\nu^{p-2}(P)\rangle\perp\cdots\perp\langle P\rangle=\langle\nu^{p-1}(E)\rangle\perp\langle\nu^{p-2}(E)\rangle\perp\cdots\perp\langle E\rangle,$$

因此 (4.7) 得以满足。

由于 $E=E_{[1,q]}$ 是一个预倾斜对象，且 $\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(E)\simeq N(q)$，存在一个三角函子$F\colon\langle E\rangle\to\operatorname{per}N(q)$，使得 $F(E_i)\simeq P(i)$，因此 (4.8) 得以满足。由此可得所述结论。(b) 令 $S'=\bigoplus\limits_{k\in[1,q]}S(k)$。由于对任意 $k\in[1,q]$，$\nu^{p-1}(S(k))\simeq S((p-1)q+k)$，我们有 $\langle\nu^{p-1}(P)\rangle=\langle\nu^{p-1}(S')\rangle=\langle S\rangle$，因此所述结论由 (a) 得出。 □

现在我们可以证明定理 4.7 了。

定理 4.7 的证明。设 $A=N(pq,q+1)$、$B=N(pq-r,q+1)$，并设

$$P=\bigoplus_{k\in I}P(k),\quad P'=\bigoplus_{k\in[1,pq]\setminus I}P(k),\quad S=\bigoplus_{k\in I}S(k),\quad S'=\bigoplus_{k\in[1,pq]\setminus I}S(k)$$

其中 $I=[1,pq-r]$。由于 $\mathrm{Hom}_{\operatorname{per}A}(P',P)\simeq 0$ 且 $\mathrm{End}_{\operatorname{per}A}(P)\simeq B$，我们有 $\langle P\rangle=\langle S\rangle$，并且存在一个三角等价 $F\colon\langle P\rangle\to\operatorname{per}B$，使得由例 2.11 可知，$F(P_A(i))=P_B(i)$，$F(S_A(i))\simeq S_B(i)$。因此，只需证明 $\langle S\rangle$ 中存在一个满的 $\mathrm{Y}(p,q,r)$-族。

令 $(X'_{i,j})_{(i,j)\in \mathrm{Y}(p;q)}$ 为命题 4.8(b) 给出的 $\operatorname{per}N(pq,q+1)$ 中的一个满的 $\mathrm{Y}(p;q)$-族。由于$Y_{p,q-j}=S(pq-j)[-q+j]$，我们有$\langle S'\rangle=\langle X'_{p,[q-r+1,q]}\rangle$，因此由例 2.11 可知 $\langle X'_{\mathrm{Y}(p,q,r)}\rangle=\langle S'\rangle^{\perp_{\operatorname{per}A}}=\langle S\rangle$。于是，子族 $(X'_{i,j})_{(i,j)\in \mathrm{Y}(p,q,r)}$ 是 $\langle S\rangle$ 中的一个满的 $\mathrm{Y}(p,q,r)$-族。□

5. Mutations of S-families

本节中，设 $\mathcal{D}$ 是一个满足 (3.1) 的三角范畴。本节旨在对 S 的某些假设下，引入 S-族的突变，并利用这些结果证明定理 5.14 和定理 5.16。令

$$\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}^2):=\{S\subset\mathbb{Z}^2\mid |S|<\infty\}.$$

在 $\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}^2)$ 中，定义关系 $S\equiv S'$

“there exists an element $v\in\mathbb{Z}^2$ such that $S'=S+v$”

是 $\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}^2)$ 上的一个等价关系。显然，若族 $(X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是一个 S-族，则对于满足 $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ 的 $S'=S+(a,b)$，族 $(X_{i-a,j-b})_{(i,j)\in S'}$ 是一个 S'-族。对于任意 $S\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}^2)$，定义

$${}^tS:=\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2\mid (j,i)\in S\}.$$

显然，族 $\mathbf{X}=(X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是一个 S-族，当且仅当族 ${}^t\mathbf{X}=(X_{i,j})_{(i,j)\in{}^tS}$ 是一个${}^tS$-族。

5.1. S-族的粘合。本节中，我们介绍 S-族的粘合（命题 5.2、命题 5.3）。对于 $\mathbb{Z}$ 的任意区间 I，

$$S_I := \{(i,j) \in S \mid i \in I\}, \quad S^I := \{(i,j) \in S \mid j \in I\}.$$

特别是，

$$S_{\leqslant k} := S_{(\infty,k]}, \quad S_{\geqslant k} := S_{[k,\infty)}, \quad S^{\leqslant k} := S^{(\infty,k]}, \quad S^{\geqslant k} := S^{[k,\infty)}.$$

令 $\mathsf{X} = (X_{i,\ j})$ 为由 $\mathcal{D}$ 索引的对象族，索引集为 $S \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}^2)$。对于任意整数 k，定义

$$\mathsf{X}_{\leqslant k} = (X_{i,j})_{(i,j)\in S_{\leqslant k}}, \quad \mathsf{X}_{\geqslant k} = (X_{i,j})_{(i,j)\in S_{\geqslant k}},$$
$$\mathsf{X}^{\leqslant k} = (X_{i,j})_{(i,j)\in S^{\leqslant k}}, \quad \mathsf{X}^{\geqslant k} = (X_{i,j})_{(i,j)\in S^{\geqslant k}}.$$

引理 5.1. 设 $\mathsf{X} = (X_{i,\ j})_{(i,j)\in S}$ 是由 $\mathcal{D}$ 索引的对象族，索引集为 $S \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}^2)$，且满足 (L2.1)。设 k 为一个整数。

(a) *If* $(i,j) \in S_{\geqslant k+1}$, *then* $\mathbb{S}_{\langle X_S\rangle}(X_{i,j}) \simeq \mathbb{S}_{\langle X_{S_{\geqslant k}}\rangle}(X_{i,j})$ *and* $\mathbb{S}_{\langle X^j\rangle}(X_{i,j}) \simeq \mathbb{S}_{\langle X_{\geqslant k,j}\rangle}(X_{i,j})$.

(b) *If* $(i,j) \in S_{\leqslant k-1}$, *then* $\mathbb{S}^{-1}_{\langle X_S\rangle}(X_{i,j}) \simeq \mathbb{S}^{-1}_{\langle X_{S_{\leqslant k}}\rangle}(X_{i,j})$ *and* $\mathbb{S}^{-1}_{\langle X^j\rangle}(X_{i,j}) \simeq \mathbb{S}^{-1}_{\langle X_{\leqslant k,j}\rangle}(X_{i,j})$.

证明. (a) 由 (L2.1)，我们有 $\langle X_S\rangle = \langle X_{S_{\leqslant k-1}}\rangle \perp \langle X_{S_{\geqslant k}}\rangle$. 由于

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{S_{\leqslant k-1}}, \mathbb{S}_{\langle X_S\rangle}(X_{i,j})[n]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j}, X_{S_{\leqslant k-1}}[-n])^* \overset{\text{(L2.1)}}{=} 0,$$

我们有 $\mathbb{S}_{\langle X_S\rangle}(X_{i,\ j}) \in \langle X_{S_{\geqslant k}}\rangle$。因此，由命题 2.8(c) 可得结论。由于子族 $(X_{i,\ j})_{(i,j)\in S^j\times\{j\}}$ 满足 (L2.1)，结论得证。(b) 这是 (a) 的对偶。 □

命题 5.2（粘合 I）。设 $\mathsf{X} = (X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是由 $S \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}^2)$ 索引的 $\mathcal{D}$ 中的对象族，并满足 (L2.1)。对于任意整数 k，以下条件等价：

(i) X 是一个 S-族。(ii) $\mathsf{X}^{\leqslant k}$ 是一个 $S_{\leqslant k}$-族，且 $\mathsf{X}^{\geqslant k}$ 是一个 $S_{\geqslant k}$-族。

证明。(i)⇒ (ii)：显然。

(ii)⇒ (i)：我们需要证明 X 满足条件 (L1)、(L2.2) 和 (S1)-(S3)。(L1) 显然成立。下面证明 (L2.2) 成立。设 (i,j) 和 (i',j') 是 S 中满足 $|j-j'|>1$ 的两个元素。若 $(i,j) \in S_{\leqslant k}\backslash S_{\{k\}}$ 且 $(i',j') \in S_{\geqslant k}\backslash S_{\{k\}}$，由 (L2.1) 可得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j}, X_{i',j'}[n]) \simeq 0$ 且 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i',j'}, X_{i,j}[n]) \simeq 0$。若 (i,j)、$(i',j') \in S_{\leqslant k}$ 或 (i,j)、$(i',j') \in S_{\geqslant k}$，则 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{i,j}, X_{i',j'}[n]) \simeq 0$，因为 $\mathsf{X}^{\leqslant k}$ 是一个 $S_{\leqslant k}$-族，且 $\mathsf{X}^{\geqslant k}$ 是一个 $S_{\geqslant k}$-族。因此 (L2.2) 成立，故 X 是一个弱 S-族。

由于 $\mathsf{X}^{\leqslant k}$ 是一个 $S_{\leqslant k}$-族，而 $\mathsf{X}^{\geqslant k}$ 是一个 $S_{\geqslant k}$-族，因此满足 (S1)。

假设 (i,j)、$(i-1,j) \in S$。若 $(i,j) \in S_{\geqslant k+1}$，则 $\mathbb{S}_{\langle X^j\rangle}(X_{i,j}) \overset{5.1(a)}{=} \mathbb{S}_{\langle X_{\geqslant k},j\rangle}(X_{i,j})$ (S2)$= X_{i-1,j}$。若 $(i,j) \in S_{\leqslant k}$，则 $(i-1,j) \in S_{\leqslant k-1}$，且 $\mathbb{S}^{-1}_{\langle X^j\rangle}(X_{i-1,j}) \overset{5.1(b)}{=} \mathbb{S}^{-1}_{\langle X_{\leqslant k},j\rangle}(X_{i-1,j})$ (S2)$= X_{i,j}$。因此满足 (S2)。

假设 (i,j)、$(i-1,j-1) \in S$。若 $(i,j) \in S_{\geqslant k+1}$，则 $(i-1,j-1) \in S_{\geqslant k}$，且 $\mathbb{S}_{\langle X_S\rangle}(X_{i,j}) \overset{5.1(a)}{=} \mathbb{S}_{\langle X_{S_{\geqslant k}}\rangle}(X_{i,j})$ (S3)$= X_{i-1,j-1}$。若 $(i,j) \in S_{\leqslant k}$，则 $(i-1,j-1) \in S_{\leqslant k-1}$，且 $\mathbb{S}^{-1}_{\langle X_S\rangle}(X_{i-1,j-1}) \overset{5.1(b)}{=} \mathbb{S}^{-1}_{\langle X_{S_{\leqslant k}}\rangle}(X_{i-1,j-1})$ (S3)$= X_{i,j}$。因此满足 (S3)。 □

通过转置，我们得到以下结果。

命题 5.3（粘合 II）。设 $\mathsf{X} = (X_{i,\ j})_{(i,j)\in S}$ 是 $\mathcal{D}$ 中由 $S \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}^2)$ 索引的对象族，满足 (L2.2)。对于任意整数 k，以下条件等价：

(i) X 是一个 S 族。(ii) $\mathsf{X}^{\leqslant k}$ 是一个 $S^{\leqslant k}$ 族，并且 $\mathsf{X}^{\geqslant k}$ 是一个 $S^{\geqslant k}$ 族。

5.2. S 族的突变。本小节中，我们证明关于 S 族突变的结果（定理 5.6、定理 5.12）。令 $S \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}^2)$。回顾

$$S_k := \{j \in \mathbb{Z} \mid (k,j) \in S\},\quad S^k := \{i \in \mathbb{Z} \mid (i,k) \in S\}$$

对任意整数 k。设 $\sigma_{\leqslant k}, \sigma_{\geqslant k}, \rho_{\leqslant k}, \rho_{\geqslant k}$ 是 $\mathbb{Z}^2$ 的置换，使得

$$\sigma_{\leqslant k}(i,j) = \begin{cases} (i,j-1) & i \leqslant k, \\ (i,j) & k < i, \end{cases} \quad \sigma_{\geqslant k}(i,j) = \begin{cases} (i,j-1) & i \geqslant k, \\ (i,j) & k > i, \end{cases}$$

$$\rho_{\leqslant k}(i,j) = \begin{cases} (i-1,j) & j \leqslant k, \\ (i,j) & k < j, \end{cases} \quad \rho_{\geqslant k}(i,j) = \begin{cases} (i-1,j) & j \geqslant k, \\ (i,j) & k > j. \end{cases}$$

对于 $\mathbb{Z}$ 的任意子集 I 以及任意整数 $n \in \mathbb{Z}$，我们用 $I+n$ 表示子集

$$I + n = \{j \in \mathbb{Z} \mid \exists i \in I; j = i + n\}.$$

定义5.4。设 k 为非负整数。若 S 是 $\mathbb{Z}^2$ 的有限子集，且满足以下条件，则称其为 M_k^+ -子集：

($\mathbf{M}_k^+1$) 若 $i \in [0, k+1]$，则 S_i 是 $\mathbb{Z}$ 的一个区间。($\mathbf{M}_k^+2$) 若 $i \in [1,k]$，则 $S_i = S_{i-1}$ 或 $S_i = S_{i-1} + 1$。($\mathbf{M}_k^+3$) $S_{k+1} \subset S_k$。

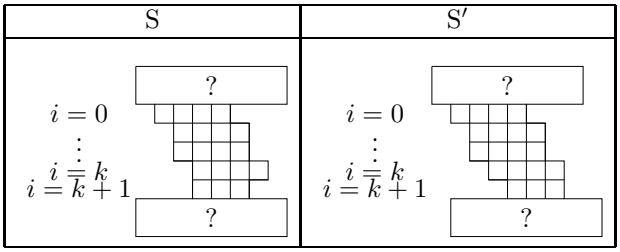
若 S' 是 $\mathbb{Z}^2$ 的有限子集，且满足以下条件，则称其为 M_k^- -子集：

($\mathbf{M}_k^-1$) 若 $i \in [0, k+1]$，则 S'_i 是 $\mathbb{Z}$ 的一个区间。(

$\mathbf{M}_k^-2$) 若 $i \in [1,k]$，则 $S'_i = S'_{i-1}$ 或 $S'_i = S'_{i-1} + 1$。

($\mathbf{M}_k^-3$) $S'_{k+1} \subset S'_k + 1$。

对于任意的 $(i,j) \in S$，若 $S - (i,j)$ 是一个 M_k^+-子集（分别地，M_k^--子集），则称 S 为一个 $M_k^+(i,j)$-子集（分别地，$M_k^-(i,j)$-子集）。



根据定义，以下结果显然成立：

引理 5.5. 设 k 是一个非负整数，S 和 S' 是 $\mathbb{Z}^2$ 的两个有限子集，满足 $S' = \sigma_{\leqslant k}(S)$。那么，$S$ 是一个 M_k^+-子集，当且仅当 S' 是一个 M_k^--子集。

以下结果是本小节的主要结果之一：

定理 5.6（变异 I）。设 $\mathcal{D}$ 是满足 (3.1) 的三角范畴，S 是满足 $S_{\leqslant -1} = \emptyset$ 的 M_k^+ -子集，并设 $S' = \sigma_{\leqslant k}(S)$。

(a) 若 $\mathbf{X} = (X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是一个 S-族，则族 $\mathbf{X}' = (X'_{i,j})_{(i,j)\in S'}$ 是一个 S'-族，其中

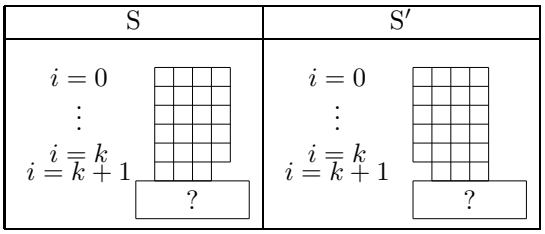
$$X'_{i,j} = \begin{cases} \mathbb{S}_{\langle X_i \rangle}(X_{i,j+1}) & i \leqslant k, \\ X_{i,j} & k < i. \end{cases}$$

特别地，存在一个三角等价 $\mathrm{per}\, L(S) \to \mathrm{per}\, L(S')$。

(b) 若 $\mathbf{Y} = (Y_{i,j})_{(i,j)\in S'}$ 是一个 S'-族，则族 $\mathbf{Y}' = (Y'_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是一个 S-族，其中 e

$$Y'_{i,j} = \begin{cases} \mathbb{S}^{-1}_{\langle Y_i \rangle}(Y_{i,j-1}) & i \leqslant k, \\ Y_{i,j} & k < i. \end{cases}$$

特别地，存在一个三角等价 $\mathrm{per}\, L(S') \to \mathrm{per}\, L(S)$。



在定理 5.6 (a) 中，根据 X 和 X′ 的定义，存在一个从 X 到 X′ 的例外序列突变序列。

注 5.7. 设 $I_{-1}=\{2\}$, $I_0=[1,2]$, $I_1=\{2\}$ 和

$$S=\bigsqcup_{k\in[-1,1]}\{k\}\times I_k,\quad S'=\sigma_{\leqslant 0}(S).$$

那么， S 是一个 M_0^+-子集，且满足 $S_{\leqslant -1}\neq\emptyset$。由于存在三角等价

$$\operatorname{per}L(S)\to\operatorname{per}K\mathbb{A}_4 \ and\ \operatorname{per}L(S')\to\operatorname{per}K\mathbb{D}_4,$$

我们有 per $L(S)$ 和 per $L(S')$ 彼此不三角等价。

为证明定理 5.6，我们准备以下三个结果。

引理 5.8. 设 $\mathcal{D}$ 是一个满足 (3.1) 的三角范畴，$(X_{i,j})_{(i,j)\in \mathrm{Y}(p;q)}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个 Y$(p;q)$-族。那么存在一个三角自等价 $G\colon\langle X_{\mathrm{Y}(p;q)}\rangle\to\langle X_{\mathrm{Y}(p;q)}\rangle$，使得

$$G|_{\langle X_i\rangle}\simeq\mathbb{S}_{\langle X_i\rangle}:\langle X_i\rangle\to\langle X_i\rangle \ for\ any\ i\in[1,p]. \tag{5.1}$$

证明。设 $A=N(p)\otimes N(q)$。由定理 3.11，存在一个三角等价 $F\colon\langle X_{\mathrm{Y}(p;q)}\rangle\to\operatorname{per}A$，使得对于任意 $(i,j)\in \mathrm{Y}(p;q)$，$F(X_{i,j})\simeq P(i,j)$。于是，对于任意$i\in[1,p]$，$F(X_i)\simeq P(i)\otimes N(q)$。由引理 2.19，

$$G'=(-)\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A(N(p)\otimes N(q)^*):\operatorname{per}A\to\operatorname{per}A$$

是一个三角自等价，使得

$$G'|_{\langle P(i)\otimes N(q)\rangle}:\langle P(i)\otimes N(q)\rangle\to\langle P(i)\otimes N(q)\rangle$$

对于任意 $i\in[1,p]$，都是一个 Serre函子。因此 $G=F^{-1}G'F$满足 (5.1)。 □

根据以下结果，若 S 是满足 $S_{\leqslant -1}=\emptyset$ 和 $S_{\geqslant k+1}=\emptyset$的 M_k^+ 子集，则任意 S-族都是某个 Y$(k+1;h)$-族的突变。

引理 5.9。设 $\mathcal{D}$ 是满足 (3.1) 的三角范畴，S 是满足 $S_{\geqslant k+1}=\emptyset$ 的 M_k^+ 子集。设 $(X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个 S-族，并且 $h=|S_0|$。

(a) 存在一个 Y$(k+1;h)$-族 $(Y_{i,j})_{(i,j)\in \mathrm{Y}(k+1;h)}$，使得 $\langle X_i\rangle=\langle Y_i\rangle$ 对任意 $i\in[0,k]$ 都成立；并且存在一个三角等价 $\langle X_S\rangle\to\operatorname{per}L(k+1;h)$，使得 $F(Y_{i,j})\simeq P(i,j)$。(b) 对象 $X'_{i,j}:=\mathbb{S}_{\langle X_i\rangle}(X_{i,j})$ 构成的族 $(X'_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是一个 S- 族，使得 $\langle X_i\rangle=\langle X'_i\rangle$ 对任意 $i\in[0,k]$ 都成立。(c) 对象 $X''_{i,j}:=\mathbb{S}^{-1}_{\langle X_i\rangle}(X_{i,j})$ 构成的族 $(X''_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是一个 S-族，使得 $\langle X_i\rangle=\langle X''_i\rangle$对任意 $i\in[0,k]$ 都成立。

证明。(a) 我们证明 $(X_{k,j})_{j\in[0,h]}$ 是一个满足命题 4.6 中 (4.7)-(4.8) 的例外序列。由 (L2)，$(X_{k,j})_{j\in[0,h]}$ 是一个例外序列。由 (S1)，我们有 (4.8) 成立。由 (L2)，

$$\langle X_S\rangle=\langle X_0\rangle\perp\langle X_2\rangle\perp\cdots\perp\langle X_k\rangle.$$

令 $i\in[1,k]$。若 $S_i=S_{i-1}$，则 $\mathbb{S}(X_{i,j})\overset{3.16}{=}\mathbb{S}_{\langle X_{i-1}\rangle}(X_{i-1,j})$，因此我们有 $\langle\mathbb{S}(X_i)\rangle=\langle X_{i-1}\rangle$。若$S_i=S_{i-1}+1$，则 $\mathbb{S}(X_{i,j})\overset{(S3)}{=}X_{i-1,j-1}$，因此我们有 $\langle\mathbb{S}(X_i)\rangle=\langle X_{i-1}\rangle$。所以 (4.7) 成立。

因此，该断言由命题 4.6 得出。

(b) 根据引理 5.8，存在一个三角自等价 $G\colon \langle X_S\rangle \to \langle X_S\rangle$，使得 $G(X_{i,\ j}) = \mathbb{S}_{\langle X_i\rangle}(X_{i,\ j})$。因此，断言得证。

(c) 这是 (b) 的对偶。 □

以下结果在 $k = 0$ 和 $S_{>k+1} = \emptyset$ 的情形下等价于定理 5.6。

引理 5.10. 设 $\mathcal{D}$ 是满足 (3.1) 的三角范畴，并设 I_0 和 I_1 是 $\mathbb{Z}$ 的两个区间，使得 $I_1 \subset I_0$, S 以及 S' 是 $\mathbb{Z}^2$ 的两个有限子集，满足

$$S = \bigsqcup_{k\in[0,1]} \{k\} \times I_k, \quad S' = \sigma_{\leqslant 0}(S).$$

(a) 若 $\mathsf{X} = (X_{i,\ j})_{(i,j)\in S}$ 是一个 S-族，则族 $\mathsf{X}' = (X'_{i,\ j})_{(i,j)\in S'}$ 是一个 S'-族，其中

$$X'_{i,j} = \begin{cases} \mathbb{S}_{\langle X_0\rangle}(X_{0,j+1}) & i = 0, \\ X_{1,j} & i = 1. \end{cases}$$

特别地，存在一个三角等价 $\operatorname{per} L(S) \to \operatorname{per} L(S')$。

(b) 若 $\mathsf{Y} = (Y_{i,j})_{(i,j)\in S'}$ 是一个 S'-族，则族 $\mathsf{Y}' = (Y'_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是一个 S-族，其中

$$Y'_{i,j} = \begin{cases} \mathbb{S}^{-1}_{\langle Y_0\rangle}(Y_{0,j-1}) & i = 0, \\ Y_{1,j} & i = 1. \end{cases}$$

特别地，存在一个三角等价 $\operatorname{per} L(S') \to \operatorname{per} L(S)$。

证明。在不失一般性的前提下，我们可以假设 $I_0 = [p_1, p_2]$ and $I_1 = [1, q]$。

(a) 由于对任意 $i \in [0,1]$ 都有 $\langle X'_i\rangle = \langle \mathbb{S}_{\langle X_i\rangle}(X_i)\rangle = \langle X_i\rangle$，因此 X' 满足 (L2.1)。设 j 和 j' 是两个满足 $|j - j'| > 1$ 的整数。于是

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X'_{0,j}, X'_{0,j'}) &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{S}_{\langle X_0\rangle}(X_{0,j+1}), \mathbb{S}_{\langle X_0\rangle}(X_{0,j'+1})) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{0,j+1}, X_{0,j'+1}) \overset{\text{(L2) for } \mathsf{X}}{=} 0, \end{aligned}$$

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X'_{1,j}, X'_{1,j'}) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{1,j}, X_{1,j'}) \overset{\text{(L2) for } \mathsf{X}}{=} 0.$$

若 $j' \neq p_1 - 1$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X'_{1,j}, X'_{0,j'}) &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{1,j}, \mathbb{S}_{\langle X_0\rangle}(X_{0,j'+1})) \overset{\text{(S1) for } \mathsf{X}}{=} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{1,j}, X_{0,j'}) \\ &\overset{\text{(S2)}' \text{ for } \mathsf{X}}{=} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{0,j}, X_{0,j'}) \overset{\text{(L2) for } \mathsf{X}}{=} 0. \end{aligned}$$

如果 $j' = p_1 - 1$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X'_{1,j}, X'_{0,p_1-1}) &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{1,j}, \mathbb{S}_{\langle X_0\rangle}(X_{0,p_1})) \overset{\text{(S2)}' \text{ for } \mathsf{X}}{=} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{0,j}, \mathbb{S}_{\langle X_0\rangle}(X_{0,p_1})) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{0,p_1}, X_{0,j})^* \overset{\text{(L2) for } \mathsf{X}}{=} 0. \end{aligned}$$

因此，X' 满足 (L2.2)，所以 X' 是一个弱 S'-族。

显然，X' 满足 (S1)。根据命题 3.16，X' 满足 (S3)。如果 $(0,j)$、$(1,j) \in S'$，那么 $(0,j+1) \in S$ 并且

$$\mathbb{F}_{\langle X'_0\rangle}(X'_{1,j}) = \mathbb{F}_{\langle X_0\rangle}(X_{1,j}) \overset{\text{(S2)}' \text{ for } \mathsf{X}}{=} X_{0,j} \overset{\text{(S1) for } \mathsf{X}}{=} \mathbb{S}_{\langle X_0\rangle}(X_{0,j+1}) = X'_{0,j}.$$

因此，X' 满足 (S2)′。由此即可得出该断言。

(b) 由于对任意 $i \in [0,1]$，都有 $\langle Y'_i\rangle = \langle \mathbb{S}_{\langle Y_i\rangle}(Y_i)\rangle = \langle Y_i\rangle$，因此 Y 满足 (L2.1)。设 j 和 j' 为满足 $|j - j'| > 1$ 的两个整数。于是

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Y'_{0,j}, Y'_{0,j'}) &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^{-1}_{\langle Y_0\rangle}(Y_{0,j-1}), \mathbb{S}^{-1}_{\langle Y_0\rangle}(Y_{0,j'-1})) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Y_{0,j-1}, Y_{0,j'-1}) \overset{\text{(L2) for } \mathsf{Y}}{=} 0, \end{aligned}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y'_{1,j}, Y'_{1,j'}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y_{1,j}, Y_{1,j'}) \overset{\text{(L2) for Y}}{=} 0.$$

由于 $S'_1 = S_1 \subset S_0 = S'_0 + 1$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y'_{1,j}, Y'_{0,j'}) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y_{1,j}, \mathbb{S}^{-1}_{\langle Y_0\rangle}(Y_{0,j'-1})) \overset{\text{(S3) for Y}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^{-1}(Y_{0,j-1}), \mathbb{S}^{-1}_{\langle Y_0\rangle}(Y_{0,j'-1}))\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^{-1}_{\langle Y_0\rangle}(Y_{0,j'-1}), Y_{0,j-1})^* \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y_{0,j-1}, Y_{0,j'-1}) \overset{\text{(L2) for Y}}{=} 0.\end{aligned}$$

因此，Y 满足 (L2.2)，所以 Y 是一个弱 S'族。

由于 Y 满足 (S1)，我们有

$$Y_{i,j} = \begin{cases}\mathbb{S}^{-1}_{\langle Y_0\rangle}(Y_{0,p_2-1}) & (i,j) = (1,p_2),\\ Y_{i,j} & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{5.2}$$

由 (5.2)，Y 满足 (S1) 和 (S3)。若 $(1,j)$、$(2,j) \in S'$，则

$$\mathbb{F}_{\langle Y'_0\rangle}(Y'_{1,j}) = \mathbb{F}_{\langle Y_0\rangle}(Y_{1,j}) \overset{\text{(S3) for Y}}{=} \mathbb{F}_{\langle Y_0\rangle}\mathbb{S}^{-1}(Y_{0,j-1}) \overset{2.8\text{(b)}}{=} \mathbb{S}^{-1}_{\langle Y_0\rangle}(Y_{0,j-1}) = Y'_{0,j},$$

因此 Y 满足 (S2)′。断言得证。 □

现在我们可以证明定理 5.6 了。

定理 5.6 的证明。（a）令 $\mathbf{X}' = (X'_{i,\ j})_{(i,j)\in S'}$。由引理 5.9，$\mathbf{X}'_{\leqslant k}$ 是 $S_{\leqslant k}$ 中的一个 $\mathcal{D}$-族。由引理 5.10，$\mathbf{X}'_{\geqslant k}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个 $S_{\geqslant k}$-族。因此，结论由命题 5.2 得出。（b）令 $\mathbf{X}' = (X'_{i,\ j})_{(i,j)\in S'}$。由引理 5.9，$\mathbf{X}'_{\leqslant k}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个 $S_{\leqslant k}$-族。由引理 5.10，$\mathbf{X}'_{\geqslant k}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个 $S_{\geqslant k}$-族。因此，结论由命题 5.2 得出。□

$\mathbb{Z}^2$ 的子集 S 称为一个 ${}^tM_k^+$-子集，如果 ${}^tS$ 是一个 M_k^+-子集。由定理 5.6，我们得到以下结果：

定理 5.11（突变 ${}^t\mathrm{I}$）。设 $\mathcal{D}$ 是满足 (3.1) 的三角范畴，S 是满足 $S^{\leqslant -1} = \emptyset$ 的 ${}^tM_k^+$-子集，并设 $S' = \rho_{\leqslant k}(S)$。

(a) 若 $\mathbf{X} = (X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是一个 S-族，则族 $\mathbf{X}' = (X'_{i,j})_{(i,j)\in S'}$ 是一个 S'-族，其中

$$X'_{i,j} = \begin{cases}\mathbb{S}_{\langle X^j\rangle}(X_{i+1,j}) & j \leqslant k,\\ X_{i,j} & k < j.\end{cases}$$

特别地，存在一个三角等价 $\mathrm{per}\, L(S) \to \mathrm{per}\, L(S')$。

(b) 若 $\mathbf{Y} = (Y_{i,j})_{(i,j)\in S'}$ 是一个 S'-族，则族 $\mathbf{Y}' = (Y'_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是一个 S-族，其 e

$$Y'_{i,j} = \begin{cases}\mathbb{S}^{-1}_{\langle Y^j\rangle}(Y_{i-1,j}) & j \leqslant k,\\ Y_{i,j} & k < j.\end{cases}$$

特别地，存在一个三角等价 $\mathrm{per}\, L(S') \to \mathrm{per}\, L(S)$。

以下结果是本小节的主要结果之一。

定理 5.12（变异 II）。设 $\mathcal{D}$ 是一个满足 (3.1) 的三角范畴，并设 k、h 是两个正整数，使得 $k \in (h+1)\mathbb{Z}$，且 $s = (h-1\ k)$。设 S 是 $\mathbb{Z}^2$的一个 M_{k-1}^+-子集，满足 $|S_0| = h$，并且对任意 $i \in [1, k-1]$都有 $S_i = S_{i-1}$，再设 $S' = \overset{h+1}{\sigma}_{\leqslant 0}\sigma_{\leqslant 1}\dots\sigma_{\leqslant k-1}(S)$。

(a) 如果 $\mathbf{X} = (X_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是一个 S-族，那么族 $\mathbf{X}' = (X'_{i,j})_{(i,j)\in S'}$ 是一个 S'-族，且$\langle X_S\rangle = \langle X'_{S'}\rangle$，其中

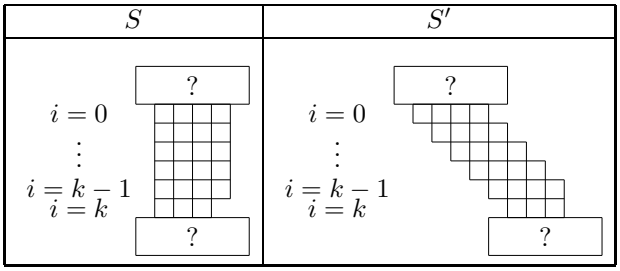
$$X'_{i,j} = \begin{cases}X_{i,j}[s] & i < 0,\\ \mathbb{S}^{k-i}_{\langle X_i\rangle}(X_{i,j}) & 0 \leqslant i \leqslant k-1,\\ X_{i,j} & i > k-1.\end{cases}$$

特别地，存在一个三角等价 $\mathrm{per}\, L(S) \to \mathrm{per}\, L(S')$。

(b) 若 $\mathrm{Y} = (Y_{i,j})_{(i,j)\in S'}$ 是一个 S'-族，则族 $\mathrm{Y}' = (Y'_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 是一个 S-族，使得 $\langle Y_S\rangle = \langle Y'_{S'}\rangle$ 其中

$$Y'_{i,j} = \begin{cases} Y_{i,j}[-s] & i < 0, \\ \mathbb{S}^{-k+i}_{\langle Y_i\rangle}(Y_{i,j}) & 0 \leqslant i \leqslant k-1, \\ Y_{i,j} & i > k-1. \end{cases}$$

特别地，存在三角等价 $\mathrm{per}\, L(S') \to \mathrm{per}\, L(S)$。



证明。 (a) 由于 $S_{\geqslant 0}$ 是满足 $(S_{\geqslant 0})_{\leqslant -1} = \emptyset$ 的 M^+_{k-1}-子集，根据定理 5.6(a)，子族 $\mathrm{X}'_{\geqslant 0}$ 是一个 $S'_{\geqslant 0}$-族。由于存在一个三角等价 $F\colon \langle X_0\rangle \to \mathrm{per}\ N(S_0)$，使得对于引理 3.13 中的任意 $j \in S_0$， $F(X_{0,j}) \simeq P(j)$，因此我们有

$$X'_{0,j} = \mathbb{S}^k_{\langle X_0\rangle}(X_{0,j}) \overset{2.4}{=} X_{0,j}[s],$$

因此我们有 $\mathrm{X}'_{\leqslant 0} = (X_{i,j}[s])_{(i,j)\in S'_{\leqslant 0}}$ 是一个 $S'_{\leqslant 0}$-族。于是，结论由命题 5.2 得出。

(b) 这是 (a) 的对偶。 □

通过转置，我们得到以下结果。

定理 5.13（突变 ^{t}II）。设 $\mathcal{D}$ 是满足 (3.1) 的三角范畴，且 k、 h 是两个正整数，使得 $k \in (h+1)\mathbb{Z}$，并设 $s = (h-1\ k)$。设 S 是 $\mathbb{Z}^2$的一个满足 $|S^0| = h$ 且对任意 ~~$i \in$~~ $[1, k-1]$均满足 $S^i = S^{i-1}$ 的 $^tM^+_{k-1}$-子集，$^{h+1}$并设 $S' = \rho_{\leqslant 0}\rho_{\leqslant 1}\cdots\rho_{\leqslant k-1}(S)$。

(a) 若 $\mathrm{X} = (X_{i,\ j})_{(i,j)\in S}$ 是一个 S-族，则族 $\mathrm{X}' = (X'_{i,\ j})_{(i,j)\in S'}$ 是一个 S'-族，且满足 $\langle X_S\rangle = \langle X'_{S'}\rangle$ 其中

$$X'_{i,j} = \begin{cases} X_{i,j}[s] & j < 0, \\ \mathbb{S}^{k-j}_{\langle X^j\rangle}(X_{i,j}) & 0 \leqslant j \leqslant k-1, \\ X_{i,j} & j > k-1. \end{cases}$$

特别地，存在一个三角等价 $\mathrm{per}\, L(S) \to \mathrm{per}\ L(S')$。

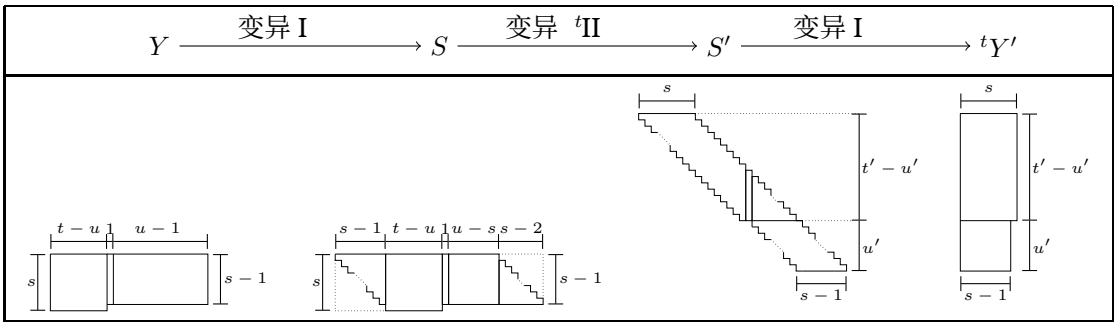
(b) 若 $\mathrm{Y} = (Y_{i,\ j})_{(i,j)\in S'}$ 是一个 S'-族，则族 $\mathrm{Y}' = (Y'_{i,\ j})_{(i,j)\in S}$ 是一个 S-族，且满足 $\langle Y_S\rangle = \langle Y'_{S'}\rangle$ 其中

$$Y'_{i,j} = \begin{cases} Y_{i,j}[-s] & j < 0, \\ \mathbb{S}^{-k+j}_{\langle Y^j\rangle}(Y_{i,j}) & 0 \leqslant j \leqslant k-1, \\ Y_{i,j} & j > k-1. \end{cases}$$

特别地，存在一个三角等价 $\mathrm{per}\, L(S') \to \mathrm{per}\, L(S)$。

5.3. S族变异的应用。我们现在可以通过应用定理 5.6 和定理 5.13 来证明我们的主要结果之一，如下所示，其中

$$t' = t-1, \quad u' = u-s, \quad Y = Y(s,t,u), \quad Y' = Y(s,t',u').$$



定理 5.14. 设 s、 t、 u 为三个正整数，使得 $1 \leqslant u \leqslant t$。假设满足以下条件之一。

(a) $u \in \mathbb{Z}s$ 和 $t-u \in \mathbb{Z}(s+1)$。
(b) $s=2$ 和 $t-u \in 3\mathbb{Z}$。
那么存在三角等价

$$\operatorname{per} L(s,t,u) \to \operatorname{per} L(S) \to \operatorname{per} L(S') \to \operatorname{per} L(s,t-1,u-s)$$

其中

$$S = \sigma_{\leqslant 1}\sigma_{\leqslant 2}\dots\sigma_{\leqslant s-1}(\mathrm{Y}(s,t,u)),$$
$$S' = (\rho_{\leqslant 1}\rho_{\leqslant 2}\dots\rho_{\leqslant t-u})(\rho^{-1}_{\geqslant t-s+1}\rho^{-1}_{\geqslant t-s}\dots\rho^{-1}_{\geqslant t-u+2})(S).$$

证明。(a) 根据定理 5.6，存在三角等价 $\operatorname{per} L(s,t,u) \to \operatorname{per} L(S)$。
设 $I=[1,t-u]$, $J=[t-u+2,t-s+1]$。由于 $S^I \equiv \mathrm{Y}(s;\ t-u)$ 且 $S^{t-u+1} \subset S^{t-u}$，我们有 S 是满足 $t-u \in \mathbb{Z}(s+1)$ 的 ${}^tM^+_{t-u-1}(1,1)$-子集。由于 $S^J \equiv \mathrm{Y}(s-1;\ u-s)$ 且 $S^{t-u+2} = S^{t-u+1}$，我们有 $-S$ 是满足 $u-s \in \mathbb{Z}s$ 的 ${}^tM^+_{u-s-1}(-1,-t+s-1)$-子集。因此，根据定理 5.13，存在三角等价 $\operatorname{per} L(S) \to \operatorname{per} L(S')$。

由于

$${}^t\mathrm{Y}(s,t-1,u-s) \equiv (\sigma^{-1}_{\leqslant s-t+u}\sigma^{-1}_{\leqslant s-t+u+1}\dots\sigma^{-2}_{\leqslant s-1})(\sigma_{\geqslant u}\sigma_{\geqslant u-1}\dots\sigma_{\geqslant s+1})(S'),$$

根据定理 5.6，存在一个三角等价 $\operatorname{per} L(S') \to \operatorname{per} L(s,t-1,u-s)$。
(b) 根据定理 5.6，存在一个三角等价 $\operatorname{per} L(2,t,u) \to \operatorname{per} L(S)$。
设 $I=[1,t-u]$, $J=[t-u+2,t-1]$。由于 $S^I \equiv \mathrm{Y}(2;\ t-u)$ 且 $S^{t-u+1} \subset S^{t-u}$，我们得到 S 是满足 $t-u \in 3\mathbb{Z}$ 的一个 ${}^tM^+_{t-u-1}(1,1)$- 子集。由于 $S^J \equiv \mathrm{Y}(1;\ u-s)$，我们得到 $-S$ 是一个 ${}^tM^+_{u-3}(-1,-t+1)$-子集。因此，根据定理 5.11 和定理 5.13，存在一个三角等价 $\operatorname{per} L(S) \to \operatorname{per} L(S')$。

由于

$${}^t\mathrm{Y}(2,t-1,u-2) \equiv (\sigma^{-1}_{\leqslant -t+u+2}\sigma^{-1}_{\leqslant -t+u+3}\dots\sigma^{-2}_{\leqslant 1})(\sigma_{\geqslant u}\sigma_{\geqslant u-1}\dots\sigma_{\geqslant 3})(S'),$$

根据定理 5.6，存在一个三角等价 $\operatorname{per} L(S') \to \operatorname{per} L(2,t-1,u-2)$。 □

根据定理 4.7，我们得到以下结果。

推论 5.15。设 p,q 是两个整数，且满足 $p \geqslant 2$, $q \geqslant 1$。假设以下条件之一成立。

(a) $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。 (b) $p=2$ 和 $r \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。
那么存在一个三角等价

$$\operatorname{per} N(n,\ell+1) \to \operatorname{per} N(n,\ell) \ \textit{where}\ n = p(p+1)q + p(p-1)r,\ \ell = (p+1)q + pr.$$

证明。令 $(s,t,u) = (p,(p+1)q+pr,pr)$。根据定理 4.7，存在三角等价

$$\operatorname{per} N(n,\ell+1) \to \operatorname{per} L(s,t,u), \quad \operatorname{per} N(n,\ell) \to \operatorname{per} L(s,t-1,u-s).$$

因此，该断言由定理 5.14 得证。 □

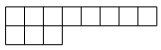
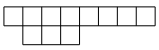
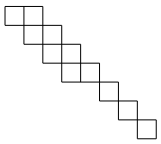
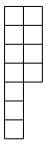
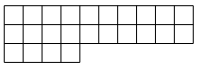
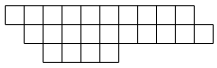
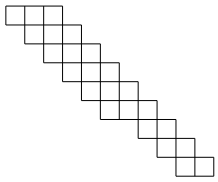
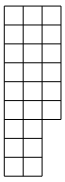
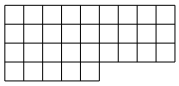
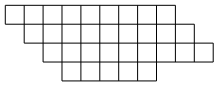
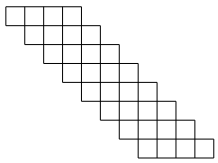
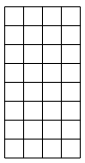
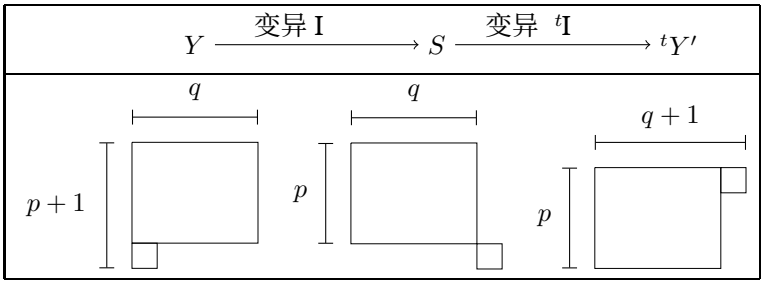
(s,t,u)	$\mathrm{Y}(s,t,u)$	S	S'	${}^t\mathrm{Y}(s,t-1,u-s)$
(2,8,5)				
(3,10,6)				
(4,9,4)				

FIGURE 3. 从 $\mathrm{Y}(s,t,u)$ 到 ${}^t\mathrm{Y}(s,t-1,u-s)$ 的变异

下面的结果通过如下方式应用定理 5.6 和定理 5.11 得证，其中 e

$$Y=\mathrm{Y}(p+1,q,q-1),\quad Y'=\mathrm{Y}(q+1,p,p-1).$$



定理 5.16。设 $p,\ q$ 是满足 $p\geqslant 2,\ q\geqslant 2$ 的两个整数。则在 per $L(p+1,q,q-1)$ 中存在一个满的 $\mathrm{Y}(q+1,p,p-1)$-族。特别地，存在一个三角等价

$$\mathrm{per}\,L(p+1,q,q-1)\to \mathrm{per}\,L(q+1,p,p-1).$$

证明。设 S 是 $\mathbb{Z}^2$ 的一个子集，使得 $S=\sigma^q_{\leqslant p}(Y(p+1,q,q-1)))$。由于

$${}^tY(q+1,p,p-1)\equiv \rho^{-p}_{\leqslant 0}(S),$$

该断言由定理 5.6 和定理 5.11 得出。 □

推论 5.17。存在一个三角等价

$$\mathrm{per}\,N(pq+1,q+1)\to \mathrm{per}\,N(pq+1,p+1)\ \ \textit{for any integers } p\geqslant 2,\ q\geqslant 2.$$

证明。根据定理 4.7，存在三角等价

$$\mathrm{per}\,N(pq+1,q+1)\to \mathrm{per}\,L(p+1,q,q-1),\quad \mathrm{per}\,N(pq+1,p+1)\to \mathrm{per}\,L(q+1,p,p-1).$$

因此，该断言由定理 5.16 得出。 □

References

[1] I. Assem、D. Simson、A. Skowro´nski，《结合代数表示论要素》第1卷：《表示论方法》，伦敦数学会学生教材第65卷，剑桥大学出版社，剑桥（2006）。[2] M. Auslander、I. Reiten、S. Smalø，《Artin代数表示论》，剑桥高等数学研究丛书第36卷，剑桥大学出版社，剑桥（1995）。[3] A. I. Bondal，《结合代数的表示与相干层》，《苏联科学院通报》34（1990），23-42。[4] A. I. Bondal、M. M. Kapranov，《可表函子、Serre函子与重构》，《苏联科学院通报》35（1990），519-541。[5] S. Brenner、M. C. R. Butler，《Bernstein-Gelfand-Ponomarev反射函子的推广》，数学讲义第832号，施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约（1980），103-169。[6] P. Gabriel、A. V. Roiter，《有限维代数的表示》，数学科学百科全书第73卷，《代数》第VIII卷，施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约（1992）。[7] D. Happel，《论Gorenstein代数》，《有限群与有限维代数表示论》（比勒费尔德，1991），《数学进展》第95卷，Birkh¨auser，巴塞尔（1991），389-404。[8] D. Happel，《有限维代数表示论中的三角范畴》，伦敦数学会讲义丛书第119卷，剑桥大学出版社，剑桥（1988）。[9] D. Happel、U. Seidel，《分段遗传Nakayama代数》，《代数与表示论》13，第6期（2010），693-704。[10] D. Huybrechts，《代数几何中的傅里叶-向量变换》，牛津数学专著，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，牛津（2006）。[11] L. A. H¨ugel、D. Happel、H. Krause，《倾斜理论手册》，伦敦数学会讲义丛书第332卷，剑桥大学出版社，剑桥（2007）。[12] B. Keller，《导出DG范畴》，《高等师范学校科学年鉴》´第4辑第27卷第1期（1994），63-102。[13] D. Kussin、H. Lenzing、H. Meltzer，《三角奇点、ADE链与加权射影直线》，《数学进展》237（2013），194-251。[14] S. Ladkani，《直线、矩形与三角形的导出等价》，《伦敦数学会杂志》第2辑第87卷第1期（2013），157-176。[15] H. Lenzing、H. Meltzer、S. Ruan，《中山代数与福克斯奇点》（2022），arXiv 2112.15587v2。[16] S. Mac Lane，《工作数学家的范畴论》（第2版），数学研究生教材第5卷，施普林格出版社，纽约（1998）。[17] T. Nakayama，《关于单列环与广义单列环的注记》，《东京帝国学院院刊》16（1940），285-289。[18] I. Reiten、M. Van den Bergh，《满足Serre对偶的Noether遗传阿贝尔范畴》，《美国数学会杂志》15，第2期（2002），295-366。[19] J. Rickard，《导出范畴的Morita理论》，《伦敦数学会杂志》第2辑第39卷第3期（1989），436-546。

T. Ueda: Graduate School of Mathematics, Nagoya University
Email address: m15013z@math.nagoya-u.ac.jp