论映射　　类群及其拓扑量子场论表示　　S

LOUIS FUNAR

arXiv:2302.02883v2 [math.GT] 8 Nov 2023

Abstract. 本文旨在综述映射类群的若干方面，重点关注其在拓扑量子场论中产生的有限维表示。
2000 年 MSC 分类：57 R 56、57 K 16、18 M 20、81 T 40。关键词：同余子群、德恩扭转、映射类群、模张量范畴、编织、曲面、拓扑量子场论、三维流形、普适配对

1. Introduction

映射类群构成了数学中一个业已确立的研究领域，处于低维拓扑、代数拓扑、动力系统和代数几何的交汇处。它是一个内容丰富且活跃的数学领域，这一点可从[30], 中的论文集中看出，其中讨论了大量尚未解决的问题。我们参考 [31] ，以获得对该主题的全面介绍。回顾一下，流形的映射类群是其同胚的同伦类所构成的群。同样的术语也用于指光滑流形的微分同胚的同伦类所构成的群。尽管对于紧曲面——这正是本文的主要关注对象——这两个定义是一致的，但对于高维流形，情况则未必如此。低维紧流形的映射类群是可数群，已与泰希米¨勒空间和双曲几何相关联而得到广泛研究。我们的目标是介绍该主题的若干方面；这些方面深受Witten（见[82]）在量子场论中奠基性工作的影响，如今已成为称为量子拓扑的研究领域的一部分。

本章的目标如下：
(1) 介绍拓扑量子场论和泛配对；(2) 分析泛配对的正定性以及拓扑量子场论对流形的检测；(3) 介绍模张量范畴；(4) 陈述亏格一时模表示的一些性质，例如同余性质；(5) 讨论编织拓扑量子场论在高亏格下的模表示

拓扑量子场论（下文简称拓扑量子场论）起源于 Atiyah 的论文[6] 。Atiyah 在文中提出了一系列受配边理论启发的公理；Jones 发现了一种新的链环不变量（[47]）；Witten 在量子场论方面的工作，以及 Segal 对二维共形场论的数学描述（[78, 79]），也促成了这一理论的发展。具体而言，对于固定的 n ，我们考虑这样一个范畴：其对象是（$n-1$）维闭流形的同胚类，态射则对应于这些流形之间配边的同胚类。当流形带有某些额外结构，且相应的同胚需保持这些结构时，还可得到该范畴的其他版本。例如，我们可以只考虑光滑流形及其微分同胚、定向流形及保定向同胚，等等。于是，一个 n维（拓扑）拓扑量子场论就是从该范畴到有限维向量空间及其间线性映射所构成的范畴的函子。也就是说，对每个闭（$n-1$）流形 S，都有一个与之对应的向量空间 $V(S)$；对流形 $\partial_+ M$ 和 $\partial_- M$ （依此顺序）之间的每个配边 M，都有一个与之对应的线性映射 $Z(M) \in \mathrm{Hom}(V(\partial_+ M)\ V(\partial_- M))$。该映射只取决于配边的同胚类型及其边界识别。它与代数拓扑中常见的经典函子之间的主要区别，在于下面的幺半群公理：

$$V(M_1 \sqcup M_2) = V(M_1) \otimes V(M_2)$$

其中 $\sqcup$ 表示不交并。如上所述，通过限制在光滑流形和配边上，我们可以考虑 n维光滑拓扑量子场论，并要求 $Z(M)$ 是配边 M 微分同胚类型的不变量。通常还会加入公理 $V(\emptyset) = \mathbb{C}$，使得当 $\partial_+ M = \partial M$ 时，拓扑量子场论函子将线性形式 $Z(M) \in V(\partial M)^*$ 赋予相应对象；而当 $\partial_+ M = \emptyset$ 时，则将同态$Z(M) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, V(\partial M))$ 赋予相应对象。后一种情形下，稍滥用记号，我们将 $1 \in \mathbb{C}$ 的 $Z(M)(1)$ 的像记为 $Z(M) \in V(\partial M)$。注意，对于一个闭 n 维流形，将其视为两个空集之间的配边时，函子会赋予它一个复数 $Z(M) \in \mathbb{C}$，这是该流形的拓扑不变量。如果理论只对某一类闭（$n-1$）维流形有定义，我们就称之为受限拓扑量子场论。

Atiyah 宣介拓扑量子场论后不久，Witten 给出了第一个有意义的拓扑量子场论实例： [82] 三维中以 $SU(2)$ 为规范群的陈-西蒙斯理论。该拓扑量子场论赋予三维球面中链环补空间的不变量，本质上就是该链环的着色琼斯多项式。Reshetikhin 和 Turaev 的工作 SU则以严格的数学方式构造了[75] (2)-陈-西蒙斯理论及其通过量子群得到的推广。

二维拓扑量子场论对应于交换弗罗贝尼乌斯代数。三维拓扑量子场论的构造依赖于称为模张量范畴的代数数据（见 [81]），其定义见第3节，主要实例源自量子群。与三维拓扑量子场论丰富多样的情况相比，高维拓扑量子场论则十分稀少。尽管目前仍不清楚它们能探测到哪些拓扑性质，三维拓扑量子场论仍是理解曲面自同构表示论的有用工具。

最简单的 n 维配边是同胚ϕ 的映射柱 $C(\phi)$： $M \to M$ （$n-1$）维流形 M 的映射柱。严格来说， $C(\phi)$ 在拓扑上是平凡的，因为它与 $M \times [0,1]$ 同胚；然而，与 M 的边界识别编码了由 ϕ 产生的扭结。因此，任何拓扑量子场论 Z 都将给出从 M 的同胚群到群 $GL(V(M))$ 的表示，后者是向量空间 $V(M)$ 的自同构群。由于我们要求理论具有拓扑不变性，该表示会经由 M 的映射类群$\mathcal{M}(M)$ 分解。特别地， n 维拓扑量子场论涵盖了所有闭（$n-1$）维流形 M 的一族映射类群表示 ρ_M。因此， $n=3$ 维拓扑量子场论将提供大量曲面映射类群表示。本文旨在分析这些表示的一些已知结果，并推动对它们的进一步研究。

关于 TQFT 的一套完整公理，请参阅 [6] 。我们将讨论限制在定向流形范畴及保定向同胚中，并令 $\overline{N}$ 表示流形 N的反向定向。于是，若向量空间都配备非退化厄米形式，且 $Z(\overline{M}) = Z(M$，其中我们将 $V(\overline{M})$ 视为对偶厄米空间 $V(\sout{M)^*,}$ 则称 TQFT 为厄米拓扑量子场论。在厄米拓扑量子场论中，具有物理意义的是酉的那一类，即厄米形式为正定的理论。

对拓扑量子场论的一个关键假设是，所有向量空间 $V(M)$ 都是有限维的。值得注意的是，视所考虑的拓扑量子场论类型而定，这并非总是一个假设；它也可能自动成立。那么，纤维化于圆 S^1 上的闭 n-流形的值不变量 $Z(N)$ 为：

$$Z(N) = \mathrm{Tr}(\rho_M(\phi)),$$

其中， M 是纤维， $\phi \in \mathcal{M}(M)$ 是圆纤维化的单值化，而 ρ_M 是上述映射类群表示。特别地，

$$Z(M \times S^1) = \dim V(M)$$

如果省略下文的有限性假设，我们姑且将其称为无限维拓扑量子场论。

2. Universal pairings and TQFTs

2.1. 泛配对。通过一些抽象的构造，可以在普适层面实现拓扑量子场论框架。暂且假设我们处理的是光滑流形范畴。对于每个闭定向的（$n-1$）流形 M，令 U_M 为由紧致连通的 n 流形 N 的等价类所张成的复向量空间，这些流形带有一个标记微分同胚 $\partial N \to M$，并按与边界标记相容的微分同胚取商。若 $M=\emptyset$，则令 $\mathfrak{A}=U_\emptyset$。注意，$\mathfrak{A}$ 具有由闭流形的连通和运算诱导的自然代数结构。

与 M 相关联的普适配对是复半双线性映射

$$\langle , \rangle_M : U_M \times U_M \to \mathfrak{A}$$

它通过半双线性性扩展了这样一个映射：该映射将两个带标记的 n 流形 N_1、N_2（其边界为M）映至沿边界 $N_1 \cup_M \overline{N_2}$ 粘合后的结果。

2.2. 来自拓扑不变量的函子。这个配对已经提供了一种方案，可利用拓扑不变量构造一些类似于拓扑量子场论的函子。对于闭定向 n 流形的复值拓扑不变量 I，若其对定向敏感，即满足$I(\overline{N}) = I(N)$，则可通过线性性扩展为 $I\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$。对于连通的 M，商向量空间：

$$V_I(M) = U_M / \ker(I \circ \langle\ ,\ \rangle_M)$$

由厄米形式 $I \circ \langle\ ,\ \rangle_M$ 的左核取商后，继承一个非退化厄米形式。我们借助幺半群公理，将 $V_I(M)$ 的定义扩展到非连通流形。于是，对于每个介于 M_1 和 M_2 之间的 n 维配边 N，我们关联线性映射$Z_I(N) \in \mathrm{Hom}(V_I(M_1)\ V_I(M_2))$，并且满足：对于每个 N_1，若 n 是一个边界为M_1 的流形，则有：

$$Z_I(N)([N_1]) = [N \cup_{M_1} N_1] \in V_I(M_2)$$

那么，Z_I 是一个函子，它将由（$m-1$）维闭定向光滑流形及其间的配边构成的范畴映到赋有非退化厄米形式的向量空间范畴。为了使对所有流形 M_i都有 $V_I(M_1 \sqcup M_2) = V_I(M_1) \otimes V_I(M_2)$，可能需要对 I作出额外假设。不过，Z_I 的函子性给出了一族映射类群表示$\rho_{I,M}$，它们将 $\mathcal{M}(M)$映到 $V_I(M)$的厄米自同构群中。尽管函子 Z_I与拓扑量子场论颇为接近，但除非 I 具有非常特殊的形式，否则向量空间 $V_I(M)$通常是无限维的。反过来，一族满足某些相容条件的有限维曲面映射类群表示可以扩展为一个三维拓扑量子场论（见 [35, 48]）。

2.3. 泛配对的正定性与流形检测。一个自然的问题是，泛配对是否正定，即 $\langle v, v\rangle_M = 0$ 当且仅当 $v = 0 \in U_M$。这与酉拓扑量子场论能否区分不同微分同胚类型的流形直接相关。事实上，如果泛配对不是正定的，并且 $v \in V_M$ 是一个满足 $\langle v, v\rangle_M = 0$的向量，那么任何三维酉拓扑量子场论都无法将流形的线性组合 v 与零向量区分开来。目前，我们已经对正性问题有了完整的答案。

文献 [34] 证明，泛配对在维数 $n \le 2$时是正定的。根据同一组作者的结论，这在维数 4 时不再成立：

定理 2.1（[34]）。存在同调三维球面 M，使得普适配对 $\langle\ ,\ \rangle_M$ 不是正定的。此外，酉限制拓扑量子场论无法区分彼此同伦等价的单连通闭光滑四维流形。进一步说，酉拓扑量子场论无法区分光滑 s-配边的四维流形。

Kreck 和 Teichner 在 [57] 中进一步将拓扑量子场论无法区分光滑四维流形这一结论推广到了所有更高维流形：

定理 2.2 ([57])。当 $M = S^{4k-1}$， $k \geq 2$，或 $M = S^3 \times S^m$， $m \geq 1$时，普适配对$\langle\ ,\ \rangle_M$ 不是正定的；此外，还存在非微分同胚的可定向流形N_1， N_2，其边界为 M，当 维数 $M \neq 4$时，可选取为单连通流形，使得：

$$\langle N_1 - N_2, N_1 - N_2\rangle_M = 0$$

另一方面，Barden（[9] 已证明，单连通光滑五维流形由其第二同调以及 i 不变量分类；该不变量是最大的 r，使得第二 Stiefel- Whitney 类 $w_2(M) \in H^2(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 可提升为 $H^2(M; \mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})$ 中的一个类。Krek 和 Teichner 证明，可以借助特定的拓扑量子场论检测上同调运算是否消失，这些拓扑量子场论即所谓的 Dijkgraaf-Witten 不变量，源自具有有限总体同伦的空间（见[57]）；因此我们有：

定理 2.3（[57]）。幺正拓扑量子场论能够检测同调和 i 不变量，尤其能够区分单连通闭可定向五维流形。因此，普适配对$\langle, \rangle_{S^4}$ 在限制到单连通五维流形时为正。

剩下的三维情形似乎最具挑战性。最终，Calegari、Freedman 和 Walker 在最一般的情形下，对三维情形给出了肯定答案：

定理 2.4（[12]）。对于所有闭定向曲面 S，普适配对 $\langle\ ,\ \rangle_S$ 是正定的。

通过精心选择线性形式 $I:\ \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$，使三维流形微分同胚类型彼此可区分，我们可以导出一些（可能是无限维的）拓扑量子场论 Z_I。因此，人们或许会合理地期待拓扑量子场论能够区分三维流形。然而，事实并非如此，因为：

定理 2.5（[37]）。对于每个 n，都存在 n 个环面丛，它们以圆为底空间，且无法通过任何由模张量范畴构造的拓扑量子场论彼此区分。

事实上，拓扑量子场论是有限维的，因此它们只能携带在某个有限生成层级上能够识别的拓扑信息。类比于闭三维流形的 Reidemeister–Singer 描述，我们可以将有限生成闭三维流形定义为某个映射类群的有限生成完备化的双陪集（相对于把手体群闭包）的稳定等价类。例如，我们可以考虑由映射类群的所有有限商群所诱导的有限生成完备化，这些有限商群源自拓扑量子场论表示。若两个闭三维流形在这种意义下作为有限生成三维流形等价，那么拓扑量子场论便无法将它们区分开来。这意味着，它们都可分解为两个把手体，其粘合映射在映射类群的所有有限商群中的像相同（相差把手体群元素的左、右乘法）。

Dijkgraaf-Witten 不变量（见下一节）是与有限群相关联的拓扑量子场论所产生的特定拓扑不变量。对于闭三维流形，它们已经能够确定基本群的有限生成完备化。闭双曲三维流形是否能由其 Dijkgraaf-Witten 不变量区分，归结为考察克莱因群何时具有有限生成完备刚性。Yi Liu 的一项最新结果（[64]）表明，具有相同有限生成完备化的此类群只有有限多个。

从现在起，我们将专注于定向三维流形的拓扑量子场论及其相关的曲面映射类群表示。我们将在下一节看到，这对映射类群表示有很强的约束。

3。 Genus one TQFT representations and the Congruence Property

3.1. 融合范畴。我们沿用 [7] 中的定义。刚性幺半范畴是一个幺半群范畴 $\mathcal{C}$，其单位对象为 **1**，并且对每个对象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，都关联有一个对偶对象 $X^* \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 和四个态射

$$\mathrm{ev}_X : X^* \otimes X \to \mathbf{1}, \qquad \mathrm{coev}_X : \mathbf{1} \to X \otimes X^*, \qquad \widetilde{\mathrm{ev}}_X : X \otimes X^* \to \mathbf{1}, \qquad \widetilde{\mathrm{coev}}_X : \mathbf{1} \to X^* \otimes X$$

使得对每个 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，偶 $(\mathrm{ev}_X, \mathrm{coev}_X)$ 是 X 的左对偶，而偶 $(\tilde{}\mathrm{ev}_X, \tilde{}\mathrm{coev}_X)$ 是 X 的右对偶，即：

$$(\mathbf{1}_X \otimes \mathrm{ev}_X)(\mathrm{coev}_X \otimes \mathbf{1}_X) = \mathbf{1}_X \quad \text{and} \quad (\mathrm{ev}_X \otimes \mathbf{1}_{X^*})(\mathbf{1}_{X^*} \otimes \mathrm{coev}_X) = \mathbf{1}_{X^*}$$

幺半范畴是配备了一个幺半函子之间的同构 j 的刚性幺半范畴，该同构介于恒等函子与$(-)^{**}$之间，称为幺半结构。注意，右对偶由左对偶和 j确定，如下所示：

$$\widetilde{\mathrm{ev}}_X = \mathrm{coev}_X(\mathbf{1}_{X^*} \otimes j_X^{-1}),\ \widetilde{\mathrm{coev}}_X = (j_X \otimes \mathbf{1}_{X^*})\mathrm{ev}_X$$

现在，对于幺半范畴 $\mathcal{C}$中对象 X 的自同态 f，定义左右迹 $\mathrm{tr}_l(f)$、$\mathrm{tr}_r(f) \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(1)$如下：

$$\mathrm{tr}_l(f) = \mathrm{ev}_X(\mathbf{1}_{X^*} \otimes f)\mathrm{coev}_X \quad \text{and} \quad \mathrm{tr}_r(\widetilde{f) = \widetilde{\mathrm{ev}}}_X(f \otimes \mathbf{1}_{X^*})\mathrm{coev}_X$$

球形范畴是左右迹相等的幺半范畴，即对于每个对象的自同态 f，都有 $\mathrm{tr}_l(f) = \mathrm{tr}_r(f)$。$X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$中的左右维数定义为 $\dim_l(X) = \mathrm{tr}_l(\mathbf{1}_X)$ 和 $\dim_r(X) = \mathrm{tr}_r(\mathbf{1}_X)$。随后将它们记作 $\mathrm{tr}(f)$，并称为 f的迹。对象 X 的左（和右）维数记作 $\dim(X)$，并称为 X的维数。

幺半群范畴 $\mathcal{C}$ 称为幺半 $\mathbb{C}$-线性范畴，若其 Hom 集是复向量空间，且态射的复合与幺半积均为双线性的。若对象 $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 满足映射 $\mathbb{C} \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(1)$ $a \mapsto a\,\mathbf{1_1}$ 是代数同构，则称其为简单对象。若幺半 $\mathbb{C}$-线性范畴中的每个对象都是有限多个简单对象的直和，Hom 空间有限维，且 1 是简单对象，则称该范畴为半单范畴。现在，域 $\mathbb{C}$ 上的融合范畴是一个刚性的半单 $\mathbb{C}$-线性范畴 $\mathcal{C}$，且其简单对象只有有限多个。

给定有限群 G 和 3-余循环 $\omega \in Z^3(G, \mathbb{C}^*)$，我们有一个与之对应的球形融合范畴 Vec_G^{ω}，其对象为 ω-扭曲的 G-分次向量空间。其对象是有限维 G-分次向量空间 $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$，态射是保持分次的线性映射。张量积 $\otimes$ 为 $(V \otimes W)_g = \bigoplus_{a,b \in G; ab=g} V_a \otimes W_b$。令 $\underline{g}$ 为集中在次数 g 的一维向量空间。则简单对象的同构类型集合对应于 $\{\underline{g}, g \in G\}$，单位对象为 $\mathbf{1} = \underline{1}$，对偶对象为 $\underline{g}^* = \underline{g^{-1}}$。若将 $\underline{g} \otimes \underline{h}$ 与 $\underline{gh}$ 视为相同，则 $\mathrm{ev}_{\underline{g}} = \omega(g^{-1}, g, g^{-1})\mathbf{1_1}$,$\mathrm{coev}_{\underline{g}} = \mathbf{1_1}$，且结合子映射 $(\underline{g} \otimes \underline{h}) \otimes \underline{k} \to \underline{g} \otimes (\underline{h} \otimes \underline{k})$ 为 $\omega(g, h, k)\mathbf{1}_{\underline{ghk}}$。幺半结构由 $j_{\underline{g}} = \omega(g^{-1}, g, g^{-1})\mathbf{1}_{\underline{g}}$ 给出。

若存在自然同构 $c_{V,W}\colon V \otimes W \to W \otimes V$，使得对于每个对象 V, W，对任意 $U, V, W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 均有：幺半群范畴 $\mathcal{C}$ 称为编织的。

$$c_{U,V\otimes W} = (\mathbf{1}_V \otimes c_{U,W})(c_{U,V} \otimes \mathbf{1}_W),\ c_{U\otimes V,W} = (c_{U,W} \otimes \mathbf{1}_V)(\mathbf{1}_U \otimes c_{V,W})$$

现在设 $\mathcal{C}$ 是左刚性编织幺半群范畴。我们不要求 $V^{**} = V$。$\mathcal{C}$ 的扭结是恒等函子 $\mathcal{C}$ 的一个自同构 θ，满足

$$\theta_{V\otimes W} = c_{W,V}c_{V,W}(\theta_V \otimes \theta_W),\ \text{and}\ \theta_{\mathbf{1}} = \mathbf{1_1}$$

若扭结 θ 还满足：对于每个 $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，均有 $\theta_V^* = \theta_{V^*}$，并且（左）对偶与带状结构及扭结结构相容，即：则 $(\mathcal{C}, c)$ 上的带状结构为 θ。

$$(\theta_V \otimes \mathbf{1}_{V^*})\mathrm{coev}_V = (\mathbf{1}_V \otimes \theta_{V^*})\mathrm{coev}_V$$

在这种情况下，$(\mathcal{C}, c, \theta)$ 称为带状范畴。利用如下给出的（典范）同构 $u_X\colon X \to X^{**}$，可以自然地为带状范畴赋予一个幺结构：

$$u_X = (\mathrm{ev}_{X^*} \otimes \mathbf{1}_X)(\mathbf{1}_{X^*} \otimes c^{-1}_{X,X^{**}})(\mathrm{coev}_X \otimes \mathbf{1}_{X^{**}})$$

并令 $\theta = u^{-1}j$。此外，这个幺结构 j 是球面的。

半单模张量范畴（MTC）是一个带状融合范畴 $(\mathcal{C}, c, \theta)$，即具有有限多个简单对象同构类 $U_i, i \in I$ 的半单带状范畴，并且矩阵 S 的元素为 $S_{ij} = tr(c_{U_j,U_i^*}c_{U_i^*,U_j})$，该矩阵是非奇异的，其中 $i, j \in I$。

这个矩阵称为范畴 $\mathcal{C}$ 的 S-矩阵。元素 S_{ij} 的拓扑解释是与颜色为 i 和 j 的霍普夫链环相关联的拓扑不变量。注意， I 诱导了一个对偶 $*$，使得对于任意 $i \in I$，都有 $U_{i^*} = U_i^*$；并且存在一个标签（也称为颜色）$0 \in I$，使得 $U_0 = \mathbf{1}$。由于对象 U_i 是简单对象，扭结 θ_{U_i} 在 U_i 上的作用为标量 $\omega_i \in \mathbb{C}$。

球形融合范畴的中心 $Z(\mathcal{C})$ 是一个模张量范畴。例如， Vec_G^ω 的中心是有限维 $D^\omega(G)$-模的模张量范畴，其中 $D^\omega(G)$ 是群 G 的 ω-扭曲 Drinfeld 双，即乘法由 ω 扭曲的拟 Hopf 代数 $\mathbb{C}[G]^* \otimes \mathbb{C}[G]$：

$$(x^* \otimes g)(y^* \otimes h) = \frac{\omega(x,g,h)\omega(g,h,h^{-1}g^{-1}xgh)}{\omega(g,g^{-1}xg,h)}\delta_{x,gyg^{-1}}(x^* \otimes gh)$$

现在，模张量范畴提供了扩展三维流形的拓扑不变量，其边界配备了边界同调的一个子空间；相对于自然的辛结构，该子空间是拉格朗日子空间：

定理 3.1 （[81]）。 模张量范畴为（扩展的）三维流形提供拓扑量子场论。

Lyubashenko 在 [66] 引入了模张量范畴这一更一般的概念，该范畴不一定是半单的。这扩展了 Hennings（[46]）、Kauffman 和 Radford（[51]）以及 Kuperberg（[58]）所定义的不变量，并适用于任意有限维可分解带状霍普夫代数的模范畴。Lyubashenko 证明，非半单模张量范畴仍然提供一族曲面映射类群表示（[67], 另见 [42]），以及一种仅针对连通曲面定义的受限拓扑量子场论；相对于连通和，它满足较弱版本的幺半群公理（[53]）。直到最近，才获得了一个针对所有曲面和可容许余边界范畴定义的拓扑量子场论（ [20] ），并由此产生相同的映射类群表示（[21]）。

3.2. $SL(2,\mathbb{Z})$ 模张量范畴的表示。与模张量范畴相关联的拓扑量子场论因此决定了映射类群的表示。由于曲面上存在额外结构，例如在同调中选择一个拉格朗日子空间，我们只能得到射影表示；这些表示可提升为映射类群的中心扩张（扩张群为有限循环群）的线性表示。在亏格一的情形下，这些射影表示具有（虽不唯一但数量有限的）提升，可成为 $SL(2,\mathbb{Z})$ 的线性表示。

由模张量范畴 $\mathcal{C}$ over $\mathbb{C}$ 所定义的拓扑量子场论在亏格一中的射影表示具有如下形式 $\overline{\rho}_{\mathcal{C}}$： $SL(2,\mathbb{Z}) \to PGL(K(\mathcal{C}))$，其中 $K(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$ with $\mathbb{C}$-coefficients 的 Grothendieck 环，因此作为加法群，它是由 $\mathcal{C}$ 的简单对象的同构类生成的向量空间，其指标集为有限集 I。

群 $SL(2,\mathbb{Z})$ 由矩阵 $s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 生成。用生成元 s、t 表示的 $SL(2,\mathbb{Z})$ 的通常表示由关系 $(st)^3 = s^2$ 和 $s^4 = 1$ 给出。

用于定义 $\overline{\rho}_{\mathcal{C}}$ 的矩阵是上文定义的 S-矩阵，以及与扭结相关联的 T-矩阵。具体而言， T 的元素为 $T_{ij} = \theta_i\delta_{ij}$、 i、 $j \in I$。此外，还有所谓的电荷共轭矩阵 C，它是一个置换矩阵，其元素具有 $C_{ij} = \delta_{ij^*}$、 i、 $j \in I$ 的形式。

$\mathcal{C}$ 的高斯和由 $p_{\mathcal{C}}^{\pm} = \sum_{i\in I} \theta_i^{\pm 1}\dim(U_i)^2$ 给出，它们是满足以下条件的非零标量：

$$p_{\mathcal{C}}^+ p_{\mathcal{C}}^- = \sum_{i\in I} \dim(U_i)^2 = \dim(\mathcal{C})$$

于是我们得到以下关系：

$$(ST^3) = p_{\mathcal{C}}^+ S^2, (ST^{-1})^3 = p_{\mathcal{C}}^- S^2 C, CT = TC, CS = SC, C^2 = 1, S^2 = p_{\mathcal{C}}^+ p_{\mathcal{C}}^- C$$

射影表示 $\overline{\rho}_{\mathcal{C}}$: $SL(2,\mathbb{Z}) \to PGL(K(\mathcal{C}))$ 定义为

$$\overline{\rho}_{\mathcal{C}}(s) = S,\ \overline{\rho}_{\mathcal{C}}(t) = T$$

此外，选取 $D \in \mathbb{C}$ 使得 $D^2 = \dim(\mathcal{C})$，并选取 $\zeta \in \mathbb{C}$ 使得 $\zeta^3 = p_{\mathcal{C}}^{+} D^{-1}$。这样便可将 $\overline{\rho}_{\mathcal{C}}$ 提升为普通的线性表示

$$\rho_{\mathcal{C}}^{D,\zeta} : SL(2,\mathbb{Z}) \to GL(K(\mathcal{C}))$$

通过设定

$$\rho_{\mathcal{C}}^{D,\zeta}(s) = D^{-1}S,\ \rho_{\mathcal{C}}^{D,\zeta}(t) = \zeta^{-1}T$$

这些提升称为与 $\mathcal{C}$ 相关联的模表示。

3.3. $SL(2,\mathbb{Z})$-表示的性质。矩阵 S 和 T 的元素以 $\{0,1,2,\ldots,r-1\}$ 为指标，其中 0 对应单位对象，而 r 是模张量范畴中简单对象的同构类数。以下汇总矩阵 S 和 T 的元素最重要的算术约束（完整证明参见例如 [28], 第 8 章）：

定理 3.2. (1) $p_{\mathcal{C}}^{+}/p_{\mathcal{C}}^{-}$，$\zeta$ 以及对角矩阵 T 的特征值 θ_i 都是单位根，因此 T 的阶有限（Vafa 定理）。此外，T 的阶 d 是代数整数 $(\dim \mathcal{C})^{5/2}$ ([25]) 的因子。(2) $S_{ij} = S_{ji}$, $T_{00} = S_{00} = 1$，而元素为 S_{i^*j} 的矩阵是 S 的逆矩阵。(3) S_{ij}/S_{0j}, $S_{0i} = \dim(U_i)$、$\dim(\mathcal{C})/\dim(U_i)^2$ 是 $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ 中的分圆整数（[74, 17, 15]）。(4) $\dim(U_i)$ 是全实分圆整数，即其所有代数共轭都是实数（[26]）。因此 $\dim(U_i)^2$ 和 $\dim(\mathcal{C})$ 都是全实正数。(5) $S_{i^*j} = \overline{S_{ji}}$ （[26], 命题 2.12，注 2.13），因此与模张量范畴相关联的每个 $SL(2,\mathbb{Z})$ 表示都是全酉的，即其所有代数共轭都是酉的。(6) 映射 X_i: $\{0,1,\ldots,r-1\} \to \mathbb{C}$ 由 $X_i(j) = S_{ij}/S_{0j}$ 定义，它们张成一个由 C 值函数构成的环，定义在含有 r 个元素的集合上，并构成该环的一组基。

请注意，在有限刚性辫状张量范畴中（不一定是半单的），扭结是准幺幂的，但不一定具有有限阶。

目前尚不清楚与模张量范畴相关的所有高亏格映射类群表示是否都是厄米／酉的。然而，已知它们不可能全酉，因为它们可能是无限的。

在 $SL(2,\mathbb{Z})$ 的有限指数子群中，同余子群占据着显著地位，它们具有浓厚的算术色彩。回顾一下，$SL(2,\mathbb{Z})$ 的同余子群是一个有限指数子群，它包含同态 $SL(2,\mathbb{Z}) \to SL(2,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ 的核；该同态对某个非零整数 m 取模 m。众所周知，在 $SL(2,\mathbb{Z})$ 的有限指数子群中，同余子群为数不多。例如，双曲平面被 $SL(2,\mathbb{Z})$ 的子群商去后，可以得到无穷多个亏格有界的商，但其中对应于被 $SL(2,\mathbb{Z})$ 的同余子群商去的情形只有有限多个。

所有亏格一映射类群拓扑量子场论表示都满足以下同余性质，这是一项强有力的限制：

定理 3.3（[24]）。与模张量范畴相关的亏格一模表示 $\rho^{\lambda,\ \zeta}_{\mathcal{C}}$ 其核都是同余子群。

Coste、Gannon 和 Bantay 最早在若干情形下证明了这一点，适用于有理共形场论（见 [16, 8]）；Ng 和 Schauenburg 随后证明了与作为球面融合范畴中心的模张量范畴相关的射影表示也满足此性质（[74]）；Peng Xu 则证明了这一点适用于由顶点算子代数导出的共形场论（见 [83]）；最终，Dong、Lin 和 Ng 在 [24] 中以最大的一般性证明了上述结论。

注意 定理 2.5 是同余子群定理 3.3的推论。

4. Higher genus representations

4.1. 一般性。记 Γ_g^n 为亏格 g、带有 n 个标点的闭定向曲面 Σ_g^n 的映射类群，记 $P\Gamma_g^n$ 为纯映射类群，即由那些逐点固定标点的同胚类组成的子群。

有理共形场论产生的表示已由 Moore 和 Seiberg 在 [73] 中描述。因此， Γ_g^n 中德恩扭转的像具有有限阶，且其阶存在统一上界，与 g 无关， n。对于酉模张量范畴，以下由 Bridson、Aramayona 和 Souto 得出的结果解释了这一限制：

定理 4.1（[5, 11]）。如果 $g \geq 3$，那么从 Γ_g^n 到紧李群的任意有限维表示中，德恩扭转的像都具有有限阶，且其阶仅取决于该李群。

4.2. Dijkgraaf-Witten 表示。一类相当容易理解的模张量范畴是有限维 $D^\omega(G)$-模的范畴 $Mod - D^\omega(G)$。相应的拓扑量子场论称为扭曲 Dijkgraaf-Witten 拓扑量子场论。

定理 4.2（[45]）。 $P\Gamma_g^n$ 的 Dijkgraaf-Witten 表示具有有限像。

这改进了先前的工作[27]，后者解决了辫群的情形，而 [32] 处理了未扭曲的情形。Rowell 提出的猜想认为，与模张量范畴相关的所有表示具有有限像，当且仅当该模张量范畴是弱整数的，也就是说，其 Frobenius-Perron 维数是整数。回忆一下，对于融合范畴中的对象 X，其 Frobenius-Perron 维数 FPdim(X) 是描述 Grothendieck 环$K(\mathcal{C})$ 中乘以 X 的矩阵的最大实特征值，而 FPdim($\mathcal{C}$) 是所有简单对象X的同构类型集合中 FPdim(X)^2 之和。已知 FPdim : $K(\mathcal{C}) \to \mathbb{R}$ 是代数同态（[26]），且对于酉模张量范畴，dim =FPdim。对于所有 X，FPdim(X)均为整数，当且仅当我们拥有一个有限维拟 Hopf 代数的表示范畴。

穿孔环面的映射类群仍同构于 $SL(2,\mathbb{Z})$。然而，穿孔环面的 Dijkgraaf-Witten 表示不一定是同余型，例子见（[32], 注 3.15）。[32] 证明了，对于 $g \geq 3$，非扭曲的 Dijkgraaf-Witten 表示对 Torelli 子群的像非平凡，当且仅当群 G 是非阿贝尔群。回顾一下，Torelli 子群由那些在曲面的同调上作用平凡的映射类组成。

4.3. K¨ahler 群与曲线模空间的紧化。亏格一时，映射类群表示对应于模曲线上的局部系统；我们预期在高亏格时也有类似结果。零亏格时已有一些已知结果，例如，单位根处的辫群 Burau 表示具有几何描述，参见例如 [19, 72]。令$\Gamma_g^n[p]$ 为由德恩扭转的 p 次幂生成的（正规）子群。我们已经看到，酉表示应当经由形如 $\Gamma_g^n(p) = \Gamma_g^n/\Gamma_g^n[p]$ 的商群分解。群 $\Gamma_g/\Gamma_g[p]$ 最早出现于 [36]。在 [4] 中，作者通过考察具有某些层结构的曲线模空间的 Deligne-Mumford 紧化（这些层结构使其成为光滑射影簇），证明了当 g.c.d.(p, 6) $= 1$ 时，这些群是几乎 K¨ahler 群。下述结果表明，源自模张量范畴的映射类群表示可以看作复射影簇上的局部系统，而这些复射影簇与稳定曲线的 Deligne-Mumford 模空间（[18]）相邻，另见 [23]。

设 $g, n \in \mathbb{N}$ 满足 $2-2g-n<0$，且 $(g,n) \neq (1,1),(2,0)$。对于每个 p，商 $P\Gamma_g^n/\Gamma_g^n[p]$ 是紧致 K¨ahler 轨形的基本群 $\overline{\mathcal{M}_g^n}[p]$，该轨形紧化了由 n 个标记点组成的亏格 g 光滑代数曲线的模叠，其模空间是稳定曲线的 Deligne-Mumford 模空间 $\mathcal{M}_g^n$。此外，我们有：

定理 4.3（[29]）。对于奇数 $p \geq 5$ 和偶数 $p \geq 10$，如上所述的 g, n，以及 $(g,n,p) \neq (2,0,12)$，轨形 $\overline{\mathcal{M}_g^n}[p]$ 可一致化，因此 $P\Gamma_g^n/\Gamma_g^n[p]$ 是一个 K¨ahler 群，实际上是某个光滑复射影流形的基本群。

4.4. 编织拓扑量子场论。定义编织拓扑量子场论时，我们考虑这样一个范畴：其对象是带有带颜色的带状点的闭定向曲面，态射是由单三价带状图装饰的配边（即其顶点的度数为 1 或 3），并且与带状点相容。曲面上的带状点是该曲面上的一个点及其切向量。

拓扑量子场论函子 $\mathcal{V}_p$，对于 $p \geq 3$ 以及一个阶为 A 的本原单位根 $2p$，是在 [10]的基础上定义的， [60], 另见 [69]。函子 $\mathcal{V}_p$ 赋予曲面的向量空间称为共形块空间。设 H_g 是一个亏格为 g 的把手体，且 $\partial H_g = \Sigma_g$。设 S_g上给定一个有限的带状点集。令 $\mathfrak{G}$ 是嵌入在 H_g 中的单三价带状图，使得 H_g 可收缩至 $\mathfrak{G}$，其一价顶点是带状点，且它与 Σ_g没有其他交点。

我们固定一个自然数 $p \geq 3$，称为拓扑量子场论的层。为简单起见，我们这里只考虑奇数 p；偶数 p 的构造只需稍作修改（见 [10, 69]）。我们将奇数层 p 中的颜色集定义为 $\mathcal{C}_p = \{0, 2, 4, \ldots, p-3\}$。如果在 $\mathfrak{G}$ 的每个三价顶点处都满足三角不等式，且顶点周围三个颜色之和不超过 $2(p-2)$，则称 $\mathfrak{G}$的边着色为 p-可容许。于是，与带有 r 个带状点的闭曲面 Σ_g 相关联的共形块空间 $W_{g,\ (i_1,i_2,\ldots,i_r)}$ 存在一个基，其由 $\mathfrak{G}$ 上所有延拓边界着色的 p-可容许着色所索引，其中带状点的颜色依次为 i_1、i_2、……、$i_r \in \mathcal{C}_p$。请注意，颜色为 0 的带状点没有贡献。

注意到， $\mathfrak{G}$ 的一个可容许的 p着色，为带状边界点着色为（i_1、i_2、…、i_r）的把手体的编织模 S_A（H_g）提供了一个元素，并在原始的$2p$次单位根 A 处取值（见 [63]）。这个编织元通过用着色所规定的 Jones-Wenzl 幂等元对 $\mathfrak{G}$的边进行缆化，并在带状点处赋予规定的颜色而得到。我们假设 H_g 以标准方式嵌入三维球面 S^3中，从而其补集的闭包也是一个 g 亏格把手体$\overline{H}_g$。于是有一个半双线性形式:

$$\langle\ ,\ \rangle : S_A(H_g) \times S_A(\overline{H}_g) \to \mathbb{C}$$

定义为

$$\langle x, y \rangle = \langle x \sqcup y \rangle.$$

这里， $x \sqcup y$ 是通过在 $H_g \cup \overline{H}_g = S^3$中将 x 与 y 取不交并而得到的 S_A（S^3）中的元素，而 $\langle\ \rangle$： S_A（S^3）$\to \mathbb{C}$ 是 Kauffman 括号不变量（另见 [76]）。

最终，共形块空间 $W_{g,\ (i_1,i_2,\ldots,i_r)}$ 是商空间 $S_A(H_g)/\ker\langle\ ,\ \rangle$，即以上半双线性形式的左核 ([61]) 的商。由此可知，$W_{g,\ (i_1,i_2,\ldots,i_r)}$ 带有诱导的厄米形式 H_A。

与上述三价图 $\mathfrak{G}$ 的 p-可容许着色相对应的编织元的投影，构成了 $W_{g,\ (i_1,i_2,\ldots,i_r)}$ 关于 H_A 的正交基。已知 ([10])，H_A 仅取决于 p 次单位根 $\zeta_p = A^2$，并且在这个正交基下，对角项（经重新缩放后）属于极大完全实子域 $\mathbb{Q}(\zeta_p + \overline{\zeta_p})$。

设 $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$ 是一个单三价子图，其一价顶点带有颜色，对应于 Σ_g 的一个子曲面 Σ'，且边界带有颜色。$\mathfrak{G}'$ 的 p-可容许着色所对应的编织元在 $W_{g,\ (i_1,i_2,\ldots,i_r)}$ 中的投影，构成了与具有带颜色边界分支的曲面 Σ' 相关联的共形块空间的正交基。

把手体 H_g 和 $\overline{H}_g$ 的映射类群分别在其编织模上具有几何作用，因此也在共形块空间上具有几何作用。注意，把手体的映射类群自然地嵌入边界曲面的映射类群中，并与可延拓至把手体的曲面同胚映射类所成的子群相同。此外，这些作用可扩张为射影作用 $\rho_{g,\ p,\ (i_1,\ldots,i_r)\ A}$ 在Γ_g^r 上的作用于 $W_{g,\ (i_1,i_2,\ldots,i_r)}$，并保持厄米形式 $H_{\zeta_p} = H_A$ （见 [10, 76]）。提及$\rho_{g,\ p,\ (i_1,\ldots,i_r)\ A}$ 时，通常会省略注明亏格的下标 g。注意，本质子曲面（即补集不含环带或圆盘） $\Sigma' \subset \Sigma_g$的映射类群是 Γ_g 的一个子群，并保持与带颜色边界的 Σ' 相关联的共形块子空间。值得注意的是，$\rho_{p,\ (i_1,\ldots,i_r)\ A}$ 仅取决于 $\zeta_p = A^2$，因此我们可以毫无歧义地将这一表示的记号改为 $\rho_{p,\ (i_1,\ldots,i_r)\ \zeta_p}$。

~存在一个由 $\mathbb{Z}$ 对 Γ_g 的中心扩张 Γ_g，以及一个线性表示 $\widetilde{\rho}_{p,\ \zeta_p}$，它作用于 W_g，消除了 $\rho_{p,\ \zeta_p}$ 的射影歧义。最大的此类中心扩张的类是欧拉~类的 12 倍（见 [43, 70]），但我们可以将其限制在一个指数为 12 的子群上，该子群在 [70] 中称为 Γ_1。当 $g \geq 4$

它是一个完美群，与 Γ_g 的万有中心扩张重合。我们考虑一个 $\widetilde{}$ 子曲面 $\Sigma_{g,r} \subset \Sigma_{g+r}$，其补由 r 个 $\Sigma_{1,1}$ 的副本组成。令 Γ_g^r 为中心扩张 $\widetilde{\Gamma_g}$ 沿子群 $\Gamma_{g,r} \subset \Gamma_{g+r}$ 的 $\widetilde{}$ 拉回。那么 $\Gamma_{g,r}$ 也是一个中心扩张，我们将其记为 Γ_g^r 被 $\mathbb{Z}^{r+1}$ 扩张的 $\widetilde{\Gamma_g^r}$。由 [43, 70] 可得，当 $g \geq 3$ 时，$\widetilde{\Gamma_g^r}$ 是完美的；当 $g = 2$ 时，其阶为 10。

设 $p \geq 5$ 为奇数，ζ_p 为一个本原 p 次单位根。我们用 $\widetilde{\rho}_{p,\ \zeta_p,\ (i_1,\ i_2,\ .....,\ i_r)}$ 表示中心扩张 Γ_g^r 的线性 $\widetilde{}$ 表示，该扩张作用于拓扑量子场论为具有相应带颜色的带状点的曲面所关联的向量空间 $W_{g,\ p,\ (i_1,i_2,...,i_r)}$ 上（见 [43, 70]）。

函子 $\mathcal{V}_p$ 将三价图 $\mathfrak{G}$ 的平凡着色（颜色为 0）所对应的编织元投影到把手体 H_g 上。闭三维流形的 Reshetikhin-Turaev 不变量由 Heegaard 分解中两个把手体所关联向量的配对给出，其中分解的亏格为 g，并须考虑粘合映射类作用在 W_g 上所产生的扭结。该不变量在相差一个 p 次单位根的意义下定义良好，并可提升为带有 p_1 结构的三维流形的拓扑不变量。Turaev-Viro 不变量是 Reshetikhin-Turaev 不变量的绝对值平方。

应注意，编织拓扑量子场论 $\mathcal{V}_p$ 是酉的，也就是说，当 $\zeta_p = (-1)^p \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right)$ 时，H_{ζ_p} 是正定厄米形式；这对应于 $A_p = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \exp\left((p+1)_{2p}^{\ \pi i}\right)$。为简化记号，从现在起，~~只要单~~位根的阶数可从上下文中明确，我们就省略 ζ_p 中的下标 p。注意，对于一般的本原 p 次单位根，H_ζ 的等距变换构成一个伪酉群。

现在，在由三价图给出的一个合适的基中，右手德恩扭转 T_γ 的像 $\rho_{p,\zeta}(T_\gamma)$ 很容易描述。设简单曲线 γ 是一个小圆盘的边界，它与图 $\mathfrak{G}$ 的一条边 e 横截相交一次。令 $v \in W_g$ 为由图 $\mathfrak{G}$ 的着色给出的基向量，并设边 e 标记为颜色 $c(e) \in \mathcal{C}_p$。那么，德恩扭转 T_γ 在 Γ_g 中的（典范）提升 T_γ 的 $\widetilde{}$ $\widetilde{}$ 作用由下式给出（见 [10], 5.8）：

$$\widetilde{\rho}_{p,\zeta}(\widetilde{T_\gamma})v = A^{c(e)(c(e)+2)}v$$

4.5. 共形块空间的酉群。对于素数 $p \geq 5$，我们将 $\mathcal{O}_p$ 记作圆分整数环 $\mathcal{O}_p = \mathbb{Z}[\zeta_p]$（若 $p \equiv 3$(模 4)），将 $\mathcal{O}_p = \mathbb{Z}[\zeta_{4p}]$记作圆分整数环 $p \equiv 1$（若 ζ_r (模4)），其中 r表示一个本原 次单位根。

令 $S\mathbb{U}_{g、\ p、\ \sigma(\zeta)}$ 为与经 σ复共轭的厄米形式相关联的特殊酉群，因此对应于某个伽罗瓦共轭的单位根。考虑半单代数群 $\mathbb{G}_{g、\ p}$，它由全实圆分域 $\mathbb{Q}(\zeta_p + \overline{\zeta_p})$ 到 $\mathbb{Q}$ 的所谓标量限制构造得到。具体而言，群 $\mathbb{G}_{g、\ p}$ 是乘积 $\prod_{\sigma \in S(p)} S\mathbb{U}_{g、\ p、\ \sigma(\zeta)}$。这里，$S(p)$表示复嵌入 σ 的等价类（模复共轭）的代表元集合，或者等价地，全实圆分域 $\mathbb{Q}(\zeta_p + \overline{\zeta_p})$ 的赋值集合。分别将 $\widetilde{\rho}_p$ 和 ρ_p 记为表示 $\prod_{\sigma \in S(p)} \widetilde{\rho}_{p、\ \sigma(A_p^2)}$ 和 $\prod_{\sigma \in S(p)} \rho_{p、\ \sigma(A_p^2)}$。注意，实李群 $\mathbb{G}_{g、\ p}$ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的半单代数群。

定理 4。 4. (1) 若 $g \geq 2$, $\rho_p(P\Gamma_g^n)$，因而 $\Gamma_g^n(p)$，则对所有奇数 $p \geq 5$ ([3 都是无限的 6]).
(2) 如果 $g \geq 2$ 和 $p \geq 5$ 是素数或素数的两倍，那么 ρ_p 不可约（[77]）。此外，如果某个 $i_s = 1$ 且 p 为偶数，则 $\rho_{p,(i_1,i_2,...,i_m)}$ 不可约（见 [55]）。(3) ρ_p 渐近忠实，即 $\bigcap_{p_j \to \infty} \ker^{\rho_{p_j}}$ 是 Γ_g^n群的中心（[1, 33]）。(4) 表示 $\widetilde{\rho}_p \otimes \widetilde{\rho}_p^*$ 在费尔拓扑下收敛到 Γ_g通过左复合在 $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g)\ SL(2,\mathbb{C}))$ 上的正则函数子空间上的作用，也就是说，收敛到由 Σ_g ([13, 68]) 上的多曲线生成的向量空间上的作用。(5) 存在一个自由的 $\mathcal{O}_p$-格 $\Lambda_{g,p}$，它位于 W_g 中；并且在 $\Lambda_{g,p}$ 上存在一个非退化的、取值于 $\mathcal{O}_p$ 的厄米形式 $\widetilde{}$，二者都在 Γ_g 通过表示 $\widetilde{\rho}_{p,\zeta}$ 的作用下保持不变，使得当 $g \geq 3$ 时，$\widetilde{\rho}_{p,\zeta}$ 的像包含于 $S\mathbb{U}_{g,p,\zeta}(\mathcal{O}_p)$ 中（见 [44]）。

(6) $\widetilde{\rho}_p(\Gamma_g)$ 是 $\mathbb{G}_{g,p}(\mathbb{R})$ 的一个离散扎里斯基稠密子群，其在 $\mathbb{G}_{g,p}(\mathbb{R})$ 的简单因子上的投影在拓扑意义下稠密；其中 $g \geq 3$ 和 $p \geq 7$为素数， $p \equiv 3$(模 4)（[59, 39]）。(7) 如果 $g \geq 2$ 且 $p \geq 5$ 为素数，那么 $\rho_{p,(2)}$ 在 $\pi_1(\Sigma_g) \subset \Gamma_g^1$ 上的限制是无限的（[54]），并且在 $\mathbb{G}_{g,p}(\mathbb{R})$ 中扎里斯基稠密（见 [40]）。

对于合数 p，ρ_p 的不可约分支尚未得到全面了解，参见 [3, 56] 了解部分结果。

注 4.1。当 $p \equiv 1$（模 4）时， Γ_g 从 [70] 到 $\widetilde{\rho}_p$ 的中心扩张的像包含于 $\mathbb{G}_{g,\,p}(\mathbb{Z}[i])$ 中，因此它是 $\mathbb{G}_{g,\,p}(\mathbb{C})$ 的一个离散扎里斯基稠密子群。然而，如果我们限制到万有中心扩张 Γ_g，系数便会从 $\mathbb{Z}[\zeta_{4p}]$ 降至 $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ （见 [44], 第 13 节）。注意，相应的不变形式 H_{ζ_p} 应适当缩放；缩放后，当 g 为奇数时它是斜厄米的，当 g 为偶数时则是厄米的。

4.6. 杂项。AMU 猜想断言，对于伪阿诺索夫映射类 ϕ，也就是说，存在一个伪阿诺索夫代表同胚的映射类，存在某个 p_0，使得对于每个 $p \geq p_0$，$\rho_p(\phi)$ 都具有无限阶（见 [2]）。回顾一下，若闭曲面的一个同胚保持该曲面上的横向可测叶状结构，且横向测度被乘以两个正数（其乘积为 1），则称该同胚为伪阿诺索夫同胚。伪阿诺索夫同胚在泰希米勒空间的瑟斯顿紧化边界上恰有两个不动点。

由 ρ_p 诱导的 $\Gamma_g^n(p)$ 表示是否为单射似乎尚无定论，小型曲面除外（见 [38]）。如果单射性成立，那么 ρ_p 的像不可能是 $G_{g,\,p}$ 的算术子群（见 [41]）。这将产生有趣的后果，因为当 $g \geq 3$ 时， Γ_g 的所有已知无限像都是高秩算术群。此外，表示 ρ_p 是否具有局部刚性，从而成为复射影簇上的变分霍奇结构，仍然未知（见 [80]）。我们预期，任何模张量范畴表示的扎里斯基闭包都应是一个半单李群。注意，$G_{g,\,p}$ 的算术格是余紧的；我们不知道模张量范畴表示的像是否能够包含幺幂元。Prym 表示的推广（见[65]）与量子表示之间的关系仍有待揭示。

某些非半单模张量范畴所产生的表示在 [22], 中进行了讨论，作者将其确定为：曲面的构形空间上局部系统的同调，这些局部系统由曲面辫群的海森堡群商诱导，并带有边界。这扩展了 Lawrence 表示的辫群构造，是检验映射类群线性性的关键。

体积猜想的一个版本（见 [14]）最初由 Kashaev 针对结提出（[50]），其表述为：在单位根 $A = \exp(2i\pi/p)$ 处（其中 H_A 不是酉的），Turaev-Viro 不变量的对数增长率等于经 2π重新缩放的闭三维流形的单纯体积。若该猜想成立，则具有相同 skein Turaev-Viro 不变量的双曲三维流形将只有有限多个。然而，存在任意大的有限集合，其中的闭双曲三维流形两两不同胚，但它们的 skein Turaev-Viro 不变量、体积、eta 不变量和陈-西蒙斯不变量均相同（见 [49, 52, 62, 71]）。

4.7. 展望。本综述简要介绍了拓扑量子场论和泛配对。我们讨论了流形检测和泛配对的正定性；这些方法只有在低维情形下才能可靠地发挥作用。我们概述了融合范畴、带状范畴和模张量范畴的定义，它们构成了在三维中构造拓扑量子场论所需的代数工具。我们介绍了亏格一模表示的一些算术性质，尤其是同余性质，并讨论了向高亏格情形的部分推广，其中大多针对编织拓扑量子场论。三维拓扑量子场论提供了大量曲面映射类群表示。我们期待对拓扑量子场论的进一步研究能为映射类群的代数性质带来新的见解。

References

[1] J. E. Andersen, *Asymptotic faithfulness of the quantum* SU(n) *representations of the mapping class groups*, 《数学年刊》 (2 163 2006 347 368 10) (), –。[2] J. E. Andersen、G. Masbaum 和 K. Ueno, *Topological Quantum Field Theory and the Nielsen–Thurston classification of M* 0, 4 141 2006 477 488 (), 《剑桥哲学学会数学论文集》 (), –。[3] J. E. Andersen 和 J. Fjelstad *Reducibility of quantum representations of mapping class groups*, 《数学物理快报》 91 2010 215 239, 0806 2539 11 (), –, arXiv: 。[4] J. Aramayona 和 L. Funar *Quotients of the mapping class group by power subgroups*, 《伦敦数学会通报》 51 2019 385 398 8 (), -。[5] J. Aramayona 和 J. Souto, *Rigidity phenomena in mapping class groups*, 《Teichmüller 理论手册》第六卷（A. Papadopoulos 编），IRMA 数学与理论物理讲义丛书第 27 卷，欧洲数学会，苏黎世，2016 年，131–165。[6] *Topological quantum field theories* 68 1988 175 186 1, 2 M. Atiyah, , 《高等科学研究院数学出版物》 (), –。[7] B. Bakalov 和 A. Kirillov Jr., 《张量范畴与模函子讲义》, , *University Lecture Series* 21 2001, +221 4 。美国数学会，普罗维登斯，x 页。[8] P. Bantay, *The kernel of the modular representation and the Galois action in RCFT*, 《数学物理通讯》233 (2003 423 438 7), —。[9] D. Barden, *Simply connected five-manifolds* 2 82 1965 365 385 4 , 《数学年刊》 () (), –。[10] C. Blanchet、N. Habegger、G. Masbaum 和 P. Vogel, *Kauffman bracket* 34 1995 883 927 *Topological quantum field theories derived from the* , 《拓扑学》 (), –。9, 10 [11] M. R. Bridson, CAT(0) *spaces*, 《黎曼曲面几何》, *Semisimple actions of mapping class groups on* 1 14, 368, 2010 8 – 伦敦数学会讲义丛书，剑桥大学出版社，剑桥。[12] D. Calegari、M. Freedman 和 K. Walker, , 《美国数学会杂志》 23 2009 109 188 4 (), -。[13] L. Charles 和 J. Marche, *Multicurves and regular functions on the representation variety of a surface in SU*(2), 《赫尔维提数学评论》87（2012），409–431。10[14] 陈庆涛、杨天、*Volume conjectures for the Reshetikhin-Turaev and the Turaev-Viro invariants*, 《量子拓扑》 9 2018 419 460 11 (), –。[15] A. Coste 和 T. Gannon, *Remarks on Galois symmetry in rational conformal field theories* , 《物理快报 B》 323 1994 316 321 7 () –。[16] A. Coste 和 T. Gannon, *Congruence subgroups and rational conformal field theory* 9909080 7 , arXiv:math/。[17] J. De Boer 和 J. Goeree, , 《数学物理通讯》139 (1991 267 304 7), –。[18] P. Deligne 和 D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, 《高等科学研究院数学出版物》36 (1969 75 109 8), –。[19] P. Deligne 和 G. D. Mostow, *Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy*, 《高等科学研究院数学出版物》 63 1986 5 89 8 (), –。[20] M. De Renzi、A. Gainutdinov、N. Geer、B. Patureau-Mirand、I. Runkel, *3-Dimensional TQFTs from Non-Semisimple Modular Categories* 28 2022 2, 42 , 《精选数学》（新辑） (), 第 期。6 [21] M. De Renzi、A. Gainutdinov、N. Geer、B. Patureau-Mirand、I. Runkel, *From Non-Semisimple TQFTs* 25 2023 1, 2150091 *Mapping Class Group Representations* , 《当代数学通讯》 (), 第 期。6 [22] M. De Renzi 和 J. Martel, *Homological Construction of Quantum Representations of Mapping Class Groups*, arXiv:2212.10940。11[23] B. Deroin 和 J. March´e, *Toledo invariants of Topological Quantum Field Theories*, arXiv:2207.09952 8[24] 董重应、林兴军、Xingjun 和 Siu-Hung Ng, *Congruence property in conformal field theory*, 《代数与数论》 9 2015 2121 2166 7 (), –。[25] P. Etingof, *On Vafa's theorem for tensor categories* 9 2002 651 657 7 , 《数学研究快报》 (), –。[26] P. Etingof、D. Nikshych 和 V. Ostrik, 《数学年刊》 () (), *On fusion categories* 2 162 2005 581 642 7, 8 –。[27] P. Etingof、E. Rowell 和 S. Whiterspoon, *groups* 234 2008 33 41 *Braid group representations from twisted quantum doubles of finite* , 《太平洋数学杂志》 (), –。8 [28] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik, 《张量范畴》, MSM 205, 2010 7 美国数学会。[29] P. Eyssidieux 和 L. Funar, , 《。*Orbifold Kähler groups related to mapping class groups* 2020 8 [30] B. Farb, 编, 《映射类群及相关主题问题集》。美国罗德岛州普罗维登斯：美国数学会, 《纯数学研讨会论文集》 74, 2006 1 。[31] B. Farb 和 D. Margalit, , 普林斯顿大学出版社 *A primer of mapping class groups* 49, 2012 1 。[32] J. Fjelstad 和 J. Fuchs, , 《结理论及其分支》 29, 5, 2050033, 61 2020 8 第 期，文章编号 p. () 。[33] M. H. Freedman、K. Walker 和 Zhenghan Wang, *Mapping class group representations from Drinfeld doubles of finite groups* *Quantum* 2 *faithfully detects mapping class groups modulo* SU( ) *center* 6 2002 523 539 , 《几何与拓扑》 (), –。10 [34] M. Freedman、A. Kitaev、C. Nayak、J. Slingerland、K. Walker 和 Z. Wang, *Universal manifold pairings and positivity* 9 2005 2303 2317 3 , 《几何与拓扑》 () –。

[35] L. Funar, *2+1-D Topological Quantum Field Theory and 2-D Conformal Field Theory*, 《数学物理通讯》 171 1995 405 458 3 ( ), – .
[36] L. Funar, *On the TQFT representations of the mapping class groups* 188 1999 251 274 8, 10 , 《太平洋数学杂志》
[37] *Torus bundles not distinguished by TQFT invariants* ( ), – . L. Funar, , 附录由他与 Andrei Rapinchuk 合作撰写, 《几何与拓扑》 17 2013 2289 2344 4 ( ), – . L. Funar and T.
[38] Kohno, *On Burau representations at roots of unity* 169 2014 145 163 11 , 《几何奉献》 ( ), – .
[39] *Zariski density and finite quotients of mapping class groups* L. Funar, , 《国际数学研究通知》 2013, 9, 2078 2096 11 第 - 期。L. Funar and P. Lochak,
[40] *Profinite completions of Burnside-type surface groups*, 《数学物理通讯》 360(2018), 1061–1082 11[41] L. Funar and W. Pitsch,
Images of quantum representations of mapping class groups and Dupont-Guichardet-Wigner quasi-homomorphisms 17 2018 277 304 , J. Inst. Math. Jussieu ( ), – .
11
[42] J. Fuchs, C. Schweigert, C. Stigner,
Higher Genus Mapping Class Group Invariants From Factorizable Hopf Algebras 250 2014 285 319 , 《数学进展》 ( ), – .
6
[43] S. Gervais, *Presentation and central extensions of mapping class groups*, 《美国数学会汇刊》
348 (1996), 3097 3132 9, 10 – . P. Gilmer and G. Masbaum,
[44] *Integral lattices in TQFT* 40 2007 815 844 10, 11 , 《高等师范学校科学年刊》 ( ), – . P.
[45] *Finiteness for mapping class group representations from twisted Dijkgraaf–Witten theory* Gustafson, , 《结理论及其分歧》 27 2018 06, 1850043 8 ( ), no. . M. Hennings,
[46] *Invariants of Links and 3-Manifolds Obtained from Hopf Algebras*, 《伦敦数学会杂志》(2) 54 (1996 594 624 6), – . V. F. R. Jones,
[47] *Hecke Algebra Representations of Braid Groups and Link Polynomials*, 《数学年刊》126 (1987), 335–388。1
[48] ´ *Defining and classifying TQFTs via surgery* 9 2018 229 321 3 A. Juhasz, , 《量子拓扑》 ( ), – . J.
[49] *Examples of different 3-manifolds with the same invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev* Kania-Bartoszynska, 32 1993 47 54 , 《拓扑学》
11
( ), – .[50] R. M. Kashaev, *The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm*, 《数学物理快报》39 (1997), 269–275。11[51] L. H. Kauffman and D. E. Radford, *Invariants of 3-manifolds derived from finite dimensional Hopf algebras*, 《结理论及其分支》 4 1995 131 162 6 ( ), – . A. Kawauchi, , *mutation and the quantum SU(2) invariants*, 《结
[52] *Topological imitation* 理论及其分支》 3 1994 25 39 11 ( ), – . T. Kerler, V. Lyubashenko, 面向带角三维流形的非半单拓扑量子场论, 《数学讲义》
[53] 1765 2001 6 。施普林格出版社, 柏林, 。T. Koberda and R. Santharoubane,
[54] *Quotients of surface groups and homology of finite covers via quantum representations* 206 2016 262 292 , 《数学创刊》 ( ), – .
11
[55] T. Koberda and R. Santharoubane,
Irreducibility of quantum representations of mapping class groups with boundary 9 2018 633 641 , 《量子拓扑》 ( ), – .
10
[56] J. Korinman,
Decomposition of some Reshetikhin-Turaev representations into irreducible factors, SIGMA 15 (2019 011, 25 11), 页数。M.
[57] Kreck and P. Teichner, *Positivity of topological field theories in dimension at least 5*, 《拓扑学杂志》1 (2008), 663–670。3, 4
[58] *Non-involutory Hopf algebras and 3-manifold invariants* 84 1996 83 129 6 G. Kuperberg, , 《杜克数学杂志》
[59] *Density of the SO(3) TQFT representation of mapping class groups* ( ), – . M. Larsen and Zhenghan Wang, , 《数学物理通讯》 260 2005 641 658 11 ( ), – . W. B. R.Lickorish,
[60] *Invariants for 3-manifolds from the combinatorics of the Jones polynomial*, 《太平洋数学杂志》 149 1991 337 347 9 ( ), – . W. B.
[61] R.Lickorish, *Skeins and handlebodies* 159 1993 337 349 9 , 《太平洋数学杂志》 ( ), – . W. B.
[62] *Distinct 3-manifolds with all SU* 2_q *invariants the same* R.Lickorish, ( ) , Proc. Am. Math. Soc. 117 (1993), 285–292。11
[63] 56 2009 240 242 9 W. B. R.Lickorish,
[64] *Finite-volume hyperbolic 3-manifolds are almost determined by their finite quotient groups* *What is . . . a skein module?*, 《美国数学会通报》 ( ), – . Yi Liu, , 《数学创刊》即将刊出, arXiv: 2011 09412 4 . . E.
[65] Looijenga, *Prym representations of mapping class groups* 64 1997 69 83 11 , 《几何奉献》 ( ), – . V.
[66] *Invariants of 3-Manifolds and Projective Representations of Mapping Class Groups via Quantum Groups at Roots of Unity* Lyubashenko, 172 1995 467 516 , 《数学物理通讯》
6
( ), – .[67] *Ribbon abelian categories as modular categories* V. Lyubashenko, , 《结理论及其分支》 5 (1996), 311– 403。
6[68] J. March´e and M. Narimannejad, *Some asymptotics of topological quantum field theory via skein theory*, 《杜克数学杂志》
141 2008 573 587 10 ( ), – . J. Marche, 《映射类群的量子表示导论》, 课程讲义, 波尔多, 2018。9
[69] ´

9, 10, 11
[70] G. Masbaum and J. D. Roberts, *On central extensions of mapping class groups*, 《数学年鉴》302(1995), 131–150。[71] S.
V. Matveev and T. Nowik, *On 3-manifolds having the same Turaev-Viro invariants* 《俄罗斯数学物理杂志》2 (1994 317 324 11),
– . C. T. McMullen, *Braid groups and Hodge theory* 355 2013 893 946 8 , 《数学年鉴》 ( ), – .
[72]
[73] *Classical and quantum conformal field theory*
G. Moore and N. Seiberg, , 《数学物理通讯》123 (1989), 177–254。8[74] Siu-Hung Ng and P.Schauenburg,
Congruence subgroups and generalized Frobenius-Schur indicators, 《数学物理通讯》 300 2010 1 46 7 ( ), – . N.
[75]
Reshetikhin and V. G. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, 《数学创刊》
103 1991 547 597 2 ( ), – . J. Roberts,
[76]
Skeins and mapping class groups 115 1994 53 77 9 , 《剑桥哲学会数学学报》 ( ), – .
[77] *Irreducibility of some quantum representations of mapping class groups*
J. Roberts, , Knots in Hellas '98，第3卷（德尔斐）。《结理论及其分支》
10 2001 5, 763 767 10 ( ), no. – . G. B. Segal, , 理论物理中的微分几何方法，1988年会
[78] *The definition of conformal field theory*
议论文集第16卷171，1987，250，165，第1届国际会议，北约高级研究讲习班，科莫/意大利，北约高级研究所系列，C辑 – . [79] G. B.
Segal, *The definition of conformal field theory*, Tillmann, Ulrike（编），《拓扑学、几何与量子场论》。2002年牛津研讨会论文集，以
纪念 Graeme Segal 60岁生日，英国牛津，2002年6月24–29日。剑桥：剑桥大学出版社（ISBN 0-521-54049-6/平装本）。伦敦数学学会讲
义系列 308, 421 577 2004 1 – ( )。C. T. Simpson, , 《高等科学研究院数学出版物》
[80] *Higgs bundles and local systems*
75 1992 5 95 11 ( ), – . V. Turaev, 《结和三维流形的量
[81] 3
子不变量》，De Gruyter 数学研究丛书
18, 2016 2, 6 。E. Witten, , 《数学物
[82] *Quantum field theory and the Jones polynomial* 121 1989 351 399 1, 2
理通讯》 ( ), – . [83] *Some computations in the cyclic permutations of completely rational nets* Feng
Xu, , 《数学物理通讯》267 (2006), 757–782。7

Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Institut Fourier, 38000 Grenoble, France
Email address: louis.funar@univ-grenoble-alpes.fr