演化曲线与曲面附近的正交有符号距离坐标与向量微积分

Eric W. Hester* Geoffrey M. Vasil†

2023年2月9日

arXiv:2302.02891v2 [math-ph] 7 Feb 2023

摘要

我们基于有符号距离函数，为演化的光滑曲面和曲线周围的边界层，给出了正交坐标系的初等推导。我们在此前关于有符号距离函数的研究基础上进一步拓展，并汇总了适用于这些坐标的实用向量微积分恒等式。这些结果及所提供的代码，有助于在推导多种物理系统的边界层渐近分析时，一致地计入几何效应。

1 引言与背景

本文构建了一种坐标系，用于理解三维中光滑演化曲面和曲线的邻域。具体而言，我们利用了应用于水平集及相关方法中的有向距离函数 [43, 41, 42, 13]。我们认为，我们首次对这一正交坐标系的完整向量微积分给出了完整而初等的推导；例如，这对于描述流体力学中常见的向量拉普拉斯算子或对流导数至关重要。

从曲面开始，Euler 对主曲率的研究 [18]激发了数学中的大量问题，包括 Gauss 的经典绝妙定理[21], Christoffel 及其同名符号 [8], Ricci 和 Levi-Civita 的张量演算 [48], Darboux 的三面体标架 [12], 以及 Cartan 的活动标架法 [7] 和微分形式 [6]。Carmo 的教科书 [14], 或 Spivak 的五卷本鸿篇巨著 [53]都为这一广阔领域提供了很好的介绍，其中包括部分历史。理解界面之后，研究者开始考察曲面的邻域，其中 Weyl 的开创性论文 [58] 为统计应用计算了管状邻域的体积 [33]。这些邻域的重要性和实用性引发了大量后续研究，探讨其在偏微分方程分析中的应用 [19, 51, 27, 25, 26]。

遗憾的是，这些强大的工具也相当复杂。现代微分几何的前沿发展往往令物理学家、工程师和初学者望而却步，使他们难以将这方面的理解转化为切实的应用。许多从业者往往更熟悉 Gibbs 的向量微积分 [59]和直接明了的正交坐标变换 [2]。值得注意的是，Prandtl 创立流体边界层理论时，采用的数学方法对于现代应用数学专业的本科生来说相当熟悉 [47]。一些早期论文在此基础上，研究了一般曲面 [34, 29, 40, 38, 54], 周围的三维边界层，并由此催生了

*数学系，加利福尼亚大学洛杉矶分校，洛杉矶，90095，加利福尼亚州，美国
†数学学院和麦克斯韦数学科学研究所，爱丁堡大学，爱丁堡 EH9 3JZ，英国

进一步的研究 [49, 10, 17]。然而，要在曲线坐标中处理纳维–斯托克斯方程的复杂性，就需要谨慎地进行近似 [15, 35, 3, 32]。此外，技术细节可能变得错综复杂；若没有系统的记录方法，就容易出错，例如遗漏重要项（如 [28]的方程 5a），或假设存在实际上不可能存在的坐标系（这与 Dupin 定理 [17]相矛盾）。直到近些年，人们才开始分析一般几何中的边界层，研究起点是平面上的任意曲线。

一般几何中边界层分析的早期二维示例见[16]。这些方法逐渐扩展到三维中有符号距离函数的性质 [1]。直到最近，针对任意物体的边界层研究才开始出现 [9, 22, 24, 23]。然而，即使是这些最新的分析，也仍缺少三个关键特征：

1. 一种直接计算任意张量演算量的步骤（ [31]在这方面已取得一些进展）。2. 对演化几何的考量（如 [30]对熔化和溶解相场模型所做的研究）。3. 对曲线邻域的描述（例如，光滑曲面相交处，或三维多相问题中的接触线附近所形成的邻域）。

关于最后一点，值得注意的是，曲线的微分几何同样有着悠久而显赫的历史，始于 Frenet [20] 和 Serret [50] 对描述曲线几何不变量的 Frenet-Serret 公式的推导。不过（正如我们在第 3.1 节所示），这一便于描述曲线几何的基底并不能构成正交坐标系（不同于曲面的主曲率基底）。相反，通过反向旋转来抵消标架的挠率，可以推导出相对平行标架 [5], ，并以此为基础，在曲线邻域中构造正交坐标系。 [11] 中研究广义 Cahn-Hilliard 方程、 [44, 45] 中研究细长流体射流的边界层方程时，也探讨了这一思路。后者的研究在 [52], 中遭到了不公正的批评，批评者未能认识到旋转在确保坐标正交性方面的作用，反而针对非正交的 Frenet-Serret 坐标进行了更复杂的分析。然而，尽管这些分析颇为出色，却未能给出适用于任意矢量微积分量的完整推导。

我们的目标是在一般性与简洁性之间取得平衡。我们超越了对有符号距离函数 [25, 26, 39] 的常见处理方式，推导出关键微分算子（散度、梯度、旋度、标量和向量拉普拉斯算子，以及笛卡尔偏时间导数）的简洁表达式，且不作近似。同时，我们不借助高等微分几何，只运用广为人知的向量微积分。我们的目标是具体明确。只有将所有相关项明确写出，才能评估每一项的贡献（例如，在复杂边界层计算中确定其适当的渐近阶）。此外，我们此前曾通过计算机代数自动化高阶摄动展开 [31, 30]取得进展。将各种公式输入计算机系统时，需要把与有符号距离函数相关的所有特征同其他微分几何方面的内容区分开来。

我们首先在第 2.1 节讨论有符号距离函数的基本性质，然后在第 2.2 节重温标准的曲面微分几何。接着，我们在第 2.3 节重述关于有符号距离坐标微分几何的既有结果 [26, 第 14 节。6] 随后在第 2.4 和 2.5 节汇总一系列新的向量微积分恒等式，并在第 2.6 节给出这些算子适用于薄边界层的渐近展开。在第 3 节中，我们将同一坐标系应用于理解空间中光滑演化曲线的邻域。在第 3.1 节回顾 Frenet-Serret 标架后，我们将展示如何旋转该标架以生成正交坐标（第 3.2 节），此方法基于 [5], 并推导

第 3.3 和 3.4 节中的新向量微积分恒等式，以及第 3.5 节中的渐近展开。

2 曲面的有符号距离坐标

2.1 有符号距离函数

我们考虑嵌入三维欧几里得空间中的一个光滑流形 S。我们可以在局部用曲面坐标 $s = (s_1,\ s_2) \in \mathbb{R}^2$ 参数化曲面上的点 $p(s) \in S \subset \mathbb{R}^3$。我们使用有符号距离将空间中的点与曲面 S 联系起来。

定义 2.1。曲面 S 的有符号距离函数 σ，是点 $x \in \mathbb{R}^3$ 到点 $p \in S$的最短距离，并根据其位于曲面内侧（–）还是外侧（+）赋予正负号。

$$\sigma(x) = \pm \min_{p \in S} \|x - p\|. \tag{1}$$

命题 2.1。从笛卡尔坐标到有符号距离坐标的坐标变换公式为

$$x = p(s) + \sigma\, \widehat{n}(p(s)), \tag{2}$$

其中，$\widehat{n}$ 是 S的单位法向量。只要充分接近曲面，此变换就是一一对应的

证明。每个光滑曲面都存在某个厚度的光滑管状邻域（[14]第 2.7 章）。在 p（s）的邻域内，有一个关于有符号距离的光滑极小化问题。求解等价的 $\|x - p\|^2$ 极小化问题，可得在极小值处

$$(x - p) \cdot \partial_s p = 0.$$

曲面映射 $\partial_s p$ 的雅可比矩阵返回切空间中的向量。因此，差向量（$x - p$）平行于单位曲面法向量 $\widehat{n}$，其大小为 σ。 □

这个曲线坐标系会影响所有向量微积分运算，我们将分阶段展开讨论。

命题 2.2。关于有符号距离和曲面坐标的偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} = \widehat{n} \cdot \nabla, \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial s_i} = \frac{\partial p}{\partial s_i} \cdot (I + \sigma\, \nabla_\perp \widehat{n}) \cdot \nabla. \tag{3}$$

证明。直接应用链式法则可得 $\frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{\partial x}{\partial \sigma} \cdot \nabla$。对于切向导数，有 $\frac{\partial \widehat{n}}{\partial s_i} = \frac{\partial p}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial \widehat{n}}{\partial p} = \frac{\partial p}{\partial s_i} \cdot \nabla_\perp \widehat{n}$，其中 $\nabla_\perp$ 是曲面梯度，定义见下一节。

□

法向导数很直接，但切向导数包含缩放因子。为了理解这些导数，我们先在第 2.2 节回顾流形上的微积分，然后在第 2.3 节考察流形上的法向量，最后在第 2.4 节确定流形外的缩放因子。有了这些恒等式（另见 [26, 第 14.6] 节），我们便在第 2.4 节和第 2.5 节推导出一系列新的向量微积分恒等式。

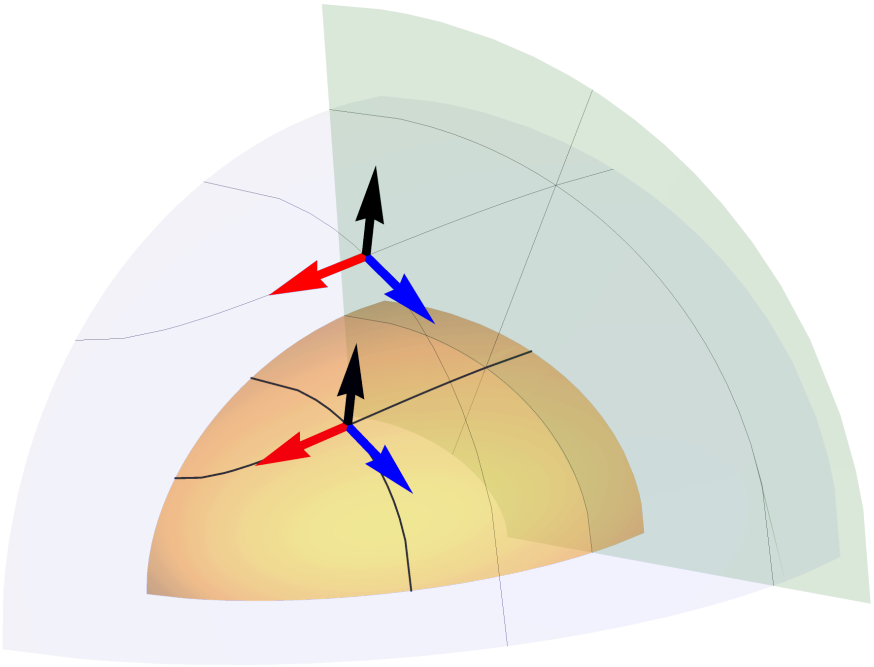

图 1：有符号距离函数坐标系。橙色曲面是一个椭球的八分之一，其半长轴为 1，$\sqrt{2}$ 和 2。正交椭球坐标$s = (s_1,\ s_2)$用两条黑色坐标线对曲面进行参数化。在曲面点 $p(s)$处，单位切向量 $\hat{t}_1$，$\hat{t}_2$（红色、蓝色）构成切空间的一组正交基。边界 $x(\sigma,\ s)$外的点与曲面相连的方式，是从流形上的最近点 $p(s)$沿法向方向 $\hat{n}(s)$移动距离 σ。蓝色显示的是 $\sigma = 1$ 水平集，并标出了相应的基向量和曲面坐标。该水平集不再是椭球形，但所定义的坐标系仍保持正交，并具有与 $\sigma = 0$ 曲面相同的主曲率方向$\hat{\ }\ \hat{\ }\ t_1,\ t_2$。

2.2 曲面向量分析

为在第 2.3 节分析曲面法向量做准备，我们先简要回顾一些关于三维曲面的基础微分几何。和之前一样，在每个点附近，我们可以使用坐标 $s = (s_1,\ s_2)$，将其映射到笛卡尔空间中的点 $p(s)$。由此可得到一组切向量基，

$$t_i = \frac{\partial p}{\partial s_i}, \qquad t_i \cdot t_j \equiv g_{ij}, \tag{4}$$

其中度量项 g_{ij} 继承自空间中的欧几里得点积，称为第一基本形式。点积还会导出一个对偶协向量基

$$t^i = \nabla s_i, \qquad t_i \cdot \nabla s_j = \delta_{ij}. \tag{5}$$

不失一般性，我们可以指定这些坐标也相互正交，且切向量基与余切向量基平行，从而能够定义一个局部正交归一向量基

$$t_i = \frac{\partial p}{\partial s_i}, \qquad \hat{t}_i = \frac{t_i}{|t_i|}, \qquad \nabla s_i = \frac{\hat{t}_i}{|t_i|}. \tag{6}$$

引入曲面正交坐标系可以加快许多中间计算步骤，但最终结果均以一般的曲面协变导数表示。正交坐标系在脐点附近可能出现奇异性

——即等曲率点 [4]。不过，这些点是孤立的，或者是球面或平面的子集。在所有情况下，都可以在该点周围定义一个正交坐标片。而坐标不变几何算子（如梯度等）在所有点上都有良好定义。

对于正交曲面坐标，曲面梯度为

$$\nabla_\perp = \nabla s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + \nabla s_2 \frac{\partial}{\partial s_2} = \frac{\widehat{t}_1}{|t_1|}\frac{\partial}{\partial s_1} + \frac{\widehat{t}_2}{|t_2|}\frac{\partial}{\partial s_2} = \widehat{t}_1 \nabla_1 + \widehat{t}_2 \nabla_2. \tag{7}$$

第一个等式由链式法则立即得出，第二个等式源于切向量的正交性，最后一个等式定义了有用的重标度导数算子，其尺度以穿过曲面的曲线弧长为基准。

曲面的面积测度为

$$dA = |t_1||t_2|\, ds_1\, ds_2. \tag{8}$$

一般而言，面积测度是曲面雅可比的行列式，这等价于切向量叉积的模 $dA = |t_1 \times t_2|\, ds_1\, ds_2$。对于正交坐标，有 $|t_1 \times t_2| = |t_1||t_2|$。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$向量 $u_\perp = u_1 t_1 + u_2 t_2$ 的曲面散度为

$$\nabla_\perp \cdot u_\perp = \frac{1}{|t_1||t_2|}\left(\frac{\partial}{\partial s_1}(|t_2|u_1) + \frac{\partial}{\partial s_2}(|t_1|u_2)\right). \tag{9}$$

曲面散度是曲面梯度的伴随算子。对于在光滑集合 U 的边界上取值为零的光滑函数 f，

$$\begin{aligned}
\int_U u_\perp \cdot \nabla_\perp f\, dA &= \int_U \left[\frac{u_1}{|t_1|}\frac{\partial f}{\partial s_1} + \frac{u_2}{|t_2|}\frac{\partial f}{\partial s_2}\right] |t_1||t_2|\, ds_1\, ds_2, \\
&= -\int_U f \frac{1}{|t_1||t_2|}\left(\frac{\partial}{\partial s_1}(|t_2|u_1) + \frac{\partial}{\partial s_2}(|t_1|u_2)\right) |t_1||t_2|\, ds_1\, ds_2, \\
&= -\int_U f\, \nabla_\perp \cdot u_\perp\, dA.
\end{aligned}$$

2.3 曲面法向量

现在我们来考察流形在 $\sigma = 0$ 处法向量的标准性质，该法向量定义为$\widehat{n} = \widehat{t}_1 \times \widehat{t}_2$，也称为高斯映射。有符号距离之所以有用，关键在于以下事实。

命题 2.3. 有符号距离函数的梯度是曲面上最近点处的单位法向量

$$\nabla\sigma = \widehat{n}. \tag{10}$$

此外，这一结果还可从曲面延伸到 $\mathbb{R}^3$ 的某个邻域中。

证明。 根据式 (2)，我们可以将有符号距离表示为 $\sigma = (x - p) \cdot \widehat{n}$。然后对该关系取梯度，得到

$$\begin{aligned}
\nabla\sigma &= (\nabla x) \cdot \widehat{n} - (\nabla p) \cdot \widehat{n} + (\nabla\widehat{n}) \cdot (x - p), \\
&= I \cdot \widehat{n} - (\nabla p) \cdot \widehat{n} + \sigma(\nabla\widehat{n}) \cdot \widehat{n}, \\
&= \widehat{n}.
\end{aligned}$$

我们强调，缩并并不作用于梯度上；为此，我们将梯度置于括号内，并使其位于点积的左侧。第二个方程的第二项为零，因为映射的梯度必定位于曲面的切空间内。第二个方程的最后一项为零，这是因为对法向量 $\nabla(\widehat{n}\cdot\widehat{n}) = 2(\nabla\widehat{n})\cdot\widehat{n} = 0$ 的（单位）模取梯度即可得出这一点。

□

这意味着法向量是其自身的对偶向量，也是有向距离函数坐标系具有实用性的关键原因。由此可以得到几个重要结果。

推论 2.1。 法向量的梯度就是有符号距离函数的海森矩阵，它必然是对称的二阶张量，

$$\nabla\widehat{n} = \nabla\nabla\sigma. \tag{11}$$

证明。 对式（10）取梯度即可得到该恒等式。海森矩阵的对称性在笛卡尔坐标中显而易见。

□

推论 2.2。 法向量是法向量梯度的零特征向量。因此，法向量的法向梯度为零。

$$\partial_\sigma\widehat{n} = 0. \tag{12}$$

也就是说，法向量可以平凡地从曲面延伸到 $\mathbb{R}^3$。

证明。 前述恒等式 $(\nabla\widehat{n})\cdot\widehat{n}$ 意味着 $\widehat{n}$ 是 $\nabla\widehat{n}$的零特征向量。法向量梯度的对称性意味着法向量的法向导数也为零 $(\nabla\widehat{n})\cdot\widehat{n} = (\widehat{n}\cdot\nabla)\widehat{n} = 0$。

□

推论 2.3。 单位法向量梯度的其余特征向量位于曲面的切空间内，且彼此正交。

证明。 正交特征向量和特征值的存在性可由法向量梯度的对称性以及对称张量的谱定理得出。其余特征向量必定与零特征向量 $\widehat{n}$ 正交，因此位于切空间内。

□

定义 2.2。 法向量的曲面梯度是形状张量 $-K$。形状张量的特征向量是主曲率方向，其特征值是主曲率（取负号）。

$$\nabla_\perp\widehat{n} = -K = -\kappa_1\,\widehat{t}_1\otimes\widehat{t}_1 - \kappa_2\,\widehat{t}_2\otimes\widehat{t}_2. \tag{13}$$

由此坐标选择所确定的标准正交基向量 $(\widehat{n},\ \widehat{t}_1,\ \widehat{t}_2)$ 是达布标架的一个例子。除孤立的脐点外，不失一般性，我们可以在局部令曲面坐标与这些特征向量平行，也就是说，单位切向量就是主曲率方向。

2.4 边界区域中的向量微积分

现在，我们可以计算整个空间中的梯度。

命题 2.4。 有符号距离坐标中的梯度为

$$\nabla = \widehat{n}\,\partial_\sigma + J^{-1}\cdot\nabla_\perp, \quad where \quad J = I - \sigma\,K. \tag{14}$$

证明。 这可由对式 (3) 求逆直接得到。若我们的曲面坐标与主曲率方向相切,

$$\frac{\partial x}{\partial s_i} = \frac{\partial p}{\partial s_i} \cdot (I - \sigma K) \cdot \nabla x = (1 - \sigma\kappa_i)|t_i|\widehat{t_i}.$$

因此，主切向基在曲面外仍保持正交（每个基向量均乘以 $1 - \sigma\kappa_i$）。因此，对偶基也是正交的，并乘以逆因子

$$\nabla s_i = \frac{1}{1 - \sigma\kappa_i} \frac{\widehat{t_i}}{|t_i|}.$$

然后，我们使用对偶基应用链式法则，并利用 J^{-1} 表示曲率因子。

□

推论 2.4。 有符号距离的海森矩阵在各处均可表示为

$$\nabla\nabla\sigma = \nabla\widehat{n} = -J^{-1}K. \tag{15}$$

推论 2.5。 主曲率方向不随 σ 变化。

梯度使我们能够计算其余所有矢量微积分量。基向量（$\widehat{n}$、$\widehat{t_1}$、$\widehat{t_2}$）与 σ 无关，从而为远离边界的向量场 u 提供了一个基,

$$u = u_\sigma \widehat{n} + u_\perp, \quad \text{where} \quad u_\perp = u_1 \widehat{t}_1 + u_2 \widehat{t}_2. \tag{16}$$

注 2.1。 我们注意到， J 的行列式为

$$|J| = 1 - 2\sigma\overline{K} + \sigma^2 |K|, \qquad where \qquad \overline{K} = \kappa_1 + \kappa_2 \quad and \quad |K| = \kappa_1\kappa_2. \tag{17}$$

平均曲率和高斯曲率分别由迹和行列式给出， $K = tr(K)/2$, $|K| = \det(K)$。

命题 2.5. 完整的体积测度 dV 为

$$dV = |J|\, d\sigma\, dA = |J||t_1||t_2|\, d\sigma\, ds_1\, ds_2. \tag{18}$$

证明。 这直接由新切向量的三重积得出 s,

$$\begin{aligned} dV &= (\partial_\sigma x \cdot (\partial_{s_1} x \times \partial_{s_2} x))\, d\sigma\, ds_1\, ds_2, \\ &= |t_1||t_2|(1 - \sigma\kappa_1)(1 - \sigma\kappa_2)\widehat{n} \cdot (\widehat{t_1} \times \widehat{t_2})\, d\sigma\, ds_1\, ds_2, \\ &= |J| d\sigma\, dA. \end{aligned}$$

□

命题 2.6. 体积散度为

$$\nabla \cdot u = \frac{\partial_\sigma(|J|u_\sigma)}{|J|} + \frac{\nabla_\perp \cdot (\widehat{J}\, u_\perp)}{|J|}, \tag{19}$$

其中，为方便起见，我们定义伴随矩阵

$$\widehat{J} = |J|J^{-1} = I - \sigma\widehat{K} \qquad\qquad \widehat{K} = |K|K^{-1} = \kappa_2 \widehat{t}_1 \otimes \widehat{t}_1 + \kappa_1 \widehat{t}_2 \otimes \widehat{t}_2, \tag{20}$$

它们（在二维情形下）会交换形状算子的主曲率。

证明。 证明与曲面散度的分部积分方法类似。 □

推论 2.6。标量拉普拉斯算子是标量梯度的散度

$$\nabla^2 f = \frac{\partial_\sigma(|J|\partial_\sigma f)}{|J|} + \frac{\nabla_\perp \cdot (\widehat{J} J^{-1} \nabla_\perp f)}{|J|}. \tag{21}$$

推论 2.7。旋度为

$$\nabla \times u = -\widehat{n} \frac{\nabla_\perp \cdot (\widehat{J} u^\perp)}{|J|} + \widehat{J}^{-1}(\partial_\sigma(\widehat{J} u^\perp) - \nabla^\perp u_\sigma), \tag{22}$$

为方便起见，我们将旋转量定义为

$$\nabla^\perp = \widehat{n} \times \nabla_\perp, \qquad\qquad u^\perp = \widehat{n} \times u_\perp, \tag{23}$$

它满足以下有用的恒等式

$$\nabla^\perp \cdot \nabla_\perp = \nabla_\perp \cdot \nabla^\perp = 0, \qquad\qquad u^\perp \cdot u_\perp = u_\perp \cdot u^\perp = 0, \tag{24}$$

$$\widehat{n} \times (J u_\perp) = \widehat{J} u^\perp, \qquad\qquad \widehat{n} \times u^\perp = -u_\perp. \tag{25}$$

证明。这由旋度是满足$\nabla \cdot \nabla \times = \nabla \times \nabla = 0$的唯一算子（相差一个符号）的事实可得。

□

推论 2.8。向量拉普拉斯算子为

$$\begin{aligned} \nabla^2 u = \widehat{n} \left[\partial_\sigma \left(\frac{\partial_\sigma(|J|u_\sigma) + \nabla_\perp \cdot (\widehat{J} u_\perp)}{|J|} \right) - \frac{\nabla_\perp \cdot (\widehat{J} J^{-1}(\partial_\sigma(J u_\perp) - \nabla_\perp u_\sigma)}{|J|} \right] \\ + \widehat{J}^{-1} \partial_\sigma \left(\widehat{J} J^{-1}(\partial_\sigma(J u_\perp) - \nabla_\perp u_\sigma) \right) + J^{-1} \nabla_\perp \left(\frac{\partial_\sigma(|J|u_\sigma)}{|J|} \right) + \Delta_\perp u_\perp, \end{aligned} \tag{26}$$

其中我们定义向量曲面拉普拉斯算子，

$$\Delta_\perp u_\perp = J^{-1} \nabla_\perp \left(\frac{\nabla_\perp \cdot (\widehat{J} u_\perp)}{|J|} \right) + \widehat{J}^{-1} \nabla^\perp \left(\frac{\nabla^\perp \cdot (J u_\perp)}{|J|} \right). \tag{27}$$

证明。 这可直接应用恒等式 $\nabla^2 u = -\nabla \times \nabla \times u + \nabla(\nabla \cdot u)$ 得出。 □

推论 2.9。 不可压缩流体力学中的无散向量拉普拉斯算子 *is*

$$\begin{aligned} -\nabla \times \nabla \times u = \frac{\widehat{n}}{|J|} \left[-\nabla_\perp \cdot (\widehat{J} J^{-1}(\partial_\sigma(J u_\perp) - \nabla_\perp u_\sigma) \right] \\ + \widehat{J}^{-1} \partial_\sigma \left(\widehat{J} J^{-1}(\partial_\sigma(J u_\perp) - \nabla_\perp u_\sigma) \right) + \widehat{J}^{-1} \nabla^\perp \left(\frac{\nabla^\perp \cdot (J u_\perp)}{|J|} \right). \end{aligned} \tag{28}$$

命题 2.7。 基向量的梯度为

$$\nabla \widehat{n} = J^{-1} \cdot \nabla_\perp \widehat{n}, \qquad\qquad \nabla \widehat{t_i} = J^{-1} \cdot \nabla_\perp \widehat{t_i}. \tag{29}$$

曲面梯度为

$$\nabla_\perp \widehat{n} = -\kappa_1 \widehat{t}_1 \otimes \widehat{t}_1 - \kappa_2 \widehat{t}_2 \otimes \widehat{t}_2, \qquad\qquad \nabla_\perp \widehat{t_i} = \kappa_i \widehat{t}_i \otimes \widehat{n} + \mathcal{R}_i^{jk} \widehat{t}_j \otimes \widehat{t}_k, \tag{30}$$

对重复的上标和下标采用爱因斯坦求和约定。里奇旋转系数 $\mathcal{R}_i^{jk}$ 具有反对称性，且有两个独立自由度

$$(\nabla_j \widehat{t_i}) \cdot \widehat{t}_k \equiv \mathcal{R}_i^{jk} = -\mathcal{R}_k^{ji}, \qquad\qquad \mathcal{R}_1^{12} = \omega_1, \qquad\qquad \mathcal{R}_2^{21} = -\omega_2. \tag{31}$$

证明。 由于向量基与 σ 无关（即 $\partial_\sigma \widehat{n} = \partial_\sigma \widehat{t_i} = 0$），矢量梯度是经过缩放的曲面梯度。里奇旋转系数的反对称性源于该基是正交归一的

$$\widehat{n}\cdot\widehat{t_i}=0 \implies \nabla\widehat{n}\cdot\widehat{t_i}=-\nabla\widehat{t_i}\cdot\widehat{n}, \qquad \widehat{t_i}\cdot\widehat{t_j}=0 \implies \nabla\widehat{t_i}\cdot\widehat{t_j}=-\nabla\widehat{t_j}\cdot\widehat{t_i}.$$

□

推论 2.10。 速度向量梯度为

$$\nabla u = \widehat{n}\otimes(\widehat{n}\,\partial_\sigma u_\sigma + \partial_\sigma u_\perp) + J^{-1}\left((\nabla_\perp u_\sigma + K u_\perp)\otimes\widehat{n} + (\nabla_\perp u_\perp\cdot\Pi - u_\sigma\, K)\right). \tag{32}$$

其中曲面投影张量为 $\Pi = I - \widehat{n}\otimes\widehat{n}$。

推论 2.11。 对流导数为

$$u\cdot\nabla u = \widehat{n}\left(u_\sigma\partial_\sigma u_\sigma + u_\perp\cdot J^{-1}(\nabla_\perp u_\sigma + K u_\perp)\right) + u_\sigma\partial_\sigma u_\perp + u_\perp\cdot J^{-1}(\nabla_\perp u_\perp - K u_\sigma). \tag{33}$$

推论 2.12。 海森矩阵为

$$\begin{aligned}
\nabla\nabla &= \widehat{n}\otimes\partial_\sigma(\widehat{n}\partial_\sigma + J^{-1}\cdot\nabla_\perp) + J^{-1}\cdot\nabla_\perp(\widehat{n}\partial_\sigma + J^{-1}\cdot\nabla_\perp),\\
&= \widehat{n}\otimes\widehat{n}\,\partial_\sigma^2 + \widehat{n}\otimes\widehat{t}_1\left(\frac{\kappa_1\nabla_1}{(1-\sigma\kappa_1)^2} + \frac{\partial_\sigma\nabla_1}{1-\sigma\kappa_1}\right) + \widehat{n}\otimes\widehat{t}_2\left(\frac{\kappa_2\nabla_2}{(1-\sigma\kappa_2)^2} + \frac{\partial_\sigma\nabla_2}{1-\sigma\kappa_2}\right),\\
&+ \widehat{t}_1\otimes\widehat{t}_1\left(-\frac{\kappa_1\partial_\sigma}{1-\sigma\kappa_1} + \frac{\nabla_1\nabla_1}{(1-\sigma\kappa_1)^2} - \frac{\omega_1\nabla_2}{|J|} + \frac{\sigma\nabla_1\kappa_1\nabla_1}{(1-\sigma\kappa_1)^3}\right),\\
&+ \widehat{t}_1\otimes\widehat{t}_2\left(\frac{\nabla_1\nabla_2}{|J|} + \frac{\omega_1\nabla_1}{(1-\sigma\kappa_1)^2} + \frac{\sigma\nabla_1\kappa_2\nabla_2}{|J|(1-\sigma\kappa_2)}\right),\\
&+ \widehat{t}_1\otimes\widehat{n}\left(\frac{\nabla_1\partial_\sigma}{1-\sigma\kappa_1} + \frac{\kappa_1\nabla_1}{(1-\sigma\kappa_1)^2}\right),\\
&+ \widehat{t}_2\otimes\widehat{t}_2\left(-\frac{\kappa_2\partial_\sigma}{1-\sigma\kappa_2} + \frac{\nabla_2\nabla_2}{(1-\sigma\kappa_2)^2} + \frac{\omega_2\nabla_1}{|J|} + \frac{\sigma\nabla_2\kappa_2\nabla_2}{(1-\sigma\kappa_2)^3}\right),\\
&+ \widehat{t}_2\otimes\widehat{t}_1\left(\frac{\nabla_2\nabla_1}{|J|} - \frac{\omega_2\nabla_2}{(1-\sigma\kappa_2)^2} + \frac{\sigma\nabla_2\kappa_1\nabla_1}{|J|(1-\sigma\kappa_1)}\right),\\
&+ \widehat{t}_2\otimes\widehat{n}\left(\frac{\nabla_2\partial_\sigma}{1-\sigma\kappa_2} + \frac{\kappa_2\nabla_2}{(1-\sigma\kappa_2)^2}\right).
\end{aligned}$$

*Pro*的。 根据定义，这个恒等式可由将梯度与自身复合得到。 □

推论 2.13。 导数的对易子为

$$[\partial_\sigma, \nabla_1] = 0, \tag{34}$$
$$[\partial_\sigma, \nabla_2] = 0, \tag{35}$$
$$[\nabla_1, \nabla_2] = -\frac{|J|}{(1-\sigma\kappa_1)^2}\omega_1\nabla_1 - \frac{|J|}{(1-\sigma\kappa_2)^2}\omega_2\nabla_2 + \sigma\left(\frac{\nabla_2\kappa_1}{1-\sigma\kappa_1}\nabla_1 - \frac{\nabla_1\kappa_2}{1-\sigma\kappa_2}\nabla_2\right). \tag{36}$$

证明。T 这些恒等式可由要求海森矩阵具有对称性得出，见推论 2.12 . □

C推论 2.14。 用旋转系数表示的曲面散度为

$$\nabla_\perp\cdot u_\perp = \mathrm{tr}(\nabla_\perp u_\perp) = \nabla_1 u_1 + \nabla_2 u_2 + \omega_2\, u_1 - \omega_1\, u_2. \tag{37}$$

证明。 这由矢量梯度的迹以及以下事实得出： $\nabla_1 \log|t_2| = \omega_2$ 和 $\nabla_2 \log|t_1| = -\omega_1$，而该事实又由

$$\begin{aligned}
\omega_2 &\equiv (\nabla_2 \widehat{t_1}) \cdot \widehat{t_2}, \\
&= \frac{1}{|t_2|^2} \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\frac{t_1}{|t_1|} \right) \cdot t_2, \\
&= \frac{1}{|t_2|^2 |t_1|} \frac{\partial t_1}{\partial s_2} \cdot t_2 + 0, \\
&= \frac{1}{|t_2|^2 |t_1|} \frac{\partial t_2}{\partial s_1} \cdot t_2, \\
&= \frac{1}{|t_2|} \nabla_1 (|t_2| \widehat{t_2}) \cdot \widehat{t_2}, \\
&= \nabla_1 \log|t_2| + 0.
\end{aligned}$$

对于 ω_1，步骤类似。 □

C推论 2.15。 曲率和旋转系数的导数 *obe* y,

$$\nabla_2 \kappa_1 - \omega_1(\kappa_1 - \kappa_2) = 0, \tag{38}$$

$$\nabla_1 \kappa_2 - \omega_2(\kappa_1 - \kappa_2) = 0, \tag{39}$$

$$\nabla_1 \omega_2 - \nabla_2 \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_2^2 = -\kappa_1 \kappa_2. \tag{40}$$

证明。 首先，使用式（31）直接计算曲面（$\sigma = 0$）处每个基向量的交换子。然后，与式（36）中给出的交换子进行比较。 □

注 2.2。 前两个恒等式称为 *Codazzi-Mainardi* 方程。最后一个恒等式是 *Gauss* 的高斯绝妙定理——高斯曲率可以使用内蕴几何量来定义。

这就完成了边界附近体心坐标所需的向量微积分。

2.5 演化曲面

上述恒等式为描述边界附近物理量的空间变化提供了直接的工具。不过，我们还将考虑曲面随时间变化的问题。这要求我们扩展时间导数算子。笛卡尔坐标（x， t）与有符号距离坐标（s， σ， τ）之间的完整变换为

$$x = p(s,\tau) + \sigma\, \widehat{n}(p(s,\tau)), \qquad\qquad t = \tau. \tag{41}$$

注 2.3。 我们强调，尽管时间坐标 t 和 τ相等，但偏导数 ∂_t 和 ∂_τ 通常不相等。

注 2.4。 我们不假设曲面演化过程中曲面坐标始终平行于主曲率线。因此，切向量 $t_i = \partial_{s_i} p$ 通常并不正交。与前文相同，我们的目的是推导物理量的坐标不变表达式。

我们首先考虑有符号距离坐标的笛卡尔时间导数。

定义 2.3。 曲面坐标 $p(s,\tau)$的有符号距离偏时间导数（即保持 s不变）定义为：

$$\partial_\tau p(s,\tau) \;\equiv\; v_\sigma\, \widehat{n}(s,\tau) + v_\perp(s,\tau) = v_\sigma \widehat{n} + v_i t_i, \tag{42}$$

其中， v_σ 和 $v_\perp$ 分别是曲面的局部法向速度和切向速度。

注记 2.5。 在*Stefan*边界问题中， *[36, 57, 30]* 界面的运动通常用沿界面法向移动的坐标来描述。然而，将坐标推广为同时沿边界切向移动的坐标可能会很方便，例如平移弹性膜在流体流动中的物质坐标。

引理 2.1. 切向速度的曲面梯度为

$$\nabla_\perp v_\perp = (\nabla_\perp v_\perp)\cdot \Pi + (K\cdot v_\perp)\otimes \widehat{n}, \tag{43}$$

证明. 将推论 2.10 在曲面速度 $v_\perp$ at $\sigma = 0$处投影到曲面上。 □

引理 2.2. 切向量的有符号距离时间导数为

$$\partial_\tau t_i = t_i\cdot((\nabla_\perp v_\sigma + Kv_\perp)\otimes\widehat{n} - v_\sigma K + \nabla_\perp v_\perp\cdot\Pi). \tag{44}$$

证明. 这是一项直接的推导，依据的是移动有符号距离坐标中混合偏导数相等这一性质，

$$\begin{aligned}
\partial_\tau t_i &= \partial_\tau\left(\partial_{s_i} p\right),\\
&= \partial_{s_i}\partial_\tau p,\\
&= \partial_{s_i}(v_\sigma\widehat{n} + v_\perp),\\
&= t_i\cdot\nabla_\perp(v_\sigma\widehat{n} + v_\perp),\\
&= t_i\cdot((\nabla_\perp v_\sigma)\otimes\widehat{n} + v_\sigma\nabla_\perp\widehat{n} + \nabla_\perp v_\perp),\\
&= t_i\cdot((\nabla_\perp v_\sigma)\otimes\widehat{n} + v_\sigma\nabla_\perp\widehat{n} + \nabla_\perp v_\perp\cdot\Pi + (Kv_\perp)\otimes\widehat{n}).
\end{aligned}$$

□

引理 2.3. 法向量的时间偏导数为

$$\partial_\tau\widehat{n} = -(\nabla_\perp v_\sigma + Kv_\perp). \tag{45}$$

证明. 这是正交性和引理 2.2 的推论，

$$\begin{aligned}
&\partial_\tau(\widehat{n}\cdot\widehat{n}) = 0 \implies \widehat{n}\cdot\partial_\tau\widehat{n} = 0,\\
&\partial_\tau(\widehat{n}\cdot t_i) = 0 \implies t_i\cdot\partial_\tau\widehat{n} = -\widehat{n}\cdot\partial_\tau t_i = -t_i\cdot(\nabla_\perp v_\sigma + Kv_\perp).
\end{aligned}$$

□

引理 2。 **4.** 有符号距离坐标的笛卡尔偏时间导数为 e

$$\partial_t\sigma = -v_\sigma, \qquad \partial_t s_i t_i = -v_\perp + \sigma J^{-1}\cdot\nabla_\perp v_\sigma, \tag{46}$$

这里对表面坐标导数使用了爱因斯坦求和约定。证明。由链式法则可得笛卡尔偏时间导数为

$$\partial_t = \partial_\tau + \partial_t\sigma\partial_\sigma + \partial_t s_i\cdot\frac{\partial}{\partial s_i} = \partial_\tau + \partial_t\sigma\partial_\sigma + \partial_t s_i t_i\cdot\nabla_\perp.$$

我们将此式应用于笛卡尔坐标，结果必然为零。利用引理 2.2 和 2.3，可得

$$\begin{aligned}
\partial_t x &= \partial_t(p + \sigma\widehat{n}),\\
&= (\partial_\tau + \partial_t\sigma\partial_\sigma + \partial_t s_i t_i\cdot\nabla_\perp)(p + \sigma\widehat{n}),\\
&= \partial_\tau p + \partial_t s_i t_i\cdot\nabla_\perp p + \sigma\partial_\tau\widehat{n} + \partial_t\sigma\widehat{n} + \sigma\partial_t s_i t_i\cdot\nabla_\perp\widehat{n},\\
&= (v_\sigma + \partial_t\sigma)\widehat{n} + (v_\perp + \sigma\partial_\tau\widehat{n} + \partial_t s_i t_i\cdot(\Pi - \sigma K)),\\
&= (v_\sigma + \partial_t\sigma)\widehat{n} + (v_\perp - \sigma(\nabla_\perp v_\sigma + Kv_\perp) + \partial_t s_i t_i\cdot(\Pi - \sigma K)),\\
&= (v_\sigma + \partial_t\sigma)\widehat{n} + ((v_\perp + \partial_t s_i t_i)\cdot(\Pi - \sigma K) - \sigma\nabla_\perp v_\sigma).
\end{aligned}$$

令法向分量和切向分量均为零，即得式（46）。 □

推论 2.16。 移动有符号距离坐标中的笛卡尔偏时间导数为

$$\partial_t = \partial_\tau - v_\sigma \partial_\sigma - v_\perp \cdot \nabla_\perp + \sigma \nabla_\perp v_\sigma \cdot J^{-1} \cdot \nabla_\perp. \tag{47}$$

推论 2.17. 速度矢量的笛卡尔时间导数为:

$$\begin{aligned} \partial_t u = &\left(\partial_\tau u_\sigma - v\partial_\sigma u_\sigma + (\sigma \nabla_\perp v \cdot J^{-1} - v_\perp) \cdot (\nabla_\perp u_\sigma + K u_\perp)\right) \widehat{n} \\ &+ \left(\partial_\tau u_\perp - v\partial_\sigma u_\perp + (\sigma \nabla_\perp v \cdot J^{-1} - v_\perp) \cdot (\nabla_\perp u_\perp - K u_\sigma)\right), \end{aligned} \tag{48}$$

其中

$$\partial_\tau u_\perp = (\partial_\tau u_i) t_i + (u_\perp \cdot (\nabla_\perp v_\sigma + K \cdot v_\perp))\widehat{n} + u_\perp \cdot (\nabla_\perp u_\perp \cdot \Pi - v_\sigma K).$$

证明. 这可通过考察速度分量和有符号距离基向量的时间导数得出。

□

2.6 应用：表面边界层坐标

有符号距离坐标系的一项主要应用，是为边界层提供一种实用的坐标系，并可涵盖随时间演化的情况。这些坐标本身就不是一种数值／计算工具。整体思路是将有符号距离坐标用作数学分析 的工具，进而提炼出更易处理（因而在计算上可行）的模型方程。我们在研究复杂的冰融化浮力驱动对流时采用了这一方法，并取得了良好成果；相关研究 [30], 拓展了此前在弥散域 [37]和相场方法 [46]方面的工作。

注 2.6. 当曲面上存在多个最近点时（例如图 *2*），有符号距离坐标可能出现奇异性。当 J 不可逆时，就会出现问题，

$$\sigma_* \;=\; \frac{\overline{K} \pm \sqrt{\overline{K}^2 - |K|}}{|K|} \;=\; \kappa_1^{-1},\, \kappa_2^{-1}. \tag{49}$$

不过，我们可以保证，每个光滑曲面周围都存在一个管状邻域，在该邻域内，有符号距离函数保持光滑（蓝色区域）。这正是多尺度匹配渐近方法中采用无限薄边界层的应用场景。

注 2.7. 普通的球坐标／柱坐标是有符号距离坐标的简单特例，其奇异性仅出现在 $x = y = z = 0$ （球坐标）或 $x = y = 0$（柱坐标）处。尽管如此，这两种坐标系都能表示在奇异点 *[55, 56]* 处具有特殊限制的全局解析函数。研究这类函数在这些坐标附近更精细的代数性质与组合性质，可以深入了解球面和实心球的几何与对称性。此外，这类考量还有助于构建稳定、准确且高效的数值算法，尽管奇异性依然存在。分析有符号距离坐标中的函数，将有助于深入了解更一般曲面的几何。

我们首先 将有符号距离坐标乘以小正数 $\varepsilon \ll 1$ 进行缩放 ,

$$\sigma = \varepsilon\, \xi. \tag{50}$$

只要重缩放后的法向坐标 ξ 足够小，我们就可以将几何因子 J 和 J^{-1} 改写为

$$J = 1 - \sigma K = 1 - \varepsilon \xi K, \qquad\qquad J^{-1} = (1 - \sigma K)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \xi^k K^k. \tag{51}$$

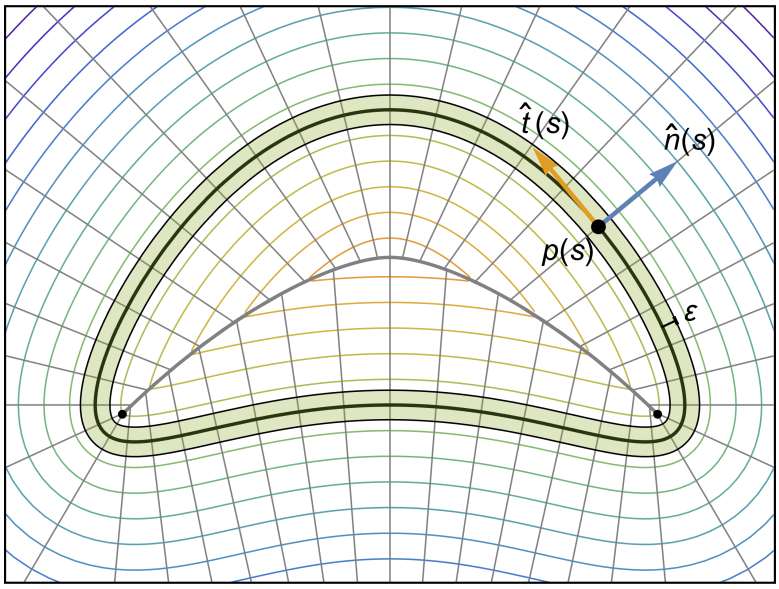

图2：曲面周围的有符号距离坐标会形成奇异性。奇异性可能是因为位于曲率渐屈线上（黑点），也可能是因为最近点不再唯一（灰色曲线）。但每个光滑曲面都存在一个有限厚度的管状邻域，在该邻域内，有符号距离 σ 保持光滑（绿色边界区域）。因此，有符号距离坐标适用于任意光滑曲面周围的无穷小边界层。

切向导数不受此变换影响，而法向导数会多出一个 ε^{-1} 的幂次，这意味着梯度和时间导数算子现在表示为

$$\nabla = \varepsilon^{-1}\widehat{n}\partial_\xi + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \xi^k K^k \nabla_\perp, \tag{52}$$

$$\partial_t = -\varepsilon^{-1} v_\sigma \partial_\xi + (\partial_\tau - v_\perp \cdot \nabla_\perp) + \varepsilon \left(\xi \nabla_\perp v_\sigma \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \xi^k K^k \nabla_\perp \right). \tag{53}$$

于是，我们可以将之前所有微分算子重写为关于 ε的形式级数

$$\nabla f = \varepsilon^{-1}\widehat{n}\partial_\xi f + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \xi^k K^k \nabla_\perp f, \tag{54}$$

$$\begin{aligned}\nabla v = {} & \varepsilon^{-1}\widehat{n} \otimes (\widehat{n}\,\partial_\xi u_\sigma + \partial_\xi u_\perp) \\ & + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \xi^k K^k \right) ((\nabla_\perp u_\sigma + K u_\perp) \otimes \widehat{n} + (\nabla_\perp u_\perp \cdot \Pi - u_\sigma K)),\end{aligned} \tag{55}$$

$$|J|\nabla \cdot u = \varepsilon^{-1}\partial_\xi u_\sigma - \partial_\xi(\xi \overline{K} u_\sigma) + \nabla_\perp \cdot u_\perp + \varepsilon \left(\partial_\xi(\xi^2 |K| u_\sigma) - \xi \nabla_\perp \cdot (\widehat{K} u_\perp) \right), \tag{56}$$

$$\nabla^2 f = \varepsilon^{-2}\partial_\xi^2 f + \varepsilon^{-1}(-\overline{K}\partial_\xi f) + \varepsilon^0(-\xi\overline{K^2}\partial_\xi f + \nabla_\perp \cdot \nabla_\perp f) + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{57}$$

$$-\nabla \times \nabla \times u = \varepsilon^{-2}\partial_\xi^2 u_\perp + \varepsilon^{-1}\left(-\overline{K}\partial_\xi u_\perp - \partial_\xi \nabla_\perp u_\sigma - \widehat{n}\nabla_\perp \cdot (\partial_\xi u_\perp)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^0) \tag{58}$$

$$u \cdot \nabla f = \varepsilon^{-1} u_\sigma \partial_\xi f + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \xi^k K^k u_\perp \cdot \nabla_\perp f \tag{59}$$

$$\begin{aligned}u \cdot \nabla u = {} & \varepsilon^{-1}(u_\sigma \partial_\xi u_\perp + \widehat{n} u_\sigma \partial_\xi u_\sigma) \\ & + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \xi^k u_\perp K^k \right) \cdot ((\nabla_\perp u_\sigma + K u_\perp)\widehat{n} + (\nabla_\perp u_\perp - K u_\sigma)).\end{aligned} \tag{60}$$

关于更高阶展开或其他矢量微积分算子，请参阅 Mathematica 代码，网址为 github.com/ericwhester/signed-distance-code。

3 有符号距离绕线

并非所有边界层的余维都是一。曲面的边缘或边界，以及奇异曲线，都需要采用新的参数化方法。可以将这些情形视为厚度趋于零的曲面的极限情形来处理。我们将采用另一种方法：从曲线的 Frenet-Serret 标架出发 [20, 50], ，推导基于 Bishop 标架 [5], 的正交坐标，并将其推广，以求出演化线邻域中的联络系数。

3.1 Frenet-Serret 标架

我们从一条浸入空间并随时间 τ 平滑演化的光滑参数化曲线 $p(s,\tau)$ 开始

$$p(s,\tau). \tag{61}$$

为了方便起见，我们可以省略各种量对 s,τ 的函数依赖关系 .
现在，我们要沿曲线建立一个向量标架。首先考虑曲线的 切向量

$$t = \frac{\partial p(s,\tau)}{\partial s}, \tag{62}$$

$\widehat{}$并将单位切向量 t 定义为归一化到单位长度

$$\widehat{t} = \frac{t}{|t|}. \tag{63}$$

为方便起见，我们还定义重标度导数算子 ∇_s，用于计算弧长导数

$$\nabla_s = \frac{1}{|t|}\frac{\partial}{\partial s}. \tag{64}$$

$\widehat{}$由于切向量经过归一化，其导数必定垂直于 t。由此定义法向量 $\widehat{n}$ 和曲率 κ

$$\nabla_s \widehat{t} = \kappa(s,\tau)\widehat{n}. \tag{65}$$

注 3.1. 如果曲线的导数为零，我们可以任意选取一个法向量，并令$\kappa(s,\tau) = 0$。

$\widehat{}$ $\widehat{}$我们用副法向量 b补全标架，其定义为同时垂直于 t 和 $\frown n$

$$\widehat{b} = \widehat{t} \times \widehat{n}. \tag{66}$$

法向量的导数进而定义了挠率 ω

$$\nabla_s \widehat{n} = -\kappa\widehat{t} + \omega\widehat{b}, \tag{67}$$

并且我们利用正交归一性可知，副法向量的导数与法向量成正比，

$$\nabla_s \widehat{b} = -\omega\widehat{n}. \tag{68}$$

3.2 正交有向距离坐标

一种简单的曲线附近坐标定义，是相对于 Frenet-Serret 标架定义角坐标。然而我们将说明，为了保持正交坐标系，必须根据曲线的挠率旋转角坐标。

定义 3.1. 我们使用有向距离 σ 和角坐标 θ，在曲线的邻域内定义一个新的坐标系

$$x(s,\theta,\sigma,\tau) = p(s,\tau) + \sigma\left(\cos\left(\theta+\phi(s,\tau)\right)\widehat{n}(s,\tau) + \sin\left(\theta+\phi(s,\tau)\right)\widehat{b}(s,\tau)\right). \tag{69}$$

引理 3.1. 当满足以下条件时，该坐标系是正交的

$$\nabla_s\phi = -\omega(s). \tag{70}$$

证明. 在此条件下，坐标变换的雅可比矩阵的各行彼此正交，

$$\begin{bmatrix}\nabla_s x\\ \partial_\theta x\\ \partial_\sigma x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-\sigma(\cos(\theta+\phi)\kappa) & -\sigma\sin(\theta+\phi)(\omega+\nabla_s\phi) & \sigma\cos(\theta+\phi)(\omega+\nabla_s\phi)\\ 0 & -\sigma\sin(\theta+\phi) & \sigma\cos(\theta+\phi)\\ 0 & \cos(\theta+\phi) & \sin(\theta+\phi)\end{bmatrix}.$$

□

注 3.2. 该条件等价于曲线 *[5]* 的相对平行适配标架所满足的 *Bishop* 条件。该标架并不唯一，初始角坐标 $\phi(0)$ 有一个自由度。

定义 3.2. 我们定义坐标标架单位向量 $(\widehat{t_s},\widehat{t_\theta},\widehat{t_\sigma})$

$$\widehat{t_s} = \frac{\nabla_s x}{h_s} = \widehat{t}, \tag{71}$$

$$\widehat{t_\theta} = \frac{\partial_\theta x}{\sigma} = -\sin(\theta+\phi)\widehat{n} + \cos(\theta+\phi)\widehat{b}, \tag{72}$$

$$\widehat{t_\sigma} = \frac{\partial_\sigma x}{h_\sigma} = \cos(\theta+\phi)\widehat{n} + \sin(\theta+\phi)\widehat{b}, \tag{73}$$

其中我们定义缩放因子

$$h_s = |\nabla_s x| = 1-\sigma\kappa\cos(\theta+\phi), \qquad \sigma = |\partial_\theta x| = \sigma, \qquad h_\sigma = |\partial_\sigma x| = 1. \tag{74}$$

利用这个正交坐标系，我们推导出梯度

推论 3.1. 梯度为

$$\nabla = \widehat{t_\sigma}\partial_\sigma + \frac{1}{h_s}\widehat{t_s}\nabla_s + \frac{1}{\sigma}\widehat{t_\theta}\partial_\theta. \tag{75}$$

证明。 这是由坐标变换的雅可比矩阵以及我们对正交向量标架的归一化得到的。

□

引理 3.2. $(\widehat{t_s},\widehat{t_\theta},\widehat{t_\sigma})$ 标架的联络系数为

$$\nabla\widehat{t_s} = \mathcal{A}\,\widehat{t_s}\otimes\widehat{t_\sigma} + \mathcal{B}\,\widehat{t_s}\otimes\widehat{t_\theta}, \tag{76}$$

$$\nabla\widehat{t_\sigma} = -\mathcal{A}\,\widehat{t_s}\otimes\widehat{t_s} + \mathcal{C}\,\widehat{t_\theta}\otimes\widehat{t_\theta}, \tag{77}$$

$$\nabla\widehat{t_\theta} = -\mathcal{B}\,\widehat{t_s}\otimes\widehat{t_s} - \mathcal{C}\,\widehat{t_\theta}\otimes\widehat{t_\sigma}, \tag{78}$$

其中我们定义

$$\mathcal{A} = \frac{1}{h_s}\kappa\cos(\phi+\theta), \qquad \mathcal{B} = -\frac{1}{h_s}\kappa\sin(\phi+\theta), \qquad \mathcal{C} = \frac{1}{\sigma}. \tag{79}$$

证明。这些结果源于根据 Frenet-Serret 标架定义坐标标架，以及后者的已知导数。

□

3.3 向量微积分算子

我们根据梯度和联络系数推导其余的矢量微积分算子。

推论 3.2. 矢量梯度为

$$\begin{aligned}\nabla u = &\left(\frac{\nabla_s u_s}{h_s} - \mathcal{A}u_\sigma - \mathcal{B}u_\theta\right)\widehat{t_s}\otimes\widehat{t_s} + \left(\frac{\nabla_s u_\sigma}{h_s} + \mathcal{A}u_s\right)\widehat{t_s}\otimes\widehat{t_\sigma} + \left(\frac{\nabla_s u_\theta}{h_s} + \mathcal{B}u_s\right)\widehat{t_s}\otimes\widehat{t_\theta}\\ &+ (\partial_\sigma u_s)\,\widehat{t_\sigma}\otimes\widehat{t_s} + (\partial_\sigma u_\sigma)\,\widehat{t_\sigma}\otimes\widehat{t_\sigma} + (\partial_\sigma u_\theta)\,\widehat{t_\sigma}\otimes\widehat{t_\theta}\\ &+ \left(\frac{\partial_\theta u_s}{\sigma}\right)\widehat{t_\theta}\otimes\widehat{t_s} + \left(\frac{\partial_\theta u_\sigma}{\sigma} - \mathcal{C}u_\theta\right)\widehat{t_\theta}\otimes\widehat{t_\sigma} + \left(\frac{\partial_\theta u_\theta}{\sigma} + \mathcal{C}u_\sigma\right)\widehat{t_\theta}\otimes\widehat{t_\theta}.\end{aligned} \tag{80}$$

推论 3.3. 散度为

$$\nabla\cdot u = \frac{\nabla_s u_s}{h_s} + \partial_\sigma u_\sigma + \frac{\partial_\theta u_\theta}{\sigma} + (\mathcal{C}-\mathcal{A})\,u_\sigma - \mathcal{B}u_\theta. \tag{81}$$

证明. 我们取矢量梯度的迹。 □

推论 3.4. 标量拉普拉斯算子为

$$\Delta f = \frac{\nabla_s^2 f}{h_s^2} + \partial_\sigma^2 f + \frac{\partial_\theta^2 f}{\sigma^2} - \frac{\nabla_s h_s}{h_s^3}\nabla_s f + (\mathcal{C}-\mathcal{A})\,\partial_\sigma f - \frac{\mathcal{B}}{\sigma}\partial_\theta f. \tag{82}$$

证明. 我们取标量梯度的散度。 □

推论 3.5. 矢量旋度为

$$\nabla\times u = \left(\partial_\sigma u_\theta - \frac{\partial_\theta u_\sigma}{\sigma} + \mathcal{C}u_\theta\right)\widehat{t_s} + \left(\frac{\partial_\theta u_s}{\sigma} - \frac{\nabla_s u_\theta}{h_s} - \mathcal{B}u_s\right)\widehat{t_\sigma} + \left(\frac{\nabla_s u_\sigma}{h_s} - \partial_\sigma u_s + \mathcal{A}u_s\right)\widehat{t_\theta}. \tag{83}$$

证明. 我们将梯度与列维-奇维塔张量缩并 $(\nabla\times u)\cdot\widehat{t_i} \equiv \varepsilon_{i,j,k}(\nabla u)_{j,k}$。 □

推论 3.6. 向量拉普拉斯算子为

$$\begin{aligned}\Delta u = &\left(\Delta u_s - \frac{2\mathcal{A}}{h_s}\nabla_s u_\sigma - \frac{2\mathcal{B}}{h_s}\nabla_s u_\theta + \left(-\mathcal{A}^2-\mathcal{B}^2\right)u_s - \frac{\nabla_s\mathcal{A}}{h_s}u_\sigma - \frac{\nabla_s\mathcal{B}}{h_s}u_\theta\right)\widehat{t_s}\\ &+ \left(\Delta u_\sigma + \frac{2\mathcal{A}}{h_s}\nabla_s u_s - \frac{2\mathcal{C}}{\sigma}\partial_\theta u_\theta + \frac{\nabla_s\mathcal{A}}{h_s}u_s + \left(-\mathcal{A}^2-\mathcal{C}^2\right)u_\sigma + (-\mathcal{A}\mathcal{B}+\mathcal{B}\mathcal{C})u_\theta\right)\widehat{t_\sigma}\\ &+ \left(\Delta u_\theta + \frac{2\mathcal{B}}{h_s}\nabla_s u_s + \frac{2\mathcal{C}}{\sigma}\partial_\theta u_\sigma + \frac{\nabla_s\mathcal{B}}{h_s}u_s + (-\mathcal{A}\mathcal{B}-\mathcal{B}\mathcal{C})u_\sigma + \left(-\mathcal{B}^2-\mathcal{C}^2\right)u_\theta\right)\widehat{t_\theta}.\end{aligned} \tag{84}$$

3.4 演化曲线

一般来说，曲线也可能随时间演化。我们希望推导时间导数算子及其对坐标标架的影响。

定义 **在 3.3 中。** 曲线的速度用 *Frenet-Serret* 标架来定义 e

$$\partial_\tau p(\tau,s) = v_t\,\widehat{t} + v_n\,\widehat{n} + v_b\,\widehat{b} \equiv v. \tag{85}$$

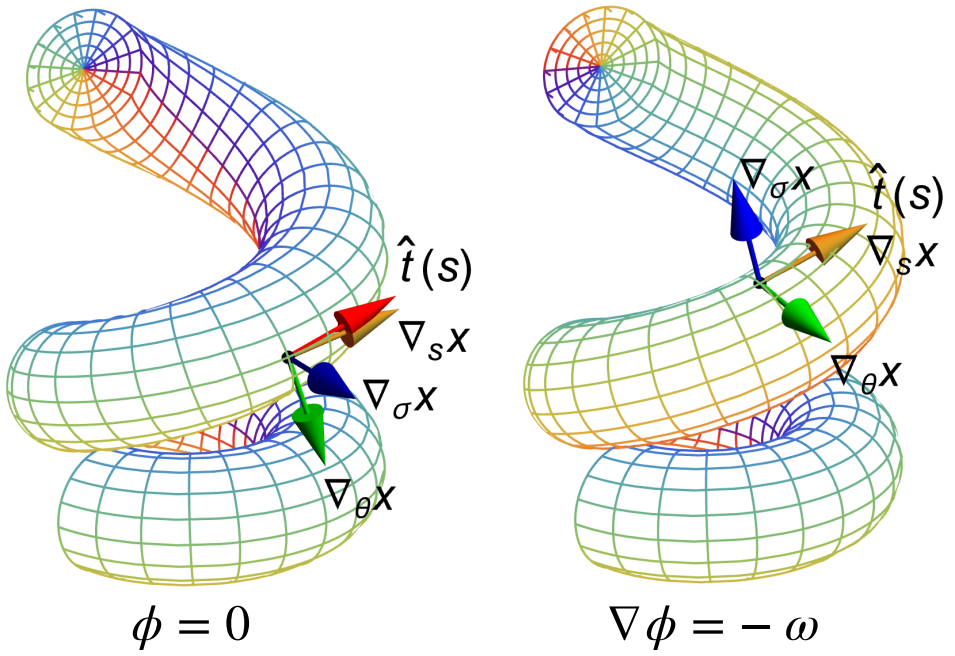

图 3：曲线 $p(s,\ t) = (\cos 2\pi s,\ \sin(2\pi s)\ s^2)$ 周围坐标系的比较。左：由 Frenet-Serret 标架导出的坐标，其角坐标是相对于法向量定义的。当挠率非零时，远离曲线的坐标切向量不再正交（比较 $\hat{t}(s)$（红色）与 $\nabla_s x$ （橙色））。右：根据挠率旋转角坐标后得到的正交有符号距离坐标。在 $\sigma = 0.5$ 处，两种系统均显示了 s 和 θ 的等值集，并且分别按 θ 着色。

引理 3.3。 *Frenet-Serret* 标架的导数为

$$\partial_\tau \widehat{t} = (\nabla_s v_t - \kappa v_n)\,\widehat{t} + (-\omega v_b + \nabla_s v_n + \kappa v_t)\,\widehat{n} + (\nabla_s v_b + \omega v_n)\,\widehat{b}, \tag{86}$$

$$\begin{aligned}\partial_\tau \widehat{n} = &\left(\omega v_b - \frac{v_n \nabla_s \kappa}{\kappa} - 2\nabla_s v_n + \frac{\nabla_s^2 v_t}{\kappa} - \kappa v_t\right)\widehat{t} \\ &+ \frac{1}{\kappa}\left(-2\omega\nabla_s v_b - v_b\nabla_s\omega - \partial_\tau\kappa + \nabla_s^2 v_n + v_t\nabla_s\kappa + 2\kappa\nabla_s v_t - \omega^2 v_n - \kappa^2 v_n\right)\widehat{n} \\ &+ \frac{1}{\kappa}\left(\nabla_s^2 v_b - \omega^2 v_b + 2\omega\nabla_s v_n + v_n\nabla_s\omega + \kappa\omega v_t\right)\widehat{b},\end{aligned} \tag{87}$$

$$\begin{aligned}\partial_\tau \widehat{b} = &(-\nabla_s v_b - \omega v_n)\,\widehat{t} \\ &+ \frac{1}{\kappa}\left(-\nabla_s^2 v_b + \omega^2 v_b - 2\omega\nabla_s v_n - v_n\nabla_s\omega - \kappa\omega v_t\right)\widehat{n} \\ &+ \frac{1}{\kappa}\left(-2\omega\nabla_s v_b - v_b\nabla_s\omega - \partial_\tau\kappa + \nabla_s^2 v_n + v_t\nabla_s\kappa + 3\kappa\nabla_s v_t - \omega^2 v_n - 2\kappa^2 v_n\right)\widehat{b}.\end{aligned} \tag{88}$$

证明。 这些结论可通过将每个标架向量表示为位置向量 $p(s,\ \tau)$ 的后续导数（式（63）、（65）和（66）），应用时间导数算子 ∂_τ，交换偏导数，并转换回 Frenet-Serret 标架而得到。 □

推论 ary 3.7. *Frenet-Serret* 标架的时间导数意味着该约束 ts

$$\nabla_s v_t - \kappa v_n = 0, \tag{89}$$

$$-v_b\nabla_s\omega - 2\omega\nabla_s v_b - \partial_\tau\kappa + \nabla_s^2 v_n + v_t\nabla_s\kappa + \left(\kappa^2 - \omega^2\right) v_n = 0. \tag{90}$$

证明。 Frenet-Serret 标架的正交归一性意味着 $\widehat{t}\cdot\partial_\tau\widehat{t}=\frac{1}{2}\partial_\tau(\widehat{t}\cdot\widehat{t})=0$，其余向量也同理。 □

推论 3.8. *Frenet-Serret* 基的时间导数形式如下

$$\partial_\tau\begin{bmatrix}\widehat{t}\\ \widehat{n}\\ \widehat{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \alpha & \beta\\ -\alpha & 0 & \gamma\\ -\beta & -\gamma & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{t}\\ \widehat{n}\\ \widehat{b}\end{bmatrix}, \tag{91}$$

其中定义

$$\alpha=\kappa v_t-\omega v_b+\nabla_s v_n,\qquad \beta=\omega v_n+\nabla_s v_b,\qquad \gamma=\frac{\omega\alpha+\nabla_s\beta}{\kappa}.$$

引理 3.4. 有符号距离标架的时间偏导数为

$$\partial_\tau\begin{bmatrix}\widehat{t_s}\\ \widehat{t_\sigma}\\ \widehat{t_\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \alpha' & \beta'\\ -\alpha' & 0 & \gamma'\\ -\beta' & -\gamma' & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{t_s}\\ \widehat{t_\sigma}\\ \widehat{t_\theta}\end{bmatrix}, \tag{92}$$

其中定义

$$\alpha'=\cos(\theta+\phi)\alpha+\sin(\theta+\phi)\beta\qquad \beta'=-\sin(\theta+\phi)\alpha+\cos(\theta+\phi)\beta\qquad \gamma'=\gamma+\partial_\tau\phi.$$

证明. 将有符号距离标架用 Frenet-Serret 标架表示，应用上述规则求导，然后将其变换回有符号距离标架。 □

有了基向量的运动时间导数后，我们便可计算坐标的笛卡尔时间导数，其定义为

$$t=\tau,\qquad x=p(s,\tau)+\sigma\widehat{t_\sigma}(s,\theta,\tau). \tag{93}$$

命题 3.1。 笛卡尔时间导数算子为

$$\partial_t=\partial_\tau+\partial_t s\partial_s+\partial_t\sigma\partial_\sigma+\partial_t\theta\partial_\theta. \tag{94}$$

引理 3.5。 有符号距离坐标的笛卡尔时间导数（保持 x 不变）为

$$\partial_t s=-\frac{1}{|t|h_s}\left(v_t-\sigma\alpha'\right),\qquad \partial_t\sigma=-v_\sigma,\qquad \partial_t\theta=-\frac{1}{\sigma}(v_\theta+\sigma\gamma'), \tag{95}$$

其中定义

$$v_\sigma=\widehat{t_\sigma}\cdot v=\cos(\theta+\phi)v_n+\sin(\theta+\phi)v_b,\quad v_\theta=\widehat{t_\theta}\cdot v=-\sin(\theta+\phi)v_n+\cos(\theta+\phi)v_b. \tag{96}$$

证明。 将定义的笛卡尔时间导数（式 (94)）作用于笛卡尔空间坐标的有符号距离函数变换（式 (93)），并求解时间导数。 □

推论 3.9。 有符号距离基向量的笛卡尔时间导数为

$$\partial_t\begin{bmatrix}\widehat{t_s}\\ \widehat{t_\sigma}\\ \widehat{t_\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{t_s}\\ \widehat{t_\sigma}\\ \widehat{t_\theta}\end{bmatrix}, \tag{97}$$

其中我们定义

$$a=\frac{\alpha'-v_t\mathcal{A}}{h_s},\qquad b=\beta'+\frac{\mathcal{B}(\sigma\alpha'-v_t)}{h_s},\qquad c=-\frac{1}{\sigma}v_\theta. \tag{98}$$

推论 3.10。 标量的笛卡尔时间导数为

$$\partial_t f = \partial_\tau f - \frac{(v_t - \sigma\alpha')}{h_s}\nabla_s f - v_\sigma \partial_\sigma f - \frac{(v_\theta + \sigma\gamma')}{\sigma}\partial_\theta f. \tag{99}$$

推论 3.11。 向量的笛卡尔时间导数为

$$\partial_t u = (\partial_t u_s - a u_\sigma - b u_\theta)\,\widehat{t}_s + (\partial_t u_\sigma + a u_s - c u_\theta)\,\widehat{t}_\sigma + (\partial_t u_\theta + b u_s + c u_\sigma)\,\widehat{t}_\theta. \tag{100}$$

推论 3.12。 挠率的时间导数满足

$$\begin{aligned}\partial_\tau \omega = {} & \frac{\omega^2 v_b \nabla_s \kappa}{\kappa^2} - \frac{\nabla_s \kappa \nabla_s^2 v_b}{\kappa^2} - \frac{\omega^2 \nabla_s v_b}{\kappa} - \frac{2\omega v_b \nabla_s \omega}{\kappa} + \kappa \nabla_s v_b + \frac{\nabla_s^3 v_b}{\kappa} - \frac{2\omega \nabla_s \kappa \nabla_s v_n}{\kappa^2} \\ & - \frac{v_n \nabla_s \kappa \nabla_s \omega}{\kappa^2} + \frac{2\omega \nabla_s^2 v_n}{\kappa} + \frac{3\nabla_s \omega \nabla_s v_n}{\kappa} + \frac{v_n \nabla_s^2 \omega}{\kappa} + v_t \nabla_s \omega + 2\kappa\omega v_n\end{aligned} \tag{101}$$

证明。 这是通过令交换子 $\partial_t \nabla\theta - \nabla\partial_t\theta$ 恒等于零得出的。 □

3.5 应用：曲线边界层

这套几何工具使我们能够描述运动曲线附近的所有向量微积分。与曲面情形类似，我们将有符号距离坐标按 ε 重新缩放

$$\sigma = \varepsilon\xi, \qquad\qquad h_s^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon\xi\,\mathrm{c}\,\kappa)^k \nabla_s\right). \tag{102}$$

注 3.3。 为方便起见，本节余下部分将简写为

$$\cos(\theta+\phi) = \mathrm{c}, \qquad\qquad \sin(\theta+\phi) = \mathrm{s}\,. \tag{103}$$

根据这一重标度，空间导数和时间导数分别重标度为

$$\nabla = \widehat{t}_s \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon\xi\kappa\,\mathrm{c})^k\right)\nabla_s + \frac{\widehat{t}_\sigma}{\varepsilon}\partial_\xi + \frac{\widehat{t}_\theta}{\varepsilon\xi}\partial_\theta, \tag{104}$$

$$\partial_t = \partial_\tau - \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon\xi\kappa\,\mathrm{c})^k\right)(v_t - \varepsilon\xi\alpha')\nabla_s - \frac{v_\sigma}{\varepsilon}\partial_\xi - \frac{(v_\theta + \varepsilon\xi\gamma')}{\varepsilon\xi}\partial_\theta \tag{105}$$

其余算子通过应用或收缩这些算子得到；利用联络系数确定高阶张量的取值，并按 ε 的阶次逐阶求解。

$$\nabla f = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon\xi\kappa\,\mathrm{c})^k \nabla_s f\right)\widehat{t}_s + \frac{\partial_\xi f}{\varepsilon}\widehat{t}_\sigma + \frac{\partial_\theta f}{\varepsilon\xi}\widehat{t}_\theta, \tag{106}$$

$$\begin{aligned}\nabla u = {} & \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon\xi\kappa c)^k\right)\widehat{t}_s \otimes \left((\nabla_s u_s - \kappa\,(c u_\sigma - s u_\theta))\,\widehat{t}_s + (c\kappa u_s + \nabla_s u_\sigma)\,\widehat{t}_\sigma - (\kappa s u_s + \nabla_s u_\theta)\,\widehat{t}_\theta\right) \\ & + \left(\frac{\partial_\xi u_s}{\varepsilon}\right)\widehat{t}_\sigma \otimes \widehat{t}_s + \left(\frac{\partial_\xi u_\sigma}{\varepsilon}\right)\widehat{t}_\sigma \otimes \widehat{t}_\sigma + \left(\frac{\partial_\xi u_\theta}{\varepsilon}\right)\widehat{t}_\sigma \otimes \widehat{t}_\theta \\ & + \left(\frac{\partial_\theta u_s}{\varepsilon\xi}\right)\widehat{t}_\theta \otimes \widehat{t}_s + \left(\frac{\partial_\theta u_\sigma - u_\theta}{\varepsilon\xi}\right)\widehat{t}_\theta \otimes \widehat{t}_\sigma + \left(\frac{\partial_\theta u_\theta + u_\sigma}{\varepsilon\xi}\right)\widehat{t}_\theta \otimes \widehat{t}_\theta,\end{aligned} \tag{107}$$

$$\nabla \cdot u = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon\xi\kappa c)^k\right)(\nabla_s u_s - \kappa\,(c u_\sigma - s u_\theta)) + \frac{\partial_\xi u_\sigma}{\varepsilon} + \frac{u_\sigma + \partial_\theta u_\theta}{\varepsilon\xi}, \tag{108}$$

$$\Delta f = \frac{\frac{\partial_\theta^2 f}{\xi^2} + \frac{\partial_\xi f}{\xi} + \partial_\xi^2 f}{\varepsilon^2} + \frac{\frac{\kappa\,\mathrm{s}\,\partial_\theta f}{\xi} - \mathrm{c}\,\kappa\partial_\xi f}{\varepsilon} + \left(\nabla_s^2 f - \mathrm{c}^2\,\kappa^2\xi\partial_\xi f + \mathrm{c}\,\kappa^2\,\mathrm{s}\,\partial_\theta f\right) + O\left(\varepsilon\right), \tag{109}$$

$$\begin{aligned}\Delta u = &\left(\Delta u_s - \kappa\left(2\,\mathrm{c}\,\nabla_s u_\sigma - 2\,\mathrm{s}\,\nabla_s u_\theta + \omega\left(\mathrm{c}\,u_\theta + \mathrm{s}\,u_\sigma\right)\right) + \nabla_s\kappa\left(\mathrm{s}\,u_\theta - \mathrm{c}\,u_\sigma\right) + \kappa^2\left(-u_s\right)\right)\widehat{t}_s\\ &+\left(\Delta u_\sigma - \frac{2\partial_\theta u_\theta + u_\sigma}{\varepsilon^2\xi^2} - \frac{\kappa\,\mathrm{s}\,u_\theta}{\varepsilon\xi} + \left(-\mathrm{c}^2\,\kappa^2 u_\sigma + \kappa\left(2\,\mathrm{c}\,\nabla_s u_s + \mathrm{s}\,\omega u_s\right) + \mathrm{c}\,u_s\nabla_s\kappa\right)\right)\widehat{t}_\sigma\\ &+\left(\Delta u_\theta + \frac{2\partial_\theta u_\sigma - u_\theta}{\varepsilon^2\xi^2} + \frac{\kappa\,\mathrm{s}\,u_\sigma}{\varepsilon\xi}\right.\\ &\left.+\left(\kappa\left(\mathrm{c}\,\omega u_s - 2\,\mathrm{s}\,\nabla_s u_s\right) - \mathrm{s}\,u_s\nabla_s\kappa + \kappa^2\left(2\,\mathrm{s}\,\mathrm{c}\,u_\sigma - \mathrm{s}^2\,u_\theta\right)\right)\right)\widehat{t}_\theta + O\left(\varepsilon\right),\end{aligned} \tag{110}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times u = &\left(\frac{\xi\partial_\xi u_\theta - \partial_\theta u_\sigma + u_\theta}{\varepsilon\xi}\right)\widehat{t}_s\\ &+\left(\frac{\partial_\theta u_s}{\varepsilon\xi} + \left(\kappa\,\mathrm{s}\,u_s - \nabla_s u_\theta\right) + \varepsilon\left(\mathrm{c}\,\kappa^2\xi\,\mathrm{s}\,u_s - \mathrm{c}\,\kappa\xi\nabla_s u_\theta\right)\right)\widehat{t}_\sigma\\ &+\left(-\frac{\partial_\xi u_s}{\varepsilon} + \left(\mathrm{c}\,\kappa u_s + \nabla_s u_\sigma\right) + \varepsilon\left(\mathrm{c}^2\,\kappa^2\xi u_s + \mathrm{c}\,\kappa\xi\nabla_s u_\sigma\right)\right)\widehat{t}_\theta + O\left(\varepsilon^2\right),\end{aligned} \tag{111}$$

$$\partial_t f = -\frac{v_\sigma\partial_\xi f + \xi^{-1}v_\theta\partial_\theta f}{\varepsilon} + \partial_\tau f - \gamma'\partial_\theta f - \left(\sum_{k=0}^{\infty}(\varepsilon\xi\kappa c)^k\right)\left(v_t - \varepsilon\xi\alpha'\right)\nabla_s f, \tag{112}$$

$$\begin{aligned}\partial_t u = &\left(\left(u_\sigma\left(\mathcal{A}'v_t - \alpha'\right) + u_\theta\left(\mathcal{B}'v_t - \beta'\right)\right) - \varepsilon\xi\left(\mathcal{A}'u_\sigma + \mathcal{B}'u_\theta\right)\left(\alpha' - \mathrm{c}\,\kappa v_t\right)\right)\widehat{t}_s\\ &+\left(\frac{u_\theta v_\theta}{\varepsilon\xi} + u_s\left(\alpha' - \mathcal{A}'v_t\right) + \mathcal{A}'\varepsilon\xi u_s\left(\alpha' - \mathrm{c}\,\kappa v_t\right)\right)\widehat{t}_\sigma\\ &+\left(-\frac{u_\sigma v_\theta}{\varepsilon\xi} + u_s\left(\beta' - \mathcal{B}'v_t\right) + \mathcal{B}'\varepsilon\xi u_s\left(\alpha' - \mathrm{c}\,\kappa v_t\right)\right)\widehat{t}_\theta + O\left(\varepsilon^2\right)\end{aligned} \tag{113}$$

其中我们定义了 $\mathcal{A}' = h_s\mathcal{A} = \cos(\theta+\phi)\kappa$，$\mathcal{B}' = h_s\mathcal{B} = -\sin(\theta+\phi)\kappa$。

4 结论

我们基于有符号距离函数，为演化的光滑曲面和曲线的邻域推导出一种正交坐标系，方法简单易懂。我们在此前关于有符号距离函数的研究基础上进一步拓展，不仅给出了证明，还提供了一个计算代数框架[1]，用于处理一系列实用的向量微积分恒等式。因此，我们的结果有助于在推导各类物理系统的边界层渐近分析时，一致地考虑几何效应。

5 致谢

Eric Hester 感谢美国数学会和 Simons Foundations 通过 AMS-Simons旅行资助提供支持。我们感谢 Alexander Morozov 提供的有益意见。

参考文献

[1] L. Ambrosio，几何演化问题、距离函数与黏性解，Springer Berlin Heidelberg，柏林、海德堡，2000年，第5–93页。

[1]可访问 github.com/ericwhester/signed-distance-code。

[2] G. Batchelor, 《流体动力学导论》，剑桥数学图书馆第chr号，剑桥大学出版社，2000年。[3] C. M. Bender and S. A. Orszag, 《科学家与工程师高级数学方法 I：渐近方法与摄动理论》，Bender,C.M.;Orszag,S.A.: Adv.Math.Methods Scientists,Eng.，施普林格出版社，纽约，1999。[4] M. V. Berry and J. H. Hannay，高斯随机曲面上的脐点，《物理学杂志 A：数学与通论》，10（1977年），第1809–1821页。[5] R. L. Bishop, 曲线的构造方式不止一种，《美国数学月刊》，82（1975年），第246–251页。
[6] É. Cartan，关于某些微分表达式及 Pfaff 问题，《高等师范学校科学年报》，16（1899年），第239–332页。[7] E. Cartan，实共形空间中维数大于等于5时超曲面的变形，《法国数学会公报》，45（1917年），第57–121页。[8] E. B. Christoffel，关于二次齐次微分表达式的变换，《纯粹与应用数学杂志》，70（1869年），第46–70页。
[9] P. G. Ciarlet，《微分几何导论及其在弹性力学中的应用》，施普林格，多德雷赫特，2005年。[10] J. C. Cooke and M. G. Hall，三维边界层，《航空航天科学进展》，2（1962年），第222–282页。[11] S. Dai and K. Promislow，两亲性界面的竞争性几何演化，《工业与应用数学学会数学分析杂志》，47（2015年），第347–380页。
[12] G. Darboux，曲面一般理论及其微分几何应用讲义，美国数学会，2001年4月。
[13] K. Deckelnick, G. Dziuk, and C. M. Elliott，几何偏微分方程与平均曲率流的计算，《数值学报》，14（2005年），第139–232页。[14] M. P. do Carmo，《曲线与曲面的微分几何》，普伦蒂斯-霍尔，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1976年。
[15] M. V. Dyke，《流体力学中的摄动方法》，学术出版社，1964年。[16] W. Eckhaus, 《线性椭圆奇异摄动问题中的边界层》，《工业与应用数学学会评论》，14（1972年），第225–270页。[17] E. A. Eichelbrenner，《三维边界层》，《流体力学年度评论》，5（1973年），第339–360页。[18] L. Euler，曲面曲率研究，《柏林科学院回忆录》，16（1767年），第119–143页。[19] H. Federer，曲率测度，《美国数学会会刊》，93（1959年），第418–418页。[20] F. Frenet，双重曲率曲线，《纯粹与应用数学杂志》，（1852年），第437–447页。

[21] C. F. Gauss, 曲面一般研究，迪特里希印刷所，1828年。[22] G.-M. Gie, M. Hamouda, and R. Temam, 一般有界区域上斯托克斯问题的渐近分析：特征边界情形，《应用分析》，89（2010），第49–66页。[23] G.-M. Gie, C.-Y. Jung, and R. Temam, 边界层理论的最新进展，《离散与连续动力系统》，36（2015年9月30日，星期三，20:00 EDT），第2521–2583页。[24] G.-M. Gie and J. P. Kelliher, 广义纳维边界条件下纳维–斯托克斯方程的边界层分析，《微分方程杂志》，253（2012），第1862–1892页。[25] Y. Giga, 曲面演化方程：水平集方法，数学专著第99卷，伯克豪泽出版社，瑞士巴塞尔；马萨诸塞州波士顿。¨, 二阶椭圆偏微分方程，施普林格，2015年3月。[27] A. Gray, 管状邻域，施普林格，巴塞尔，2004年。
[28] P. M. Gresho and R. L. Sani, 不可压纳维–斯托克斯方程的压力边界条件，《国际流体数值方法杂志》，7（1987），第1111–1145页。[29] W. D. Hayes, 三维边界层，美国海军军械试验站，因约肯，1951年。[30] E. W. Hester, L.-A. Couston, B. Favier, K. J. Burns, and G. M. Vasil, 多组分流动中熔化与溶解的改进相场模型，《英国皇家学会会刊A辑：数学、物理与工程科学》，476（2020），第20200508页。
[31] E. W. Hester, G. M. Vasil, and K. J. Burns, 提高体积惩罚流固相互作用的精度，《计算物理学杂志》，430（2021），第110043页。[32] M. H. Holmes, 扰动方法导论，应用数学文本第20卷，施普林格，纽约，第2版，2013年。[33] H. Hotelling, n维空间中的管与球及一类统计问题，《美国数学杂志》，61（1939），第440–460页。
[34] L. Howarth, XXV. 三维流动中的边界层——第一部分：沿一般曲面的流动方程推导，《伦敦、爱丁堡与都柏林哲学杂志及科学杂志》，42（1951），第239–243页。
[35] J. Kevorkian and J. D. Cole, 应用数学中的扰动方法，应用数学科学，施普林格出版社，纽约，1981年。[36] M. Le Bars and M. G. Worster, 纯流体与多孔介质之间的界面条件：对二元合金凝固的影响，流体力学杂志；剑桥，550（2006），第149–173页。

[37] X. Li, J. Lowengrub, A. Ratz, and A. Voigt, 复杂几何中的偏微分方程求解：弥散区域方法，《数学科学通讯》，7（2009），第81–107页。[38] A. Mager, 具有小横向流的三维层流边界层，《航空科学杂志》，21（1954），第835–845页。[39] D. Mayost, 有符号距离函数在曲面几何中的应用，博士论文，多伦多大学，2014年。[40] F. K. Moore, 三维边界层理论，载于《应用力学进展》，爱思唯尔，1956年，第159–228页。
[41] S. Osher and R. P. Fedkiw, 水平集方法：综述及近期的一些成果，《计算物理学杂志》，169（2001），第463–502页。[42] S. Osher and R. P. Fedkiw, 水平集方法与动态隐式曲面，应用数学科学，施普林格，2003年。[43] S. Osher and J. A. Sethian, 以曲率相关速度传播的前沿：基于Hamilton–Jacobi公式的算法，《计算物理学杂志》，79（1988），第12–49页。[44] S. Panda, 黏性纤维动力学，博士论文，凯泽斯劳滕工业大学，2006年。¨,[45] S. Panda, N. Marheineke, 弯曲黏性纤维动力学渐近模型的系统推导，《应用科学中的数学方法》，31（2008），第1153–1173页。 and R. Wegener, 相场模型，载于《多相微流体：弥散界面模型》，R. Mauri编，CISM课程与讲座，施普林格，维也纳，2012年，第129–175页。[46] M. Plapp, 海德堡第三届国际数学家大会会议录：1904年8月8日至13日，载于《海德堡第三届国际数学家大会会议录：1904年8月8日至13日》，托伊布纳，德国莱比锡，1905年，第770页。[47] L. Prandtl, 绝对微分计算方法及其应用，《数学年刊》，54（1900），第125–201页。[49] R. Sedney, 三维边界层流的若干方面，应用数学季刊，15（1957），第113–122页。[50] J.-A. Serret, 关于双曲率曲线的一些公式，《纯粹与应用数学杂志》，（1851），第193–207页。
[51] J. Serrin and W. K. Hayman, 多个自变量拟线性椭圆偏微分方程的狄利克雷问题，《伦敦皇家学会哲学汇刊A辑：数学与物理科学》，264（1969），第413–496页。
[52] Y. D. Shikhmurzaev and G. M. Sisoev, 螺旋液体射流：可验证的数学框架、轨迹与蠕动波，流体力学杂志，819（2017），第352–400页。

[53] M. Spivak，微分几何全面导论，Publish or Perish, Inc.，第3版，1999。
[54] K. Stewartson，边界层理论中的渐近展开，《数学与物理学杂志》，36（1957），第173–191页。[55] G. M. Vasil, K. J. Burns, D. Lecoanet, S. Olver, B. P. Brown, and J. S. Oishi，使用雅可比多项式的极坐标张量演算，《计算物理学杂志》，325（2016），第53–73页。[56] G. M. Vasil, D. Lecoanet, K. J. Burns, J. S. Oishi, and B. P. Brown，使用雅可比多项式的球坐标张量演算。第一部分：数学分析与推导，《计算物理学杂志：X》，3（2019），第100013页。
[57] G. M. Vasil and M. R. E. Proctor，熔化边界对流中的动态分岔与图案形成，《流体力学杂志》，686（2011），第77–108页。[58] H. Weyl，关于管状邻域的体积，《美国数学杂志》，61（1939），第461– 472页。[59] E. B. Wilson and J. W. Gibbs，向量分析：数学与物理专业学生用教科书：基于 *J. W. Gibbs* 的讲义，Scribner，1901。