arXiv:2302.02911v1 [math.DS] 6 Feb 2023

双曲系统上可测共轭于幺幂余循环的余循环

JONATHAN DEWITT

Abstract. 我们证明，若双曲系统上的一个 H¨older 连续线性余循环可测共轭于一个取值于幺幂群的余循环，则该余循环可通过 H¨older 连续共轭变换为一个取值于幺幂群的余循环。更一般地，我们引入 GL($d,\mathbb{R}$) 中若干自然的矩阵类，并称之为 *Zimmer blocks*。幺幂群和紧子群都是 Zimmer 块的例子。我们证明，对 Zimmer 块也成立相同的结论。

1. 引言

本文证明一个关于余循环的刚性结果。例如，若双曲系统上一个余循环的可测代数包是幺幂的，则该余循环本身可连续共轭为一个幺幂余循环。

现在我们来构建表述主要余循环刚性定理所需的术语。我们称包含于 GL($d,\mathbb{R}$) 中的矩阵集合 H 为指数为 λ 的 Zimmer 块，如果存在紧线性群 $K_1,\dots,K_k$，使得 H 中的矩阵都具有以下形式：

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda}M_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & e^{\lambda}M_k \end{bmatrix}, \tag{1}$$

其中，对于每个 $1 \le i \le k$，都有 $M_i \in K_i$。换言之，指数为 λ 的 Zimmer 块由分块上三角矩阵构成，其每个对角块都具有 $e^{\lambda}K_i$ 的形式，其中某个 λ 以及一组固定的紧矩阵群 K_i均为固定的。Zimmer 可容约化表明，任意遍历可测变换上的可测线性余循环，都可测共轭于一个取值于某个群的余循环；该群具有一个有限指数子群，其元素均为分块上三角矩阵，且对角块各自是正交矩阵的标量倍数 [Zim83, Thm. 9.2.3]。然而，在 Zimmer 可容约化中，同一点处的对角块不一定都乘以同一个标量，这与方程 (1) 中的矩阵不同。Zimmer 块的例子包括 GL($d,\mathbb{R}$) 的紧子群和幺幂子群。我们的主要刚性结果如下。

定理 1. 令 $U_\lambda \subset$ GL($d,\mathbb{R}$) 表示一个指数为 λ 的 Zimmer 块。设 $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma$ 是一个配备了具有连续乘积结构的全支撑测度 μ 的传递有限型子移位。设 $A\colon \Sigma \to$ GL($d,\mathbb{R}$) 是一个 H¨older 连续

Date: 2023年2月7日。本材料基于美国国家科学基金会研究生研究奖学金资助的研究成果，资助编号为 DGE-1746045。

余循环。假设存在一个 μ-可测函数 $u\colon \Sigma \to \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$，使得对于 μ-几乎每个 x，

$$u(\sigma x)A(x)u(x)^{-1} \in U_\lambda,$$

那么存在一个 H ¨lder 连续函数 $u'\colon \Sigma \to \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$，使得

$$u'(\sigma x)A(x)u'(x)^{-1} \in U_\lambda.$$

我们将上述定理中出现的函数 u 称为“传递函数”。请注意，我们并未得出 $u' = u$ 几乎处处成立。事实上，我们将在第 1.2 小节证明，不能得出这一结论，因为它未必成立。

以下更精细的结果表明，如果两个 H¨lder 连续余循环之间存在一个可测传递函数，且至少其中一个取值于 Zimmer 块，那么该传递函数几乎处处与一个 H¨lder 连续传递函数相同。

定理 2. 设 $U_\lambda \subset \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ 表示一个指数为 λ 的 Zimmer 块。设 $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma$ 是一个传递有限型子移位，配备了具有连续乘积结构的全支撑测度 μ。假设 $A\colon \Sigma \to \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ 是一个 H ¨lder 连续余循环，且 $B\colon \Sigma \to U_\lambda$ 也具有 H ¨lder 连续性。假设存在一个可测函数 $u\colon \Sigma \to \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$，使得对于 μ-几乎处处的 x，

$$u(\sigma x)A(x)u(x)^{-1} = B(x).$$

那么存在一个 H ¨lder 连续函数 $u'\colon \Sigma \to \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$，使得

$$u'(\sigma x)A(x)u'(x)^{-1} = B(x),$$

并且进一步地，对 $u = u'$ μ-几乎处处成立。

定理 1 和定理 2 的证明思路分别借鉴了 Butler 在 [But18] 中提出的思想，以及 [PW01], 中的方法。本文最重要的新意，是将 Butler 的跟踪论证扩展到共形情形之外；这一内容贯穿第 6 节。

除了作为刚性结果本身具有独立价值外，余循环的刚性结果在研究光滑系统的刚性时也很有用。例如，传递函数的刚性有助于研究光滑双曲系统之间的共轭。若两个光滑双曲系统之间存在利普希茨共轭，那么其导数就是这两个系统的导数余循环之间的可测传递函数。因此，如果能够提高传递函数的正则性，也就能提高共轭的正则性。具体例子见 [GKS20，第 3 节。2]Zimmer 的可测 amenable 约化也用于研究刚性问题。例如，在 Damjanovi´c 和 Xu 最近关于高秩 Anosov $\mathbb{Z}^k$-作用刚性的研究中，作者使用了针对 $\mathbb{Z}^k$-作用的 Zimmer 可容约化，随后将所得可测结构提升为 H¨lder 连续结构 [DX20，第 6 节。6]。

1.1. 余循环相关研究。在 [But18], Butler 中，Butler 提出了以下重要问题：

问题 1. 假设 A 和 B 可测上余循环等价。那么它们是否连续上余循环等价?

Butler 证明，当 $B = \mathrm{Id}$ 时这一结论成立，改进了 Pollicott 和 Walkden [PW01], 的早期工作；后者包含纤维丛束缚假设。Sadovskaya[Sad15] 后来证明，若 A 是纤维束化的，且 B 是一致拟共形的，那么两者之间的可测共轭就是连续的。Kalinin、Sadovskaya 和 Wang 最近针对常值余圈及其扰动之间的共轭，进一步得到了可测刚性结果 [KSW22, Thm. 2.2] 。

虽然当其中一个余循环是平凡的情形下，这个问题已广为人知，但要理解一般情形，仍需要一套尚待发展的理论。例如，在 [PW01, Sec. 9] 中，Pollicott 和 Walkden 展示了一个接近恒等矩阵、形式如下的余循环

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

它与下式可测上余循环等价，但并非连续上余循环等价

$$\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

连续共轭的障碍在于，前一个余循环的周期数据中可能含有 Jordan 块。注意，上述两个余循环都是纤维束化的，因此，仅仅知道 A 和 B 彼此接近且均为纤维束化，并不足以提升可测共轭的正则性。Pollicott 和 Walkden 的例子与本文所研究的情形有很大不同，因为他们的余循环具有两个不同的 Lyapunov 指数。因此，要彻底解决这一问题，似乎还需要一种更精细的理论。

定理 1 的证明大量借鉴了 Butler 在 [But18]中的思想。该论文表明，在与本文相同的情形下，如果一个余循环保持某种可测共形结构，那么它也保持某种连续共形结构。

与问题 1 相关的还有另一个问题。

问题 2. 假设 $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 是一个闭子群。若一个 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$-余循环可测共轭到 G，何时可以推出它连续共轭到 G?

在这一方向上，我们所熟悉的主要结果是 [KS13, 定理 3.4], ，该结果证明了所有 Lyapunov 指数均为零的纤维束化余循环存在连续的可均约化。我们想知道，能否去掉他们对纤维束化的假设。

1.2. 一个例子。本文中值得牢记的一个例子如下。考虑由下式给出的常值余圈

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

我们是相对于 $\mathbb{R}^2$ 的通常坐标标架 $[e_1, e_2]$ 写出这个矩阵的。若这是一个定义在移位 $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma$ 上的余循环，那么对于任意可测函数$\phi\colon \Sigma \to \mathbb{R}$，我们可以考虑相对于标架 $[e_1, \phi(x)e_1 + e_2]$ 的这个余循环。相对于这个标架，该余循环为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 - \phi(\sigma(x)) + \phi(x) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

这个新的余循环的取值同样属于一个幺幂子群。然而，这个例子表明，即使在这种简单情形下，我们也不能指望可测标架

会与连续标架重合，除非满足其他要求。因此，在定理 1 的结论中，我们不能断言对 $u' = u$ 几乎处处成立。

致谢：作者感谢 Boris Kalinin 和 Daniel Mitsutani 对本文早期版本提出的宝贵意见。作者也感谢 Jairo Bochi、Aaron Brown、Amie Wilkinson 和 Federico Rodriguez Hertz 的宝贵讨论。

2. Setting

固定一个数 $\ell \geq 2$，它将作为定义移位时所用符号的数量。令 $Q = (q_{i,\ j})_{1 \leq i,\ j \leq \ell}$ 为一个不可约矩阵，且每个 $q_{ij} \in \{0, 1\}$。令 Σ为相应的双边有限型子移位。也就是说，

$$\Sigma := \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : q_{x_n, x_{n+1}} = 1 \text{ for all } n \in \mathbb{Z}\} \subset \{1, \dots, \ell\}^{\mathbb{Z}}.$$

令 $\sigma \colon \Sigma \to \Sigma$ 为左移位，即 $\sigma((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$。此外，对于每个 $\tau > 0$，我们自然地在 Σ 上赋予度量

$$\rho_\tau(x, y) = e^{-\tau N(x,y)},$$

其中

$$N(x, y) = \max\{N \geq 0; x_n = y_n \text{ for all } |n| < N\}.$$

定义 3. 设 $A \colon \Sigma \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ 是一个博雷尔可测映射。由 A 生成的、定义在 f 上的线性余循环是映射

$$\mathcal{A} \colon \Sigma \times \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{R}),$$

$$\mathcal{A}(x, n) = \begin{cases} A(\sigma^{n-1}(x)) \cdots A(\sigma(x))A(x) & n > 0 \\ \mathrm{Id} & n = 0 \\ A(\sigma^{-|n|}(x))^{-1} \cdots A(\sigma^{-1}(x))^{-1} & n < 0. \end{cases}$$

我们称 A 生成了相应的余循环 $\mathcal{A}$。对于 $\mathcal{A}(x, n)$，记作 $A^n(x)$。如果余循环 $\mathcal{A}$ 具有连续生成元 A，则称其为连续的。类似地，如果 $\mathcal{A}$ 由一个关于某个度量 ρ_τ 、 α-H¨older 连续的A 生成，则称其为 α-H¨older 连续，其中 $\tau > 0$可任意选取。若对某个 $\alpha > 0$ 和 $\tau > 0$上述性质成立，则称 $\mathcal{A}$ 为 H¨older 连续。按照惯例，我们也将生成元 A 称为“余循环”。

现在我们定义本文中使用的余循环上同调等价的概念。

定义 4. 设 Σ 是一个有限型子移位，并赋有一个不变概率测度 μ。若存在一个 μ-可测函数 $P \colon \Sigma \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$，使得余循环 $A, B \colon \Sigma \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ 是 μ- 可测上同调等价的，则称这两个余循环

$$A(x) = P(\sigma(x))B(x)P(x)^{-1},$$

对几乎处处的 μ- $x \in \Sigma$。

定义 5. 设 Σ 是一个有限型子移位。若存在连续函数 $P \colon \Sigma \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$，使得

$$A(x) = P(\sigma(x))B(x)P(x)^{-1},$$

对于所有 $x \in \Sigma$。类似地，如果 P 可以取为 H¨older 连续的，我们就称 A 和 B 是 H¨older 上同调等价的。

现在我们来构建用于定义测度的局部乘积结构的术语。对于 $x \in \Sigma$，我们将 x 的局部稳定集定义为

$$W^s_{loc}(x) \coloneqq \{(y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma : x_n = y_n \text{ for all } n \geq 0\},$$

并将局部不稳定集定义为

$$W^u_{loc}(x) \coloneqq \{(y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma : x_n = y_n \text{ for all } n \leq 0\}.$$

对于满足 $x_0 = y_0$ 的两个点 x, y，我们将 $[x, y]$ 定义为 $W^u_{loc}(x) \cap W^s_{loc}(y)$ 中的唯一点，也就是该点

$$(\ldots, x_{-2}, x_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots).$$

Let

$$\Sigma^u = \{(x_n)_{n\geq 0} : q_{x_n x_{n+1}} = 1 \text{ for all } n \geq 0\}, \text{ and}$$
$$\Sigma^s = \{(x_n)_{n<0} : q_{x_n x_{n+1}} = 1 \text{ for all } n \leq -2\}.$$

我们分别用 π_u 和 π_s 表示 Σ 在 Σ^u 和 Σ^s 上的自然投影。我们还使用柱集的常用记号：

$$[m; a_0, a_1, \ldots, a_k] = \{x \in \Sigma : x_{m+i} = a_{m+i}, 0 \leq i \leq k\}.$$

设 μ 是 Σ 上完全支撑的遍历 σ-不变概率测度。令 $\mu^u = (\pi_u)_*\mu$ 和 $\mu^s = (\pi_s)_*\mu$。我们用 $\mu|E$ 表示 μ 在集合 E 上的限制。

对于每个 $1 \leq i \leq \ell$，都有一个自然映射 $[0;\ i] \to \pi_s([0; i]) \times \pi_u([0; i])$，由 $\pi_s \times \pi_u$ 给出。我们称 μ 具有连续局部乘积结构，若存在连续函数 $\xi\colon \Sigma \to (0, \infty)$，使得对每个 i：

$$\mu|_{[0;i]} = \xi \cdot (\mu^s|\pi_s([0; i]) \times \mu^u|\pi_u([0; i])).$$

需要注意的是，具有局部乘积结构的测度是局部遍历的。因此，由于我们考虑的移位是传递的，可以看出我们考虑的测度都是遍历测度。

对于遍历不变测度 μ，我们将 $\mathcal{A}$ 相对于 μ 的极端 Lyapunov 指数定义为

$$\lambda_+(\mu) \coloneqq \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int_\Sigma \log \|A^n\| \, d\mu,$$
$$\lambda_-(\mu) \coloneqq \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int_\Sigma \log \|A^{-n}\|^{-1} \, d\mu.$$

我们用 $\lambda_+(p)$ 和 $\lambda_-(p)$ 表示支撑在周期点 p 的轨道上的均匀测度的极端 Lyapunov 指数。下面的事实很有用。

命题 6. 设 Σ 是一个有限型子移位，且 μ 是 Σ 上的遍历测度。假设存在一个可测函数 $\alpha\colon \Sigma \to \mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$，使得经 α 共轭后，A 取值于指数为 0 的 Zimmer 块中。那么 $\lambda_+(\mu) = -\lambda_-(\mu) = 0$。

命题 6 的证明与 [But18，命题 4.2] 的证明类似，并且基于对 Lusin集 的回归进行研究。

证明。我们在块为 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ 的标准上三角幺幂子群的情形下给出证明。令 $[e_1, e_2]$ 表示赋予该余循环块结构的可测标架。固定该标架的一个 Lusin 集 K，使得 $\mu(K) = 1 - \epsilon$。取一个 Lyapunov正则点 $x \in K$。令 $\sigma_1, \tau_1, \sigma_2, \tau_2, \ldots$ 表示

x 在 K 中、随后在 $\Sigma \setminus K$ 中、再随后在 K 中，依此类推的逗留时间序列。我们假设 x 在 K 与 $\Sigma \setminus K$ 之间均匀分布。注意，在 K 上存在一个一致连续函数 $a(x)$，使得相对于标架 $[e_1, e_2]$，我们有

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & a(x) \\ 0 & 1. \end{bmatrix}$$

特别地，我们看到

$$A^{\sigma_1}(x)e_1 = \sum_{i=0}^{\sigma_1 - 1} a(\sigma^i(x))e_1 + e_2.$$

注意，存在一个递增多项式 $p(n)$，使得对于任意 $y \in K$，若 y在 K 中经过 n 次迭代后仍然满足 $\left|\sum_{i=0}^{n-1} a(\sigma^i(y))\right| \leq p(n)$。

经过 σ_1 次迭代后， x 离开了 K。由于可测块结构延伸到了 K之外，我们看到 $A^{\tau_1}(\sigma^{\sigma_1}(x))e_1 = e_1$；并且仅利用余循环的连续性，即 $\|A\| \leq e^{\beta}$ 对某个 $\beta > 0$ 成立，就可以估计 $A^{\tau_1}(\sigma^{\sigma_1}(x))$ 的范数。因此，对于任意 y，我们看到

$$\|A^{\tau_1}(y)e_1\| \leq e^{\beta\tau_1}.$$

因此，若我们写作 $A^{\sigma_1+\tau_1}(x)e_2 = c(1)e_1 + d(1)e_2$，则 $|c(1)| \leq p(\sigma_1)e^{\tau_1\beta}$。若令 $c(n)$ $d(n)$ 为 $A^{\sum_{i=1}^n \sigma_i+\tau_i}(x)e_2$ 的对应系数，则根据上三角结构， $d(n) = 1$ 并且

$$|c(n)| \leq \sum_{i=1}^{n} p(\sigma_i)e^{\beta(\tau_i+\cdots+\tau_n)}.$$

如果令 $N = \sum_{i=1}^n \sigma_i + \tau_i$，那么上面的直线有界于 $Np(N)e^{\beta(\tau_1+\cdots+\tau_n)}$。

但现在我们可以估计与向量 e_2 相关的 Lyapunov指数；如果余循环具有非零 Lyapunov指数，它就必须等于 $\lambda_+(\mu) > 0$ 。现在，

$$\lambda_+(\mu) = \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \|A^N(x)e_2\| \leq C\beta\epsilon.$$

但这对每个 ϵ 都成立，因为我们总可以选取一个更大的 Lusin集。因此证明完毕。

这一思路的一个更复杂的变体适用于高维。 □

3. Preliminaries on Cocycles

在证明过程中，我们将研究一些关于余循环角度畸变增长的一致性集合。令 $\mathcal{D}(N, \theta)$ 表示满足以下条件的点集$x \in \Sigma$： 对所有 $s \geq 1$,

$$\prod_{j=0}^{s-1} \|A^N(f^{jN}x))\|\|A^N(f^{jN}(x))^{-1}\| \leq e^{sN\theta}$$

and

$$\prod_{j=0}^{s-1} \|A^{-N}(f^{-jN}(x))\|\|A^{-N}(f^{-jN}(x))^{-1}\| \leq e^{sN\theta}.$$

这些集合很有用，因为它们可测地穷尽 Σ。

引理 7。 [Via08，第 2 条推论。4] 设 $\lambda^+(\mu) = \lambda^-(\mu) = 0$。则对于 μ-几乎处处，$x \in \Sigma$属于 $\mathcal{D}(N, \theta)$，其中某个 $N > 0$和 $0 < \theta < \tau$。

集合 $\mathcal{D}(N,\theta)$ 的一个重要性质是，全纯在其上是一致连续的。

命题 8。 [Via08，命题 2.5，推论 2。8] 给定 N,θ 且满足 $\theta<\tau$，存在$L=L(N,\theta)>0$，使得对于任意 $x\in\mathcal{D}(N,\theta)$ 以及任意 $y,z\in W^s_{loc}(x)$，

$$H^s_{yz}=\lim_{n\to\infty}A^n(z)^{-1}A^n(y)$$

存在且满足 $\|H^s_{yz}-\mathrm{Id}\|\le L\cdot\rho(y,z)$ 和 $H^s_{yz}=H^s_{xz}\circ H^s_{yx}$。此外，$H^s_{xy}=A^{-n}(f^n(y))H^s_{f^n(x)f^n(y)}A^n(x)$。不稳定全纯也有类似的结论。

事实上，由于全纯一致收敛，它们在横截方向上甚至具有连续性。虽然 Butler 的论文中没有提及这一点，但那里似乎确实用到了这一性质。这是一个标准事实，但我们所知的唯一证明见于 [BG19，命题 2。10], 该证明是在纤维束化的假设下给出的。由于我们的余循环先验上并非纤维束化，为求完整起见，我们给出自己的证明。

引理 9. 对每个 N,θ，存在 $C,\gamma>0$，使得若 $x,x'\in\mathcal{D}(N,\theta)$ 且$x'\in W^s_{loc}(x)$，$y'\in W^s_{loc}(y)$ 且 $x'\in W^u_{loc}(y')$，则

$$\|H^s_{xy}-H^s_{x'y'}\|\le Cd(x,x')^\gamma.$$

不稳定全纯也有类似的结论。

证明. 我们将在假设 $d(x,x')\le e^{-n\tau'}$ 其中$\tau'\ge 2\tau+2\eta+\ln(2)$ 的条件下得到一个估计，其中 $e^\eta\ge\max_{x\in M}\{\|A^N(x)\|,\|A^{-N}(x)\|\}$。在证明的其余部分，我们将假设 $N=1$，以简化记号。

首先，我们有

$$H^s_{xy}=A^{-n}(f^n(y))H^s_{f^n(x),f^n(y)}A^n(x).$$

根据命题 8 中关于全纯的 Lipschitz 估计，我们有

$$H^s_{xy}=\mathrm{Id}+O(d(x,y)),$$

其中，大 O 项与 x 和 y 所在的局部稳定叶无关。因此，结合前两个方程可得:

$$H^s_{xy}=A^{-n}(f^n(y))A^n(x)+A^{-n}(f^n(y))O(d(f^n(y),f^n(x)))A^n(x). \tag{2}$$

根据 [Via08, 引理 2.6], ，存在一个与 x 和 y 无关的 $C>0$，使得$\|A^{-n}(f^n(y))\|\|A^n(x)\|<Ce^{n\theta}$。因此我们看到，方程（2）中的最后一项为$O(e^{n(\theta-\tau)})$。

最后，还需估计

$$A^{-n}(f^n(y))A^n(x)-A^{-n}(f^n(y'))A^n(x')=H^s_{xy}-H^s_{x'y'}+O(e^{n(\theta-\tau)}).$$

为此，我们首先估计

$$A^n(x)-A^n(x')$$

利用假设 x 和 x' 彼此接近。为此，写作

$$A^n(x')=\prod_{i=1}^n\left(A(f^i(x))+O(e^{-n\tau'+i\tau})\right),$$

但根据我们对 $\tau'\ge 2\tau+2\eta+\ln(2)$ 的选择，可以看到

$$A^n(x)=A^n(x')+O(e^{-\tau n-\eta n}).$$

现在我们进行估计

$$\begin{aligned}
&A^{-n}(f^n(y))A^n(x) - A^{-n}(f^n(y'))A^n(x') \\
&= A^{-n}(f^n(y))(A^n(x) - A^n(x')) + (A^{-n}(f^n(y)) - A^{-n}(f^n(y')))A^n(x') \\
&= O(e^{n\eta})O(e^{(-\tau-\eta)n}) + O(e^{(-\tau-\eta)n})O(e^{n\eta}) \\
&= O(e^{-\tau n}).
\end{aligned}$$

因此我们可以看到

$$\|H^s_{xy} - H^s_{x'y'}\| = O(e^{n(\theta-\tau)}).$$

我们在开始时假设 $d(x,x') \leq e^{-n\tau'}$。因此，如果对于某个$0 < \gamma < 1$，$(\theta-\tau) = \gamma\tau'$，我们便可得出

$$\|H^s_{xy} - H^s_{x'y'}\| \leq Cd(x,x')^\gamma,$$

如所需。 □

我们已经知道，随着我们在同一叶内改变 x 和 y，全纯是H¨older 连续的，因此我们可以略微加强命题 8。

命题 10。在命题 8 的背景下，稳定全纯 H^s_{xy} 关于点 $x, y \in \mathcal{D}(N,\theta)$ 连续变化（即使 x 和 y 在它们所属的公共局部稳定叶中横截变化）。

值得注意的是，如果我们有一个全纯 $H^s_{xy}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，那么该全纯会在其他空间上诱导出全纯，例如 $\mathrm{Gr}(k,d)$。值得注意的是，即使相应诱导余循环不满足束缚条件，这些诱导全纯仍然可以定义。关于余循环及相关构造的更多讨论，参见 [ASV13]。

在证明过程中，下面的引理将被多次使用。

引理 11. 设 A 是如上所述的余循环。若 $\Sigma \times \mathbb{R}^n$ 具有连续不变子丛 V_1，使得 V_1 具有连续标架，并且相对于 V_1 A 的标架， λK 取值于某个紧群 K；同时，若 W/V_1 具有一个标架，使得商余循环 $\overline{A}\colon W/V_1 \to W/V_1$ 取值于一个 Zimmer 块 U_λ，则存在 $\Sigma \times \mathbb{R}^n$ 的连续标架，使得相对于此标架， A 取值于一个 Zimmer 块 U'_λ。对于未定义在 Σ 全部范围上的标架以及 H ¨older 连续性，结论经过相应修改后同样成立。

证明. 设 $[e_1, \ldots, e_k]$ 是 V_1 的标架。设 $[e_{k+1}, \ldots, e_n]$ 是 W/V_1 的标架。在 W 内固定 V_1 的一个连续补空间 V'。于是，对于 $k+1 \leq i \leq n$，令 $\widetilde{e}_i$ 是相对于该补空间将 e_i 提升到 $\mathbb{R}^n$ 的提升。相对于连续标架 $[e_1, \ldots, e_k, \widetilde{e}_{k+1}, \ldots, \widetilde{e}_n]$，该余循环属于这样的 Zimmer 块。□

警告：在下文中，我们将假设 $\lambda = 0$。通过将余循环 A 替换为余循环 $e^{-\lambda}A$，我们总可以作出这一假设。

4. Sketch of Proof

定理 1 的证明步骤遵循 [But18]。

(1) 已知 $\lambda_+(\mu) = 0$, Σ 可由集合 $\mathcal{D}(N,\theta)$ 可测地穷尽，而在这些集合上，全纯是一致连续的。

(2) 我们证明，在集合 $\mathcal{D}(N,\theta)$ 上，可测块结构不仅给出一致连续旗标，还给出旗的商空间上的度量，因此相对于这些结构，余循环呈现为 Zimmer 块。(3) 我们证明存在一个周期点，使得 $\lambda_+(p) = \lambda_-(p) = 0$。(4) 如果存在一个周期点，使得 $\lambda_+(p) - \lambda_-(p) > 0$，那么我们就使用 Butler 的跟踪引理构造新的周期点，使其返回映射具有较大的范数，而其轨道却位于 $\mathcal{D}(N,\theta)$ 中；通过跟踪论证，我们证明这与块结构不相容。(5) 一旦知道所有周期点都满足 $\lambda_+(p) = \lambda_-(p) = 0$，便可推出对某个 $N,\theta > 0$, $\mathcal{D}(N,\theta)$ 包含了所有的 Σ，因此由第二步即可完成证明。

5. Uniform Continuity of Dynamical Structures

本节给出若干关于全纯和集合 $\mathcal{D}(N,\theta)$ 的结果，我们将在定理 1 的证明中用到这些结果。

在几乎处处的 $x \in \Sigma$，可测传递函数 u 给出一个可测不变旗标

$$\{0\} = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_k = \mathbb{R}^d,$$

其中 k 等于 U_λ 中紧对角块的数量。将标架声明为正交归一，也可由可测标架得到可测度量结构。通过取商，我们对每个 i 都能得到 $\mathcal{E}_{i+1}/\mathcal{E}_i$ 的这样一个度量和标架。

我们的首要目标是证明，这些丛及其关联度量在集合 $\mathcal{D}(N,\theta)$ 上一致连续且整体不变。只需对 $\mathcal{E}_1$ 检验这些性质，因为引理 11 允许我们通过取商，将结果推广到整个旗。引理 13 证明了这些结构在一个全测度集上的整体不变性。

在证明引理 13 之前，我们先回顾 Ledrappier 提出的一个有用的不变性原理。陈述该原理需要引入一些额外的术语。设 $(M,\mathcal{M},\mu)$ 是一个 Lebesgue测度空间。设 $T\colon M \to M$ 是一个可逆可测变换。如果对于每个 $E \in \mathcal{M}$，都存在一个 E'，属于包含所有$T^n(\mathcal{B})$ 的最小 σ-代数，并且满足 $\mu(E \Delta E') = 0$，则称 σ-代数 $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ 是生成的；这里的代数 $T^n(\mathcal{B})$ 和 $n \in \mathbb{Z}$生成 $\mathcal{M}$ （模 0）。

引理 12. [Led86] 设 $(M,\mathcal{M},\mu)$ 是一个 Lebesgue 空间。设 $B\colon M \to \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ 是一个可测周环，且函数 $x \mapsto \log \|B(x)^{\pm}\|$ 是 μ-可积的。设 $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ 是一个生成的 σ-代数，并且 T 和 B 均模 0 $\mathcal{B}$-可测。若对 μ-几乎处处的 $x \in M$，都有 $\lambda_-(x) = \lambda_+(x)$，那么对于任意投影到 μ 的、定义在射影空间 $\Sigma \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ 上的不变概率测度 m，其沿射影空间纤维的任意分解 $x \mapsto m_x$，都模 0 $\mathcal{B}$-可测。

下面的引理表明，存在一个全测度集，使得可测旗具有全纯不变性。

引理 13. 存在一个 σ-不变子集 Ω，属于 Σ，且满足 $\mu(\Omega) = 1$，使得每个$x \in \Omega$ 都属于 $\mathcal{D}(N_x,\theta_x)$，其中 $\theta_x < \tau$；并且若 x、$y \in \Omega$ 且 $y \in W^*_{loc}(x)$，那么若 η表示 $\mathcal{E}_1$、……、$\mathcal{E}_k$ 或 $\mathcal{E}_{i+1}/\mathcal{E}_i$ 上的度量，则

$$H^*_{xy}\eta_x = \eta_y,$$

其中 $*\in\{s,u\}$。此外，对于每个 $n\in\mathbb{Z}$，我们都有

$$A^n(x)[\eta_x]=\eta_{\sigma^n(x)}.$$

证明。我们将证明，当 η 表示丛 $\mathcal{E}_1$时，结论成立。其他丛的不变性可类似地推出。关于度量不变性的结论有不同的证明，但与 [But18, 引理 4.4] 完全相同，因此略去。

我们的证明将用到引理 12，应用该引理需要做一些准备。首先，由命题 7，对于几乎处处的 $x\in\Sigma$，存在 $N>0$ 和 $0<\theta<\tau$，使得 $x\in\mathcal{D}(N,\theta)$。因此，由引理 8，对于几乎处处的 $x\in\Sigma$，在 $W^s_{loc}(x)$中的点之间定义了全纯。令 $\mathcal{D}$ 表示对所有$N,\theta>0$，集合 $\mathcal{D}(N,\theta)$的并。注意，$\mu(\mathcal{D})=1$。

设 $r=\dim\mathcal{E}_1$，并考虑相应的格拉斯曼丛 $\Sigma\times\mathrm{Gr}_r(\mathbb{R}^d)$。~余循环 A 也在此格拉斯曼丛上诱导出一个余循环 A。此外，稳定和不稳定全纯 H^* 为 $\Sigma\times\mathrm{Gr}_r(\mathbb{R}^d)$诱导出全纯，我们也将其记为 H^*_{xy}。

首先，我们将对余循环进行可测共轭，使其沿局部稳定流形为常值。这是一个标准构造：例如参见 [BGMV03, Cor. 1.15]。为此，我们定义映射 h: $\Sigma\times\mathbb{R}^n\to\Sigma\times\mathbb{R}^n$。根据乘积结构，我们可以选取点 $\omega^i\in[0;\,i]$ 使得对几乎处处的 $y\in[0;i]$,$W^u_{loc}(\omega^i)\cap W^s_{loc}(y)$ 都是 $\mathcal{D}$中的一个点。现在我们定义 h 为

$$h\colon(y,\xi)\mapsto(y,H^s_{[\omega^i,y]y}(\xi)).$$

根据基点的选取，h 是可测的。

我们用 $\mathcal{A}_s$表示共轭余循环。根据命题 8 中最后一个关系，$\mathcal{A}_s$ 在局部稳定叶上几乎处处为常值，即对几乎处处的 y,

$$\mathcal{A}_s\colon(y,\xi)\mapsto(\sigma(y),A([\omega_i,y])\xi).$$

特别地，由于 A 是连续的，这表明引理 12 的可积性假设得以满足。

可测不变子丛 $\mathcal{E}_1$ 给出了$\Sigma\times\mathrm{Gr}_r(\mathbb{R}^d)$的一个可测不变截面，我们仍像之前那样将其记为 η。令 m 为 μ 在 $\Sigma\times\mathrm{Gr}_r(\mathbb{R}^d)$内图像上的提升。这等同于将 m 定义为投影到 μ 上的测度，使得对 μ-几乎处处的 $x\in\Sigma$，纤维$\{x\}\times\mathrm{Gr}_r(\mathbb{R}^d)$上的条件测度 m_x 是集中于 $[\mathcal{E}_1(x)]\in\mathrm{Gr}_r(\mathbb{R}^d)$这一点的原子测度。由于 η是不变的，测度 m也不变。

令 $\mathcal{B}$ 为 Σ 按局部稳定流形得到的划分。移位 σ 是 $\mathcal{B}$ 可测的。此外，由于 $\mathcal{A}_s$ 在局部稳定流形上为常数，我们看到 $\mathcal{A}_s$ 是$\mathcal{B}$ 模 0 可测的。因此，根据引理 12，我们看到 m的分解$x\mapsto m_x$ 模 0 可测。由于 μ具有乘积结构，这意味着 m_x 几乎处处在几乎每个局部稳定流形上为常数。但对于几乎处处的 x，m_x 是 η_x 在共轭 h下的像上的狄拉克测度。由于 $\mathcal{A}_s$ 几乎处处在局部稳定叶上为常数，其稳定全纯是平凡的。因此，由于 m_x几乎处处在几乎每个局部稳定叶上为常数，它几乎处处在稳定全纯作用下不变。

容易验证，对于点 x、y，若 h 有定义，且 x 与 y 之间的 $\mathcal{A}_s$ 和 $\mathcal{A}$ 全纯存在，则 h 与这些全纯相交织。因此，由于狄拉克测度 m_x 的位置是 η_x 的像，我们看到 η 几乎处处

在由 $\mathcal{A}$ 产生的稳定全纯下不变。这意味着存在一个满 μ-测度集 $S \subset \Sigma$，使得若 x、$y \in S$ 且 $y \in W^s_{loc}(x)$，则

$$H^s_{xy}\eta_x = \eta_y,$$

这就是所需的结论。用同样的论证可得不稳定全纯的类似结果。关于 η 在余循环下不变性的断言显然成立。□

我们的目标是将这些旗和度量延拓到 Σ的整个范围内。为此，我们将使用Butler关于集合 $\mathcal{D}(N,\theta)$的一些结果。

命题14。 [But18，引理4。5] 假设我们有一个余循环，其 $\lambda_+(\mu) = \lambda_-(\mu) = 0$。那么对每个 $N > 0$ 和 $\theta < \tau$，都存在一个 $N_* \geq N$ 和 $\theta \leq \theta_* < \tau$，使得

$$\mathcal{D}(N,\theta) \subseteq \operatorname{supp}(\mu|\mathcal{D}(N_*,\theta_*)).$$

在转向下一个所需结果之前，我们先对命题14的证明稍作说明；这是一个精巧的跟踪论证。为了构造 $\mathcal{D}(N_*,\theta_*)$中的点，我们寻找一些轨道：它们起始时非常接近 $\mathcal{D}(N,\theta)$，并且在与 $\mathcal{D}(N,\theta)$分离之前，进入一个拟共形畸变较小的集合。由于Butler构造的轨道始终靠近拟共形畸变较小的集合，因此可以得出结论：对于某个较大的 N_* 和 θ_*，它们属于 $\mathcal{D}(N_*,\theta_*)$。

我们还将使用以下性质。

命题15。 [But18，命题 4。7] 设给定 $\epsilon > 0$。那么，对所有足够大的 N，对任意 $\theta > 0$，都有：

$$\sigma(\mathcal{D}(N,\theta)) \subseteq \mathcal{D}(N,\theta+\epsilon).$$

现在我们准备证明命题18，它的核心内容是：在一致性集 $\mathcal{D}(N,\theta)$ 上，余循环所保持的可测结构与一致连续结构相同。证明思路是利用 $\mathcal{D}(N,\theta)$ 包含于某个 N_*,θ_* 的 $\operatorname{supp}(\mu|\mathcal{D}(N_*,\theta_*))$ 中。存在一个全测度集 Ω，在其上全纯有定义；因此，由命题 10 可知，全纯在 $\mathcal{D}(N_*,\theta_*)$ 上一致连续，故它们可以良好地延拓到 $\mathcal{D}(N,\theta)$。以下内容基于 [But18，引理 4。6]。我们给出了完整证明并重述了命题，因为原文的陈述和证明中有一些小疏漏。例如，在 [But18，引理 4。6], 的陈述中，如果 $\sigma(x) \notin \mathcal{D}(N,\theta)$，那么 $\hat{}\eta_{\sigma(x)}$ 未必有定义。

定义16.（整体不变性）对于集合 $X \subseteq \bigcup_{N,\theta<\tau} \mathcal{D}(N,\theta)$，若子空间 η: $X \to \mathrm{Gr}_r(\mathbb{R}^n)$ 的选取满足整体不变性，则称其为整体不变的；也就是说，对每个 $x, y \in X$，都有 $H^u_{[y,x]_y} H^s_{x[y,x]}\eta_x = \eta_y$ and $H^s_{[x,y]_y} H^u_{x[x,y]}\eta_x = \eta_y$。（注意，这些全纯映射之所以有定义，是因为我们假设 x 和 y 都属于某个正则性块 $\mathcal{D}(N,\theta)$,$\theta < \tau$。）我们将这些复合全纯映射分别记作 H^{us}_{xy} 和 H^{su}_{xy}。对于任何其他结构，我们也类似地讨论其整体不变性。

注 1. 集合 $X \subseteq \mathcal{D}(N,\theta)$ 的一个重要性质是，若 η 在全纯作用下不变，则 η 到 $\overline{X}$ 的连续延拓也在全纯作用下不变，因为 $\overline{X} \subseteq \mathcal{D}(N,\theta)$，且命题 10 中全纯映射的横向一致连续性。

继续之前，我们将证明，全测度集 Ω 可以选取得使子空间和度量 η 按照定义16的意义在全纯作用下不变。

引理 17。在引理 13 中，集合 Ω 可以取为整体不变的。

证明。我们需要证明的是，若 x、y 是 Ω 中的两个点，则 $H^{us}_{xy}\eta_x = H^{su}_{xy}\eta_x = \eta_y$。我们总可以假设 $x \in \mathcal{D}(N_x, \theta_x)$，对 y 也同样如此，因为余循环的所有正则性块的并具有满测度。我们只证明 $H^{su}_{xy}\eta_x = \eta_y$，因为另一种情况类似。

首先，我们在 Ω 中建立良好点的概念。一个 su-良好点是指满足以下条件的点 $x \in \Omega$：$W^s_{loc}(x) \cap \Omega$ 关于 $W^s_{loc}(x)$ 上的 μ 的条件测度具有满测度；并且，对于几乎所有相对于 y(W^u_{loc}) 上的条件测度的点 $y \in W^s_{loc}(x)$，集合 $\Omega \cap W^u_{loc}(y)$ 都具有满测度。注意，由于存在连续乘积结构，这些条件测度可以直接描述。如果我们按相反的顺序进行饱和，那么就称该点为 us-良好点。若一个点既是 su-良好点又是 us-良好点，我们就称它为良好点。我们用 $\mathcal{G}$ 表示所有良好点组成的集合。注意，$\mu(\mathcal{G}) = 1$。

我们声称，若 $x, y \in \mathcal{G} \subseteq \Omega$，则 $H^{su}_{xy}\eta_x = \eta_y$。首先，由命题14可知，存在 N_*, θ_*，使得 $\mathcal{D}(N_y, \theta_y) \subseteq$ 支集$(\mu|\mathcal{D}(N_*, \theta_*))$。特别地，由于 y 属于 μ 的支撑，这意味着存在一个由 y 的邻域构成的序列A_n，其半径趋于0，且满足 $\mu(A_n) > 0$。由于 μ具有乘积结构，且 x和 y 都是良好点，几乎每个点 $q \in A_n \cap \Omega$都满足 $[y, q]$ 和 $[q, x]$ 属于 Ω。因此，我们现在可以选取这样一列点 q_n，使得 q_n 收敛到 y。然后，根据 η 在 Ω 上沿局部稳定流形和不稳定流形的整体不变性，我们得到

$$H^u_{[q_n,x]q_n} H^s_{x[q_n,x]}\eta_x = \eta_{q_n},$$
$$H^s_{[q_n,y]y} H^u_{q_n[q_n,y]}\eta_{q_n} = \eta_y.$$

因此

$$H^s_{[q_n,y]y} H^u_{q_n[q_n,y]} H^u_{[q_n,x]q_n} H^s_{x[q_n,x]}\eta_x = \eta_y.$$

由于每个 $q_n \in \mathcal{D}(N_*, \theta_*)$，这些全纯映射都是一致连续的，因此当 $n \to \infty$ 时，上一行收敛为:

$$H^u_{[y,x]y} H^s_{x[y,x]}\eta_x = \eta_y,$$

这正是我们所期望的。$H^{us}_{xy}\eta_x = \eta_y$ 可类似地得出。

因此，我们已经证明 $\mathcal{G} \subseteq$Ω具有所需的性质。为确保 $\mathcal{G}$ 是σ-不变的，我们可以用 $\cap_{n\in\mathbb{Z}}\sigma^n(\mathcal{G})$替换它。□

下面的命题表明，我们可以在块 $\mathcal{D}(N, \theta)$上构造 η的连续版本。

命题18. 设 Σ 是传递有限型子移位，μ 是具有连续局部乘积结构的全支撑测度，并且 $A\colon \Sigma \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$是一个H ¨older连续余循环，满足 $\lambda_+(\mu) = \lambda_-(\mu) = 0$。设 η 是 $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$的一个可测 A-不变截面。

对于每个 $\theta < \tau$ 和 $N > 0$，存在一个闭集 S 和一个连续函数$\hat{}\eta\colon S \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$，使得以下结论成立:

(1) $\mathcal{D}(N, \theta) \cup \sigma(\mathcal{D}(N, \theta)) \subset S$，(2) 在 $\mathcal{D}(N, \theta) \cup \sigma(\mathcal{D}(N, \theta))$ 上对 $\hat{}\eta = \eta$ μ 几乎处处成立，

(3) $\hat{\eta}$ 是全纯不变的，(4) 对于 $x \in \mathcal{D}(N,\theta)$,

$$A(x)\eta_x = \eta_{\sigma(x)}.$$

如果 η 原本是定义在 $\mathbb{R}^d$的一个可测不变子丛上的可测不变度量，结论仍然成立；也就是说，该子丛在 S 上有一个一致连续版本，并且 η 在 S 上几乎处处与一个一致连续度量μ相符。

在开始证明之前，我们先说明证明思路。在形如 $\mathcal{D}(N_*,\theta_*)$ 的集合上，全纯是一致连续的，而将 η 进一步限制到 $\Omega \cap \mathcal{D}(N_*,\theta_*)$ 后，它是全纯不变的。因此，我们可以在 $\mathrm{supp}(\mu|\mathcal{D}(N_*,\theta_*)) = \mathrm{supp}(\mu|\Omega \cap \mathcal{D}(N_*,\theta_*))$ 上找到 η 的一个一致连续版本。由于当 N_* 足够大时，该集合包含 $\mathcal{D}(N,\theta)$，我们可以利用这个集合得到所需的延拓。要证明这个 η 的一致连续版本具有余循环不变性，还需要额外的论证：我们选择更大的 N_*,θ_*，使得该集合也包含 $\sigma(\mathcal{D}(N,\theta))$。

证明。我们将通过从 Ω 的一个子集延拓来构造定义在集合 S 上的连续函数 $\hat{\eta}$；在该子集上，全纯是一致连续的。为此，我们将考虑一些嵌套集合 $\mathcal{D}(N,\theta)$。

根据引理13和17，存在一个满测度子集 Ω，在该子集上，我们已经有 η 的全纯不变性，以及在余循环下的不变性。首先，给定 N,θ。应用命题14，得到 N_* 和 θ_*，使得

$$\mathcal{D}(N,\theta) \subseteq \mathrm{supp}(\mu|\mathcal{D}(N_*,\theta_*)).$$

通过可能扩大 N_* 和 θ_*，根据命题15，我们还可以确保

$$\mathcal{D}(N,\theta) \cup \sigma(\mathcal{D}(N,\theta)) \subset \mathrm{supp}(\mu|\mathcal{D}(N_*,\theta_*)).$$

现在选取 $0 < \epsilon < \tau - \theta_*$。根据命题15，并可能将 N_* 替换为其某个倍数，我们可以假设

$$\sigma(\mathcal{D}(N_*,\theta_*)) \subset \mathcal{D}(N_*,\theta_*+\epsilon). \tag{3}$$

现在我们来构造延拓 $\hat{\eta}$。在集合 $\Omega\cap\mathcal{D}(N_*,\theta_*+\epsilon)$ 上，全纯是一致连续的，因此存在一个将 η 连续延拓至集合 $\Omega \cap \mathcal{D}(N_*,\theta_*+\epsilon)$ 的唯一连续延拓。我们将此延拓记为 $\hat{\eta}$，并令 $S = \Omega \cap \mathcal{D}(N_*,\theta_*+\epsilon)$。

现在验证 $\hat{\eta}$ 满足引理所要求的四个性质：

(1) 第一个性质成立，这是因为根据方程 (3)，$\Omega \cap \mathcal{D}(N_*,\theta_*+\epsilon)$ 同时包含 $\mathrm{supp}(\mu|\mathcal{D}(N_*,\theta_*))$ 和 $\sigma(\mathrm{supp}(\mu|\mathcal{D}(N_*,\theta_*)))$，而这两个集合分别包含 $\mathcal{D}(N,\theta)$ 和 $\sigma(\mathcal{D}(N,\theta))$。(2) 第二个性质成立，这是因为在集合 $\Omega \cap (\mathcal{D}(N,\theta) \cup \sigma(\mathcal{D}(N,\theta))$ 上，$\hat{\eta}$ 等于 η，且 Ω 是一个满测度集。(3) 根据注 1，$\hat{\eta}$ 是全纯不变的（按定义16中的含义）。(4) 对于 $\hat{\eta}$ 在 $\mathcal{D}(N,\theta)$ 上的余循环不变性，注意到根据方程 (3)，我们可以在集合 $\mathrm{supp}(\mu|\mathcal{D}(N_*,\theta_*))$ 上定义一个辅助函数 ζ，其定义如下：

$$\zeta_x = A^{-1}(\sigma(x))\hat{\eta}_{\sigma(x)}.$$

函数 ζ 一致连续。现在注意，在集合 $\Omega\cap\mathcal{D}(N_*,\theta_*)$ 上，$\zeta_x = \eta_x = \hat{\eta}_x$，因为 η 在该集合上是 A-不变的。因此，由于 $\Omega\cap\mathcal{D}(N_*,\theta_*)$ 在 $\mathrm{supp}(\mu|\mathcal{D}(N_*,\theta_*))$ 中稠密，我们得到 ζ 与 $\hat{\eta}$ 相等

在 supp($\mu|\mathcal{D}(N_*,\theta_*)$) 上，因为二者都是连续的。注意，$A^{-1}(\sigma(x))\hat{}\eta_{\sigma(x)}$ 是定义在 supp($\mu|\mathcal{D}(N_*,\theta_*)$) 上的连续函数，且在该集合上与 ζ 一致。因此，对于 $x \in$ supp($\mu|\mathcal{D}(N_*,\theta_*)$),

$$A^{-1}(\sigma(x))\hat{\eta}_{\sigma(x)} = \zeta_x = \hat{\eta}_x.$$

由于 $\mathcal{D}(N,\theta) \subseteq$ supp($\mu|\mathcal{D}(N_*,\theta_*)$)，因此对所有 $x \in \mathcal{D}(N,\theta)$,

$$A(x)\hat{\eta}_x = \hat{\eta}_{\sigma(x)}.$$

□

由引理 11 和命题18，以下结论显而易见。

命题19. 设 A、Σ 和 μ 如定理 1 所述。那么在 $\mathcal{D}(N,\theta)$ 上存在一个一致连续不变旗 $\{\mathcal{E}_i\}$，它几乎处处与由块结构导出的可测旗一致。对每个 $0 \le i < \ell$，在 $\mathcal{E}_{i+1}/\mathcal{E}_i$ 上都存在一个一致连续度量，使商余循环相对于该度量是等距的。

6. 关于周期轨道的结果

本节中，我们开始将关于测度 μ 的信息转化为关于 σ 的周期点的信息。我们从以下结果开始，它是 [But18，引理 4.8] 的一个类似结论，证明也类似。

引理 20. 设 Σ、μ 和 A 如定理 1 所述。那么：

(1) 不存在满足不等式

$$0 < \lambda_+(p) - \lambda_-(p) < \tau$$

成立。

(2) 存在一个周期点 q，使得 $\lambda_+(q) = \lambda_-(q) = 0$。

证明概要. 主要结论是：若 p 是一个满足 $0 \le \lambda_+(p) - \lambda_-(p) < \tau$ 的周期点，则对于某些 N 和 θ，p 的轨道包含在 $\mathcal{D}(N,\theta)$ 中。详见[But18, 引理 4.8]。

如果 p 的整个轨道都包含在 $\mathcal{D}(N,\theta)$ 中，那么根据命题18，在p 的轨道上，余循环具有常数为 $\lambda = 0$ 的 Zimmer 块结构。这意味着$\lambda_+(p) = \lambda_-(p) = 0$。

为证明存在一个周期点满足 $\lambda_+(p) = \lambda_-(p) = 0$，对测度 μ 应用 Kalinin 周期逼近定理 [Kal11, Thm. 1.4]，从而得到一个周期点满足 $|\lambda_+(p)| + |\lambda_-(p)| < \tau$。根据引理的第一部分，该周期点满足 $\lambda_+(p) = \lambda_-(p) = 0$。□

为了完成证明，我们的目标是证明该余循环是纤维束化的，这可由下面的引理推出。

引理 21. 假设 $A\colon \Sigma \to \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ 是一个可测共轭到定理 1 中所述 Zimmer 块的余循环，那么对于每个周期点 p, $\lambda_+(p) = \lambda_-(p) = 0$。

引理 21 可由 Butler 在[But18]中的跟踪论证推广得出。推广的思路如下，我们以二维情形为例加以说明。假设有两个周期点 x，满足 $\lambda_+(x) = \lambda_-(x) = 0$，以及 y，满足 $\lambda_+(y) - \lambda_-(y) > 0$。为简单起见，假设它们都是不动点。Butler 构造了周期点 p^m，使其先跟踪 x，再跟踪 y。这些点

的构造满足：对于某个固定的 N 和 $\theta < \tau$，有 $p^m \in \mathcal{D}(N,\theta)$。因此，由命题18和命题15可知，沿着 p^m 的轨道，余循环具有块结构。令 u_m 表示 p^m 的周期，这意味着存在一个标架 e_1, e_2，位于 p^m，使得

$$A^{u_m}(p^m) = \begin{bmatrix} 1 & a(m) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

对于某个数 $a(m)$。因此，返回映射会将 e_1 映回自身。我们想知道的是，如果用余循环将 e_1 向前推进，那么当 $\sigma^j(p^m)$ 接近 y 时，$A^j(p^m)e_1$ 是否接近周期点 y 的稳定子空间 $E^s(y)$。这并不难证明：在 y 附近，余循环非常接近双曲线性映射 $A(y)$。在 y 附近，余循环保持锥体 $\mathcal{C}$ 不变，因为它接近一个双曲线性映射。如果 $A^j(p^m)e_1 \in \mathcal{C}$，那么它将经历指数增长。仔细追踪范数可得，当 e_1 返回到 p^m 时，$\|A^{u_m}(p^m)e_1\| \geq \exp(\alpha m)$，其中 $\alpha > 0$ 为某个常数。但这不可能成立，因为 $m \to \infty$，而 $A^{u_m}(p^m)e_1 = e_1$。因此，如果 $A^j(p^m)e_1$ 进入了锥体 $\mathcal{C}$，就会导致矛盾。

我们必须完成的更困难之处，是研究向量 e_2会发生什么。我们的目标仍然相同：如果 $A^j(p^m)e_2$ 位于 $\mathcal{C}$中，那么该向量不仅会经历指数增长，而且会在横截于 e_1 方向的方向上经历指数增长。若令$\Pi^{e_1}_{e_2}$ 表示沿平行于 e_1 子空间的方向投影到 e_2 子空间上的投影，那么我们希望证明 $\|\Pi^{e_1}_{e_2} A^{u_m}(p^m)\|$ 会变得无界。下面解释这为何是合理的。但首先，令 j_0 为$\sigma^{j_0}(p^m)$在其轨道中首次接近 y 的时刻，并令 j_1 为 $\sigma^j(p^m)$在其轨道中最后一次接近 y 的时刻。若我们知道 $A^{j_0}(p^m)e_2 \in \mathcal{C}$，那么我们知道 $A^{j_1}(p^m)e_2 \in \mathcal{C}$，并且它也经历了指数增长，其长度的大部分都位于 $E^u(y)$方向上。因此，我们可以考虑沿 e_1子空间将其投影到$e_1^{\perp}$上，并将其记为$\Pi^{e_1}_{e_1^{\perp}} A^{j_1}(p^m)e_2$。如果在 $\sigma^{j_1}(p^m)$处，向量e_1接近 $E^s(y)$，且 $A^{j_1}(p^m)e_2$与 e_1一致横截，那么$\|\Pi^{e_1}_{e_1^{\perp}} A^{j_1}(p^m)e_2\|$仍然具有指数级大的大小。因此，仔细追踪轨道的其余部分后，我们发现 $\|\Pi^{e_1}_{e_2} A^{u_m}(p^m)e_2\|$ 在 m中会无限增长。但这不可能，因为(4)意味着 $\|\Pi^{e_1}_{e_2} A^{u_m}(p^m)e_2\|$ 是一致有界的。

我们尚未解决的问题是，如何得出结论：$A^{j_1}(p^m)e_1$ 接近 $E^s(y)$。这里的思路是一个巧妙的方法：在相同的移位 σ下，将 A 替换为 A^{-1}。这个新的余循环对于同一个可测标架也取值于一个 Zimmer 块中，但现在 $E^s(y)$与 $E^u(y)$子空间互换了。因此，在点 j_1 处，我们必有 $A^{-(u_m - j_1)}(p^m)e_1$ 接近 $E^s(y)$；这是通过向后迭代，并应用包含方程（4）的段落中的相同推理得出的。因此，根据上一段，我们可知 e_2 的轨道也与 $E^s(y)$成一致的小夹角。进一步推进这一论证，我们可以证明，在点$\sigma^{j_0}(p^m)$和 $\sigma^{j_1}(p^m)$处，e_1 与 e_2 的每个线性组合都与$E^s(y)$成小夹角，但这是不可能的。

对于更高维度和更多块的情况，证明方法相同：逐块进行归纳研究，并证明对于每一项 $\mathcal{E}_i$，$\mathcal{E}_i$都保持在 y的中心子空间 $E^c(y)$ 附近。我们考虑 E^c，因为在高维情况下，y 可能不是双曲周期点。由此可得相同的矛盾：满维子空间中的每个向量都不可能与一个低维子空间的夹角都很小。

该证明依赖于以下跟踪引理，它摘自 Butler 对其命题 4.1 的证明。

引理 22。 [But18，命题 4。1] 设 Σ、A 和 μ 如定理 1 中所述。假设存在一个周期点 x，使得 $\lambda_+(x) = \lambda_-(x) = 0$，并且存在一个周期点 y，使得 $\lambda_+(y) - \lambda_-(y) > 0$。那么，对于任意充分小的 $\chi > 0$，存在 N、$\theta < \tau$ 以及一个周期点序列 p^m，其周期为 u_m，满足：

(1) $u_m = O(m)$；(2) $\|A^{u_m}(p^m)\| \geq \exp(\chi m)$；(3) p^m 位于 $\mathcal{D}(N, \theta)$ 中。

在继续之前，我们需要证明关于点 p^m 及其轨道的一些额外估计。我们先描述点 p^m 的构造，然后简要说明引理 22 成立的原因。

Butler 构造如下进行。设有一个周期点 x，其中 $\lambda_+(x) = \lambda_-(x) = 0$，以及另一个周期点 y，满足 $\lambda_+(y) - \lambda_-(y) > 0$。其思路是，我们首先对 x 进行一段时间的跟踪，然后跟踪 y，再对 x 进行跟踪。如此周期性地重复，便得到一个周期点 p^m。通过长时间跟踪 x，余循环在这段时间内只会经历很小的拟共形畸变；因此，当轨道接近 y 时，仍有空间允许少量畸变，而不会违反定义 $\mathcal{D}(N, \theta)$ 的不等式。

现在我们给出 p^m 的正式定义。令 Q 表示给出 Σ 的合法词的 $\{0, 1\}$ 矩阵。由于 Q 不可约，存在某个 M，使得对于所有 $m \geq M$，Q^m 都有正项。随后 Butler 证明，存在两个自然数 b 和 c，使得以下结论成立。我们令 $u_m = (2b + c + 1)m$，它将作为点 p^m 的周期。我们进一步假设 x 和 y 的周期都整除 m，因此 $f^m(x) = x$ 且 $f^m(y) = y$。于是将词 $p^m = (p^m_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ 定义为

$$p^m_j = x_j \text{ for } -bm \leq j \leq bm,$$
$$p^m_j = y_{j-(b+1)m} \text{ for } (b+1)m \leq j \leq (b+c+1)m.$$

我们定义 p^m_j 个指标，使得 $bm < j < (b+1)m$，从而该子串将 x_m 与 y_0 连接起来，并且是一个合法词。通过选择 $m \geq M$，总能做到这一点。类似地，我们定义 p^m_j，使得对于 $(b + c + 1)m \leq j \leq (b + c + 2)m$，该子串能够合法地将 $y_{(b+c+1)m}$ 与 x_0 连接起来。随后，p^m 的其余坐标由周期性确定。

注 2. 上述构造中出现的数值 b 和 c 并非任意，不过我们可以假设它们任意大。它们具体的选取位置见方程 (4.1) 前一段中的 [But18]。

下面的引理将用于将沿着 p^m 的余循环，近似为周期点 y 上的余循环；该周期点 p^m 与之影随。

引理 23. 假设 $L\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是如下形式的双曲线性映射$A \oplus B\colon \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{d-k} \to \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{d-k}$，其中 $0 < \|A^{-1}\| \leq \mu^{-1}, \|B\| \leq \lambda < \mu$。对于任意$0 < \sigma < 1$，存在 $C, D, \epsilon_0, \ell > 0$，使得对于所有 $0 < \epsilon < \epsilon_0$、任意 $D\epsilon \leq \delta \leq \epsilon_0$ 以及任意由如下形式的线性变换组成的序列 $L_1, \ldots, L_j$，

$$L_i = \begin{bmatrix} A + \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & B + \delta_i \end{bmatrix}, \qquad \max\{\|\alpha_i\|, \|\beta_i\|, \|\gamma_i\|, \|\delta_i\|\} \leq \epsilon,$$

以下结论成立:

(1) 若令 $\mathcal{C}(\gamma)$ 表示锥体:

$$\{(u,v)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{d-k}|\|v\|\le\gamma\|u\|\},$$

则锥体 $\mathcal{C}(\delta^{-1})$ 在每个 L_i 下均保持不变。

(2) 对任意满足 $\angle(v,\{0\}\times\mathbb{R}^{d-k})\ge\delta$ 的单位向量 v，可得

$$\|L_j\cdots L_1v\|\ge C(\mu-\epsilon^{1-\sigma})^j\delta. \tag{5}$$

事实上，若令 Π 表示从 $\mathbb{R}^d$ 到 $\mathbb{R}^k\times\{0\}$的正交投影，则

$$\|\Pi(L_j\cdots L_1v)\|\ge C(\mu-\epsilon^{1-\sigma})^j\delta. \tag{6}$$

(3) 若 $j\ge\ell$，则任意非零

$$v\in L_j\cdots L_1(\mathcal{C}(\delta^{-1}))$$

与 $\{0\}\times\mathbb{R}^{d-k}$ 一致横截。

证明。这个引理的证明是标准的：例如参见 [KH97, 引理 6.2.10,11]。我们在此给出证明，因为我们需要对这些锥体进行精确估计，而它们相当宽。

我们首先证明存在 D，使得若 $\delta>D\epsilon$，则 $\mathcal{C}(\delta^{-1})$ 在每个 L_i 下保持不变。假设 $(u,v)\in\mathcal{C}(\delta^{-1})$，令 $L_i(u,v)=(u',v')$，则可得

$$\begin{aligned}\|u'\|&=\|Au+\alpha_iu+\beta_iv\|\\&\ge\mu\|u\|-\epsilon\|u\|-\epsilon\delta^{-1}\|u\|\\&=(\mu-\epsilon(1+\delta^{-1}))\|u\|.\end{aligned}$$

对于 v'，我们同样得到

$$\begin{aligned}\|v'\|&=\|\gamma_iu+Bv+\delta_iv\|\\&\le\epsilon\|u\|+\lambda\|v\|+\epsilon\|v\|\\&=(\epsilon+\lambda\delta^{-1}+\epsilon\delta^{-1})\|u\|.\end{aligned}$$

因此，若下列不等式成立，锥体 $\mathcal{C}(\delta^{-1})$ 就是不变的:

$$\epsilon+\lambda\delta^{-1}+\epsilon\delta^{-1}\le\delta^{-1}(\mu-\epsilon(1+\delta^{-1})).$$

两边同乘 δ，得到

$$\delta\epsilon+\lambda+\epsilon+\epsilon+\epsilon\delta^{-1}\le\mu,$$

只要 ϵ_0 足够小，且相对于决定 D的 ϵ而言， δ 足够大，这一条件显然成立。这就证明了（1）中锥体的不变性。

现在证明结论的第二部分。由 $\mathcal{C}(\delta^{-1})$的不变性，只需证明下面的估计。与前面一样，令 $L_i(u,v)=(u',v')$。固定 $1>\sigma'>\sigma$。于是，对于锥体 $\mathcal{C}(\epsilon^{-\sigma'})$中的$(u,v)$，考虑上面得到的关于 u'的估计:

$$\|u'\|\ge(\mu-\epsilon-\epsilon\delta^{-1})\|u\|=(\mu-\epsilon-\epsilon^{1-\sigma'})\|u\|,$$

因此，结论随即得出，因为对于任意$0<\sigma'<\sigma$，当 $\epsilon\to0$时， $\epsilon+\epsilon^{1-\sigma'}$ 的阶低于 $\epsilon^{1-\sigma}$。

现在我们来证明关于 $\mathcal{C}(\delta^{-1})$中向量变得一致横截的最后一个断言。注意，若按照上文相同的方法计算，并令 $L_i(u,v) = (u',v')$，那么对于$(u,v) \in \mathcal{C}(\delta^{-1})$,

$$\frac{\|v'\|}{\|u'\|} \leq \frac{\epsilon + \lambda\delta^{-1} + \epsilon\delta^{-1}}{\mu - \epsilon - \epsilon\delta^{-1}} \leq \frac{\epsilon + \lambda\delta^{-1} + \epsilon\delta^{-1}}{\mu - \epsilon - D^{-1}}.$$

若将上述一行右侧视为关于 δ^{-1} 的线性映射，则该映射有一个吸引不动点，位于

$$\delta^{-1} = \frac{\epsilon}{\mu - \lambda - 2\epsilon - D^{-1}}.$$

因此，若 j 足够大，则 $L_j \cdots L_1\mathcal{C}(\delta^{-1})$ 与 $\{0\} \times \mathbb{R}^{d-k}$ 一致横截。□

现在我们为沿轨道具有不变丛的余循环记录另一个抽象引理。我们将 Π_V^W 记为沿补子空间 W 平行于 V 的投影。

引理 24. 假设 Ω 是一个紧致度量空间，$\sigma\colon \Omega \to \Omega$ 连续，且 $A\colon \Omega \to \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ 定义了一个连续线性余循环。那么存在 $\lambda > 0$，使得若 $p \in \Omega$ 且 A 在 p 长度为 n 的轨道段上保持丛 $\mathcal{E}(\sigma^j(p)) \subseteq \mathbb{R}^d$ 不变，则对任意向量 v，有

$$\|\Pi^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}^\perp} A^n(p)v\| \geq e^{-n\lambda}\|\Pi^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}^\perp} v\|.$$

证明. $A^n v$ 与 $\mathcal{E}$ 之间的夹角至多以指数速度衰减，因为 A 在 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{d-1}$ 上诱导的作用是利普希茨的。由于向量长度至多以指数速度收缩，结论即得。□

现在记录一个基本引理:

引理 25. 对于每个 $d \in \mathbb{N}$，存在一个常数 C，使得如果 $A \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$，则 A 在 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{d-1}$ 上诱导作用的利普希茨常数至多为 $C\|A\|\|A^{-1}\|$。

如果考虑 $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ 对 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{d-1}$ 的双覆盖，并注意到 A 的作用是线性的，那么上述引理的证明是直接的。常数 C 的存在是为了适应读者对 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{d-1}$ 上度量的偏好选择。

现在记录一个将在下文使用的跟踪引理。

引理 26. [But18，引理 4。9] 设 $p \in \Sigma$ 是 σ 的一个周期点，其极端李雅普诺夫指数为 $\lambda := \lambda_+(p)$，并设 $\epsilon > 0$ 已给定。则存在一个与 n 无关的常数 $C \geq 1$，使得对于每个 $n \geq 1$，如果 $q \in \Sigma$ 满足

$$d(\sigma^j(p), \sigma^j(q)) \leq \max\{e^{-j\tau}, e^{-(n-j)\tau}\}, \quad 0 \leq j \leq n,$$

then

$$C^{-1}e^{n(\lambda-\epsilon)} \leq \|A^n(q)\| \leq Ce^{n(\lambda+\epsilon)}.$$

我们利用上述引理推导出以下结论。

引理 27. 假设 $A\colon \Sigma \to \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ 是定理 1 陈述中的余循环，且 p 是一个周期点，使得 $\lambda_+(p) = \lambda_-(p) = 0$。设 $\epsilon > 0$给定。存在 $C > 0$，使得如果 z 是满足以下条件的点

$$d(\sigma^j(p), \sigma^j(z)) \leq \max\{e^{-j\tau}, e^{-(n-j)\tau}\}, \quad 0 \leq j \leq n, \tag{7}$$

并且沿轨道段 $z,\dots,\sigma^n(z)$ 存在一个 A-不变子丛 $\mathcal{E}$，那么对于任意向量 v

$$\|\Pi^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}^\perp}A^j(z)v\| \geq Ce^{-4\epsilon j}\|\Pi^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}^\perp}v\|,\ for\ 0\leq j\leq n.$$

证明。注意，如果 z 满足条件 (7)，那么对于每个以 n' 代替 n 的 $0\leq n'\leq n$，它也满足条件 (7)。因此，我们可以对余循环 A （$0\leq j\leq n$）应用引理 26，从而得到

$$\max\{\|A^j(z)\|,\|(A^j(z))^{-1}\|\}\leq Ce^{j\epsilon}.$$

由此，根据引理 25 可知， $A^j(z)v$ 与 $\mathcal{E}(\sigma^j(z))$ 之间的夹角至少是 v 与 $\mathcal{E}(z)$ 之间夹角大小的 $Ce^{-2j\epsilon}$ 倍。因此，由于 $A^j(z)$ 的范数有界且远离零，结论便得证。□

下面记录一个后文将用到的线性代数引理。

引理 28。设 W 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个子空间。存在 $C>0$，使得若 V 是 W 的任意补空间，且 q 与 W 一致横截，则

$$\|\Pi^W_V q\|\geq C\|q\|.$$

证明。上述不等式左侧在 $V=W^\perp$ 时取最小值，因为到 W 的距离在将 q 正交投影到 W 上时最小。对于 $V=W^\perp$，结论可由横截性立即得到。□

当我们提到子空间 V 和 W之间的“夹角”时，指的是分别取自两个子空间的非零向量之间的最小夹角。对于周期为 k的周期点 p，我们用 $E^u(p)$ $E^s(p)$ 和 $E^c(p)$表示其返回映射 $A^k(p)$的稳定、非稳定和中心子空间。注意，其中某些子空间可能是平凡的。

引理 29. 设 A、Σ 和 μ 如定理 1 所述。设 $\{0\}=\mathcal{E}_0\subset\mathcal{E}_1\subset\mathcal{E}_2\subset\cdots\subset\mathcal{E}_k=\mathbb{R}^d$ 为 Zimmer 块结构给出的可测旗。存在 Butler 构造中的常数 b、c 的一种选取，以及一个足够小的 $\alpha>0$，使得若我们对每个 m定义：

$$j_0=\lceil(1+\alpha)(b+1)m\rceil\ and\ j_1=\lfloor(1-\alpha)(b+c+1)m\rfloor,$$

那么，对于所有 $\epsilon>0$ 和所有 $1\leq i\leq k$，存在 M，使得对所有 $m>M$，丛 $\mathcal{E}_i(\sigma^{j_0}(p^m))$ 和 $\mathcal{E}_i(\sigma^{j_1}(p^m))$ 与 $E^c(p)$的夹角均不超过 ϵ。

证明。不失一般性地，我们假设 x 和 y 都是不动点。我们通过归纳法进行证明。假设该结论对 $\mathcal{E}_i$ 成立，下面验证其对 $\mathcal{E}_{i+1}$ 成立。在点 p^m 的轨道上，我们相对于 $\mathbb{R}^d$ 上的通常度量，取 $\mathcal{E}_i$ 在 $\mathcal{E}_{i+1}$ 内的一个正交补 $\mathcal{E}_i^\perp$。将引理 23 应用于 y 处的映射，并考虑分解 $\mathbb{R}^d=E^u(y)\oplus(E^c(y)\oplus E^s(y))$，由此得到常数 C、D、ϵ_0、σ、ℓ，使得该引理的结论对这些常数成立。

注意，点 $\sigma^{(b+1)m}(p^m)$ 指数逼近 y，因此对所有 $j_0\leq j\leq j_1$，

$$d(\sigma^j(p^m),y)<e^{-\alpha bm}.$$

因此，对于 $0<\delta<\epsilon_0$，当 m 充分大时，由于 A 的 Hölder 连续性，锥体 $\mathcal{C}(\delta^{-1})$ 在 $j_0\leq j\leq j_1$ 下经由 $A(\sigma^j(p^m))$ 保持不变。因此，根据引理 23，对于任意 $\epsilon>0$，以及任意与 $E^c(y)$ 的夹角至少为 δ 的单位向量 v，$\oplus E^s(y)$：

$$\|\Pi^{E^s(y)\oplus E^c(y)}_{E^u(y)}A^{j_1-j_0}(\sigma^{j_0}(p^m))v\|\geq C(\mu-\epsilon^{1-\sigma})^{j_1-j_0}\delta,$$

并且对所有大于某个固定值 M 的 m，这一结论都成立。我们希望知道将 $\mathcal{E}_i^\perp$ 替换为 $E^u(y)$ 后是否仍然成立。但我们可以确定这一点，因为根据归纳假设，当 m 充分大时，$\mathcal{E}_i(\sigma^{j_1}(p^m))$ 与 $E^c(y)$ 可以任意接近，并且 $\mathcal{E}_i^\perp$ 与 $\mathcal{E}_i$ 一致横截。因此，根据引理 23 的第三部分，由于 $A^{j_1-j_0}(\sigma^{j_0}(p^m))v$ 与 $E^c(y) \oplus E^s(y)$ 一致横截，结论由引理 28 得出。

总结以上讨论，我们证明了，对于每个 ϵ、$\delta > 0$，都存在 M，使得对于所有 $m > M$，如果 $v \in \mathcal{C}(\delta^{-1})$ 是一个单位向量，那么

$$\|\Pi^{\mathcal{E}_i}_{\mathcal{E}_i^\perp} A^{j_1-j_0}(\sigma^{j_0}(p^m))v\| \geq C(\mu - \epsilon^{1-\sigma})^{j_1-j_0}\delta. \tag{8}$$

现在我们应用引理 26，并利用余循环被某个 e^η 有界这一性质，其中$\eta > 0$，由此可得：如果 v 是位于 p^m 处且不属于$\mathcal{E}_i(p^m)$ 的单位向量，并且 $A^{j_0}(p^m)v$ 位于 $\mathcal{C}(\delta^{-1})$ 中，那么

$$\|\Pi^{\mathcal{E}_i}_{\mathcal{E}_i^\perp} A^{j_1}(p^m)v\| \geq Ce^{-\epsilon bm}e^{-(m+\alpha bm)\eta}e^{(j_1-j_0)\ln(\mu-\epsilon^{1-\sigma})}\delta.$$

其中，第一个和第二个指数项分别来自先跟踪 x，再从跟踪 x 转换为跟踪 y；这需要 m 步。

最后，p^m 的轨道再次转为跟踪 x，因此，沿着从 y 到 x 的线段使用引理 24，然后在跟踪 x 时使用引理 27，我们便得到整个轨道上的以下估计。这里假设 v 在 $\sigma^{j_0}(p^m)$ 处的像与 $E^s(y) \oplus E^c(y)$ 的夹角大于 δ：

$$\|\Pi^{\mathcal{E}_i}_{\mathcal{E}_i^\perp} A^{(2b+c+2)m}(p^m)v\| \geq Ce^{m(-\lambda-\eta-(5\epsilon b)-\alpha b\lambda-\alpha b\eta+(c-2\alpha)\ln(\mu-\epsilon^{1-\sigma}))}\delta.$$

注意，δ 只是一个很小的固定常数。因此，忽略常数因子，我们有如下界

$$\|\Pi^{\mathcal{E}_i}_{\mathcal{E}_i^\perp} A^{(2b+c+2)m}(p^m)v\| \geq Ce^{m(-\lambda-\eta-(5\epsilon b)-\alpha b\lambda-\alpha b\eta+(c-2\alpha)\ln(\mu-\epsilon^{1-\sigma}))}. \tag{9}$$

由于 $p^m \in \mathcal{D}(N,\theta)$，我们看到，对于任意单位向量 $v \in \mathcal{E}_{i+1}$，

$$\|\Pi^{\mathcal{E}_i}_{\mathcal{E}_i^\perp} A^{(2b+c+2)m}(p^m)v\|$$

都一致有界，且与 m 无关。这是因为在 $\mathcal{D}(N,\theta)$ 上，Zimmer 块度量与标准度量一致可比。因此，若方程 (9) 的右端在 m 中无界，那么当 m 充分大时，我们便会与如下假设矛盾：$A^{j_0}(p_m)v$ 与 $\mathcal{E}_i(\sigma^{j_0}(p_m))$ 的夹角大于 δ。因此，只要

$$-\lambda-\eta-(5\epsilon b)-\alpha b\lambda-\alpha b\eta+(c-2\alpha)\ln(\mu-\epsilon^{1-\sigma}) > 0.$$

但这很容易做到：对任意选择的 b 和充分大的 c（根据注 2，我们可以令其满足这一条件），只要 α 和 ϵ 都选得足够小，结论便成立。特别地，这就与我们的假设矛盾。还要注意，导致矛盾的那个具体的充分大的 m 只取决于 δ，而不取决于 v。

总而言之，我们刚才证明的是：对于所有的 $\epsilon > 0$，都存在 M，使得对于所有的 $m > M$, $\mathcal{E}_{i+1}$，$\sigma^{j_0}(p^m)$ 与 $E^c(y) \oplus E^s(y)$ 的夹角至多为 ϵ。

现在我们证明，即使不需要 E^c 项，结论依然成立。为此，我们要对余循环作一项观察，这项观察在我们的设定中尤为特殊。考虑如下情形：通过映射 $x \mapsto (A(x))^{-1}$ 定义一个新的余循环 $B\colon \Sigma \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$，并使用原来的基底上的动力系统。注意，对于 B，y 的稳定丛和不稳定丛互换了，而 x 仍满足 $\lambda_+(x) = \lambda_-(x) = 0$。

此外，这个新的余循环在相同的测度 μ下，也可测共轭于同一个 Zimmer 块。这一点显然，因为如果 $A\colon V \to W$是两个标架向量空间之间的线性变换，且其表示矩阵属于 U_0，那么 A^{-1}的矩阵也属于 U_0。将上述论证应用于这个余循环的 p^m，我们可以得出更强的结论：对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个 M，使得对所有 $m > M$以及任意 $v \in \mathcal{E}_{i+1}(p^m)$，向量 $A^{j_0}(p^m)v$与 $E^c(p)$的夹角至多为 ϵ。通过对点 $\sigma^{j_1}(p^m)$应用同样的论证，但改为向后迭代余循环，我们也能得出完全相同的结论。因此，我们得到了所需的端点处结论。结果的其余部分由归纳法得出。□

现在我们推导出引理 21。

引理 21 的证明。反设 y 是一个周期点，不满足 $\lambda_+(y) = \lambda_-(y) = 0$。我们应用引理 22 构造一个由周期点 p^m 组成的序列，使其满足引理 29 的假设。将引理 29 的结论应用于可测旗中的最高项，即 $\mathbb{R}^d$，可知 $\mathbb{R}^d$ 中的所有对象都与子空间 $E^c(y)$ 夹角很小，这是不可能的。因此，我们对 y 的初始假设导致了矛盾，证明完毕。□

现在我们证明主要定理。

定理 1 的证明。根据引理 21，每个周期点 p 都满足 $\lambda_+(p) = \lambda_-(p) = 0$。因此，应用 [KS13，命题 4.11], ，我们推得对于任意 $\epsilon > 0$，存在 C_ϵ，使得对所有 $x \in \Sigma$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，

$$\|A^n(x)\| \cdot \|(A^n(x))^{-1}\|^{-1} \leq C_\epsilon e^{\epsilon|n|}.$$

由此立即可知，存在 N、$\theta > 0$，使得 $\Sigma \subset \mathcal{D}(N, \theta)$。因此，根据命题18，我们看到存在一个 H¨older 连续的旗

$$\{0\} = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_k = \mathbb{R}^d,$$

以及其上的 H¨older 度量

$$\mathcal{E}_{i+1}/\mathcal{E}_i$$

对于所有在余循环和商余循环下保持不变的 $0 \leq i < k$。

根据引理 11，我们随后可以通过归纳过程得到一个 H¨older 标架，使余循环具有所需的形式。□

7. Measurable Conjugacies agree with Continuous conjugacies

本节证明定理 2。为了证明我们最终要得到的刚性结果，我们首先证明以下受限刚性结果，该结果要求共轭取值于一个 Zimmer 块中。

命题 30。设 U_λ 是一个 Zimmer 块，(Σ, σ) 是一个传递有限型子移位，A、B: $\Sigma \to U_\lambda$ 是在 σ 上定义余循环的 H ¨older 连续函数，并且 μ 是具有连续乘积结构的全支撑测度。令 $C\colon \Sigma \to U_\lambda$ 为一个 μ-可测函数，使得对于 μ-几乎处处的 $x \in \Sigma$，

$$A(x) = C(\sigma(x))B(x)C(x)^{-1},$$

于是，C 几乎处处与一个 Hölder 连续函数 $\overline{C}$相等。

在 [PW01 的定理 5.1], 中，证明了当 B =Id 且假设该测度为平衡态时，上述结论成立。在 [PW01 第 9], 节后续的讨论中，作者指出，当 B 非平凡时，该证明也适用于取值于幂零群或紧群的余循环。为了说明 Zimmer 块的结构如何发挥作用，我们沿用 [PW01 定理 5.1]证明的大致思路，给出上述命题的证明。我们的证明比 Pollicott 和 Walkden 的证明稍长，因为我们必须利用 U_λ的结构。

命题 30 的证明。和之前一样，只需研究 $\lambda = 0$ 的情形。首先，将共轭 C 写成一个分块矩阵，其块结构为 $k \times k$ ，由 U_λ 保持的旗 $\mathcal{E}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{E}_k$ 给出。令 i 的第 j 个块记为 C_{ij}。注意，由于 Zimmer 块结构，所有满足 $i > j$ 的块都是零矩阵。

由于每个 C_{ii} 都是正交矩阵，根据取值于紧群的余循环的可测刚性 [PW01，定理 5.1], ，我们得知 C_{ii} 几乎处处与一个 H¨older 连续版本 $\overline{C}_{ii}$ 重合。令 $C(x)$ 为对角块是 $\overline{C}_{ii}(x)$ 的分块对角矩阵。接下来注意到

$$A(x) = (C(\sigma(x))\hat{C}(\sigma(x))^{-1})\hat{C}(\sigma(x))B(x)\hat{C}(x)^{-1}(\hat{C}(x)C(x)^{-1}). \tag{10}$$

因此，我们已将问题归结为这样一种情形：在几乎每一点， C 的每个对角块都是恒等矩阵。通过对以下引理应用归纳法，即可推出该命题。

引理 31. 假设在命题 30 的设定下， $U_0 \subset \mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$ 是一个具有两个分量的 Zimmer 块，并且 H 是 μ-可测的共轭，将A, B共轭为 $\Sigma \to U_0$ 的形式

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Id}_a & C(x) \\ 0 & \mathrm{Id}_b \end{bmatrix}.$$

则 H 几乎处处与 A 和 B 之间的一个 H ¨older 连续共轭重合。

证明. 由于 H 是一个可测共轭，对于 μ-几乎处处的 x, x' 以及每个 n

$$A^{-n}(x')A^n(x) = H(x')B^{-n}(x')H(\sigma^n(x'))^{-1}H(\sigma^n(x))B^n(x)H(x)^{-1}. \tag{11}$$

我们固定一个关于 H 的 Lusin集，其测度大于 $1/2$，并注意到，对于 Lusin集的任意一对正则点 x, x' ，这两点会在某些时间序列 $n_i \to \infty$ 下同时无限多次返回 Lusin集。

现在我们将方程 (11) 的右侧按分量展开：

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Id} & C(x') \\ 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{-n}(x') & B_{-n}(x') \\ 0 & A_2^{-n}(x') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & -C(\sigma^n(x')) \\ 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix} \times$$
$$\begin{bmatrix} \mathrm{Id} & C(\sigma^n(x)) \\ 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^n(x) & B_n(x) \\ 0 & A_2^n(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & -C(x) \\ 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix},$$

其中，我们用 $B_n(x)$ 表示 $B^n(x)$ 的右上角块。

将这些相乘后，我们得到该矩阵的右上角 x 等于：

$$\begin{aligned} &-A_1^{-n}(x')A_1^n(x)C(x) + A_1^{-n}(x')B_n(x) + A_1^{-n}(x')(C(\sigma^n(x')) - C(\sigma^n(x)))A_2^n(x) \\ &\quad + B_{-n}(x')A_2^n(x) + C(x')A_2^{-n}(x')A_2^n(x), \end{aligned} \tag{12}$$

根据假设，这也等于 $A^{-n}(x')A^n(x)$ 的右上角，而后者等于：

$$A_1^{-n}(x')B_n(x)+B_{-n}(x')A_2^n(x). \tag{13}$$

若假设 $x'\in W^s_{loc}(x)$，那么 $\sigma^n(x')$ 和 $\sigma^n(x)$ 将以指数速度趋近。注意，由于 $A_1(x)$ 和 $A_2(x)$ 都是等距的，$A_1^{-n}(x')A_1^n(x)$ 收敛到一个霍尔德连续函数，我们将其记为 $H^1_{xx'}$，如第3节讨论全纯时所述。$A_2(x)$ 也同样成立，由此得到第二个全纯$H^2_{xx'}$。还要注意，若 $n_i\to\infty$ 是一列时刻，在这些时刻 x 和 x' 都属于 Lusin集，则有 $C(\sigma^n(x))-C(\sigma^n(x'))\to 0$。因此，方程（12）中的第三项也会在 $n\to\infty$ 时趋于零。考虑方程（13）与（12）之差，并令 $n_i\to\infty$ 取极限，可得

$$-H^1_{xx'}C(x)+C(x')H^2_{xx'}=0.$$

因此，

$$C(x')=H^1_{xx'}C(x)(H^2_{xx'})^{-1}. \tag{14}$$

Σ 中几乎每个点都是 Lusin 集的正则点，因此几乎每对点 x,x' 都会沿某个子序列同时回到该集合。于是，根据 μ 的乘积结构可知，对于几乎每个局部稳定叶，$C(x)$在该叶上都有一个 Hölder 连续版本，由方程（14）给出。局部不稳定叶也同样如此。根据下文的引理 32，证明至此完成。□

现在我们说明如何由引理 31 得出结论。思路是沿着 C的每条超对角线逐步归纳。由于思路简单，形式化的归纳证明反而可能会掩盖论证要点，因此我们省略一般性证明，并以旗长度为四的 Zimmer 块为例说明这种方法。

由方程（10），我们已经将问题归约到 C 的对角块均为恒等矩阵的情形。方程 $A=C(\sigma(x))B(x)C(x)^{-1}$ 于是变为：

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}&A_{14}\\0&A_{22}&A_{23}&A_{24}\\0&0&A_{33}&A_{34}\\0&0&0&A_{44}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\mathrm{Id}&C_{12}&C_{13}&C_{14}\\0&\mathrm{Id}&C_{23}&C_{24}\\0&0&\mathrm{Id}&C_{34}\\0&0&0&\mathrm{Id}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}&B_{12}&B_{13}&B_{14}\\0&A_{22}&B_{23}&B_{24}\\0&0&A_{33}&B_{34}\\0&0&0&A_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{Id}&C'_{12}&C'_{13}&C'_{14}\\0&\mathrm{Id}&C'_{23}&C'_{24}\\0&0&\mathrm{Id}&C'_{34}\\0&0&0&\mathrm{Id}\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{15}$$

其中，我们用 C'_{ij} 表示 $C(x)^{-1}$的第 ij 个块。请注意，如果我们考虑对角线上的每个2×2 块，它们都满足引理 31 的假设。由此可知，C的超对角块 C_{12}、C_{23} 和 C_{24}分别与霍尔德连续版本$\overline{C}_{12}$、$\overline{C}_{23}$、$\overline{C}_{34}$重合。与ˆ之前一样，我们于是可以定义一个霍尔德连续的 C，其定义为

$$\hat{C}(x)=\begin{bmatrix}\mathrm{Id}&\overline{C}_{12}&0&0\\0&\mathrm{Id}&\overline{C}_{23}&0\\0&0&\mathrm{Id}&\overline{C}_{34}\\0&0&0&\mathrm{Id}\end{bmatrix}.$$

因此，我们可以应用方程（10）中的同一技巧，并用矩阵 $\hat{C}(\sigma(x))B(x)\,\hat{C}(x)^{-1}$ 替换 B，并用共轭 $C(x)\,\hat{C}(x)^{-1}$替换共轭 C。

注意，共轭 $C(x)\hat{}C(x)^{-1}$ 的超对角线全为 0。因此，只需研究以下方程：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \tag{16}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & 0 & C_{13} & C_{14} \\ 0 & \mathrm{Id} & 0 & C_{24} \\ 0 & 0 & \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{13} & B_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & B_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & 0 & C'_{13} & C'_{14} \\ 0 & \mathrm{Id} & 0 & C'_{24} \\ 0 & 0 & \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix}.$$

现在我们注意到，元素 C_{13} 和 C_{24} 满足一个如引理 31 中的 2×2 方程。例如，在 C_{24} 的情形下，注意到：

$$\begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & C_{24} \\ 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{22} & B_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & C'_{24} \\ 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix}.$$

因此，应用引理 31 可得，存在一个 C_{24} 的 H¨older 连续版本。C_{13} 的情形同样成立。于是我们可以再次定义矩阵 C，并如（10）中那样通过该矩阵进行共轭，将问题化归为 C_{13} 和 C_{24} 也为零的情形。再次迭代这一过程，我们便可得出 C_{14} 是 H¨older 连续的，从而证明完毕。

一般而言，完全相同的过程仍然适用：通过研究 2×2 子系统并应用引理 31，可以沿不同的超对角线归纳地提高 C 的正则性。□

引理 32。设 (Σ, σ) 是一个赋予了不变测度 μ 的移位，该测度具有满支撑和连续乘积结构。设在每个局部稳定叶和不稳定叶上，都定义了关于 H ¨older 连续且一致的线性全纯映射 $H^s_{xy}, H^u_{xy} \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$，并且这些全纯在横截方向上连续。设 C: $\Sigma \to \mathbb{R}^d$ 是一个 μ-可测映射，它几乎处处满足全纯不变性，即对于 μ-几乎处处的 $x \in M$ 以及几乎所有的 $y \in W^u_{loc}(x)$，有 $H^u_{xy} C(x) = C(y)$；对于局部稳定流形也有同样结论。那么， C 几乎处处与某个 H ¨older 连续函数 $\overline{C}$ 一致，且该函数在稳定全纯和不稳定全纯下均不变。

˜证明。我们定义一个新函数 C ，使其几乎处处等于 C 。设ω^1、.....、$\omega^\ell \in \Sigma$为一组词，其中每个 ω^i_0都不相同，且这些符号涵盖了定义 Σ时所用的全部符号。那么，若 $\omega_0 = \omega^i_0$，定义 $\widetilde{C}(\omega)$ 为

$$\widetilde{C}(\omega) = H^u_{[\omega, \omega^i]\omega} H^s_{\omega^i[\omega, \omega^i]} C(\omega^i).$$

根据乘积结构，我们可以选择 ω^i ，使得 $\widetilde{C} = C$ μ几乎处处满足˜。根据定义可知， C 沿每个不稳定流形均一致地满足 H¨older 连续性，因此由全纯的横向连续性可知，它是连续的。˜接下来注意到，由于 $C = C$ μ几乎处处成立，利用沿稳定˜ ˜流形的整体不变性以及 C的连续性可知， C 在几乎每个稳定流形上都在稳定全纯下不变。由于 μ 具有满支撑，根据全纯的横向连续性，这意味着 C 沿每个˜稳定流形都在稳定全纯下不变。因此，由 [KH97 定理 19.1.1],可知， C 是 H¨older 连续的，故结论得证。□

现在，我们在不假设共轭映射取值于 Zimmer 块的情况下，证明共轭到 Zimmer 块的可测刚性。

定理 2 的证明。首先，取值于一个 Zimmer 块中的余循环 B保持一个旗 $\mathcal{E}_i^B$，并且在中间商空间上等距作用。将这个旗通过共轭 C向前推，我们得到一个旗 $\mathcal{E}_i^A$，它具有相同的性质，并且在 A作用下不变。定理 1 的证明表明， $\mathcal{E}_i^A$实际上与一个 H¨older 连续的 A-不变旗标重合，且中间商空间上带有 H¨older 连续度量。因此，相对于某个 H¨older 连续标架，我们看到 A 取值于一个 Zimmer 块。由此可知，存在某个 H¨older 连续余循环 $D\colon\ \Sigma \to U_\lambda$ 以及一个 H¨older 连续共轭H ，使得 $HDH^{-1} = A$。因此我们看到， $C(HDH^{-1})C^{-1} = B$。所以我们看到，取值于与 B相同的 Zimmer 块的 D，与 B 通过共轭 CH可测共轭。因此，我们将问题归结为两个都取值于 Zimmer 块的余循环之间存在可测共轭的情形。事实上，根据我们的构造，共轭 CH 也几乎处处取值于 U_λ μ。这是因为 C 将旗 $\mathcal{E}_i^B$映到旗 $\mathcal{E}_i^A$，而后者又通过 H映到 U_λ的旗。中间商空间上的度量也同样如此。因此，我们看到，共轭 CH 取值于一个 Zimmer 块，因为它将 U_λ的旗映到自身，并且对几乎处处的 U_λ μ也保持度量。因此由命题 30 即得。□

References

[ASV13] Artur Avila、Jimmy Santamaria 和 Marcelo Viana, *Holonomy invariance: rough regularity and applications to Lyapunov exponents* **358** 2013 13 74 , Asterisque（）, –。[BG19] Jairo Bochi 和 Eduardo Garibaldi, *Extremal norms for fiber-bunched cocycles*, 《Ecole polytechnique—Math´ematiques》期刊 6（2019）, 947–1004。[BGMV03] Christian Bonatti、Xavier G´omez-Mont 和 Marcelo Viana, *Généricité d'exposantsde Lyapunov non-nuls pour des produits déterministes de matrices*, 《非线性分析 IHP 年刊》20（2003）, 第4期, 579–624。[But18] Clark Butler, *Measurable rigidity of the cohomological equation for linear cocycles over hyperbolic systems* **227** 2018 1, 27 61 , 《以色列数学杂志》（）, 第–期。[DX20] Danijela Damjanovi´c 和 Disheng Xu, *On classification of higher rank Anosov actions on compact manifold* **238** 2020 2, 745 806 , 《以色列数学杂志》（）, 第–期。[GKS20] Andrey Gogolev、Boris Kalinin 和 Victoria Sadovskaya, *Local rigidity of Lyapunov spectrum for toral automorphisms* **238** 2020 389 , 《以色列数学杂志》（）, –403。[Kal11] Boris Kalinin, *Livšic theorem for matrix cocycles*, 《Annals of Mathematics》（2011）, 1025–1042。[KH97] Anatole Katok 和 Boris Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems* 1997 , 剑桥大学出版社, 。[KS13] Boris Kalinin 和 Victoria Sadovskaya, *Cocycles with one exponent over partially hyperbolic systems* **167** 2013 1, 167 188 , 《Geometriae Dedicata》（）, 第–期。[KSW22] Boris Kalinin、Victoria Sadovskaya 和 Zhenqi Jenny Wang, *Local rigidity for higher-bolic toral automorphisms* 2207 02321 2022 , arXiv 预印本 arXiv:。（）。[Led86] Fran¸cois Ledrappier, *Positivity of the exponent for stationary sequences of matrices*, Lyapunov 指数, 施普林格，1986年，第56–73页。[PW01] Mark Pollicott 和 Charles Walkden, *Livsic theorems for connected Lie groups*, 《美国数学会汇刊》353（2001）, 第7期, 2879–2895。[Sad15] Victoria Sadovskaya, *Cohomology of fiber bunched cocycles over hyperbolic systems*, 《Ergodic Theory and Dynamical Systems》35（2015）, 第8期, 2669–2688。[Via08] Marcelo Viana, *Almost all cocycles over any hyperbolic system have nonvanishing Lyapunov exponents* 2008 643 680 , 《Annals of Mathematics》（）, –。[Zim83] Robert Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, 施普林格，1983年。

Department of Mathematics, The University of Maryland, College Park, MD 20742, USA
Email address: dewitt@umd.edu