椭圆不稳定性与对流的相互作用

Nils B. de Vries，[1] Adrian J. Barker，[1] 以及 Rainer Hollerbach[1]，[a)]利兹大学数学学院应用数学系，英国利兹 *LS2 9JT*

（*电子邮箱：N.B.deVries@leeds.ac.uk。）

（日期：2023年2月7日）

椭圆不稳定性是椭圆流线的一种不稳定性，可由旋转流体天体中的大尺度潮汐流激发；当无量纲潮汐振幅（ε）足够大时，它会激发惯性波。椭圆不稳定性会在对流区中发生，但其与湍流对流的相互作用在这一背景下尚未得到研究。我们开展了一系列宽广计算域中的笛卡尔坐标系流体动力学模拟，以探索椭圆不稳定性与瑞利-贝纳德对流的相互作用。我们发现，椭圆不稳定性产生的地转涡旋主导流动，其能量远高于惯性波的能量。此外，我们发现椭圆不稳定性可以与对流并存，但当对流足够强时，它会受到抑制，这主要是由对流产生的大尺度涡旋所致。我们在傅里叶空间中考察流动，从而确定能量占主导的频率和波数。我们发现，即使在没有椭圆形变的对流流动中，能量也主要集中于地转涡旋、对流不稳定的波数以及沿惯性波色散关系分布的区域。通过考察对流背景上的线性增长率，我们发现，对流产生的大尺度涡旋以与椭圆不稳定性自身产生的地转涡旋相同的方式抑制椭圆不稳定性。最后，对流运动对大尺度潮汐流起到有效黏度的作用，持续传递能量（按 ε^2 标度）。此外，我们发现，椭圆不稳定性爆发（当其发生时）导致的能量传递，与先前研究中发现的 ε^3 标度一致。

PACS 编号：47.20.-k；47.20.Bp；47.27.-i；47.32.-y；47.32.Ef；47.35.+i

arXiv:2302.02912v1 [physics.flu-dyn] 6 Feb 2023

I. 引言

当椭圆形变的流线通过参数共振激发惯性波对时，就会产生椭圆不稳定性[1–3]。只要黏性阻尼等抑制过程能够被克服，任意小的椭圆形变都可能导致不稳定性。由此产生的惯性波与形变耦合[1]，，使其振幅呈指数增长。这种机制本质上是一种三波共振相互作用，波从椭圆流动中提取能量。

其非线性演化已得到广泛研究。随着线性不稳定性达到饱和，惯性波似乎会坍缩为旋转湍流，而旋转湍流通常会随时间耗散，导致流动再次变得不稳定[4–10]。这种向湍流的坍缩可能通过弱惯性波“湍流”[4,6,9,10]，实现，也可能通过涉及大尺度地转涡旋或纬向流的旋转湍流[5,7–11]实现。当强迫振幅较弱[10,12]，，或地转模态受到抑制时（抑制方式包括人为施加摩擦阻尼[9]，或通过施加磁场等外部过程[6]），可能会出现惯性波“湍流”（其中存在大量相互作用微弱的惯性波）。

近年来，椭圆不稳定性也被应用于恒星和行星中的潮汐耗散机制[5,8,13–18]，从潮汐流中提取能量。恒星或行星中的潮汐流通常被划分为大尺度平衡潮或非波动型潮汐，以及动力潮或波动型潮汐[19,20]。平衡潮是围绕天体旋转的准静水平衡流体隆起[19]，，而动力潮则由共振潮汐驱动产生的波组成。人们认为，平衡潮通过与通常具有对流性质的湍流相互作用[21,22]，，或通过其自身的流体不稳定性[5,8,13–15,17,23]（其中包括椭圆不稳定性）而耗散。然而，这需要仔细考察椭圆不稳定性的动力学，尤其是预期存在的湍流的性质，以及它与系统中其他过程（例如磁场或（稳定或不稳定的）分层）之间的相互作用[24]。

平衡潮将天体（天体 1）变形成沿轨道运行的伴星（天体 2）所对应的椭球形状，其形变由椭圆率或潮汐振幅参数表示

$$\varepsilon = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{R_1}{a}\right)^3, \tag{1}$$

其中 m_1 和 m_2 分别为天体 1 和天体 2 的质量（例如行星及其宿主恒星），R_1 为天体 1 的半径，a 为轨道间距（半长轴）。对于异步自转的行星或恒星，在随潮汐隆起旋转的参考系中，平衡潮表现为行星内部的椭圆流动。该流动的旋转速率为行星自转角速度Ω与轨道旋转速率 n之差，记为 $\gamma \equiv \Omega - n$。在本研究中，我们对平衡潮流动的一小块区域进行建模，并将其视为潮汐隆起参考系（以n 的速率绕行星旋转轴旋转）中的背景流 $\mathbf{U}_0$，其形式如下~

a)另见 Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences，20 Clarkson Road，剑桥 CB3 0EH

行星），满足[5],使得

$$\tilde{\mathbf{U}}_0 = \gamma \begin{pmatrix} 0 & -(1+\varepsilon) & 0 \\ 1-\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad (2)$$

其中$\mathbf{x}$ 表示从行星中心出发的位置矢量。在以速率 Ω随行星旋转的参考系中，流动也可以写成

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x} = -\gamma\varepsilon \begin{pmatrix} \sin(2\gamma t) & \cos(2\gamma t) & 0 \\ \cos(2\gamma t) & -\sin(2\gamma t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad (3)$$

其中$\mathbf{x}$ 现在表示在随行星旋转的参考系中、从行星中心出发的位置矢量。这一描述给出了受轨道伴星[8,25]，扰动的均匀旋转不可压缩流体天体的精确平衡潮，但只能近似描述更现实模型[20,26]中的平衡潮的主要特征。本研究选择在以速率 Ω 随行星旋转的参考系中进行研究。更大的形变 ε 会使波增长得更快，这意味着它们能够克服更强的黏性阻尼，无论阻尼来自流体黏度还是湍流黏度。

此前已有研究使用局部笛卡尔盒模型对椭圆不稳定性进行了模拟，考察了有[6] 和没有[5] 弱磁场的情况。早期研究发现，椭圆不稳定性会导致爆发式行为，其中，不稳定性激发的惯性波与其非线性相互作用产生的地转柱状涡流发生相互作用。研究得到不规则的周期性“捕食者—猎物行为”：椭圆不稳定性首先激发惯性波，这些波通过非线性相互作用产生涡旋；涡旋抑制波的进一步增长，直至被黏度充分耗散，从而使波得以继续增长。在椭圆不稳定性的全球流体力学模拟[8], 中也出现了类似行为，其中纬向流在捕食者—猎物动力学中取代了柱状涡旋。在局部模型中纳入磁场后，行为由爆发式转为向流动持续输入能量，因为磁场能够瓦解强涡旋或阻止其形成[6]。若涡旋受到模拟无滑移边界上埃克曼摩擦的人工摩擦力的耗散，也会观察到类似的持续行为[9]。

此前的研究分析了行星（或恒星）内部对流区域中的椭圆不稳定性，但并未明确纳入对流（除非因湍流而选择黏度时，可能对此有所考虑）。然而，对流可能以多种方式与椭圆不稳定性相互作用。首先，我们可以设想，小尺度的湍流对流涡旋可能像有效黏度一样，抑制较大尺度惯性波，从而阻碍或减弱椭圆不稳定性的增长。其次，已知旋转影响下的对流会产生平均流（纬向流或涡旋），这些流动也可能与椭圆不稳定性所产生的流动相互作用。在本研究中，我们希望探讨以下

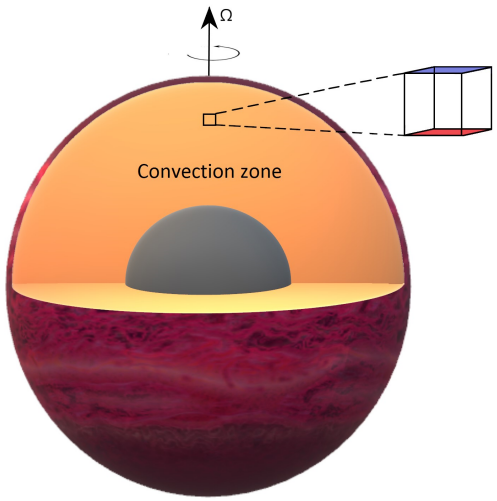


图 1. 热木星对流区中局部盒模型的位置，标示了旋转轴和温度梯度；温度梯度由盒子的红色（热）侧和蓝色（冷）侧表示。

问题：椭圆不稳定性是否能在湍流对流背景中发生？对流驱动流如何与椭圆不稳定性相互作用，并改变（潮汐）能量传递率？

椭圆不稳定性与对流的相互作用已在线性理论中[2,27], 、在圆柱形容器中通过实验[28] 以及在三轴椭球体中借助理想化的层流全局模拟[15]进行了研究。这些研究表明，椭圆不稳定性能够改变热输运，但并未着重研究潮汐流的耗散，而这正是本文的主要关注点。无量纲热输运通常用努塞尔数（Nu）表示，它衡量总热通量与传导通量（即没有流体运动输运时的热通量）之比，并将其表示为瑞利数（Ra）的函数。瑞利数是浮力驱动与黏性和热阻尼之比的无量纲量，用来衡量对流驱动的强度。研究发现，当瑞利数接近或低于对流开始所需的临界值时，椭圆不稳定性会使努塞尔数增大。研究还发现，即使在稳定分层条件下（Ra <0），努塞尔数也大于 1，这表明椭圆不稳定性在这种情况下也能促进热输运。

本文以 Barker 和 Lithwick[5,6], Le Reun 等人[9] 的局部盒模型为基础——该模型表示行星或恒星的一小块区域（见图 1）——研究椭圆不稳定性与对流的相互作用，重点关注由此产生的潮汐耗散。我们的局部模型能够进行更高分辨率的研究，进而使我们能够达到比 Cébron、Maubert 和 Le Bars 15、Lavorel 和 Le Bars [28]等研究更湍流的状态。我们的目标之一是研究椭圆不稳定性的行为，并探究引入对流是否也能像磁场（或摩擦阻尼）那样带来持续能量注入。作为次要目标，我们还关注椭圆不稳定性对热输运的影响，以及这种影响在弱驱动的对流状态和稳定分层层中的表现；这类稳定分层层可能存在于巨行星内部。

性在弱驱动的对流状态以及稳定分层层（例如可能存在于巨行星内部的稳定分层层）中的影响。

第二节将讨论椭圆不稳定性的线性性质并介绍所用模型；第三节将定性地描述参数调查所得的结果。第四节中，我们将研究持续能量注入，并分析流动的频率谱和波数谱。随后，我们将在第五节简要讨论背景流的能量传递随 ε 的标度关系。第六节中，我们将进行讨论并总结。

II. 模型设置

A. 椭圆不稳定性

Kerswell[2] 已综述椭圆不稳定性的线性性质。当两列惯性波的频率之和近似等于潮汐频率 2γ（见引言）时，就会发生这种不稳定性。在短波长极限下，这种情况发生于两列频率为 $\omega = \pm\gamma$ 的波；它们各自都必须满足惯性波的色散关系，$\omega = \pm 2\Omega k_z/k$，其中 $k_z/k = \cos\theta$。椭圆不稳定性的增长率与 $\varepsilon\gamma$ 成正比。

由于我们研究的是行星上的一小块区域，因此假设潮汐流在局部可建模为潮汐隆起参考系中的无界受应变涡旋[2]。这种方法得到的增长率取决于惯性波与旋转轴以及水平面内应变方向之间的夹角。举例来说，当潮汐隆起静止时（$n = 0$），$\gamma = \Omega$，因此对于最不稳定模态有 $k_z/k = \pm 1/2$ [2]。此外，增长最快的波的相位与应变方向对齐，相对于赤道面内的椭圆形变（即包含涡流的平面），夹角为 $\pm\pi/4$ 。

Kerswell[2]还综述了黏度、失谐、对流以及椭圆形隆起旋转的影响。黏度会按以下关系降低增长率：$\sigma - \nu|\mathbf{k}|^2$，其中 σ 为无黏增长率，ν 为黏度，$\mathbf{k}$ 为增长最快模态的波矢。失谐是指由于波未能严格满足共振条件而导致增长率降低，这也会降低最大增长率。绕伴星的旋转，也就是椭圆形隆起的旋转，会根据旋转速度（n）改变增长率。对于大多数[5] n取值，增长率都会降低；而在区间 $n = [-3/2\gamma, -1/2\gamma]$内，这种机制无法起作用。在此区间内，不存在满足以下色散关系的惯性波：

$$\omega = \pm 2\Omega\cos\theta. \tag{4}$$

在$n = [-1/2\gamma, 0]$ 区间内，增长率有所提高；但与$n = 0$的情况相比，其他所有地方的增长率都降低了。小 ε 时无黏流体的线性增长率（无对流）由[2,29]给出：

$$\sigma = \frac{9}{16}\gamma\varepsilon\frac{(3\gamma+2n)^2}{9(\gamma+n)^2}. \tag{5}$$

若存在（不）稳定分层（且与旋转轴对齐），色散关系以及上述方程都会发生改变。引入方程中的分层由布伦特–魏萨拉（或浮力）频率N表示。修改后的色散关系为：

$$\omega^2 = 4\Omega^2\cos^2(\theta) + N^2\sin^2(\theta). \tag{6}$$

于是，当 ε 较小时，方程 5 的修正形式为[2]：

$$\sigma = \frac{9}{16}\gamma\varepsilon\frac{4(3\gamma+2n)^2(\gamma^2-N^2)}{9\gamma^2(4(\gamma+n)^2-N^2)}. \tag{7}$$

利用该方程可以计算不稳定分层（负N^2）和稳定分层（正N^2）的影响。我们观察到，稳定分层通常会抑制椭圆不稳定性，而对流通常会促进增长。

为使表述清晰，选择 $\gamma = \Omega$ ，从而得到$n = 0$，即严格对应于隆起部分不旋转这一非物理情形。相关天体并未绕其伴星旋转，而伴星会产生潮汐效应。然而，对于模拟，选择不同的 Ω所产生的唯一线性影响，是改变椭圆不稳定性的增长率[5] 以及最不稳定模态的波数[6]。

B. 控制方程与模拟设置

我们采用旋转瑞利–贝纳德对流（RRBC）和布辛涅斯克近似来模拟对流不稳定性。选择 RRBC 是因为它是研究旋转对流的最简单模型[30] ，可用于研究其与椭圆不稳定性的相互作用（更简单的模型是垂直方向采用周期性边界的“均匀对流”，但其非线性行为不符合物理实际）。在研究小尺度对流（及波状）流动时，布辛涅斯克近似是合理的；此类流动满足所需条件：流速远低于声速，$u \ll c_s$，且计算域的垂直尺度d 远小于压力或密度标高，$d \ll H_p$ [31]。然而，这种近似忽略了行星性质（即密度和温度）的变化，当然也无法用这种近似模拟任何大尺度环流。

旋转轴沿z方向，温度梯度也沿该方向，如图 1 所示。因此，当前设置中的盒体代表一个极区，因为局部旋转矢量与重力矢量平行或反平行（取决于 Ω 的符号）。底部热板与

顶部冷板之间的导热态温度分布（我们将在此基础上进行扰动）为

$$\alpha g(T-T_0)=\frac{zN^2}{d}, \tag{8}$$

其中，g 是局部重力加速度（假设为常数），α 是（恒定的）热膨胀系数。不失一般性，T_0 设为零，因此底部（通常为热板）的温度为$T(z=0)=0$，而顶部的温度为 $T(z=d)=N^2/(\alpha g)$，因此温降为 $\Delta T=-N^2/\alpha g$。

我们以垂直区域的高度d（两板之间的距离）为长度尺度，以相应的热时间尺度d^2/κ为时间尺度进行无量纲化，因此速度以 κ/d为尺度，压力以 $\rho_0\kappa^2/d^2$, 为尺度，最后以$T=\Delta T\theta$（即两板之间的温差）为温度尺度。于是，在绕z以速率 Ω 旋转的参考系中，Boussinesq近似下，背景流$\mathbf{U}_0$ 和导热态温度$T(z)$的无量纲速度扰动$\mathbf{u}$ 及温度扰动 θ的控制方程为：

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{U}_0+\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ek}}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{u}=-\nabla p+\mathrm{PrRa}\theta\hat{\mathbf{z}}+\mathrm{Pr}\nabla^2\mathbf{u}, \tag{9}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0, \tag{10}$$

$$\frac{D\theta}{Dt}-u_z=\nabla^2\theta, \tag{11}$$

其中

$$\frac{D}{Dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{U}_0\cdot\nabla+\mathbf{u}\cdot\nabla, \tag{12}$$

其中，$\mathbf{u}=(u_x,u_y,u_z)$，而p为压力扰动。描述对流的无量纲参数为瑞利数

$$\mathrm{Ra}=\frac{\alpha g(-N^2)d^4}{\nu\kappa}, \tag{13}$$

其中，ν 和 κ 分别为恒定的运动黏度和热扩散率，埃克曼数（黏性项与科里奥利项之比）

$$\mathrm{Ek}=\frac{\nu}{2\Omega d^2}, \tag{14}$$

以及普朗特数 $\mathrm{Pr}=\nu/\kappa$。注意，量纲浮力频率平方$N^2=-\mathrm{Ra}\,\mathrm{Pr}\,\kappa^2/(\alpha g d^4)$可以与之关联，因此当 $\mathrm{Pr}=1$时，以热时间单位表示的无量纲值为$N^2=-\mathrm{Ra}$。潮汐背景流还引入了在所选单位下的无量纲椭圆率 ε和频率 γ。

我们的模拟是在一个无量纲尺寸为 $[L_x,\ L_y,\ 1]$ 的笛卡尔盒中进行的，其中 $L_x=L_y=L$。水平方向采用周期性边界条件；垂直方向则采用不可渗透条件，$u_z(z=0)=u_z(z=1)=0$，以及无应力条件，$\partial_z u_x(z=0)=\partial_z u_x(z=1)=\partial_z u_y(z=0)=\partial_z u_y(z=1)=0$。选择无应力边界条件，一方面是为了数值计算方便，另一方面是因为在模拟远离边界的行星深部内部对流时，它们可能比无滑移边界条件更符合实际情况。因此，我们盒中的对流在垂直方向上代表一个对流单元。温度扰动在垂直方向上的边界条件假定为完全导热，$\theta(z=0)=\theta(z=1)=0$。

在椭圆不稳定性的推导中，通常会选择采用所谓的剪切波[1,2]。剪切波具有随时间变化的波矢，因此能够将背景流（例如本次模拟中的平衡潮）导致的波的拉伸和旋转纳入考虑。单个剪切波（有时也称为开尔文波[2],，不过严格来说它与沿岸开尔文波不同）表示为：

$$\begin{aligned}\mathbf{u}&=\mathrm{Re}[(\hat{u}_x(t)\cos(k_z z),\hat{u}_y(t)\cos(k_z z),\hat{u}_z(t)\sin(k_z z))\exp^{i\mathbf{k}_\perp(t)\cdot\mathbf{x}}],\\ p&=\mathrm{Re}[\hat{p}(t)\cos(k_z z)\exp^{i\mathbf{k}_\perp(t)\cdot\mathbf{x}}],\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $\dot{\mathbf{k}}_\perp=-A^T\mathbf{k}_\perp$，并且 $\mathbf{k}_\perp=(k_x,\ k_y,\ 0)$，我们在模拟中采用这些波的基底，方法遵循 Barker 和 Lith- wick[5],，但我们在z方向采用正弦-余弦分解，类似于 Duguid、Barker 和 Jones[32]。

模拟使用 Snoopy代码[33]执行。Snoopy代码在笛卡尔盒中使用 FFTW3 实现傅里叶伪谱法。我们在z方向采用正弦-余弦分解（如方程 15 所示），并在x 和y方向采用剪切波（即傅里叶模态）。时间推进使用三阶龙格-库塔格式，并配合 CFL安全系数，确保时间步长足够小，从而准确捕捉非线性效应；该系数通常设为 1.5（小于稳定性上限 $\sqrt{3}$）。代码采用标准的 2/3规则[34]进行抗混叠。我们使用模拟分析了多种不同的瑞利数。此外，还进行了一些模拟，其瑞利数处于稳定分层区，即 $\mathrm{Ra}<0$。为清楚起见，瑞利数通常表示为 $\mathrm{Ra}/\mathrm{Ra}_c$，其中 Ra_c 为起始瑞利数（通过数值方法确定）；在埃克曼数为 $=5\cdot10^{-5.5}$ 时，所研究的这一比值范围在对流不稳定区为 2 至 20，在稳定区为 -10 至 0。8。我们将 ε 从 0。01 变化到 0。20。

在局部盒模型中对 RRBC 进行模拟时，当旋转占主导地位，流动中会出现大尺度涡旋（LSV）结构[35–37]。在我们所选的边界条件下（详见下文），这种大尺度涡旋会形成，并在水平方向上发展至盒子尺寸。大尺度涡旋的影响之一是降低热输运，因为这类涡旋会抑制垂直运动[35]。研究对流大尺度涡旋的另一个原因是，强涡旋的存在可能抑制椭圆不稳定性[5]。对流大尺度涡旋也可能抑制椭圆不稳定性，从而可能阻止其有效发生。由于根据我们所选的埃克曼数和计算上可行的瑞利数，流动很可能由旋转主导，因此我们选择了能够捕捉这种大尺度涡旋的水平盒子尺寸。不过，改变盒子长宽比会如何影响本文所述的效应，仍有待探究，因为

长宽比 L/d （盒子水平长度与垂直长度之比）会影响垂直动能占总动能的比例[35]。

C. 模拟的能量分析

为分析流动的能量，我们对式 9 与$\mathbf{u}$ 取标量积，然后在整个区域上求平均，从而推导出动能方程。我们将量X 的平均运算定义为 $\langle X\rangle = \frac{1}{2}L_d\int_V X\,dV$。由此得到：

$$\frac{d}{dt}K = I + \langle \mathrm{PrRa}\theta u_z\rangle - D_\nu, \tag{16}$$

其中，平均动能定义为：

$$K \equiv \frac{1}{2}\langle|\mathbf{u}|^2\rangle, \tag{17}$$

平均黏性耗散率

$$D_\nu \equiv -\mathrm{Pr}\langle \mathbf{u}\cdot\nabla^2\mathbf{u}\rangle, \tag{18}$$

以及潮汐流动与对流流动之间的能量注入率（更一般地说，能量传递率；反之亦然）

$$I \equiv -\langle \mathbf{u}\mathrm{A}\mathbf{u}\rangle. \tag{19}$$

为得到热（势）能的方程，我们将式 11 乘以 $-\mathrm{RaPr}\theta$，并对整个计算盒取平均，得到：

$$\frac{d}{dt}P = -\langle \mathrm{PrRa}\theta u_z\rangle - D_\kappa, \tag{20}$$

其中，平均热能定义为

$$P \equiv -\mathrm{PrRa}\frac{1}{2}\langle\theta^2\rangle, \tag{21}$$

热耗散率定义为

$$D_\kappa \equiv \mathrm{PrRa}\langle\theta\nabla^2\theta\rangle. \tag{22}$$

总能量为$E = K + P$，因此满足：

$$\frac{d}{dt}E = I - D_\nu - D_\kappa. \tag{23}$$

在统计稳态下，预期注入的能量（时间平均值）与总耗散相平衡，即 $I \approx D \equiv D_\nu + D_\kappa$ （平均而言）。因此，两个耗散率之和代表潮汐能量注入所产生的潮汐能耗散率。为了解释潮汐能耗散率，我们考察潮汐能注入率I。

用于描述椭圆不稳定性所致耗散的标度律的论据，最初是通过这样一种图景提出的：不稳定性的饱和涉及一个最不稳定模态，当其增长率（σ）与非线性级联速率[5]平衡时，该模态的振幅便达到饱和。因此，如果椭圆不稳定性的最重要模态满足 $\sigma \sim ku$，其中 k 是其波数大小，而 u 是其速度振幅，那么我们可得 $u \sim \varepsilon\gamma/k$。因此，总耗散率 D 的标度为 $D \sim u^2\sigma \sim \varepsilon^3\gamma^3/k^2$。因此，在这样的统计稳态下，预计耗散率和能量注入率的标度为

$$D = I \propto \varepsilon^3, \tag{24}$$

这与一些局部和全局模拟[5,8] 以及相关不稳定性（如岁差不稳定性[38,39]）所发现的标度关系一致。我们希望探究对流是否会导致不同的结果，并有可能减弱这一陡峭的 ε 标度关系。

由于我们知道，椭圆不稳定性[5] 和对流[35] 单独作用时都能产生地转流，例如涡旋，因此我们引入了更多诊断量来分析这些流动及其所起的作用。为此，我们将背景流的总能量注入分解为：

$$I = I_{2D} + I_{3D}, \tag{25}$$

其中，我们定义了 $\mathrm{I}_{2D} = -\langle \mathrm{u}_{2D}\mathrm{A}\mathrm{u}_{2D}\rangle$ 和 $\mathrm{I}_{3D} = -\langle \mathrm{u}_{3D}\mathrm{A}\mathrm{u}_{3D}\rangle$。$\mathrm{I}_{2D}$ 和 u_{2D} 的定义涵盖了所有波矢仅有非零 x、y 分量的（地转）模态，其中 $\mathrm{k}_z = 0$；而 I_{3D} 和 u_{3D} 则涵盖了所有 $\mathrm{k}_z \neq 0$ 的模态。因此，我们将总能量注入率分解为注入正压流（$\mathrm{k}_z = 0$）和斜压流（$\mathrm{k}_z \neq 0$）的能量。波矢满足 $\mathrm{k}_z = 0$ 的纯惯性波频率为零；而在本文重点研究的对流不稳定模拟中，不存在能够具有 $\omega \neq 0$ 的重力波，即使 $\mathrm{k}_z = 0$ 也是如此。因此，可以粗略地将这种分解理解为地转涡旋模态（I_{2D}）与波（I_{3D}）的分解。我们发现，注入涡旋运动 I_{2D} 的时间平均能量近似为零[5],，而注入波 I_{3D} 的能量平均而言非零（椭圆不稳定性作用时必然如此），并且能清楚地展现所观察到的任何突发行为。基于这一观察，本文仅绘制由 I_{3D} 得出的结果。类似地，我们也将总动能 K 分解为二维分量和三维分量，定义 K_{2D} 和 K_{3D}，以便确定哪些分量对流动的贡献最大并占主导地位。

为进一步分析能量传递率 I 和I_{3D}，我们还将它们分别转换为有效黏度 ν_{eff}和 $\nu_{eff,3D}$。有效黏度表示恒定运动黏度为 $\nu = \nu_{eff}$时所产生的能量耗散，这一量可帮助我们解读I的值。具体而言，这一比较有助于量化湍流对流对潮汐流的阻尼速率，前提是这种相互作用表现得如同湍流黏度。为定义有效黏度，我们令潮汐流对对流流动所做的功等于潮汐流的黏性耗散率，并假设该耗散由恒定运动黏度 ν_{eff}引起，遵循 Duguid、Barker 和 Jones [32], Goodman and Oh 40、Ogilvie and Lesur 41、Vidal and Barker [42]。我们注意到

$$I = -\frac{1}{V}\int_V \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{U}_0 dV. \tag{26}$$

我们将潮汐流的应变率张量定义为 $e_{ij}^0 \equiv 12\ (\partial_i U0_{,j} + \partial_j U0_{,i})$，因此能量耗散率为

$$\frac{2\nu_{eff}}{V}\int_V e_{ij}^0 e_{ij}^0 dV = 4\nu_{eff}\gamma^2\varepsilon^2. \tag{27}$$

有效黏度定义如下：

$$\nu_{eff} = I/(4\gamma^2\varepsilon^2). \tag{28}$$

注入项表示能量从背景流传递至扰动，或反向传递。根据定义，这会影响这些流动中的能量。然而，我们的模型并未明确考虑潮汐流 $\mathbf{U}_0$, 的演化，而是将其视为固定（但随时间变化）的背景流。其思路是，背景流的能量远大于扰动，因此在我们的模拟中将其视为无限能量库。因此，这些结果只能反映系统演化在某一时刻的快照；这很合理，因为潮汐演化过程通常相较于对流或旋转时间尺度而言进展缓慢。

最后，我们计算模拟中的垂直热输运，并用努塞尔数表示，定义如下：

$$\mathrm{Nu} = 1 + \mathrm{RaPr}\langle\theta u_z\rangle. \tag{29}$$

该数值表示总热通量与传导热通量之比；在没有流动时（即热量完全通过传导输运），其值为 1。

D. 线性增长率与数值验证

椭圆不稳定性的预测增长率由式 7 给出，但该式是在z方向无界流的条件下推导的。由于我们采用了z方向具有不可渗透壁面的 RRBC 设置，因此必须确定这会如何影响不稳定性的增长率，尽管我们预计其保持不变（我们也已通过解析方法证明了这一点，但省略了推导过程）。因此，我们进行了多次测试模拟，分析椭圆不稳定性和对流不稳定性的线性增长率。我们以随机噪声作为初始条件，并关闭非线性项，从而产生持续的指数增长，便于提取增长率。我们在对数尺度上对平均动能进行拟合，以确定 σ；注意到若速度分量按 $\exp(\sigma t)$ 增长，则$K \propto \exp(2\sigma t)$。

结果以及两种不稳定性的理论增长率预测值均绘于图 2。上图显示了椭圆不稳定性的增长率随 ε 的变化（其中$n = 0$）；为绘制此图，我们采用了时间单位 γ^{-1}, 相当于使用 $\gamma = 1$。由此可见，无黏增长率的建模结果近似正确。我们还通过纳入黏性衰减率考虑了黏性阻尼，因此总

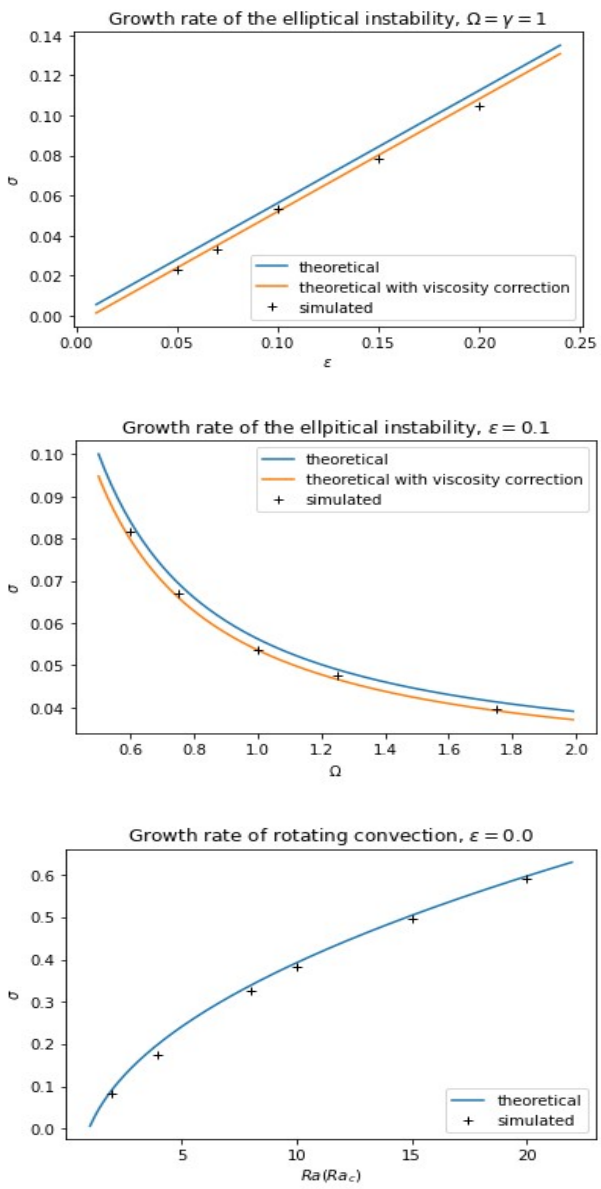


图 2. 椭圆不稳定性和对流分别独立研究时的增长率。上图和中图：椭圆不稳定性的增长率（σ，时间单位为 γ^{-1}），展示了与基于方程 5 的理论预测相比较的模拟结果；上图中，增长率是 ε（$n = 0$, $\gamma = \Omega = 1$ 5 Ω ）的函数；中图中，增长率是方程的函数（保持 $\gamma = 1$ 不变）。模拟结果与理论预测高度吻合，但受到黏度和失谐的影响，增长率略有降低。下图：旋转对流的增长率，与 RRBC 对增长最快模态的理论预测（σ，以热时间单位计）相比较，其中埃克曼数为 $= 5 \cdot 10^{-5.5}$。

增长率为 $\sigma - \nu k^2$（其中 k 是该模态的波矢模长），与我们的模拟结果非常吻合。不过，即使考虑黏度，我们得到的数值仍略低于理论预测，这可能是由于前文讨论的失谐效应所致（即该模态并未精确满足

$k_z/k = 1/2$）。在数值模拟中，这种失谐是由网格点数量有限造成的；此外，选定的长宽比也使波无法精确满足上述条件。不过，由于该条件并未规定波数的大小，而是规定其比值，进而规定其方向，因此，主导体积平均能量的增长最快模态会尽可能处于大尺度，同时仍能充分满足共振条件，以减小黏度修正。这意味着它不受分辨率影响，而是由计算盒的长宽比决定。在此长宽比下，这种失谐对增长率的影响（此处对应于标记点与经黏度修正的增长率之间的差值）以及 $\gamma = \Omega = 1$，对应于图 2 上图和本文中的其他模拟，其数值计算结果为 ≈ 0.002。

图 2 中间面板展示了椭圆不稳定性的增长率随Ω的变化（保持 $\gamma = 1$不变），其结果也与理论预测十分吻合，但出于相同的原因，增长率仍略低一些。图 2 底部面板展示了埃克曼数为 $= 5 \cdot 10^{-5.5}$ 时对流不稳定性的增长率，此处采用热时间单位；结果同样与增长最快模态的线性对流增长率非常吻合（通过数值求解相关三次色散关系可得，其标度为埃克曼数的$^{-1/3}$ 次方），符合预期。因此，我们可以确信这两种不稳定性都已被正确捕捉。

III. 数值结果

A. 说明性模拟的定性分析

我们首先展示图 3 中流动的沿z方向平均垂直涡度 $\langle \omega_z \rangle_z$，以此开始讨论模拟结果。图中取自$t = 0.08$ 时的快照：左图来自仅存在椭圆不稳定性及其相关非线性动力学的模拟，其中 $\varepsilon = 0.1$，$\mathrm{Ra} = 0$；右图来自同时存在椭圆不稳定性、对流不稳定性及二者相关非线性动力学的模拟，其中 $\varepsilon = 0.1$，$\mathrm{Ra} = 6\mathrm{Ra}_c$。此时不稳定性已过初始饱和阶段，两种情况下流动中都形成了大尺度涡旋。这些大尺度涡旋是椭圆不稳定性和对流非线性演化所产生的重要特征。请注意，在我们选取的长宽比和埃克曼数下，当 $\mathrm{Ra} \gtrsim 3\mathrm{Ra}_c$时，对流大尺度涡便会出现。因此，它们出现时的瑞利数与 Guervilly、Hughes 和 Jones[35], 研究中的对流大尺度涡相近；考虑到 Ra_c的定义中包含因子≈ 8.7，这一点便很容易看出。因此，他们的研究中参数 $\tilde{\mathrm{Ra}} = \mathrm{RaEk}^{4/3} \gtrsim 20$ [35] 换算为：$\mathrm{Ra} \gtrsim 20\mathrm{Ek}^{-4/3} \approx 2.5\mathrm{Ra}_c$。为清晰起见，图中的涡旋均置于中心位置。左图中，椭圆不稳定性的非线性演化产生了一个气旋涡，以及一个较小、较弱的反气旋涡（位于角落处；请注意这里采用的是周期性边界）。右图中，对流主导流动，因此对流大尺度涡占据主导地位，形成一个单独的气旋涡；背景则主要呈反气旋性。占据主导地位，形成一个单独的气旋涡，背景则主要呈反气旋性。该涡旋中心处的涡量大于左图中涡旋中心处的涡量。右图中，整个计算区域内都存在小尺度对流涡流，因此与单独存在椭圆不稳定性的情形相比，流动显得嘈杂得多。

Barker 和 Lithwick[5] 发现，这些涡旋由椭圆不稳定性的非线性饱和产生，并在他们观察到的惯性波与涡旋的捕食者—猎物行为中发挥关键作用。他们模拟了立方体计算域（$L_x = d = 1$）和高而窄的计算域（$L_x/d < 1$），但并未考察较宽计算域（$L_x/d > 1$）中的动力学，而这类计算域通常用于研究对流。

图4上图显示了在宽盒中模拟椭圆不稳定性时，体积平均动能随时间的变化；其中 $\varepsilon = 0.1$，瑞利数 $= 0$。Barker 和 Lith- wick[5] 此前在 1×1×1 盒中观察到的涡旋，在 4×4×1 盒中的流动中占据了更大的主导地位；这可从初始饱和后所有时刻流动二维分量的能量（K_{2D}）占主导看出。二维模态，即地转模态的能量（K_{2D}）远高于惯性波的能量（以三维模态中的能量 K_{3D} 量化），但惯性波会经历短暂的爆发，使其能量暂时增加；尽管如此，K_{2D} 仍占主导，这与 Barker 和 Lithwick[5] 的 1×1×1 情形不同。三维能量的每次爆发随后都会带来二维能量的增加，这表明能量从惯性波转移到了涡旋。然而，涡旋会因黏性而缓慢衰减，但惯性波能量的爆发足以补偿这部分能量损失，并进一步增强涡旋，直至在 $t \sim 0.1$ 之后达到准稳态。图5下图中黑色曲线所示的相应能量注入（I_{3D}）表明，三维能量的增加源于直接向这些模态注入能量。二维能量注入（I_{2D}，未显示）正负交替，且数值很小，与零相符。与此同时，图4下图清楚地显示，在纯对流模拟中，大尺度涡旋占据主导地位；其中 $\varepsilon = 0$，瑞利数 $= 4\mathrm{Ra}_c$。大尺度涡旋的二维能量不断增长，因此大尺度涡旋本身在图示的所有时刻都持续增长。大尺度涡旋将继续增长，直至达到水平盒尺度，或其增长被黏性耗散所平衡。在该模拟中，初始饱和后存在稳定水平的三维能量，代表对流涡旋中的能量。

对流与椭圆不稳定性的相互作用会随所选参数而变化。首先，图5展示了一个对流较弱但椭圆率较高的模拟，其中 $\mathrm{Ra} = 4\mathrm{Ra}_c$ and $\varepsilon = 0.1$。该模拟中的对流产生了一个大尺度涡旋，使二维模态持续增长。然而，这并未抑制椭圆不稳定性，观测到了大量爆发。事实上，与图4下方面板中的纯对流模拟相比，椭圆不稳定性使二维模态中的能量至少增加了一个数量级，因为爆发向大尺度涡旋注入了更多能量。从$t = 0.1$ 到$t = 0.17$，二维能量持续下降。在此期间，受强涡旋削弱的爆发和对流涡旋都未能提供足够的能量来补偿

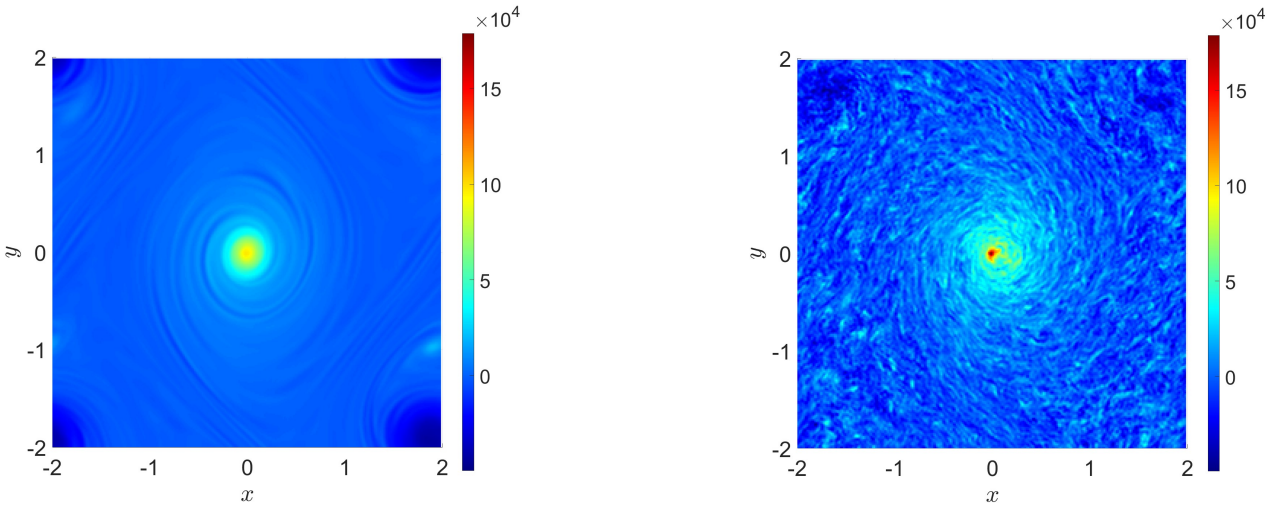


图 3. 流动在$z(\langle\omega_z\rangle_z)$方向上的垂直涡度平均值，时刻为$t=0.08$。为便于观察，两幅图中的气旋涡均置于中心。左：瑞利数为 $=0,\varepsilon=0.1$、埃克曼数为 $=5\cdot10^{-5.5}$时的椭圆不稳定性。右：瑞利数为 $=6\mathrm{Ra}_c,\varepsilon=0.1$、埃克曼数为 $=5\cdot10^{-5.5}$时的椭圆不稳定性与对流。

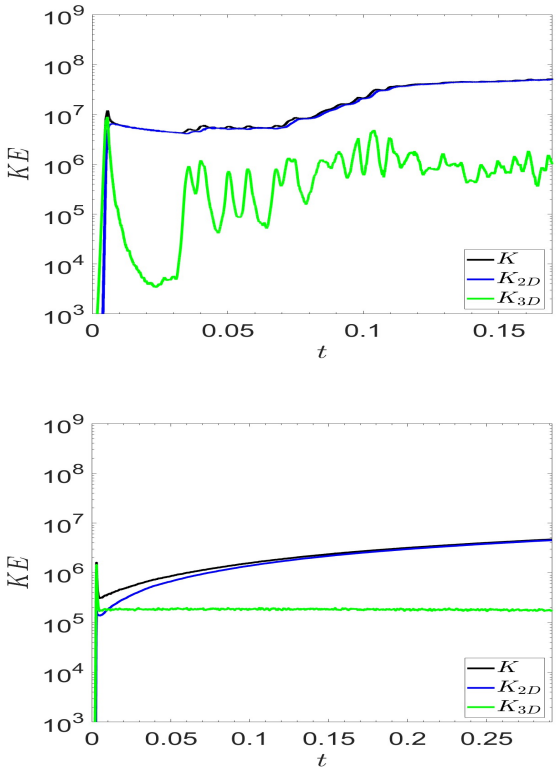


图4. 单独发生椭圆不稳定性（上图）且瑞利数为 $=0,\varepsilon=0.1$，以及单独发生对流（下图）且瑞利数为 $=4\mathrm{Ra}_c,\varepsilon=0$时的模拟动能。动能的二维（蓝色）和三维（绿色）分量分别表示涡旋运动，以及波和对流涡旋中的能量。总动能以黑线表示。

黏性耗散。图5下方面板中绿色所示的相应能量注入大致与纯椭圆模拟的能量注入相当，不过初始时维持在较高水平。从$t=0.11$ 开始，大尺度涡旋达到最强后，行为逐渐从爆发转变为几乎连续的能量注入。从$t=0.21$开始，大尺度涡旋充分减弱后，又再次观察到爆发行为。

B. 对流驱动强度和椭圆率的变化

图 6 展示了在 Ek $=5\cdot10^{-5.5}$ 条件下，$\mathrm{Ra}/\mathrm{Ra}_c$ 和 ε 取一系列数值时的结果。左侧各图显示动能各分量随时间的演变，右侧各图则显示能量注入项 I_{3D}。图 6a 和图 6b 展示了 Ra $=6\mathrm{Ra}_c$ 和 $\varepsilon=0.2$ 条件下的模拟。Barker 和 Lithwick[5] 观察到，当 $\varepsilon\gtrsim0.15$ 时，系统行为发生变化，椭圆不稳定性爆发的频率和强度急剧增加。在这种情况下，动能的三维分量维持在较高水平，但仍低于二维分量的能量。能量注入在短时间内出现多次爆发，其中多次爆发的能量注入速率与线性增长阶段的初始爆发相同。爆发频率的增加还使整个模拟过程中持续存在能量注入。在 $t=0.045$ 附近似乎还发生了第二次转变，此时能量注入急剧增加，并维持在显著的非零水平，远高于初始爆发。相应地，在这次模拟中，我们观察到能量三维分量的最低水平也更高。

图6c中的动能表明，提高瑞利数（即增强对流相对于椭圆不稳定性的强度），会导致模拟前半段进入三维分量的可见爆发减少

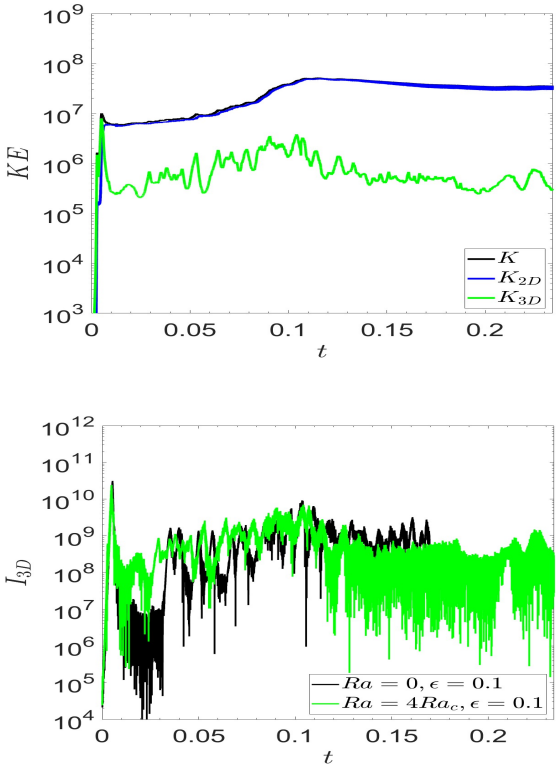


图5。椭圆不稳定性与对流的动能（顶部），其中 Ra $= 4\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0.1$、Ek $= 5 \cdot 10^{-5.5}$。除总动能外，还绘制了二维（蓝色）和三维（绿色）分量。两次模拟的能量注入（底部）：Ra $= 0$, $\varepsilon = 0.1$（黑色）和 Ra $= 4\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0.1$（绿色），二者均具有 Ek $= 5 \cdot 10^{-5.5}$。

与图5上图相比，总动能也进一步由二维分量主导。对流增强，因此（在我们的参数下）大尺度涡旋比图5中更强，掩盖了椭圆不稳定性产生的大多数爆发。图6d中的I_{3D}项也清楚地显示出椭圆不稳定性的减弱：模拟前半段的爆发显著减少，潮汐耗散随之降低。另一方面，出现了一个对应于非零连续能量注入的“底值”，在爆发间隙最为明显。这种持续能量注入源于对流与平衡潮汐流之间的相互作用。

图 6e，尤其是图 6f，证实随着对流相对于椭圆不稳定性增强，这种持续注入得以发生。椭圆率已降至 $\varepsilon = 0.05$，从而削弱了椭圆不稳定性（其增长率与 ε 成正比）。因此，椭圆不稳定性引发的爆发已消失，只剩下一次短暂的初始爆发，随后便出现持续注入。这些模拟表明，存在一个临界点：对流凭借大尺度涡旋及其产生的有效黏度对惯性模态的阻尼作用，强到足以压过椭圆不稳定性，使爆发完全受到抑制。

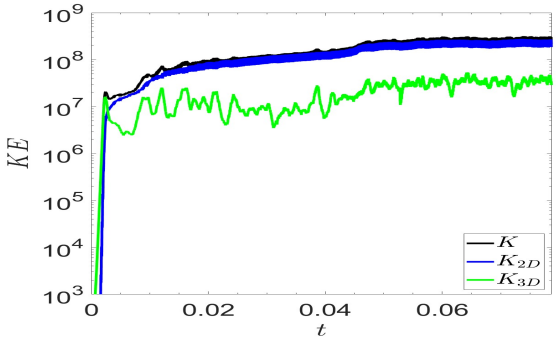
在图6g和图6h中，将瑞利数提高至 Ra $= 20\mathrm{Ra}_c$，并保持 $\varepsilon = 0.1$ 而不是降低 ε，会产生类似的行为：椭圆不稳定性不再出现爆发行为，而是出现持续能量注入。因此，即使在较低的瑞利数下存在爆发，提高 Ra 也会抑制爆发。此外，与图6f相比，持续注入项增加了约20倍。随后，持续能量注入随 Ra 和 ε增加。因此，引入对流会产生两个影响：1）随着对流强度相对于椭圆不稳定性强度的增加，椭圆不稳定性的爆发受到更大程度的抑制；2）对流与背景流之间的相互作用产生持续能量注入。

C. 椭圆不稳定性对热输运的影响

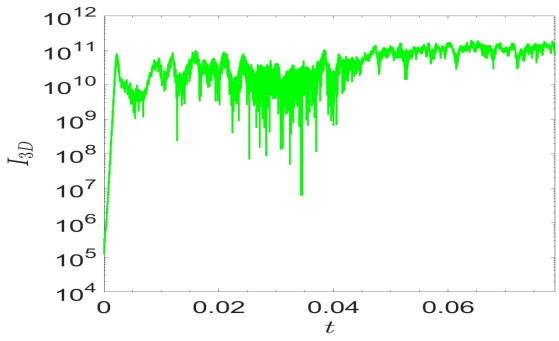
椭圆不稳定性的另一种影响是改变热输运。椭圆不稳定性激发的惯性波能够在系统中输运热量[15,28]。椭圆不稳定性既能在稳定分层流体中发生并影响热输运，也能在对流不稳定流体中发生并产生影响（见式 7）。我们观察到，热输运与椭圆不稳定性的爆发相关，其变化也呈现出类似的爆发性。努塞尔数表示模拟中的热输运，并在图 7 上图中显示为 $\varepsilon = 0.1$、Ra $= 4\mathrm{Ra}_c$时随时间的变化。这体现了椭圆不稳定性在此次模拟中的双重作用。爆发会增强热输运，使努塞尔数暂时升高。随后，椭圆不稳定性所产生的增强气旋涡会略微降低热输运，这与[35,36]观察到的对流大尺度涡旋存在时热输运降低的现象相似。他们提出，这种降低是因为气旋涡实际上会增强旋转，从而进一步限制垂直运动，并根据泰勒-普라우德曼定理[43]降低热输运。

在稳定分层流体中（Ra < 0），或在对流稳定但分层不稳定的流体中（Ra $< \mathrm{Ra}_c$），若不存在椭圆不稳定性，则不会有持续存在的涡旋或垂直运动。因此，在该状态下，热输运将完全以传导为主（在较长时间尺度上，即瞬态过程衰减后），且 Nu $= 1$。椭圆不稳定性在这两种状态下引入的垂直运动，可能会在爆发期间输运热量，即使对于对流稳定的流体也是如此。

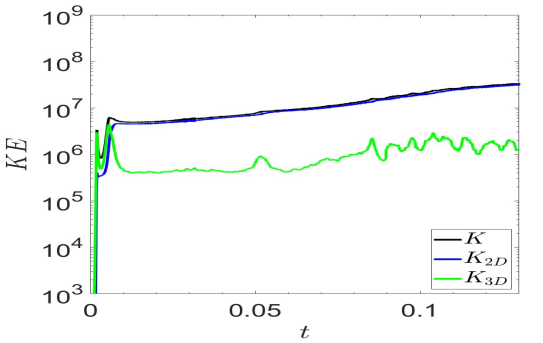
椭圆不稳定性对热输运的影响，已通过图 7 下方面板中努塞尔数的时间平均值进行了量化；这些模拟是在 $\varepsilon = 0$ 和 $\varepsilon = 0.1$条件下进行的。由于椭圆不稳定性不会发生爆发，因此当对流较强时，热输运并没有可观测的增强。事实上，由于平衡流的椭圆率会略微增加涡旋的二维能量，因此它很可能导致总热输运略有降低；Ra $= 15\mathrm{Ra}_c$ 和 Ra $= 20\mathrm{Ra}_c$处插图中降低的努塞尔数或许支持了这一点。在较低的正瑞利数下，椭圆不稳定性在增强或抑制



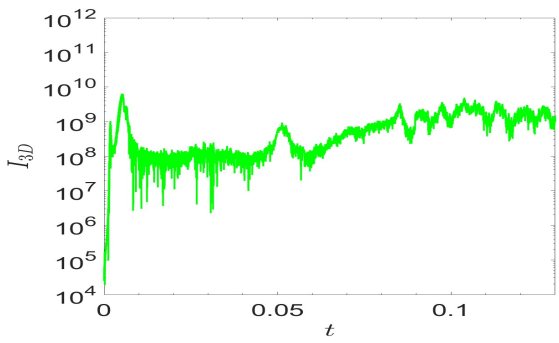
(a) K 模拟中的瑞利数 $= 1.99\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0.2$。



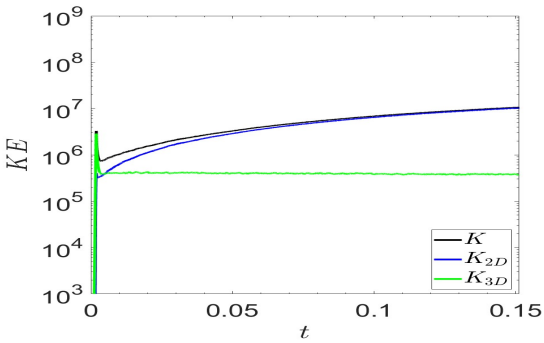
(b) I_{3D} 模拟中的瑞利数 $= 1.99\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0.2$。



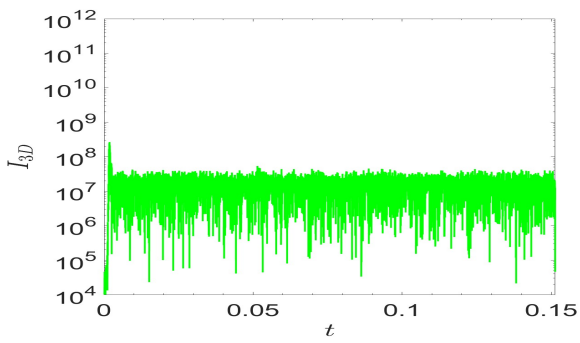
(c) K 模拟中的瑞利数 $= 6\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0.1$。



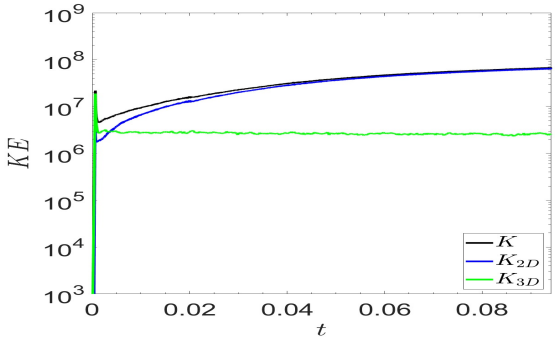
(d) I_{3D} 模拟中的瑞利数 $= 6\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0.1$。



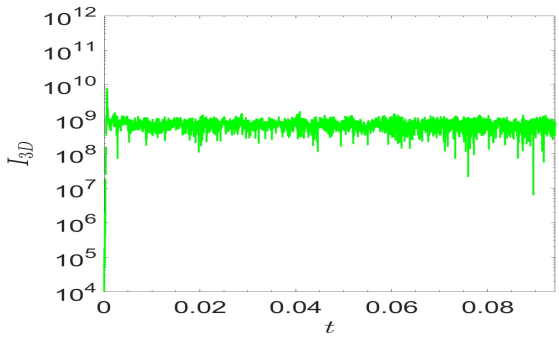
(e) K 模拟中的瑞利数 $= 6\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0.05$。



(f) I_{3D} 模拟结果，瑞利数 $\mathrm{Ra} = 6\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0.05$。



(g) K 模拟结果，瑞利数 $= 20\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0.1$。



(h) I_{3D} 模拟结果，瑞利数 $\mathrm{Ra} = 20\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0.1$。

图 6. 一系列模拟中的动能（左）和能量注入贡献I_{3D}（右）。对流使潮汐流持续向流动注入能量，从而维持潮汐耗散。如果相较于椭圆不稳定性，对流足够强，就能抑制爆发，仅留下这种持续能量注入。

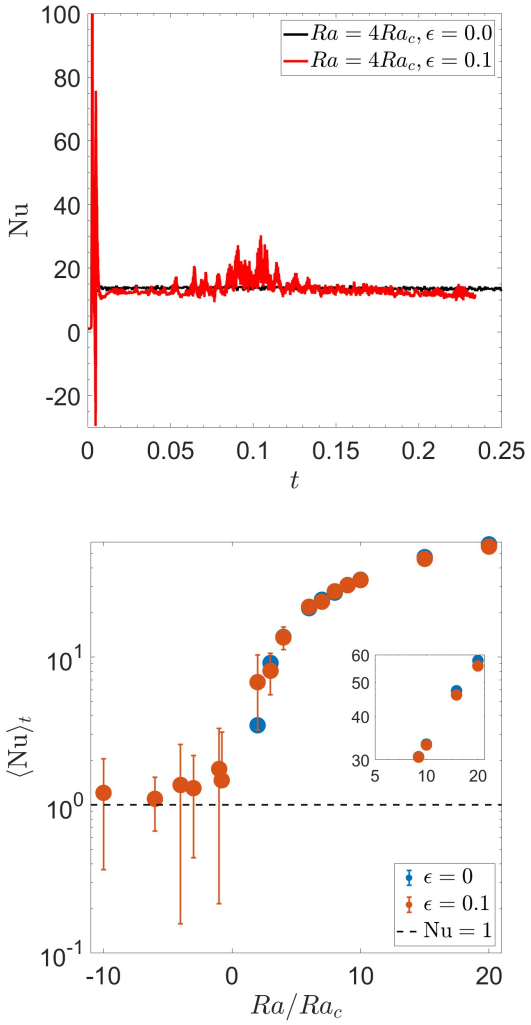


图 7。上图：在 $\mathrm{Ra} = 4\mathrm{Ra}_c$、$\varepsilon = 0.1$、$\mathrm{Ek} = 5 \cdot 10^{-5.5}$ 条件下，有（红色）和无（黑色）椭圆不稳定性时，努塞尔数随时间的变化。下图：有（橙色）和无（蓝色）椭圆不稳定性时努塞尔数的时间平均值。椭圆不稳定性在发生时会产生热输运，即使处于稳定分层区（$\mathrm{Ra} < 0$）也是如此。$\mathrm{Nu} = 1$ 表示流体运动没有产生热输运（黑色虚线）。

热输运随时间的变化。对于非常弱的对流，即不存在由对流产生的大尺度涡旋时，椭圆不稳定性会显著增强净热输运；而在更强的对流下，它会抵消或略微降低热输运。最后，椭圆不稳定性确实会在稳定分层状态下产生热输运，尽管额外的热输运随时间变化很大，只在椭圆不稳定性能量注入的爆发期间出现，并且会随着分层增强（即，$-Ra$ 增大）而减小。这表现为随着流体变得更加稳定分层，努塞尔数的平均值趋近于 1；需要注意的是，图中绘制的所有情况在线性上都是不稳定的。

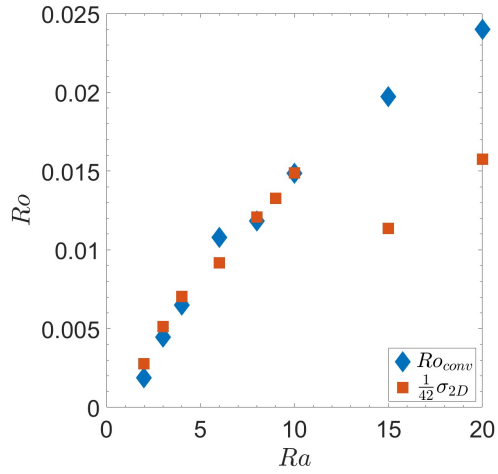


图 8. 根据垂直对流速度计算得到的对流罗斯贝数（蓝色），与涡旋的缩放增长率（橙色）进行比较。增长率除以 142 后进行缩放；缩放后的增长率与对流罗斯贝数在 $\mathrm{Ra} = 10\mathrm{Ra}_c$之前一致。

D. 二维对流涡旋的增长率

在图 8 中，我们考察初始爆发期间对流产生的二维能量K_{2D}的增长率随瑞利数的变化（即确定模拟初始阶段由$K_{2D} \propto \exp(\sigma_{2D} t)$定义的 σ_{2D} ）。这里考察的是 $\varepsilon = 0$ 以及具有更高ε的模拟，但所有模拟都处于持续能量注入状态。我们发现，非零椭圆率对这一增长率影响甚微，只会造成轻微而不显著的变化。观察到增长率σ_{2D} 随瑞利数增大而上升。在较高瑞利数下（$> 10\mathrm{Ra}_c$），这一增长趋势会出现偏离。一种可能的解释是，随着动能的三维分量增大，二维分量的增长率缓慢上升。由于在这些瑞利数下三维分量增长迅速，非线性崩溃会在二维分量达到其最大增长率之前发生。将缩放后的二维增长率与各次模拟中的对流速度进行比较（以蓝色菱形表示），并由此与模拟的对流罗斯贝数（$\mathrm{Ro}_{conv} = \sqrt{\langle u_z^2 \rangle}/(2\Omega d)$）进行比较，我们发现二者吻合良好。这意味着在初始阶段，二维模态的增长随罗斯贝数缩放，即 $\sigma_{2D} \propto \mathrm{Ro}_{conv}$。请注意，这与例如 Kerswell[44], 提出的、基于（无对流情况下）惯性波对之间弱非线性相互作用所预测的缩放关系不一致；该预测为$\sigma_{2D} \propto \mathrm{Ro}^2$。不过，这与惯性波和地转模态相互作用产生大尺度涡旋的预测一致，该过程发生在罗斯贝数足够大时[45]，尽管目前尚未提出针对对流大尺度涡旋的理论。

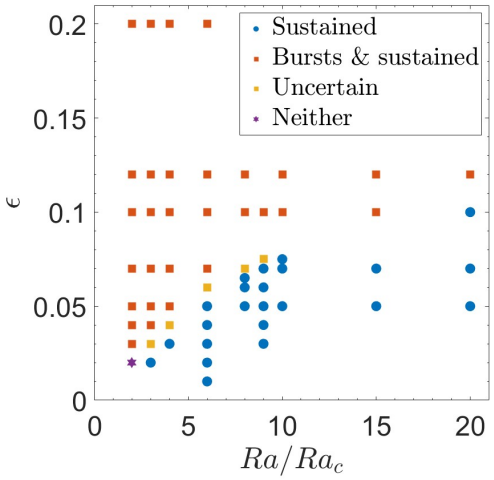


图 9. 展示模拟中观测到行为的“相图”。观测到持续行为但未出现椭圆不稳定性爆发的模拟以蓝色标示；出现明显椭圆不稳定性爆发（且可能伴有额外持续行为）的模拟以橙色标示。不确定的标记表示模拟接近状态转变可能发生的位置。Ra $=2\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0.02$ 的情况以紫色标示，因为既未显示持续能量注入，也未出现椭圆不稳定性爆发。

IV. 持续能量注入分析

A. 持续潮汐能量注入的起源与参数范围

我们进行了一系列模拟，在埃克曼数 Ek $= 5 \cdot 10^{-5.5}$ 下改变 ε和瑞利数 Ra，以确定何时会出现持续能量注入（而非爆发性）。首先，我们根据这些模拟绘制了图 9 所示的“相图”，标示出哪些模拟中观察到了椭圆不稳定性的爆发，哪些模拟中观察到了持续能量注入。凡是出现过椭圆不稳定性爆发的模拟，即使只在最初时刻出现，也被标记为具有爆发性（橙色标记）；而未出现此类爆发的模拟则被标记为持续型（蓝色标记）。具有爆发性的模拟仍可能表现出持续能量注入；不过，为了确定椭圆不稳定性爆发仍会出现的范围，此处将它们归类为具有爆发性。有些模拟很难通过目视判断其属于爆发型还是持续型，因此被标记为不确定（黄色标记）。两种“相位”之间的转变很可能位于这些标记附近。最后，有一个点被标记为“两者皆非”，即对应于瑞利数为 Ra $=2\mathrm{Ra}_c$、$\varepsilon = 0.02$的模拟。该模拟中没有出现爆发，因为在这一对流强度下椭圆不稳定性过弱，无法发挥作用。但它也没有表现出任何持续能量注入。还需指出，在这一超临界度（Ra/Ra$_c$）下，大尺度涡旋并不存在；Guervilly、Hughes 和 Jones[35] 也观察到这一现象与埃克曼数无关编号。

为解释椭圆不稳定性爆发的缺失，我们在实空间和傅里叶空间中研究流动的三维模态。在实空间中，我们采用类似于 Favier、Guervilly 和 Knobloch[46] 所用的方法来确定三维流动。三维速度分量通过总速度与经z方向平均的水平（或二维）速度分量之差获得：

$$\begin{aligned} u_{x,3D} &= u_x - \langle u_x \rangle_z, \\ u_{y,3D} &= u_y - \langle u_y \rangle_z, \\ u_{z,3D} &= u_z. \end{aligned} \tag{30}$$

这里，$\langle u_x \rangle_z$、$\langle u_y \rangle_z$ 分别是速度的深度平均x 和y 分量，即水平速度分量。由此计算出三维速度的大小。Favier、Guervilly 和 Knobloch[46] 指出，对流大尺度涡会抑制三维运动，使涡旋内部形成三维速度较低的区域。由于我们观察到类似的大尺度涡旋，这种对三维模态的抑制可能有助于抑制椭圆不稳定性。

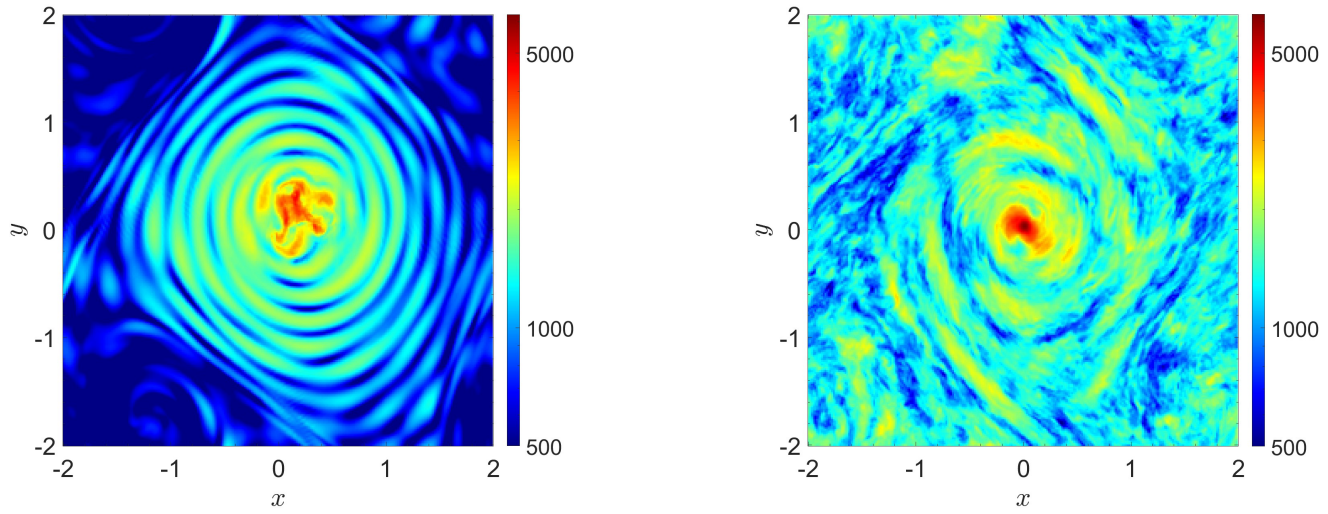
首先，我们用这种方法考察孤立情况下椭圆不稳定性的一个案例，见图 10a，参数为 $\varepsilon = 0.1$，瑞利数 $= 0$。我们展示了不稳定性爆发期间中平面（$z = d/2$）上$t = 0.05$ 时的总速度大小u_{3D}。此时，初始饱和后已形成涡旋。在图 10a 中可以看到，爆发期间的功率集中在涡旋内部，尤其是其中心。

在右图中，图 10b 展示了椭圆不稳定性与对流共同作用下的一项类似模拟结果；模拟采用参数 $\varepsilon = 0.1$，瑞利数 $= 6\mathrm{Ra}_c$，对应椭圆不稳定性爆发期间的 $t = 0.1$。我们再次观察到，爆发集中在涡旋中心。考察同一模拟中椭圆不稳定性未发生爆发的情况，以及瑞利数为 Ra $= 6\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0.05$ 的一项模拟（未展示），可以发现，涡旋中心并没有出现这种功率集中。相反，我们得到了与 Favier、Guervilly 和 Knobloch[46] 所发现相同的对流三维运动受到抑制的结果。

因此，根据这些结果，椭圆不稳定性的爆发主要集中在大尺度涡旋的中心。由此预计，大尺度涡旋会对椭圆不稳定性的增长产生显著影响，因为这些涡旋内部存在的自由惯性波不同于原始流动中的惯性波，从而构成一种约束，使椭圆不稳定性失谐。

B. 频率-波数谱分析

现在，我们采用 Le Reun 等人[9] 提出的方法，进一步分析我们的模拟：计算流动的频率-波数谱，以识别惯性波和对流。图 11 所示的傅里叶空间分析利用椭圆不稳定性的两个特性在谱中识别它：1）它具有优选方向（波矢取向）；2）惯性波的色散关系将每个方向与特定频率关联起来。



(a) $t = 0.05$，瑞利数 $= 0, \varepsilon = 0.1$。

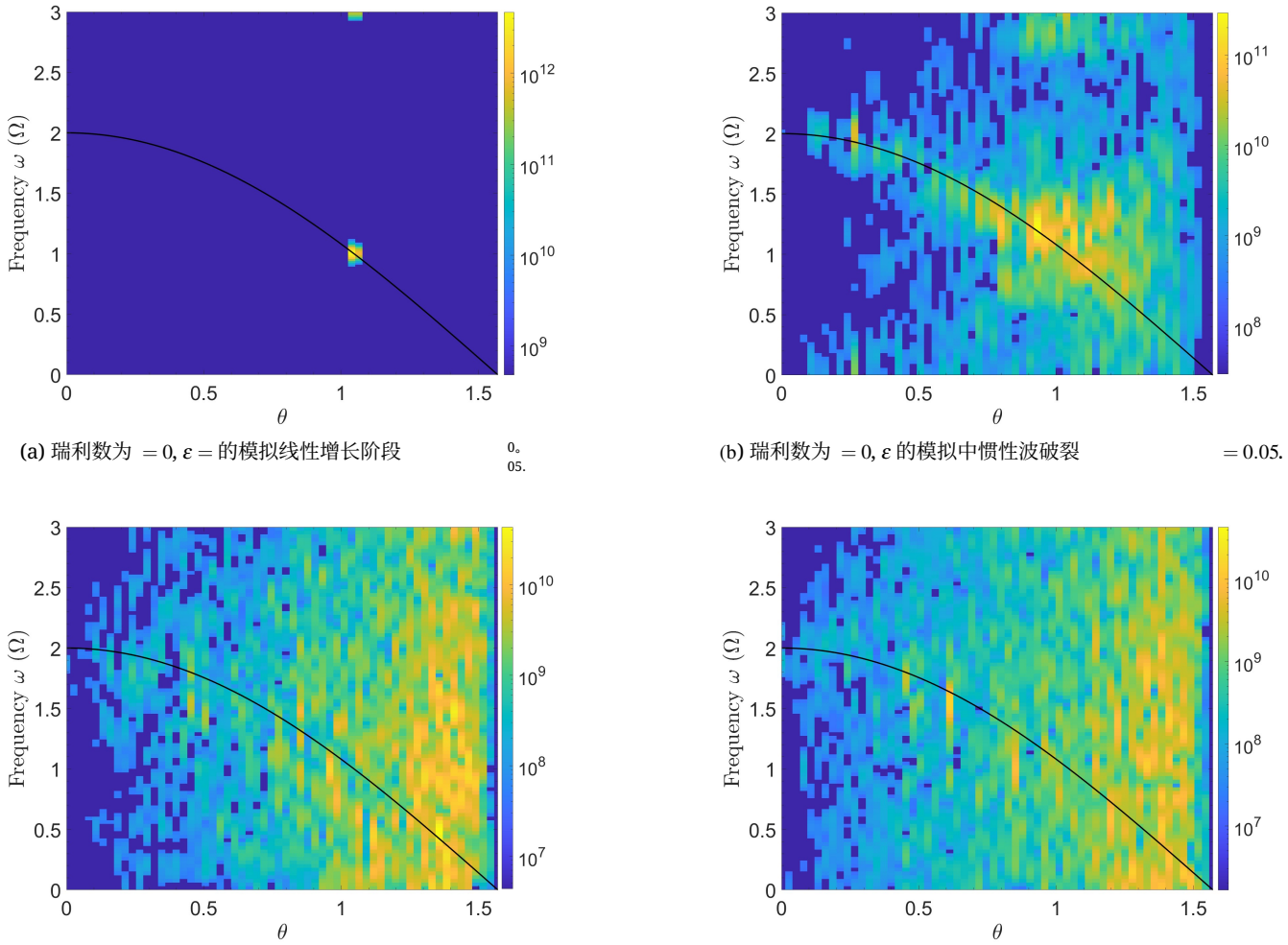
(b) $t = 0.1$，瑞利数 $= 6, \varepsilon = 0.1$。

图 10. 大尺度涡旋形成后的一次不稳定性爆发期间的总速度大小 u_{3D}，显示其局限于涡旋内部。左：单独的椭圆不稳定性，$\varepsilon = 0.1$。右：椭圆不稳定性与对流。为清晰起见，涡旋位于画面中央。

流动的方向，即波矢与旋转轴 θ之间的夹角，可由比值k_z/k $=\cos(\theta)$得到。在模拟的每个时间步，都可以将与特定波矢相关的各个速度分量（即u_x、u_y、u_z）归入与其角度和波数（波矢模长）对应的区间。角度方向采用 60 个区间θ，其中 $\theta = [0, \pi/2]$；同样，k区间的大小设为 $\pi/2$，并设置足够多的区间，以覆盖模拟空间分辨率允许的所有取值。为了得到频率和角度的函数谱，我们对k区间求和，从而得到每个时间步中各波矢角度区间内的总速度分量。时间步长均为 10^{-6}，以便准确捕捉周期为 $\pi \cdot 10^{-4.5}$ 的最快惯性波。对三个速度分量进行时间傅里叶变换，可得到各速度分量的频谱。随后，将变换后的速度与其复共轭相乘，并将三个分量相加，从而得到每个 ω 和 θ 区间内的能量。我们考虑波数区间范围k $= [2, 50]$，以避免计入能量很少的小尺度运动。具有 $\theta = \pi/2$ 的地转模态在能量上占据绝对优势，因此，为了清晰起见，我们在这些图中将 $\theta = \pi/2$ 处的最右列设为零，因为我们希望分析波。

我们在所有 $\theta - \omega$ 能谱中以黑色实线绘出惯性波的色散关系（不存在涡旋和分层时）。因此，绘出的是方程 4 中给出的色散关系。对于所绘出的瑞利数，这种选择是合适的，因为对流往往会降低箱体主体部分的浮力频率大小，从而形成有效浮力频率 $N^2_{eff} > N^2$（请注意，N^2 为负）。在所绘出的瑞利数下，$\mathrm{Ra} = 4\mathrm{Ra}_c$、$\mathrm{Ra} = 6\mathrm{Ra}_c$和 $\mathrm{Ra} = 8\mathrm{Ra}_c$时，相应的有效浮力频率分别为：$\mathrm{N}^2_{ef}\mathrm{f} \approx -1.5\mathrm{Ra}_c$、$\mathrm{N}^2_{ef}\mathrm{f} \approx -2.5\mathrm{Ra}_c$、$\mathrm{N}^2_{ef}\mathrm{f} \approx -3\mathrm{Ra}_c$。因此，在这些模拟所用的瑞利数下，$\mathrm{N}^2_{ef}\mathrm{f}/\Omega^2 \sim \mathcal{O}(10^{-2})$，这意味着方程 6 中的第二项接近于零，只会影响 $\theta \approx \pi/2$附近的色散关系。椭圆不稳定性的初始爆发预计会出现在其偏好的角度 $\theta = \arccos(1/2)$ $= \pi/3$ 处（当 $\mathrm{n} = 0$时）。结合其色散关系，椭圆不稳定性增长最快的模态预计位于这些图中的 $\theta = \pi/3$, $\omega = \Omega$ 处。因此，我们可以很容易地在傅里叶谱中辨认出椭圆不稳定性。图 11a 给出了一个能够清楚辨认出椭圆不稳定性的例子，该图根据瑞利数为 $\mathrm{Ra} = 0, \varepsilon = 0.05$ 的模拟线性增长阶段计算得出。线性增长阶段所有能量不可忽略的模态都集中在这一点以及 $\theta = \pi/3, \omega = 3\Omega$处；后者源于频率为 2Ω （波数为零）的背景潮汐流与 $\omega = \Omega, \theta = \pi/3$处主导模态之间的“非线性”相互作用。

在最初的线性增长阶段之后，可以观察到惯性波破碎，导致能量集中在最初增长最快的模态附近，但其分布主要沿着惯性波色散关系。地转模态中也存在能量（$\theta \sim \pi/2$，图中未示出），此外，波与潮汐流[9]的次级非共振相互作用还产生了“镜像色散关系”。图 11b 显示了与图 11a 相同的模拟，但此时已越过线性增长阶段。大部分能量集中在最初增长最快的模态附近，但能量也分散在整幅图中，远离色散关系；也就是说，产生的能量不再仅仅局限于



(a) 瑞利数为 $=0, \varepsilon =$ 的模拟线性增长阶段 0。05.

(b) 瑞利数为 $=0, \varepsilon$ 的模拟中惯性波破裂 $=0.05$.

(c) $t = 0.11 - 0.13$ 模拟的 $= 6$瑞利数$_c$, $\varepsilon = 0$。

（d）模拟中 Ra $= 6\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0.05$ 的$t = 0.11 - 0.13$。

图 11. 对$t - \theta$ 谱进行傅里叶变换得到的各种能谱，其中 ω 以 Ω 为单位。所用的波数区间范围为：$k \in [2, 50]$。黑色实线表示自由惯性波的色散关系。为便于观察，将包含地转模态、否则会占主导地位的最右列设为零。

在惯性波集合中。

图 11c 显示了不含椭圆不稳定性的旋转对流模拟的频谱，其中 Ra $= 6\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0$，时间范围为$t = 0.11$ 至$t = 0.13$。可以看出，对流会在较高的 θ 值处引入模态。线性增长率预测可以解释这一现象：对于该瑞利数，我们可以证明，导热态发生对流不稳定性要求$n = 1$ 模态满足 $\theta \approx [1.4, \pi/2]$。在这幅图中，主导模态确实集中在 $\theta \approx [1.4, \pi/2]$ 处的对流模态上。远离这些模态的能量大体上遵循色散关系。这一点尤其有趣，因为临界状态下的对流模态是稳态的，因此它们应具有 $\omega \sim 0$，并集中在图的底部。因此，我们可以推测，对流产生的湍流被旋转卷入惯性波中，从而解释了这些模态的频率。旋转对流中的惯性波预计由振荡对流模态产生，条件是普朗特数 Pr < 1（严格来说，对于 Pr< 0.677）[30]，，并且具有此前已在模拟中观察到[47]，普朗特数 Pr < 1。在普朗特数 Pr ≥ 1 下，旋转对流会产生惯性波；而在对流球壳模拟中，普朗特数 Pr > 1 下检测到惯性波[48]，这也支持了我们的观点。

同时呈现椭圆不稳定性和对流特征的谱，预期会是这些特征的组合，尽管很可能难以区分椭圆不稳定性的湍流阶段与对流运动。不过，椭圆不稳定性爆发的位置应能为判断持续能量注入中是否包含较弱（被掩盖的）爆发，抑或椭圆不稳定性完全不存在，提供一些线索。图 11d 展示了 Ra $= 6\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0.05$ 的模拟，其分析时间范围为$t = 0.11$ 至$t = 0.13$。结果显示了预期的对流模态，但在椭圆不稳定性预期出现的位置没有增强的功率。因此，我们得出结论：在这些参数下，对流抑制了椭圆不稳定性的发生。

根据图 10b 中可见的波动以及对流的线性理论分析，对流运动预期是小尺度运动；在这些参数下，该分析预测不稳定模态出现在波数区间$k = [30, 50]$内。与此同时，能量占主导地位的惯性波很可能是大尺度的。这是椭圆不稳定性具有方向性的直接结果：它会选择黏性效应最小的模态（即可能尺度最大的模态，它们的非线性级联时间也最长）。因此，我们在附录 §C 的图 22 中，采用有限波数范围$k = [2, 12]$，重新绘制了图 11 中的曲线。

利用傅里叶谱，我们可以确定在给定 ω 时，模拟中能量最集中的波数随 θ at 的变化情况。为此，我们不对所有波数 k 求和，而是在图12中构建一个 θ–k 谱。我们关注色散关系上活跃的波数大小。因此，我们对波数进行了傅里叶变换，得到一个 aω − k − θ矩阵。接着，通过提取位于色散关系上的一组 ω 和 θ 对应的所有 k 值的能量，获得色散关系的切片。图12左图展示了与图 11a 相同的模拟，即纯椭圆不稳定性的线性增长阶段。这里的能量集中在多条黑色实线上，这些曲线由 θ、垂直波数 $k_z = n_z\pi$ 与总波数 k 之间的关系定义：$\theta = \arccos(k_z/k)$。每条曲线对应不同的整数垂直波数 n_z，其中 $n_z = 1$ 是最低的一条曲线，$n_z = 2$ 是其上一条，依此类推。图中绘出了 $n_z = 1$、2、3、4、5、6 对应的曲线。在这次模拟中，椭圆不稳定性爆发的能量集中于 $n_z = 2$、$k = 4\pi$ 的模态。与之对应、水平波数整数为 $n_x = n_y$ 的模态是 (5,5,2) 模态。这种分析方法十分有效，能够清楚地显示模拟中哪些惯性模态正在增长。图12右图将此方法应用于与图 11d 相同的模拟，其中对流与椭圆不稳定性处于持续状态。该图显示，(5,5,2) 模态上的能量较少。相反，能量集中在 $n_z = 1$ 曲线上，并偏向更高的波数和更大的角度，这正是对流运动的预期特征。因此，我们再次观察到，这次模拟中没有椭圆不稳定性的明显迹象。

最后，我们希望进一步分析能量注入项 I_{3D}。三维分量是这些 $\theta - \omega$ 谱中不在最右列的任意分量（因为该列具有 $\theta = \pi$，这意味着$n_z = 0$）。因此，为了研究I_{3D}，我们只需将最右列设为零；为便于观察，上述图中已经进行了这一处理。I_{3D} 由雷诺应力分量$u_x u_y$、u_x^2 和u_y^2计算得到。计算完成后，对该量进行傅里叶变换，然后在此处绘制其实部。与之前的图相比，色标最小值有所提高，以减小对流噪声对图像的影响。在图 13 左侧，我们仅展示椭圆不稳定性，对应于与图 11a 相同的模拟。可以看到，在这次初始爆发期间，能量注入到了共振惯性波中。特别是两个频率箱似乎包含了大部分能量注入，一个位于色散关系上，另一个位于镜像色散关系上。作为比较，图 11d 所对应的相同模拟的I_{3D} 绘制在图 13 的右图中。能量注入主要出现在图的右侧，并且不再集中于色散关系附近，这表明能量注入主要进入了对流运动，而不是椭圆不稳定性中的惯性波。这与以下处理方式相一致：将潮汐流动与对流流动之间的能量传递归因于对流运动产生的湍流有效黏度。

C. 对流背景下大尺度涡旋上的椭圆不稳定性的线性增长

根据 § IVA 中的实空间分析，我们得出结论：对流流动及其产生的大尺度涡旋会改变椭圆不稳定性的后续增长，这与椭圆不稳定性导致的大尺度涡旋变化类似。此外，根据 § IV B 中的傅里叶空间结果，我们发现，当 ε取值较低时，对流流动（及其大尺度涡旋）会在很大程度上抑制椭圆不稳定性。

为进一步考察对流对椭圆不稳定性的影响，我们分析了对流背景下椭圆不稳定性爆发的增长率。首先，我们测量了无对流模拟（Ra $= 0$）中的增长率，作为参照。我们将每次模拟的结果分为初始爆发和后续爆发。初始爆发应接近线性预测，而后续爆发则会受到非线性效应（如大尺度涡旋）的影响。椭圆不稳定性爆发的增长率由K_{3D}的（半）增长率得到；将我们的结果按 $\sigma\varepsilon$ 归一化后，如图 14 所示。无对流情况下初始爆发的增长率（蓝色菱形）接近线性理论预测值（9/16）$\varepsilon\gamma$，即图中的黑色实线。然而，这些模拟的后续爆发（橙色菱形）与该预测值明显偏离。增长率大幅降低，这主要可能是由初始爆发所产生的大尺度涡旋导致的。值得注意的是，随着模拟继续进行、大尺度涡旋中的能量不断增加，这些增长率还会进一步降低。

为了将这些结果与存在对流时的类似结果进行比较，我们开展了新的模拟，其初始流动和温度场取自初始不稳定性饱和很久之后的一次纯对流模拟。我们从瑞利数为 $= 4\mathrm{Ra}_c$（$\varepsilon = 0$）的模拟中选取了多种椭圆率$\varepsilon > 0.05$，并从瑞利数为 $= 8\mathrm{Ra}_c$（$\varepsilon = 0$）的模拟中选取了多种 $\varepsilon > 0.1$，据此启动了若干模拟。图 14 展示了这些结果：瑞利数为 $= 4\mathrm{Ra}_c$ 时，初始爆发以黄色圆圈表示，后续爆发以紫色圆圈表示；瑞利数为 $= 8\mathrm{Ra}_c$时，分别以绿色和青色方块表示。首先关注瑞利数为 $= 4\mathrm{Ra}_c$的情况，可以看到，当 $\varepsilon \lesssim 0.07$ 时，椭圆不稳定性的初始爆发受到抑制。我们先前的结果和相图（图 9）表明，当 $\varepsilon \gtrsim 0.05$时会发生不稳定性爆发。这些结果还表明，对流会显著影响增长率，因为这些标记明显低于理论增长率。后续爆发的增长率分布范围很广

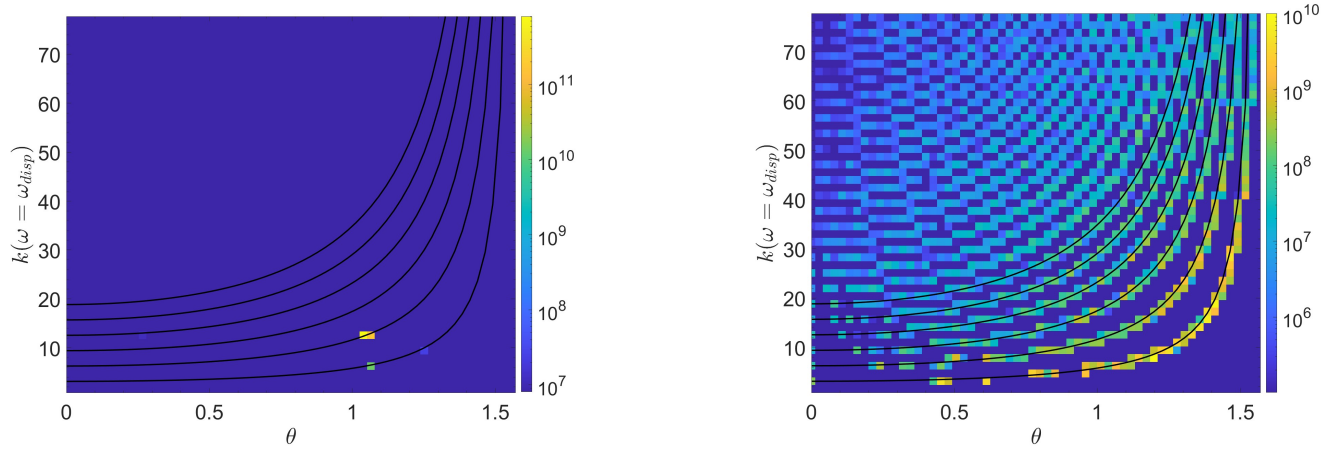


图12. 沿色散关系的每个波数对应的能量随 θ 变化，即所有波数都具有满足 $\omega = 2\Omega\cos\theta$ 的频率 ω。黑色实线由 $k = n_z\pi/\cos(\theta)$ 给出，其中 $n_z = 1$，2，3，4，5，6。有限垂直分辨率意味着能量必须分布在这些曲线上。左：瑞利数为 $\mathrm{Ra} = 0, \varepsilon = 0.05$ 时的线性增长阶段。右：瑞利数为 $\mathrm{Ra} = 6\mathrm{Ra}_c$，$\varepsilon = 0.05$ 时的 $t = 0.11 - 0.13$。

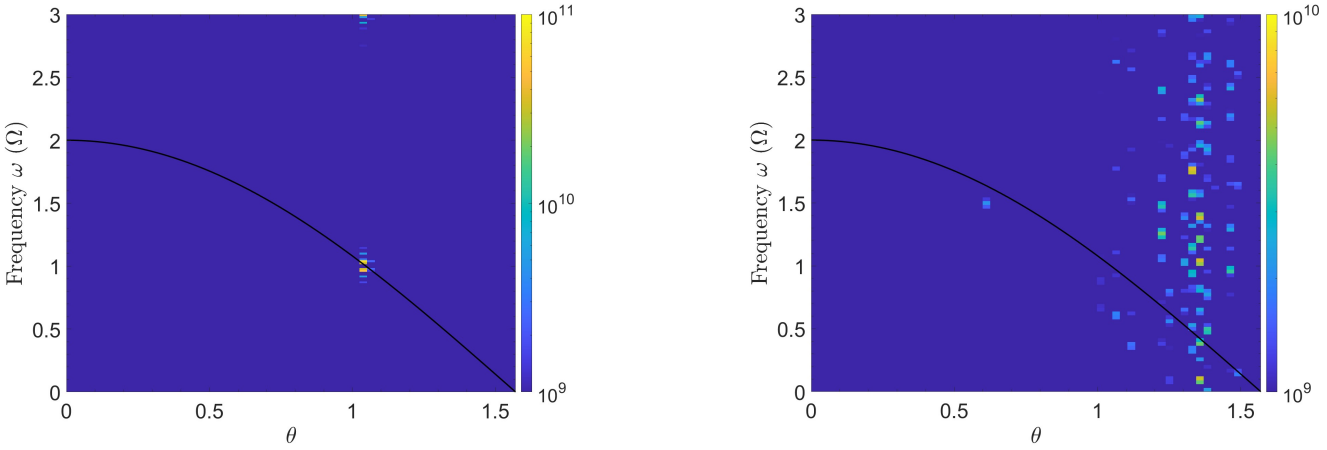


图 13. 通过计算 I_{3D} 并取 $t - \theta$ 谱的傅里叶变换实部得到的 $\theta - \omega I_{3D}$ 谱； ω 以 Ω 为单位。波数区间的间隔为 $k = [2, 50]$。黑色实线表示色散关系。为便于观察，将包含主导流动的地转模态的最右列设为零。左：瑞利数为 $\mathrm{Ra} = 0, \varepsilon = 0.05$ 时的线性增长阶段。右：瑞利数为 $\mathrm{Ra} = 6\mathrm{Ra}_c, \varepsilon = 0.05$ 时的 $t = 0.11 - 0.13$。

。测得的最高增长率与纯椭圆不稳定性模拟的增长率重叠。这意味着，对流大尺度涡以与椭圆不稳定性自身产生的大尺度涡相同的方式抑制椭圆不稳定性，而且抑制作用可能更强。

对于瑞利数为 $\mathrm{Ra} = 8\mathrm{Ra}_c$ 、对流更为湍流的情况，我们的结果显示，其增长率高于瑞利数为 $\mathrm{Ra} = 4\mathrm{Ra}_c$时的增长率，尤其是在 $\varepsilon > 0.14$处。这可能表明椭圆不稳定性的抑制作用减弱，或者随着对流增强，增长率有所提高。增长率提高的一种可能解释可见于公式 7。瑞利数增大时，导热态下的 $-N^2$ 也会增大。然而，与瑞利数为 $\mathrm{Ra} = 0$的情况相比，瑞利数为 $\mathrm{Ra} = 8\mathrm{Ra}_c$ 时的增长率仅提高了 ≈ 1.13 倍，而且即使瑞利数为 $\mathrm{Ra} = 20\mathrm{Ra}_c$，与瑞利数为 $\mathrm{Ra} = 0$的情况相比，增长率也仅提高了 ≈ 1.3 倍。此外，这一倍数的实际影响可能不如上述预测那么显著，因为对流会降低 $-N^2$,，而旋转对流的效率会随着瑞利数 [43] 的增大而提高。

我们在图中将这些结果与一些理论论证进行了比较。我们使用每次模拟的能量注入I_{3D} 作为瑞利数的函数，以获得与这一持续注入率相对应的有效黏度 ν_{eff}（严格来说，该有效黏度作用于潮汐流，而非波）。我们将这一有效黏度与流体黏度ν 相加，得到“总黏度”，并用其计算黏性阻尼率 $-(\nu + \nu_{eff})k^2$。引入有效黏性阻尼后的增长率预测

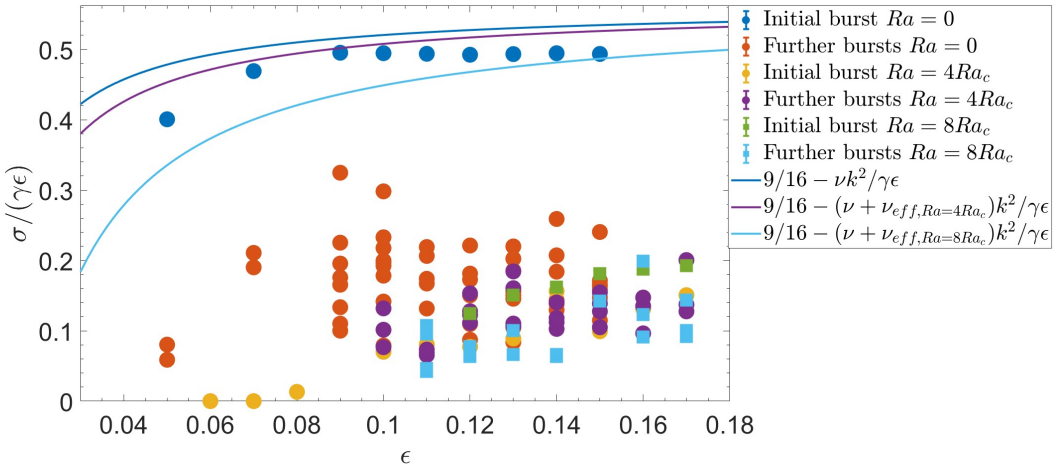


图 14. 在无对流的模拟中测得的椭圆不稳定性初始爆发及后续爆发的增长率，瑞利数 Ra $=0$（蓝色和橙色）；以及从纯对流湍流态（含大尺度涡旋）重新启动的模拟，瑞利数分别为 Ra $=4\mathrm{Ra}_c$（黄色和紫色）和 Ra $=8\mathrm{Ra}_c$（绿色和青色）。图中以蓝线表示无对流时无黏线性增长率的理论预测；以紫线和青线分别表示假设对流在瑞利数 Ra $=4\mathrm{Ra}_c$ 和 Ra $=8\mathrm{Ra}_c$ 下产生有效黏度（阻尼率为 $-\nu_{eff}k^2$）时的预测。该图表明，增长率降低并非源于简单的有效黏度，因为增长率的前因子发生了变化；随着 ε 增大，增长率趋向于低于 9/16 的数值，这一点印证了这一结论。

与 Ra $=4\mathrm{Ra}_c$ 和 Ra $=8\mathrm{Ra}_c$ 相对应的速率分别以紫色和青色线条绘制，假设主导波数和共振条件保持不变。将微观黏度和/或有效黏度衰减率纳入考虑，均与数值获得的增长率不一致。事实上，仅包含椭圆不稳定性的模拟结果表明，大尺度涡旋造成的抑制作用远强于这种有效黏度所预测的结果。此外，对于以对流背景初始化的模拟，增长率随 ε 变化的斜率以类似的方式偏离 9/16 预测值，无论是否存在对流背景。若要改变这一 9/16 数值，共振条件和主导波数必然发生某种变化；这可能是由于本文前文所述的失谐，也可能是由于惯性波的相位变化，从而解释爆发行为。

我们研究每次模拟中的主导波数，以考察椭圆不稳定性的减弱是否是由于大尺度涡旋改变了这一主导波数；我们采用 § IV B 中描述的方法。图15展示了两个瑞利数下符合色散关系的惯性模态的 $\theta - k$ 谱$\varepsilon = 0.15$。这表明，在对流背景上初始化时，初始爆发的主导波数确实发生了变化。左图中的 $\theta - k$ 谱显示了瑞利数为 $=4\mathrm{Ra}_c$，$\varepsilon = 0.15$ 的模拟中首次椭圆不稳定性爆发。能量占优波数不再是无对流时满足理想共振条件的 (5,5,2) 模态，而是功率集中在 $n_z = 1$，其 θ 接近但大于理想值 $\theta = \pi/3$。图15右图展示了瑞利数为 $=8\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0.15$ 时首次椭圆不稳定性爆发的相同情况。在这两个瑞利数下，随后发生的惯性波破裂都会使功率转移到更大的波数，包括 (5,5,2) 模态；该模态虽经黏性耗散，但除此之外会一直维持到下一次爆发。后续爆发中 (5,5,2) 模态的存在，使增长率高于初始爆发时的增长率，但仍远低于理想线性预测值。不过，我们观察到预期的 $k_z/k = 1/2$ 和 $\omega = \gamma$ 处存在功率，因此这似乎不支持以下假设：主导共振的失谐是增长率降低的主要原因。这样一来，Barker 和 Lithwick [5] 最初提出的扰动相位论证，或许可以解释所观察到的增长率前因子变化。

V. 能量注入的标度律

仅由椭圆不稳定性导致的能量注入率（I_{3D}）在流动 ε^3 足够湍流时[5,6]始终按照.....进行标度。然而，我们模拟中的持续能量注入并非椭圆不稳定性单独作用的结果。我们在图 16 的上图中绘制了固定埃克曼数 Ek $=5\cdot10^{-5.5}$ 下、不同瑞利数 Ra 值对应的能量注入I_{3D}随 ε的变化，并依据我们对以对流背景为初始条件的模拟的讨论，用位于 $\varepsilon = 0.08$处的一条竖直虚线将其划分为两个区域。

在该线左侧，当 Ra $\gtrsim 2\mathrm{Ra}_c$ 时，模拟显示出持续的能量注入，且没有明显的爆发；而在线的右侧，模拟显示出明显的爆发。我们使用 Ra $=6\mathrm{Ra}_c$ 数据分别对两侧进行拟合。黑线是利用左侧数据点对持续能量注入进行的拟合，其标度关系为 ε^2。如果对流在方程 28 中表现为有效黏度，这一结果是可以预期的。

右侧的椭圆不稳定性爆发

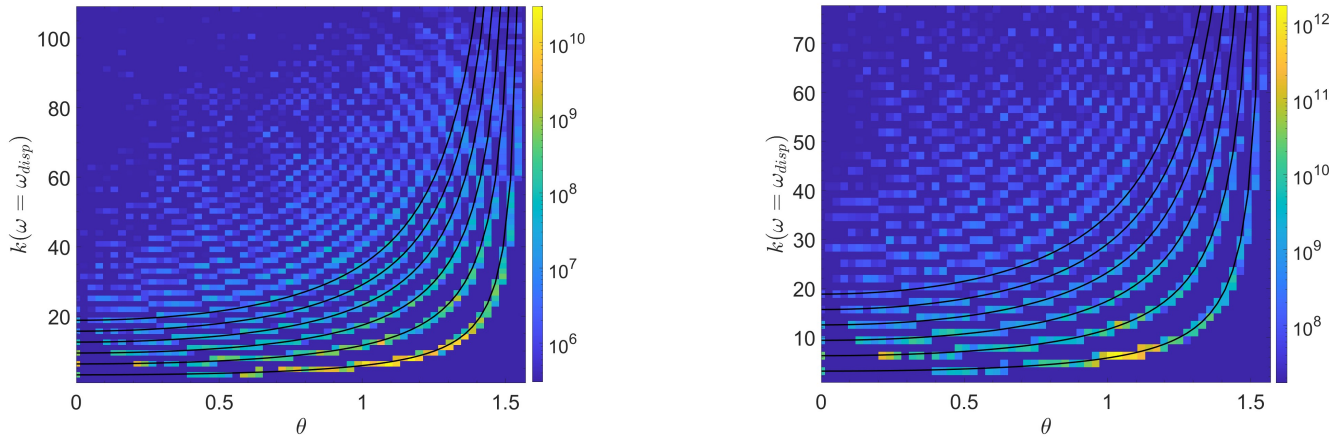


图15. 与图12相同，展示由对流模拟初始化的模拟。左：瑞利数为 $= 4\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0.15$ 的初始爆发，始于瑞利数为 $= 4\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0$ 的状态。右：瑞利数为 $= 8\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0.15$ 的初始爆发，始于瑞利数为 $= 8\mathrm{Ra}_c$, $\varepsilon = 0$ 的状态。.

图中的椭圆不稳定性爆发叠加在这种持续能量注入之上。我们同时拟合了（朴素的）理论预测的 ε^3 标度关系，以及一种如先前观察到的 ε^6 标度关系[5]。两者都与右侧的数据一致，而与左侧的数据不一致。此外，这些拟合与所有瑞利数取值下的模拟数据一致，表明这种标度关系可能与 Ra 无关。在此状态下，椭圆不稳定性比对流的有效黏度高效得多；只有当 $\varepsilon \approx 0.01$ 时，后者才会超过前者，前提是我们将前者按 ε^3标度关系外推。

VI. 讨论与结论

A. 与先前工作的比较

如前文 §II B 所述，在对无界受应变涡旋中椭圆不稳定性的线性研究里，对流会增强椭圆不稳定性的增长率[2]。然而，在我们的非线性数值模拟中，我们观察到相反的现象：随着瑞利数增加，椭圆不稳定性受到的抑制也随之增强。另一方面，对受热圆柱环隙中椭圆不稳定性的线性分析发现，增长率可能随瑞利数增加而降低[27]。在这项线性分析的基础上，研究者开展了椭圆不稳定性与对流相关的实验[28]。这些实验也测量了对流条件下椭圆不稳定性的增长率，并得到了相同结果。此外，他们还发现，埃克曼数越小，不稳定性的增长率越快。此前针对椭球体开展的数值模拟也支持这一结果[15]。尽管这些实验或模拟的几何构型都与我们的模拟不同，也未明确呈现大尺度涡旋，但同样观察到了对流对椭圆不稳定性的抑制。我们由此得出结论，这一结果很可能具有普遍性，即对流会削弱椭圆不稳定性——具有普遍性：对流会削弱椭圆不稳定性。在稳定分层区，我们发现椭圆不稳定性产生的热输运与 Cébron、Maubert 和 Le Bars [15], Lavorel 与 Le Bars [28] 的结果相似；瑞利数低于或略高于临界瑞利数的模拟中，热输运也有所增强。然而，我们没有观察到努塞尔数保持恒定，反而发现随着分层增强，这一效应逐渐减弱。我们还发现，与纯对流模拟相比，在 $\mathrm{Ra} \gg \mathrm{Ra}_c$ 处热输运有所降低，这可能是由于形成了更强的涡旋。

B. 未来工作

在我们当前的设置中，局部盒模型适合用于模拟行星的两极，其中重力和旋转轴都沿z方向。盒模型的位置，以及由此对不对齐的重力与自转的考虑，可能会对这些不稳定性之间的相互作用产生重要影响。Currie等[43]研究了重力与自转不对齐情况下的旋转对流。他们发现，对流羽流（对于快速旋转而言）会沿旋转轴排列，并且在非极区纬度，强烈的纬向流往往会占据主导地位，而不是形成大尺度涡旋。这些纬向剪切流会对热输运产生重要影响，但也可能改变椭圆不稳定性所导致的惯性波激发与饱和，这些问题值得在后续工作中进一步探索。此外，开展足够湍流且旋转迅速的全局模拟，以捕捉与我们所研究状态相似的情形，也将十分有价值，这在一定程度上可沿用此前由 Cébron、Maubert 和 Le Bars 展示的层流模拟思路[15]。按照 Barker[8] 的思路，还可以研究椭圆不稳定性的突发性非线性动力学与对流之间的相互作用。全局模拟（在完整椭球体中）的一个优势在于，线性激发的惯性

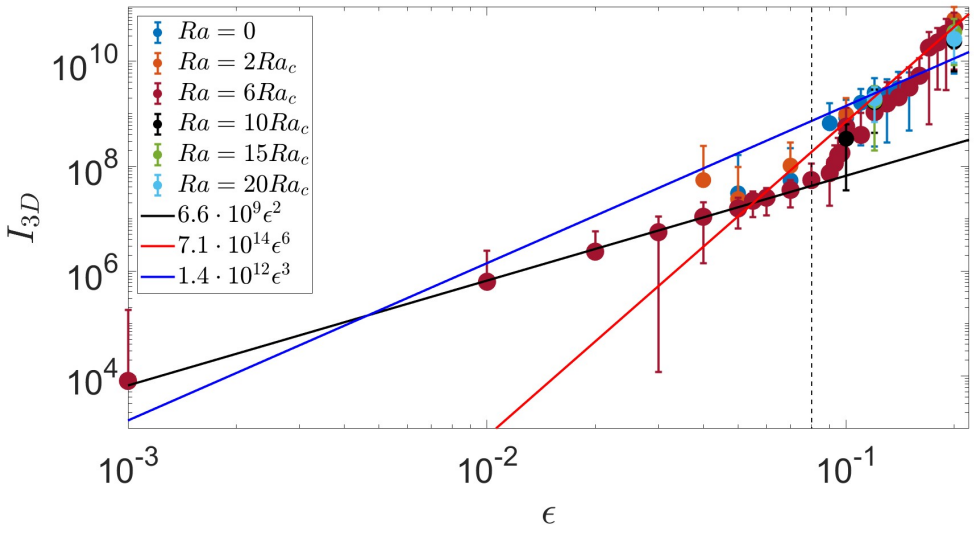


图 16。能量注入率（注入三维模态）I_{3D} 作为 ε 的函数，适用于各种瑞利数。 $\varepsilon = 0.08$ 处的竖直虚线标志着左侧的持续行为与右侧叠加在持续行为之上的爆发之间的转变。在 Ra $= 6\mathrm{Ra}_c$处的数据上拟合了三条曲线。持续行为与 ε^2 标度关系一致，由黑线表示。椭圆不稳定性的爆发叠加在这种持续能量注入之上，导致能量注入率大幅增加。持续+爆发能量注入率分别使用蓝色的 ε^3 拟合和红色的 ε^6 拟合。

波不再受盒模型（人为设定）长宽比的约束。

进一步探索模拟中的参数范围也很有意义，尤其是改变普朗特数。具体而言，低普朗特数（Pr < 0.67）下的旋转对流本身会激发惯性波[47]。这些由对流产生的惯性波也可能受到椭圆不稳定性的影响，并且由于振荡对流持续产生这些惯性波，可能成为另一个潜在的连续潮汐耗散来源。最后，热木星与木星本身一样，往往具有很强的磁场[49]。因此，纳入磁流体力学可能十分重要，并且会对潮汐耗散产生显著影响。在这些模拟中，对流的大尺度涡旋和椭圆不稳定性很可能受到抑制，因为磁场会阻碍大尺度结构的形成。这应当允许椭圆不稳定性持续发生[6]。然而，目前尚不清楚对流会对这种相互作用产生何种影响。

C. 结论

我们利用涉及水平剪切波的伪谱流体力学数值模拟，在笛卡尔模型中研究了椭圆不稳定性与旋转瑞利–贝纳德对流之间的相互作用。首先，我们首次在宽箱体中模拟了无对流情况下的椭圆不稳定性（垂直方向采用无应力不可穿透边界），发现该不稳定性的非线性演化会产生地转涡旋，并且这些涡旋对流动的主导程度甚至超过了在立方体箱体中的情况。

引入对流后，椭圆不稳定性受到抑制；我们认为这主要是由对流产生的大尺度涡旋所致。对流还会向流动中持续注入能量（即从椭圆流/潮汐流中转移能量），其规模与 ε^2 成正比；这可以理解为，对流在耗散潮汐流时充当了与 ε 无关的有效黏度。

我们采用多种方法详细研究了对流对椭圆不稳定性的抑制作用。通过测量受大尺度涡旋削弱的三维运动，我们发现，椭圆不稳定性爆发期间，能量集中在涡旋中心。我们还详细分析了模拟中能量的频率和波数傅里叶谱，以明确识别惯性模态和对流流动。我们观察到，对流流动确实会抑制椭圆不稳定性（以及更广义上注入惯性模态的能量）。在不存在椭圆不稳定性的情况下，旋转对流也会微弱激发惯性模态，其特征是在色散关系曲线上的模态中出现能量。

在从包含大尺度涡旋的对流湍流状态初始化椭圆不稳定性模拟时，我们发现，与无黏性或黏性增长率预测相比，该大尺度涡旋会降低椭圆不稳定性的增长率。与通过粗略采用上述有效湍流黏度进行修正后的预测相比，增长率同样有所降低。大尺度涡旋导致增长率降低，表明主导共振受到其失谐影响，或者大尺度涡旋导致波的相位出现了显著扰动

。我们的傅里叶空间分析表明，在所有椭圆不稳定性爆发期间，存在大尺度涡旋时增长最快模态与不存在大尺度涡旋时发现的模态相同。这表明，后一种解释可能更为适用。

我们还发现，椭圆不稳定性激发的惯性波能够输运热量；当椭圆不稳定性相对于对流较弱或受到抑制时，这对努塞尔数几乎没有影响，但当椭圆不稳定性与对流强度相当时，则能显著增强热输运。椭圆不稳定性也能在稳定分层状态下造成热输运，但随着分层增强，这种作用会减弱（在线性不稳定区间内）。

椭圆不稳定性导致潮汐/椭圆流动的能量传递率（进而也就是耗散率）约与 ε^3 成正比，这与此前在没有对流时得到的结果一致[5,8]。这种标度与相关不稳定性（如岁差不稳定性）所得的结果相似[38,39]。事实上，在椭圆不稳定性起作用时，其能量传递率与先前研究所得的数值相近[6]。这意味着，当椭圆不稳定性未受到对流抑制时，对流对其在天体物理情境下的能量传递率（例如热木星中的情况）影响微乎其微。不过需要指出的是，在一小段模拟范围内，虽然对流并未抑制该过程，但所得的 ε^3 标度也与先前观察到的更强 ε^6 标度相符。未来有必要在更高瑞利数、更小埃克曼数和普朗特数下，对更多湍流状态开展研究，进一步探究标度律，以便可靠地外推至恒星和行星。

致谢

我们感谢 Thomas Le Reun 慷慨提供他在 Snoopy 中的例程，这些例程经过修改后用于生成第 IV 节中的傅里叶谱。我们还感谢 3 位审稿人提出积极且富有建设性的意见，帮助我们改进了本文。NBV 获得了 EPSRC 博士生奖学金 2528559 的资助。AJB 和 RH 获得了 STFC 项目经费 ST/S000275/1 和 ST/W000873/1 的资助。RH 感谢剑桥艾萨克·牛顿数学科学研究所提供的支持与接待；本文的研究工作正是在该所举办的“发电机理论前沿：从地球到恒星”计划期间开展的。本研究获得了 EPSRC 项目经费 EP/R014604/1 的资助。RH 访问牛顿研究所的费用由海尔布隆研究所提供资助。本研究使用了 ARC4（利兹大学高性能计算设施的一部分），以及莱斯特大学 IT 服务部门运营的 DiRAC 数据密集型服务。该服务属于 STFC DiRAC HPC Facility（www.dirac.ac.uk）的一部分。设备经费来自英国商业、能源与产业战略部通过 STFC 资本拨款 ST/K000373/1 和 ST/R002363/1 提供的资本资金，以及 STFC DiRAC 运营拨款 ST/R001014/1。DiRAC 是国家电子基础设施的一部分。

作者声明

利益冲突

作者没有需要披露的利益冲突。

作者贡献

NBV：概念化（同等贡献）；正式分析（主要贡献）；软件（同等贡献）；撰写——初稿（主要贡献）；撰写——审阅与编辑（同等贡献）**AJB**：概念化（同等贡献）；软件（同等贡献）；监督（同等贡献）；撰写——审阅与编辑（同等贡献）**RH**：概念化（同等贡献）；监督（同等贡献）；撰写——审阅与编辑（同等贡献）

数据可用性

支持本研究发现的数据可根据合理请求向通讯作者索取。

附录A：分辨率

我们进行了多项测试，以确保模拟得到适当分辨。我们通过测试努塞尔数来确保热输运得到充分分辨。如果增加垂直（或水平）分辨率后（n_x、n_y、n_z 分别表示各方向上的网格点数），努塞尔数的变化可以忽略不计，则说明此前的分辨率足以分辨对流。图17展示了我们最具挑战性的模拟之一在不同垂直分辨率下的努塞尔数，该模拟的 $\mathrm{Ra} = 15\mathrm{Ra}_c$ 和 $\varepsilon = 0.1$（$\mathrm{Ek} = 5\cdot10^{-5.5}$）。显然，过小的垂直分辨率会影响 Nu；在本例中，当 $n_z \geq 160$时，我们在数值上获得了收敛。我们还针对所有 Ra 进行了类似的测试模拟，以确保具有良好的垂直分辨率。

图 18 展示了一个具有不同水平盒尺寸的模拟的动能水平波数功率谱，该模拟对应一个计算要求较高的情形，瑞利数 $\mathrm{Ra} = 20\mathrm{Ra}_c$，且 $\varepsilon = 0.2$（埃克曼数 $= 5\cdot10^{-5.5}$）。对流产生的大尺度涡旋使最小波数模态占据主导地位。增大盒子尺寸只会让涡旋随时间变得更大。然而，在模拟开始时的初始爆发阶段，约在$t = 0.005$时，大尺度涡旋仍在形成，能量尚未集中在最大尺度上。因此，我们可以检查这些早期相位，以判断盒子尺寸是否适合容纳对流和椭圆不稳定性。此外，我们还可以考察反混叠尺度上的能量，以确定流动是否得到充分分辨。若该处的能量至少比峰值低 10^3 倍，我们便认为模拟“分辨充分”。根据图 18 中的水平功率谱，我们得出结论：水平分辨率为 256×256

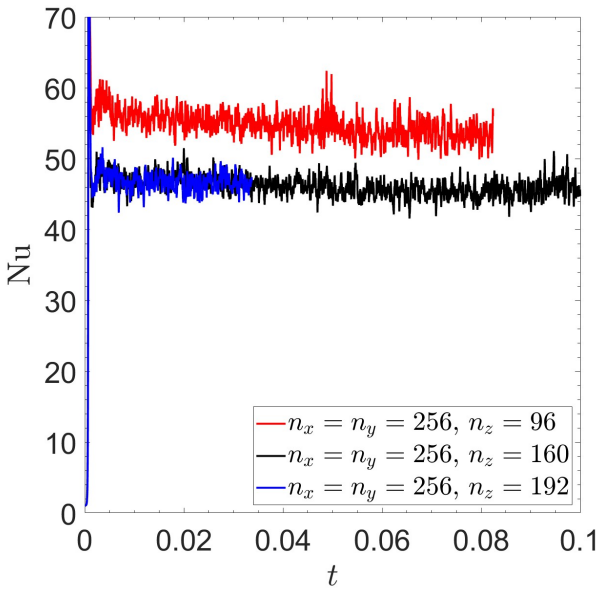


图 17. 不同垂直分辨率下努塞尔数随时间的变化，Ra $= 15\mathrm{Ra}_c$，$\varepsilon = 0.1$，且埃克曼数 $= 5 \cdot 10^{-5.5}$。当$n_z = 160$时，对流已得到充分解析，因为进一步增大nz 不会影响 Nu。

表 I. 不同 Ra 下模拟所用的分辨率表。

埃克曼数 $= 5 \cdot 10^{-5.5}$	$n_x \times n_y$	n_z
$\mathrm{Ra}/\mathrm{Ra}_c = -6,\ -4,\ -3,\ -1,\ -0.8,\ 0_{\circ}3,\ 0_{\circ}8,\ 1_{\circ}99,\ 3,\ 4,\ 6$	256x256	96
$\mathrm{Ra}/\mathrm{Ra}_c = 7,\ 8$	256x256	128
瑞利数/瑞利数$_c = -10,9,10,15$	256x256	160
$\mathrm{Ra}/\mathrm{Ra}_c = 20$	256x256	224

盒子尺寸为 4×4 时是合适的。此外，图中还绘制了两条幂律：黑色虚线表示与湍流的 Kol莫哥洛夫谱相关的$k_{\perp}^{-5/3}$，它与所有谱的中间区间或惯性子区间都相当吻合，唯独 8x8x1 例外。此外，图中还绘制了与波湍流相关的红色虚线$k_{\perp}^{-3}$幂律，它可能与较小的波数相吻合。

Ra 增大会导致模拟更加湍流，需要更高的分辨率才能准确捕捉小尺度效应，而这会带来高昂的计算成本。为了尽量降低计算开销，我们希望在保证模拟得到充分分辨的前提下，尽可能降低分辨率。我们还进行了进一步检查，以确认所研究的最重要物理量——能量注入项 I——已达到数值收敛。为此，我们对一个 Ra $= 20\mathrm{Ra}_c$ $\varepsilon = 0.1$、分辨率为 $512 \times 512 \times 224$ 的模拟进行了额外测试。在图 19 中，将该模拟的能量注入项 I_{3D} 与分辨率为 $256 \times 256 \times 224$ 的模拟结果进行了比较。除存在小幅波动外，两次模拟结果一致，这表明采用 256×256 的水平分辨率即可准确研究能量注入。在固定 Ek 下所有 Ra 所采用的分辨率列于表 I 中。

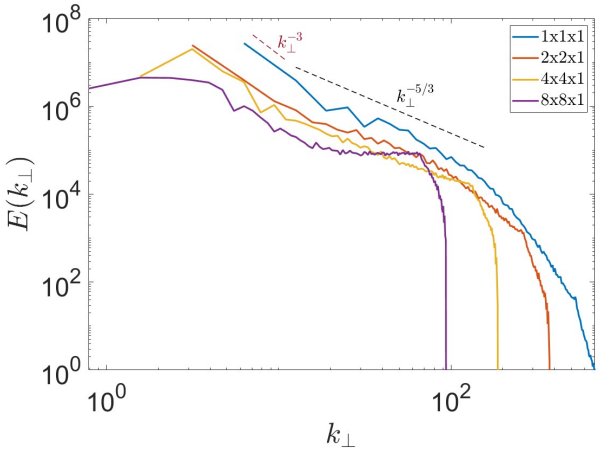


图 18. 不同盒子尺寸下，瑞利数为 Ra $=$ 20 $\varepsilon = 0.2$ $= 5 \cdot 10^{-5.5}$ Ra_c、埃克曼数为 Ek 、分辨率为$n_x = n_y = 256$,$n_z = 224$的模拟的水平功率谱。模拟的反混叠尺度分别为：536（蓝色）、268（橙色）、134（黄色）、67（紫色）。所有谱均取自$t = 0.005$时刻，即椭圆不稳定性的初始爆发期间，以确保这些爆发得到充分分辨。图中还标出了黑色虚线表示的 Kolmogorov 功率律，其斜率为$k_{\perp}^{-5/3}$；以及红色虚线表示的波湍流功率律，其预期斜率为$k_{\perp}^{-3}$。

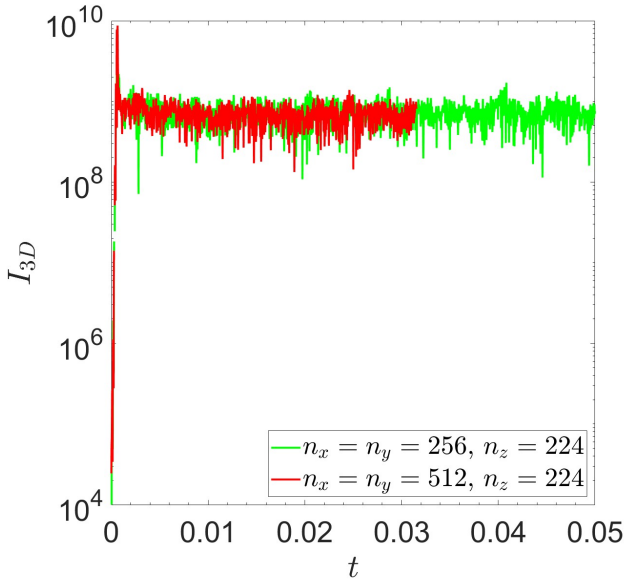


图 19. 两个模拟的I_{3D}对比，其瑞利数为 Ra $= 20\mathrm{Ra}_c$，$\varepsilon = 0.1$ $256 \times 256 \times 224$ $512 \times 512 \times 224$ ，分辨率分别为 和 。除小幅波动外，这两个模拟结果一致。

附录 B：不同盒子尺寸

为检验不同盒子尺寸对能量传递和傅里叶谱的影响，我们针对 Ra $= 6\mathrm{Ra}_c$ 以及不同的 ε(埃克曼数 $= 5 \cdot 10^{-5.5}$) 进行了多次模拟。我们绘制了I_{3D} 随 ε 变化的关系图，不同标记表示不同的

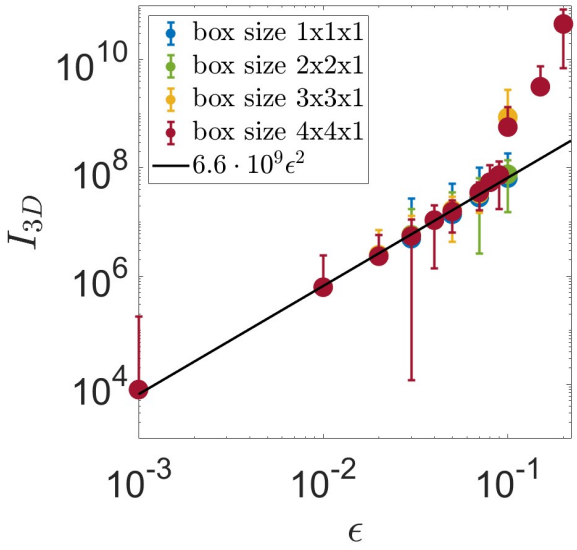


图 20. 与图 16 相同，展示 I_{3D}，但盒子尺寸不同。改变盒子尺寸不会影响持续的能量注入，但较小的盒子会使椭圆不稳定性在较高的 ε下受到抑制。

盒子尺寸，见图 20。蓝色标记表示 1x1x1 的结果，绿色标记表示 2x2x1，黄色标记表示 3x3x1，酒红色标记表示 4x4x1。结果表明，持续状态下的平均能量注入与盒子尺寸无关，所有标记均遵循相同的 ε^2 标度。爆发状态下右侧的数值确实会发生变化：当 $\varepsilon \geq 0.05$ 时，4x4x1 的结果转为爆发状态，而水平盒尺寸较小的模拟则不会。3x3x1 的结果仅在 $\varepsilon \geq 0.1$ 时显示出爆发性，而 2x2x1 和 1x1x1 在超过 $\varepsilon = 0.1$ 后仍保持持续状态。

这种行为的原因在于改变盒子尺寸时，$k_\perp$ 的允许取值也会改变。盒子尺寸较小时，$k_\perp$ 的取值以及k 都会增大（对于相同的k_z），因此若要与$k_z/k = \pm 1/2$共振，k_z（从而k）也必须更大。图 21 展示了椭圆不稳定性初始爆发期间，1x1x1、埃克曼数 $= 5 \cdot 10^{-5.5}$、瑞利数 $= 0, \varepsilon = 0.1$条件下，色散关系上的 $\theta - k$ 谱；这些是线性增长最快的不稳定模态。占主导地位的k 模态位于$n = 4$和$n = 5$的线上。k 取值较大意味着衰减率$-\nu k^2$, 较大，因而黏度会降低增长率。盒子较小时，这会使椭圆不稳定性在较大的 ε 下受到抑制。因此，选择较小（较大）的盒子会人为地增强（减弱）椭圆不稳定性的抑制。将这一效应外推至整个行星，预计由于系统可利用的尺度较大，黏度对椭圆不稳定性的抑制作用较弱。

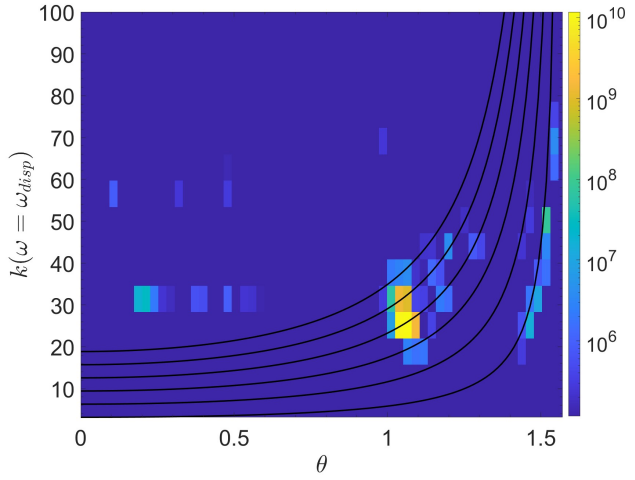


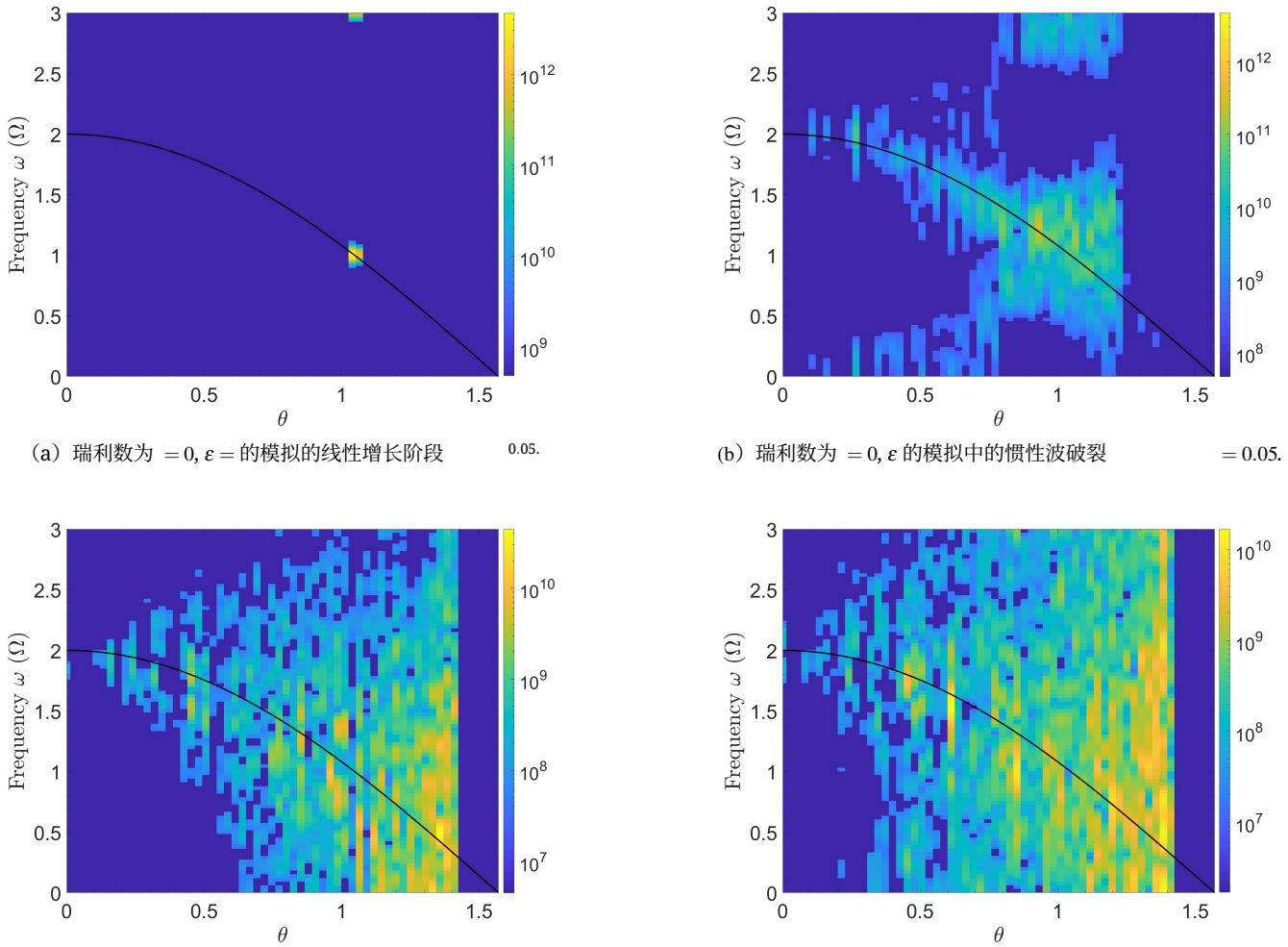
图21。与图12左图相同，展示了 Ra $= 0$，$\varepsilon = 0.1$ 在 1x1x1 盒子中的线性增长阶段。

波数范围与有限网格相结合，会导致右侧若干列不包含任何能量。只有更高的波数才能具有这些角度。有限的k范围不会影响图 22a 中的线性增长谱，因为功率集中在我们采用的波数范围内。在图 22b 的惯性波破裂过程中，我们可以清楚地看到功率集中在惯性波色散关系上，同时还沿着“镜像色散关系”分布；后者代表波与背景潮汐流[9]之间的次级非共振相互作用。在底部两幅图的对流模拟中，惯性波预期出现的色散关系上确实存在功率，这为旋转对流中存在惯性波提供了另一项初步线索。

附录 C

我们展示了与图 11 相同的图，但波数范围有限，为 $k = [2, 12]$。有限

[1]F. Waleffe，“受应变涡旋的三维失稳”，《A辑流体物理：流体动力学》**2**，76–80（1990），https://doi.org/10.1063/1.857682。[2]R. R. Kerswell，“椭圆不稳定性”，《流体力学年度评论》**34**，83–113（2002），https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.34.081701.171829。[3]A. J. Barker、H. J. Braviner 和 G. I. Ogilvie，“均匀旋转行星或恒星中的非线性潮汐：整体模态与椭圆不稳定性”，《皇家天文学会月报》**459**，924–938（2016），https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/459/1/924/8116645/stw701.pdf。[4]W. V. R. Malkus，“旋转弹性圆柱体受潮汐（椭圆）变形所致整体不稳定性的实验研究”，《地球物理与天体物理流体动力学》**48**，123–134（1989），https://doi.org/10.1080/03091928908219529。[5]A. J. Barker 和 Y. Lithwick，“气态行星和恒星中潮汐椭圆不稳定性的非线性演化”，《皇家天文学会月报》**435**，3614–3626（2013），https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/435/4/3614/3510343/stt1561.pdf。[6]A. J. Barker 和 Y. Lithwick，“弱磁场存在时椭圆不稳定性的非线性演化”，《皇家天文学会月报》**437**，305–315（2013），https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/437/1/305/18468474/stt1884.pdf。



（a）瑞利数为 $=0, \varepsilon=$ 的模拟的线性增长阶段 0.05.

（b）瑞利数为 $=0, \varepsilon$ 的模拟中的惯性波破裂 $=0.05$.

（c）$t=0.11-0.13$ 模拟的瑞利数 $=6\mathrm{Ra}_c, \varepsilon=0$。

(d) $t=0.11-0.13$ 模拟的 $=6$瑞利数$_c$, $\varepsilon=0.05$。

图 22. 与图 11 相同，但波数区间的范围缩小为$k \in [2,12]$。这样可以从图的右侧去除大部分对流模态，使惯性波更加清晰可见。黑色实线表示色散关系。为便于观察其他模态，主导流动的地转模态被置为零。

[7]B. Favier、A. M. Grannan、M. Le Bars 和 J. M. Aurnou，“天平动驱动的椭圆不稳定性对主体湍流的产生与维持”，《流体物理》**27**，066601（2015）。

[8]A. J. Barker，《均匀旋转行星或恒星中的非线性潮汐：椭圆不稳定性的全局模拟》，《皇家天文学会月报》**459**，939–956（2016年），https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/459/1/939/8116687/stw702.pdf。

[9]T. Le Reun、B. Favier、A. J. Barker 和 M. Le Bars，《椭圆不稳定性驱动的惯性波湍流》，《物理评论快报》**119**，034502（2017）。[10]T. Le Reun、B. Favier 和 M. Le Bars，《椭圆不稳定性的非线性饱和实验研究：惯性波湍流与地转湍流》，《流体力学杂志》**879**，296–326（2019年）。[11]A. M. Grannan、B. Favier、M. Le Bars 和 J. M. Aurnou，《行星内部的潮汐驱动湍流》，《国际地球物理学杂志》**208**，1690 1703 2017–（）。12

A. Astoul 和 A . J. Barker，《非 -线性效应对潮汐流的影响自转恒星和系外行星系统中行星的对流包层》，《英国皇家天文学会月刊》**516**，2913–2935（2022年），arXiv:2207.12780 [astro-ph.SR]。

[13]M. Rieutord，《双星中的旋转演化：物理过程（Invited Review），载于《恒星自转》，第215卷，A. Maeder 和 P. Eenens（2004）第394页。[14]M. Le Bars、L. Lacaze、S. Le Dizès、P. Le Gal 和 M. Rieutord，“恒星与行星双星系统中的潮汐不稳定性”，《地球与行星内部物理学》**178**，48–55（2010），2008年IUGG SEDI研讨会。[15]D. Cébron、P. Maubert 和 M. Le Bars，“旋转且差异加热的椭球壳中的潮汐不稳定性”，《Geophysical Journal International》**182**，1311–1318（2010），https://academic.oup.com/gji/article-pdf/182/3/1311/1624479/182-3-1311.pdf。[16]Cebron、D.、Le Bars、M.、Moutou、C. 和 Le Gal、P.，“类地行星与卫星中的椭圆不稳定性”，《天文学与天体物理学》**539**，A78（2012）。[17]D. Cébron、M. Le Bars、P. Le Gal、C. Moutou、J. Leconte 和 A. Sauret，“热木星系统中的椭圆不稳定性”，《伊卡洛斯》**226**，1642–1653（2013），arXiv:1309.1624 [astro-ph.SR]。[18]G. I. Ogilvie，“恒星与巨行星中的潮汐耗散”，araa **52**，171–210（2014），arXiv:1406.2207 [astro-ph.SR]。[19]J. P. Zahn，“近距离双星系统中的潮汐摩擦”。aap**57**，383–394（1977）。[20]G. I. Ogilvie，“自转正压流体天体中的潮汐：惯性波的贡献及内部结构的作用”，《皇家天文学会月报》**429**，613–632（2012），https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/429/1/613/3386585/sts362.pdf。

[21]J. P. Zahn，“近距双星的潮汐演化。I——重新审视平衡潮理论”，aap**220**，112–116（1989）。[22]P. Goldreich 和 P. D. Nicholson，“湍流黏度与木星的潮汐品质因数”，《伊卡洛斯》**30**，301–304（1977）。[23]D. Cébron、M. Le Bars、J. Noir 和 J. M. Aurnou，“天平动驱动的椭圆不稳定性”，《流体物理》**24**，061703（2012），https://doi.org/10.1063/1.4729296。[24]T. Le Reun、B. Favier 和 M. Le Bars，“内波的潮汐激发所驱动的参数不稳定性与波湍流”，《流体力学杂志》**840**，498–529（2018），arXiv:1712.08815 [physics.flu-dyn]。[25]S. Chandrasekhar，“平衡椭球形状——一段历史回顾”，《纯粹与应用数学通讯》**20**，251–265（1967），https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cpa.3160200203。[26]A. J. Barker，“演化中的低质量恒星与太阳型恒星中的潮汐耗散及行星轨道衰减预测”，mnras **498**，2270–2294（2020），arXiv:2008.03262 [astro-ph.EP]。[27]M. Le Bars 和 S. Le Dizès，“旋转圆柱壳中的热椭圆不稳定性”，《流体力学杂志》**563**，189–198（2006）。[28]G. Lavorel 和 M. Le Bars，“对流不稳定性与椭圆不稳定性交互作用的实验研究”，《流体物理》**22**，114101（2010），https://doi.org/10.1063/1.3508946。[29]T. Miyazaki 和 Y. Fukumoto，“稳定分层流体中受应变涡旋的三维失稳”，《流体物理A》**4**，2515–2522（1992）。[30]S. Chandrasekhar，《流体动力学与磁流体动力学稳定性》（1961）。[31]E. A. Spiegel 和 G. Veronis，“关于可压缩流体的Boussinesq近似”。apj **131**，442（1960）。[32]C. D. Duguid、A. J. Barker 和 C. A. Jones，“伴有对流的潮汐流：有效黏度的频率依赖性及反耗散证据”，《皇家天文学会月报》（2019），10.1093/mnras/stz2899。[33]G. Lesur 和 P. Y. Longaretti，“无量纲数对磁旋不稳定性诱导湍流输运效率的影响”，mn- ras **378**，1471–1480（2007），arXiv:0704.2943 [astro-ph]。[34]J. P. Boyd，《切比雪夫与傅里叶谱方法》（Courier Corporation，2001）。[35]C. Guervilly、D. W. Hughes 和 C. A. Jones，“快速旋转瑞利–贝纳德对流中的大尺度涡旋”，《流体力学杂志》**758**，407–435（2014），arXiv:1403.7442 [physics.flu-dyn]。[36]B. Favier、L. J. Silvers 和 M. R. E. Proctor，“快速旋转的Boussinesq对流中的逆级联与对称性破缺”，《流体物理》**26**，096605（2014），https://doi.org/10.1063/1.4895131。[37]A. M. Rubio、K. Julien、E. Knobloch 和 J. B. Weiss，《三维快速旋转湍流对流中的能量向大尺度传递》，《物理评论快报》**112**，144501（2014年）。[38]A. J. Barker，《近距离巨行星的轴向进动驱动湍流及自旋—轨道夹角的潮汐演化》，《皇家天文学会月报》**460**，2339–2350（2016年），https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/460/3/2339/8130166/stw1172.pdf。[39]F. Pizzi、G. Mamatsashvili、A. J. Barker、A. Giesecke 和 F. Ste- fani，《进动驱动湍流中地转涡旋与惯性波之间的相互作用》，arXiv 预印本，arXiv:2210.12536（2022年），arXiv:2210.12536 [physics.flu-dyn]。[40]J. Goodman 和 S. P. Oh，《慢自转恒星中的快速潮汐：涡黏度的效率》，《天体物理学杂志》**486**，403–412（1997年）。[41]G. I. Ogilvie 和 G. Lesur，《潮汐与对流之间的相互作用》，《皇家天文学会月报》**422**，1975–1987（2012年），https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/422/3/1975/18452226/mnras0422-1975.pdf。[42]J. Vidal 和 A. J. Barker，《作用于对流恒星平衡潮汐流的湍流黏度》，apjl **888**，31 2020 1912 07910 L ( ), [ ] arXiv: . astro-ph.SR。[43]L. K. Currie、A. J. Barker、Y. Lithwick 和 M. K. Browning，《重力与旋转方向不对齐时的对流：模拟与旋转混合长度理论》，《皇家天文学会月报》**493**，5233–5256（2020年），https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/493/4/5233/32968673/staa372.pdf。[44]R. R. Kerswell，《快速旋转流体中的次级不稳定性：惯性波破裂》，《流体力学杂志》**382**，283–306（1999年）。[45]T. Le Reun、B. Gallet、B. Favier 和 M. Le Bars，《地转模态的近共振不稳定性：超越Greenspan定理》，《流体力学杂志》**900**，R2（2020年）。[46]B. Favier、C. Guervilly 和 E. Knobloch，《快速旋转瑞利–贝纳德对流中的亚临界湍流凝聚体》，《流体力学杂志》**864**，R1（2019年）。[47]Y. Lin，《旋转球体中由热对流驱动的三波共振》，《流体力学杂志》**909**，R3（2021年）。[48]Y. Bekki、R. H. Cameron 和 L. Gizon，《惯性频率范围内太阳振荡理论：非线性旋转对流模拟中的赤道模态振幅》，aap **666**，135 2022 2208 11081 A ( ), [ ] arXiv: . astro-ph.SR。[49]P. W. Cauley、E. L. Shkolnik、J. Llama 和 A. F. Lanza，《根据恒星—行星相互作用信号推断热木星的磁场强度》，自然·天文学**3**，1128–1134（2019年），arXiv:1907.09068 [astro-ph.EP]。