arXiv:2302.02954v1 [math.ST] 6 Feb 2023

偏斜布朗运动的最大似然估计量：收敛速率

Antoine Lejay* Sara Mazzonetto†

2023年2月7日

摘要

我们详细描述了偏斜布朗运动（SBM）偏度参数的最大似然估计量（MLE）的渐近性质。借助近期关于SBM估计量收敛速率的中心极限定理的研究结果，我们证明了一个悬而未决的猜想：MLE渐近服从一种涉及局部时的混合正态分布，其收敛速率为 $1/4$阶。我们还给出了MLE的级数展开，并研究了得分函数及其导数的渐近行为，以及它们随偏度参数的变化。特别地，我们展示了当SBM实际上是布朗运动时所具有的特定行为，并量化了偏度参数接近 -1 或1时展开系数的爆炸。

MSC（2020）分类： 主要分类 62F12；次要分类 62F03。

关键词： 偏斜布朗运动；最大似然估计量（MLE）；统计估计；零常返过程。

在对存在半透屏障、不连续性和阈值时的扩散随机行为进行建模方面，偏斜扩散及其他奇异扩散越来越受到关注。除了理论研究，模拟和推断也是

*洛林大学，法国国家科学研究中心，IECL，Inria，F-54000 南锡，法国；ORCID：0000-0003-0406- 9550；Antoine.Lejay@univ-lorraine.fr

†洛林大学，法国国家科学研究中心，IECL，Inria，F-54000 南锡，法国；ORCID：0000-0001-6187- 2716；Sara.Mazzonetto@univ-lorraine.fr

实际应用中不可或缺的工具。关于其在各领域的应用示例，参见例如，
[28, 9, 31, 36, 30, 8, 10, 7, 13]等。
偏斜扩散的推断不能简单地改编随机微分方程（SDE）的已知技术来完成，例如
[12, 15]中所介绍的技术。事实上，它们的分布与经典随机微分方程的分布是奇异的。其极限通常是混合正态分布，且速率不一定是 $1/2$。关于偏斜扩散推断的研究相当有限。不过，我们可以引用 [6, 21, 22, 27, 17, 26, 25, 24, 33, 34] 中关于频率学派推断的研究，以及 [5, 3, 4]中关于贝叶斯推断的研究。

偏斜布朗运动（SBM）是构造偏斜扩散的基本组成部分，因为经过若干变换后，偏斜扩散可以化为偏斜布朗运动 [16]。后一个过程仅依赖于一个参数 $\theta \in [-1, 1]$ ——偏度参数——该参数决定了过程穿过零点时的行为。对于 $\theta = 0$，SBM 是布朗运动。对于 $\theta = \pm 1$，它是反射布朗运动。

一系列研究探讨了如何根据高频观测推断偏度参数。在 [21], 中，作者给出了最大似然估计量（MLE） θ_n 关于 θ 在 $\theta = 0$ 附近按 $n^{-1/4}$的幂展开的渐近展开，其中 n 为观测次数。对幂次 $1/4$ 的启发式解释，是与偏斜随机游走 [18], 作类比：其最大似然估计量取决于离散游走在零点处的局部时，而局部时是一个阶为 $\sqrt{n}$ 的随机量。事实上，在 [22], 中，作者证明了最大似然估计量和另一估计量的一致性，并通过经验观察发现，收敛速率应为 $1/4$，也就是说，承载信息的观测点是靠近 0 的那些点，其数量级为 $\sqrt{n}$。这也解释了为什么最大似然估计量的渐近极限涉及 0 处的局部时。该极限的形式为 $\mathfrak{s}(\theta)G/\sqrt{L_1}$ （当过程在 $[0, 1]$上被观测时），其中$(L_t)_{t\geq 0}$ 是偏斜布朗运动在 0 处的对称局部时，而 G 是一个与偏斜布朗运动独立的中心化单位高斯随机变量。经验观察发现， $\mathfrak{s}(\theta)$的值接近 $\kappa\sqrt{1-\theta^2}$。在 [22] 中，作者猜想 $\mathfrak{s}(\theta) = \kappa\sqrt{1-\theta^2}$，与偏斜随机游走的情形相同。

文章 [27] 带来了建立最大似然估计及其他估计量的中心极限定理所需的缺失结果。在 [32]中也可以找到相关结果。至于 [22], 中的结果，这是基于对 J. Jacod [14] 工作的扩展，而该工作无法直接应用，因为偏斜布朗运动相对于布朗运动具有奇异分布。

在本文中，我们首先证明 SBM 的偏度参数 θ 的最大似然估计具有渐近正态性。更确切地说，我们证明

$$n^{1/4}(\theta_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{stably}} \mathfrak{s}(\theta)W(L_T) \overset{\text{law}}{=} \mathfrak{s}(\theta)\frac{W(1)}{\sqrt{L_T}}$$

对于一个与 SBM 独立的布朗运动 W。特别地，我们证明 $\mathfrak{s}(\theta) = \kappa(\theta)\sqrt{1-\theta^2}$，其中前因子 $\kappa(\theta)$ 缓慢变化。
其次，利用近期提出的渐近反演公式 [20], ，我们建立了 θ_n 的级数展开，形式如下:

$$\theta_n = \theta + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathsf{D}_{k,n}(\theta)\left(\frac{\mathfrak{s}(\theta)\mathsf{P}_n(\theta)}{T^{1/4}n^{1/4}}\right)^k, \tag{1}$$

其中，$\mathsf{D}_{k,\ n}(\theta)$ 是一些随机量，其渐近行为也得到了研究；$\mathsf{P}_n(\theta)$ 是渐近枢轴的（即，其渐近分布不依赖于参数）。所有这些结果都基于得分函数及其各阶导数的渐近行为。展开式 (1) 揭示了最大似然估计随样本数量 n 和 θ 的真实值变化的行为。特别是，θ 越接近 ± 1，观察到的偏度越大。

此外，我们证明 $\mathsf{D}_{2k+1,\ n}(\theta = 0)$ 收敛于 0，因此可以为 $\theta = 0$ 的最大似然估计给出一个更精确的表达式，其中涉及多元混合高斯分布。该表达式是对 [21] 中已有表达式的替代。

此外，我们还对最大似然估计的分布函数以及得分函数及其导数趋近于各自极限分布的收敛速率进行了数值实验。这种 Berry–Esseen型分析的收敛速率似乎取决于 θ。这将留待进一步研究。

最后，我们研究了极限系数关于 θ 的行为。特别地，式 (1) 对于接近 ± 1 的 θ 展现出一个边界层估计，因为这些系数以 $(1-\theta^2)^{-1/2}$ 的幂次爆炸。

概述。 我们在第 1 节介绍主要结果。这些结果建立在得分函数及其导数的渐近行为之上，相关内容将在第 2 节给出。我们还在第 2.1 节对得分函数及其导数趋近于极限的收敛速率进行了数值计算。第3节研究极限系数的性质。主要定理的证明将在第 4 节给出。

1 主要结果

参数为 $\theta \in [-1, 1]$ 的偏斜布朗运动 X 满足随机微分方程

$$X_t = B_t + \theta L_t,\ t \geq 0 \tag{2}$$

其中 B 是布朗运动，$\{L_t\}_{t\geq 0}$ 是其在点 0 处的对称局部时。实际上，随机微分方程 (2) 存在唯一的强解 [16, 11]。当 $|\theta|>1$ 时，不存在解。对于 $\theta=\pm 1$，偏斜布朗运动是（当 $\theta=1$ 时为正向，或当 $\theta=-1$ 时为负向）反射布朗运动。

我们用 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\theta)$ 表示底层概率空间，用 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ 表示 X 所适应的滤子。该滤子可以取为由驱动布朗运动生成的滤子，并假设其满足通常条件（即完备且右连续）。

我们关注在有限时间窗口内离散观测到的偏斜布朗运动（SBM）参数的估计。我们将建立高频下的极限结果。

数据 1. 我们在时间点$\{t_i\}_{i=0,\ \ldots,\ \lfloor nT\rfloor}$观测了参数为 $\theta_0\in(-1,\ 1)$ 的偏斜布朗运动（SBM）$\{X_t\}_{t\in[0,T]}$，观测时间窗口为 $[0,T]$，其中 $t_i:=i/n$。起始点为 $X_0=0$。注意，n 表示单位时间内的样本数。

备注 1。我们施加条件 $X_0=0$，以确保 $L_T\neq 0$。当 $X_0\neq 0$ 时，我们仍可在随机窗口 $[\tau_0\wedge T, T]$ 上应用我们的方法，其中 τ_0 是从 0 出发的首次命中时间。若 $\tau_0>T$，则没有观测值可用于估计 θ。

参数为 θ 的偏斜布朗运动的转移密度函数为 [35, 16]

$$p_\theta(t,x,y):=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\begin{cases}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right)+\theta\exp\left(-\frac{(x+y)^2}{2t}\right) & \text{if } x\geq 0,\ y\geq 0,\\ \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right)-\theta\exp\left(-\frac{(x+y)^2}{2t}\right) & \text{if } x\leq 0,\ y\leq 0,\\ (1-\theta)\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) & \text{if } x\geq 0,\ y\leq 0,\\ (1+\theta)\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) & \text{if } x\leq 0,\ y\geq 0.\end{cases}$$

偏斜布朗运动是零常返过程，其不变测度为 $\mu_\theta(\mathrm{d}x):=\mu_\theta(x)\,\mathrm{d}x$，其中

$$\mu_\theta(x):=\begin{cases}1+\theta & \text{if } x\geq 0,\\ 1-\theta & \text{if } x<0.\end{cases}$$

如数据 1 中那样在等间隔时刻进行观测时，我们将似然函数 称为随机函数:

$$\Lambda_n(\theta)=\prod_{i=0}^{\lfloor nT\rfloor-1}p_\theta(\Delta t, X_{t_i}, X_{t_{i+1}}),\ \theta\in[-1,1]\text{ with }\Delta t=\frac{1}{n}.$$

由于 $[-1,1]\ni\theta\mapsto p_\theta(\Delta t,x,y)$ 是解析的，$\theta\mapsto\Lambda_n(\theta)$ 也是解析的。得分函数为 $\partial_\theta\log\Lambda_n(\theta)$。

令我们定义 [1]

$$k_\theta(x,y) := \partial_\theta \log p_\theta(1,x,y) = \frac{\partial_\theta p_\theta(1,x,y)}{p_\theta(1,x,y)} = \frac{\operatorname{sgn}(y)}{\operatorname{sgn}(y)\theta + \exp(2(xy)^+)},$$

其中 $(xy)^+$ 表示 $\max(0, xy)$。对于任意 $n > 0$，以下缩放关系成立：

$$k_\theta(x\sqrt{n}, y\sqrt{n}) = \partial_\theta \log p_\theta(\Delta t, x, y) \text{ with } \Delta t = \frac{1}{n}.$$

注 2. 得分函数可改写为 $\partial_\theta \log \Lambda_n(\theta) = \sum_{i=0}^{\lfloor nT \rfloor - 1} k_\theta(X_{t_i}\sqrt{n}, X_{t_{i+1}}^{-}\sqrt{n})$。

命题 1 ([22]). 最大似然估计量（*MLE*）

$$\theta_n := \arg\max_{\theta \in [-1,1]} \Lambda_n(\theta)$$

是 $\partial_\theta \log \Lambda_n(\theta_n) = 0$ 的唯一解，并且在 $\mathbb{P}_{\theta_0}$条件下，是偏斜布朗运动（*SBM*）参数 θ_0 的一致估计量。

本文旨在通过提供渐近信息来完善后一结果。

在图 1 中，我们绘出了不同 θ取值下最大似然估计量的经验密度。我们采用 [23] 中的方法模拟偏斜布朗运动（SBM），并通过数值计算对数似然来求得每条轨迹对应的最大似然估计量。可以看到，最大似然估计量集中在真实值附近。θ 越接近 1，密度越向左偏斜。下一节将考察这一现象。出于与对称性相关的原因，本文余下部分仅考虑 $\theta \geq 0$的情形。

1.1 MLE 估计量的渐近混合正态性

在下文的定理 1 中，我们将证明 MLE 具有渐近混合正态性，其非标准速率为 $n^{1/4}$。当 $\theta = 0$ 时，这一结果已在 [21] 中得到证明。在陈述结果之前，我们先引入一个定义，用以说明渐近正态性的性质。

定义 1（$\mathcal{L}$-混合正态分布类）。设 L_1 为偏斜布朗运动 X 在时刻 1、位置 0 处的局部时，且 $G \sim \mathcal{N}(0,1)$ 与 $\mathcal{F}_1$ 独立（因此也与 L_1 独立）。注意，L_1 的分布不依赖于 θ。若随机变量 M 满足以下条件，则称其服从 $\mathcal{L}$-混合正态分布

$$M \overset{\text{law}}{=} \frac{G}{\sqrt{L_1}}.$$

[1] 在 $k_\theta(x, y)$ 的定义中，[22] 有一处错误：应将 Δt 替换为 T。请注意，在 [22] 中，n 表示样本数量，而这里的 n 表示单位时间内的样本数量。因此，[22] 中的极限分布是 $\sqrt{T}X$ 在时刻 1 的局部时，而这里则是 X 的局部时。

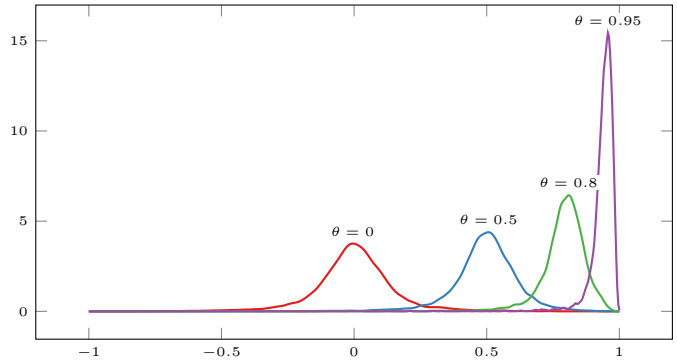

图 1：使用 $\Delta t = 10^{-4}$ 个偏斜布朗运动样本（共 10000 个），在 $T = 1$ 时，不同 θ 取值下最大似然估计的密度。

注意， $\mathcal{SL}$-混合正态分布的二阶矩为无穷大。它是对称、单峰且具有重尾的分布。

注 3（模拟局部时）。偏斜布朗运动的局部时与布朗运动的局部时同分布，因此对于 $H \sim \mathcal{N}\in(0,1)$， $L_1 \overset{\text{law}}{=} |H|$。所以，局部时和 $\mathcal{SL}$-混合正态分布很容易模拟。

注 4（尺度变换）。设 L 为偏斜布朗运动 X 在 0 处的对称局部时， W 为与 X 独立的布朗运动 W。二者都满足尺度性质，尤其是局部时满足 $L_T \overset{\text{law}}{=} \sqrt{T} L_1$。因此，

$$\frac{W(L_T)}{L_T} \overset{\text{law}}{=} \frac{W(1)}{\sqrt{L_T}} \overset{\text{law}}{=} \frac{W(1)}{T^{1/4}\sqrt{L_1}}.$$

换句话说， $T^{1/4} W(L_T)/L_T$ 和 $T^{1/4} G/\sqrt{L_1}$（其中 $G \sim \mathcal{N}\in(0,1)$，且与 X 独立）服从 $\mathcal{SL}$-混合正态分布。

我们还引入一个与估计量的渐近方差及费舍尔信息相关的量：

$$\mathfrak{s}(\theta) := \left(- \iint_{\mathbb{R}^2} \mu_\theta(x) p_\theta(1,x,y) \partial_\theta k(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right)^{-1/2} \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

量 $\mathfrak{s}(\theta)$将在命题 2、注5和第3节中作更详细的研究，尤其是在第 3.3 节中。

现在我们可以陈述主要结果：在 $\mathbb{P}_\theta$ 下，$(nT)^{1/4}\mathfrak{s}(\theta)^{-1}(\theta_n - \theta)$ 渐近服从 $\mathcal{SL}$-混合正态分布。

定理 1（偏斜布朗运动的 $\mathcal{L}$-混合正态最大似然估计）。令$\theta \in$（-1，1）。最大似然估计量 θ_n 渐近服从混合正态分布，且

$$n^{1/4}(\theta_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{stably} \mathfrak{s}(\theta)\frac{H}{\sqrt{L_T}},\ under\ \mathbb{P}_\theta,$$

其中 $H \sim \mathcal{N}(0、1)$ 与 $\mathcal{F}_T$（因此也与 L_T）相互独立。

定理 1 的证明源于下一节，即第 1.2 节的结果；这些结果依赖于我们在第 2 节对得分函数及其导数所做的研究。
从启发式角度看， $n^{1/4}$ 的非标准速率可以解释为：估计的精度主要取决于偏斜布朗运动在 0 附近停留的时间，而当 $\{X_{t_i}\}_{i=0,\dots,n}$ 时，观测所占的比例为 $\sqrt{n}$ 量级。对于偏斜随机游走，这一事实已得到严格证明：局部时确实就是偏差动态受到扰动的点 [19] 处的占用时间。

尽管根据偏斜随机游走的结果，人们曾在 [22] 中猜想，混合高斯分布前的系数 $\mathfrak{s}(\theta)$ 应与 $\sqrt{1-\theta^2}$ 成正比，但我们发现了一个缓慢变化的前因子。

命题 2. 对于所有 $\theta \in (-1, 1)$，函数 $(x, y) \mapsto \mu_\theta(x)p_\theta(1, x, y)\partial_\theta k(x, y)$可积，且其积分为负，因此 $\mathfrak{s}(\theta) \in (0, \infty)$ 定义良好。此外，存在两个实常数 $0 < c_1 \le c_2 < \infty$，使得对于所有 $\theta \in (-1,1)$

$$c_-\sqrt{1-\theta^2} \le \mathfrak{s}(\theta) \le c_+\sqrt{1-\theta^2}.$$

我们发现 $0.79 \le c_- < c_+ \le 0.88$，这与 [22]的数值观测结果一致。

命题 2 的证明见第 3.3 节，其中给出了更精确的表述。实际上，我们在注 14 中证明， $\mathfrak{s}(\theta)$ 的精确近似为

$$\mathfrak{s}(\theta) \approx \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sqrt{1.292 + 0.232\,\theta^2 + 0.071\,\theta^4}}.$$

1.2 最大似然估计的渐近展开

我们首先考虑以下感兴趣的统计量族：

$$\mathsf{S}_m(n, \theta) := \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{i=0}^{\lfloor nT\rfloor - 1} \partial_\theta^m k_\theta(X_{t_i}\sqrt{n}, X_{t_{i+1}}\sqrt{n}) \text{ for } m \ge 0. \tag{4}$$

注2表明，$\mathsf{S}_m(n,\ \theta) = \partial_\theta^m(\partial_\theta \log \Lambda_n(\theta))/n^{1/2}$，因此 $\mathsf{S}_m(n,\ /\theta)$ 是得分函数的经过重整化的 m 阶导数。

我们还考虑 $\{\mathsf{S}_1(n,\ \theta) \neq 0\}$ 上的统计量，

$$\mathsf{d}_{k,n}(\theta) := \frac{-1}{k!}\frac{\mathsf{S}_k(n,\theta)}{\mathsf{S}_1(n,\theta)} \text{ for } k \geq 0 \quad \text{and} \quad \mathsf{P}_n(\theta) := n^{1/4}\frac{T^{1/4}}{\mathfrak{s}(\theta)}\mathsf{d}_{0,n}(\theta),$$

以及这些常数

$$\xi_m(\theta) := \iint_{\mathbb{R}^2} \mu_\theta(x) p_\theta(1,x,y)\partial_\theta^m k(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \text{for } m \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

$(x,\ y) \mapsto \mu_\theta(x)p_\theta(1,\ x,\ y)\partial_\theta^m k(x,\ y)$ 的可积性将在第3节中证明，同时还将证明 $\xi_m(\theta)$ 的其他性质。

注 5. 由 (3) 给出的量 $\mathfrak{s}(\theta)$ 与 $\xi_1(\theta)$ 有关：$\mathfrak{s}(\theta)^{-2} = -\xi_1(\theta)$。

命题3. 在 $\mathbb{P}_\theta$，

(i) 统计量 $\mathsf{P}_n(\theta) = n^{1/4}T^{1/4}\mathsf{d}_{0,\ n}(\theta)/\mathfrak{s}(\theta)$ 渐近服从 $\mathscr{L}$-混合正态分布；(ii) 对每个 $k \geq 1$，

$$\mathsf{d}_{k,n}(\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{prob.} \mathsf{d}_k(\theta) := \frac{-\xi_k(\theta)}{k!\xi_1(\theta)} = \frac{\mathfrak{s}(\theta)^2}{k!}\xi_k(\theta). \tag{6}$$

此外，在 $\mathbb{P}_0$ 下，对每个 $k \geq 1$，$\mathsf{d}_{2k,\ n}(0) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{概率}} 0$ 和 $\mathsf{d}_{2k}(0)$ 除一个乘法常数外，服从 $\mathscr{L}$-混合正态分布。此外，对于任意 $m \geq 1$，$\{n^{1/4}\mathsf{d}_{2k,\ n}(0)\}_{k=0,\ \ldots\ldots m}$稳定地收敛。其极限在第 *2* 节的命题 *4* 中给出。

证明。 这是由第 2 节中关于得分函数渐近行为的命题 4 与注释 5 直接推出的。 □

在定理2中，我们给出了最大似然估计关于 $\mathsf{d}_{0,\ n}(\theta)$ 的展开（因此也给出了关于 $\mathfrak{s}(\theta)\mathsf{P}_n(\theta)T^{1/4}n^{1/4}$ 的展开）。这是应用 [20] 中的定理3得到的。对于 $\theta = 0$，此类展开已在 [21] 中以如下公式（8）的形式给出。我们还基于对系数渐近行为的更精细分析，给出另一种展开。

我们引入一些记号：对于任意 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，令

$$\Phi^{[m]}(\delta, x) := \sum_{k=1}^{m} \delta_k x^k \tag{7}$$

是关于 x 的系数 $\delta = \{\delta_k\}_{k\geq 1}$ 的形式幂级数。

定理2（渐近展开，参见 $[20, \text{定理 } 3]$）。对于任意整数 $n \geq 1$、任意 $N \geq 1$ 以及任意 $\theta \in (-1,1)$，最大似然估计在 $\mathbb{P}_\theta$ 下满足：

$$\theta_n = \theta + \Phi^{[\infty]}(\mathsf{D}_{\cdot,n}(\theta), \mathsf{d}_{0,n}(\theta)) = \theta + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathsf{D}_{k,n}(\theta)\mathsf{d}_{0,n}(\theta)^k, \tag{8}$$

其中 $\mathsf{D}_{1,n}(\theta) := 1$ 和 $\mathsf{D}_{q,n}(\theta)$，$q = 2, \ldots, N$ 由以下递归公式给出：

$$\mathsf{D}_{q,n}(\theta) := \sum_{m=2}^{q} \mathsf{d}_{m,n}(\theta) \sum_{k_1+\cdots+k_m=q} \mathsf{D}_{k_1,n}(\theta) \cdots \mathsf{D}_{k_m,n}(\theta). \tag{9}$$

若 $\theta = 0$，则有另一种展开

$$\theta_n = \Phi^{[\infty]}(\mathsf{a}_{\cdot,n}, n^{-1/4}) = \mathsf{d}_{0,n}(0) + \sum_{\substack{k \geq 3 \\ k \text{ odd}}} \frac{\mathsf{a}_{k,n}}{n^{k/4}}, \tag{10}$$

其中，对于 $k = 0, \ldots, N$，$\mathsf{a}_{k,n}$ 是 $\mathsf{a}_{2q,n} := 0$ 若 $q \geq 0$，且

$$\begin{aligned}
\mathsf{a}_{1,n} &:= n^{1/4}\mathsf{d}_{0,n}(0) = \mathfrak{z}(0)\mathsf{P}_n(0)/T^{1/4}, \\
\mathsf{a}_{2q+1,n} &:= \sum_{\substack{m=2 \\ m \text{ even}}}^{2q} n^{1/4}\mathsf{d}_{m,n}(0) \sum_{k_1+\cdots+k_m=2q} \mathsf{a}_{k_1,n} \cdots \mathsf{a}_{k_m,n} \\
&\quad + \sum_{\substack{m=3 \\ m \text{ odd}}}^{2q+1} \mathsf{d}_{m,n}(0) \sum_{k_1+\cdots+k_m=2q+1} \mathsf{a}_{k_1,n} \cdots \mathsf{a}_{k_m,n}.
\end{aligned}$$

注 6. 由 $[20]$，可知，$\Phi(\mathsf{d}_{\cdot,n}(\theta)\ \Phi(\mathsf{D}_{\cdot,n}(\theta)\ x)) = -x$。对于前几个系数，有

$$\begin{gathered}
\mathsf{D}_{2,n} = \mathsf{d}_{2,n},\ \mathsf{D}_{3,n} = \mathsf{d}_{3,n} + 2\mathsf{d}_{2,n}^2, \\
\mathsf{D}_{4,n} = \mathsf{d}_{4,n} + 5\mathsf{d}_{2,n}\mathsf{d}_{3,n} + 5\mathsf{d}_{2,n}^3 \\
\text{and } \mathsf{D}_{5,n} = \mathsf{d}_{5,n} + 6\mathsf{d}_{2,n}\mathsf{d}_{4,n} + 21\mathsf{d}_{2,n}^2\mathsf{d}_{3,n} + 14\mathsf{d}_{2,n}^4 + 3\mathsf{d}_{3,n}^2.
\end{gathered}$$

对于（10）中的序列，

$$\begin{gathered}
\mathsf{a}_{3,n} = \mathsf{d}_{3,n}(0)\mathsf{P}_n(0)^3\mathfrak{z}(0)^3/T^{3/4} + n^{1/4}\mathsf{d}_{2,n}(0)\mathsf{P}_n(0)^2\mathfrak{z}(0)^2/T^{1/2} \\
\text{and } \mathsf{a}_{5,n} = (\mathsf{d}_{5,n}(0) + 3(\mathsf{d}_{3,n}(0))^2)\mathsf{P}_n(0)^5\mathfrak{z}(0)^5/T^{5/4} \\
+(5n^{1/4}\mathsf{d}_{2,n}(0)\mathsf{d}_{3,n}(0) + n^{1/4}\mathsf{d}_{4,n}(0))\mathsf{P}_n(0)^4\mathfrak{z}(0)^4/T \\
+2n^{1/2}(\mathsf{d}_{2,n}(0))^2\mathsf{P}_n(0)^3\mathfrak{z}(0)^3/T^{3/4}.
\end{gathered}$$

注 7. 由于 $\mathsf{d}_{k,n}$ 和 P_n 取决于 θ，在估计中无法在真实参数下计算它们（实际上，$\mathsf{P}_n(\theta_n) = 0 = \mathsf{d}_{0,n}(\theta_n)$ 对于最大似然估计 θ_n），但可用于统计假设检验。

该结果表明，$\theta = 0$ 与 $\theta \neq 0$之间存在某种“相变”。这显然与 $\mathsf{d}_{2m,n}(0)$（趋于零）和 $n^{1/4}\mathsf{d}_{2m,n}(0)$ 关于 $m \geq 1$的收敛二分现象有关。例如，注意到公式（10）中的第二项为 $1/n^{3/4}$ 阶，而公式（8）中的第二项为 $1/n^{1/2}$阶。后一项在 $\theta = 0$ 的情况下，随着 n 增大而趋于 0。

定理2和命题3证明了定理 1。此外，它们还给出了对所有 $m \in \mathbb{N}$，由形式幂级数表示的最大似然估计的近似

$$\theta_n^{[m]} := \theta + \Phi^{[m]}(\mathsf{D}_{\cdot,n}(\theta), \mathsf{d}_{0,n}(\theta)) \quad \text{and} \quad \check{\theta}_n^{[m]} := \theta + \Phi^{[m]}(\mathsf{D}_{\cdot}(\theta), \mathsf{d}_{0,n}(\theta)), \tag{11}$$

其中，$\mathsf{D}_k(\theta)$ 的定义与 (9) 中的 $\mathsf{D}_{k,n}(\theta)$ 类似，只需将 $\mathsf{d}_{k,n}$ 替换为 (6) 中的 d_n 。更准确地说，$\mathsf{D}_1(\theta) := 1$，且对于 $q = 2, \ldots, N$，D_q由以下递归公式给出：

$$\mathsf{D}_q(\theta) := \sum_{m=2}^{q} \mathsf{d}_m(\theta) \sum_{k_1+\cdots+k_m=q} \mathsf{D}_{k_1}(\theta) \cdots \mathsf{D}_{k_m}(\theta). \tag{12}$$

那么，例如，

$$\check{\theta}_n^{[3]} = \theta + \mathsf{d}_{0,n} - \frac{1}{2}\frac{\xi_2(\theta)}{\xi_1(\theta)}(\mathsf{d}_{0,n})^2 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\xi_2(\theta)}{\xi_1(\theta)}\right)^2 - \frac{\xi_3(\theta)}{3\xi_1(\theta)}\right)(\mathsf{d}_{0,n})^3.$$

幂级数 $\theta_n^{[m]}$是式 (8) 的 m 阶截断。它具有随机系数 $\mathsf{D}_{\cdot,n}(\theta)$ 和随机自变量 $\mathsf{d}_{0,n}(\theta)$，其中涉及得分函数及其导数。代理量 $\check{\theta}_n^{[m]}$是一个幂级数，其系数为确定性系数 $\mathsf{D}_{\cdot}(\theta)$（$\mathsf{D}_{\cdot,n}(\theta)$ 的极限），且具有相同的随机自变量 $\mathsf{d}_{0,n}(\theta)$，该自变量与得分函数及其一阶导数有关。$\theta_n^{[m]}$和 $\check{\theta}_n^{[m]}$都是 $\mathsf{d}_{0,n}(\theta)$ 的非线性表达式。

以下结果阐明了当 θ 在 $(-1, 1)$ 中变化时，各系数的行为。证明见第3节。

引理1。 设 $\{\xi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 由(5)定义。则对所有 $m \in \mathbb{N}$:

(i) $\xi_0 \equiv 0$; *(ii)* $\theta \mapsto \xi_{2m+1}(\theta)$ 为偶函数; *(iii)* 存在 $-\infty < c_{m,1} < c_{m,2} < 0$，使得对于所有 $\theta \in (-1, 1)$，$-c_{m,1} \leq (1-\theta^2)^{2m+1}\xi_{2m+1}(\theta) \leq c_{m,2}$; *(iv)* $\xi_{2m}(\theta)$ 为奇函数，特别地，$\xi_{2m}(0) = 0$; *(v)* 存在 $c_{2m} \in (0, \infty)$，使得对于所有 $\theta \in (0, 1)$，$-c_{2m} \leq (1-\theta^2)^{2m}\xi_{2m}(\theta) < 0$ 。

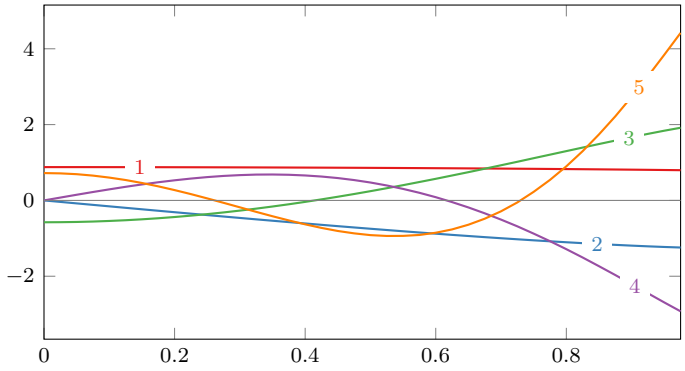

图2：函数 $\theta \mapsto \mathsf{D}_k(\theta)\mathfrak{z}(\theta)^k(1-\theta^2)^{k/2-1}$，其中 D_k 由式 (12) 定义，θ限制在 $[0,1]$ 和 $m=1,\ldots\ldots,5$。

以下结果通过对递归公式 (9) 进行归纳法证明。

推论1 （由命题3和引理1推出）。有

$$\mathsf{D}_{k,n}(\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{prob.} \mathsf{D}_k(\theta).$$

此外，对于任意 $k \geq 1$,

$$|\mathsf{D}_k(\theta)\mathfrak{z}(\theta)^k| \leq \frac{C_k}{(1-\theta^2)^{k/2-1}}$$

其中 $C_k \geq 0$为常数。

我们在图2中绘出了系数 $\theta \mapsto \mathsf{D}_k(\theta)\mathfrak{z}(\theta)^k$，并按此缩放因子$\theta \mapsto (1-\theta^2)^{1-k/2}$进行缩放。

注 8。系数 $\mathsf{D}_{k,n}(\theta)$以 $n^{1/4}$的速率收敛至其极限。这是定义 (9) 和命题3的结果。

图3展示了最大似然估计 θ_n, $\theta_n^{[1]} = \theta + \mathsf{d}_{0,n}(\theta)$,$\theta_n^{[5]}$ 的经验密度，以及代理量 $\check{\theta}_n^{[5]}$ 的经验密度（定义见式（11），其中涉及 $\theta_n^{[5]}$ 和 $\check{\theta}_n^{[5]}$）。对于 $\theta = 0$，$\mathsf{d}_{0,n}(0)$ 已经能够很好地复现最大似然估计的行为，因此图中未绘出 $\theta_n^{[5]}$ 和 $\check{\theta}_n^{[5]}$。对于 $\theta \neq 0$，我们观察到，虽然低阶展开式对最大似然估计行为的复现效果较差，但 $\theta_n^{[5]}$ 和 $\check{\theta}_n^{[5]}$ 的效果相当不错，高阶展开式也是如此。展开式 $\theta_n^{[5]}$ 和 $\check{\theta}_n^{[5]}$ 彼此接近。事实上，它们分别是关于 $\mathsf{d}_{0,n}(\theta)$ 的随机多项式和确定性多项式；根据推论 1，随机系数收敛到确定性系数。为引出下一段，请注意，当 θ 接近 1 时，$\theta_n^{[1]} = \theta + \mathsf{d}_{0,n}(\theta)$ 的密度向左偏斜。当然，由于它们的密度与最大似然估计的密度相近，$\theta_n^{[5]}$ 和 $\check{\theta}_n^{[5]}$ 的经验分布也呈偏斜。

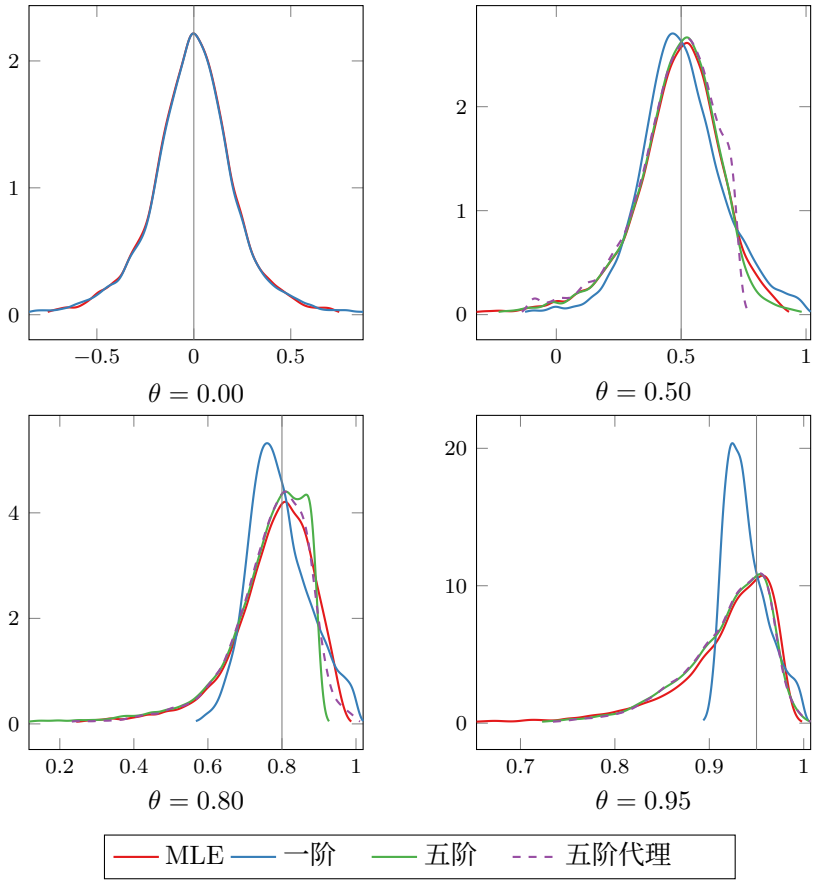

图3：MLE 的密度、 $\theta_n^{[1]} = \theta + \mathbf{d}_{0,\ n}(\theta)$，以及五阶展开式 $\theta_n^{[5]}$和 $\check{}\theta_n^{[5]}$(11)；对于 θ 的若干取值，使用偏斜布朗运动的 10000 个样本，并采用 $\Delta t = 10^{-3}$ 计算 $T = 1$（因此， $n = 1000$）。

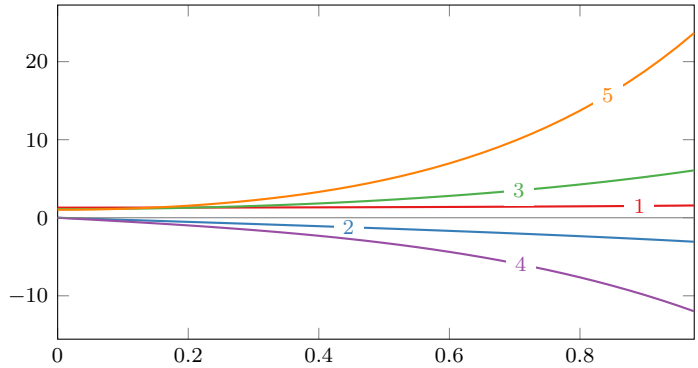

图4：由（13）定义的函数 $\theta \mapsto f_m(\theta)$，针对 θ 限制在 $[0,1]$ 和$m = 1, \ldots\ldots, 5$。

注 9。 提醒一下，对于 $\theta_n - \theta$， $n^{1/4}\mathrm{d}_{0,\,n}(\theta)$具有渐近对称分布：命题3保证了 $n^{1/4}\mathrm{d}_{0,\,n}(\theta) = \mathrm{P}_n(\theta)\mathfrak{z}(\theta)T^{-1/4}$ 渐近服从 $\mathscr{L}$-混合正态分布。因此，替代代理量 $\Phi^{[m]}(\mathrm{D}_\cdot(\theta), \mathrm{P}_\infty(\theta)\mathfrak{z}(\theta)(nT)^{-1/4})$，其中 P_∞ 服从 $\mathscr{L}$-混合正态分布，无法再现偏度；为了使其经验分布接近最大似然估计的经验分布，它们需要比代理量 $\check{\theta}_n^{[m]}$更高阶的展开。

偏度。 我们观察到了经验分布 $\mathrm{d}_{0,n}(\theta)$ 和最大似然估计的偏度。这是因为得分函数的经验密度表明， θ 越接近 1，得分函数就越向左偏。然而，最大似然估计与得分函数之间存在非平凡的相关性：即非线性依赖。(11) 中最大似然估计的近似是得分函数及其导数的非线性函数，实际上是 $\mathrm{d}_{0,n}$的非线性函数，基本上就是它们的比值。由于 $\mathrm{D}_2(\theta) = \mathrm{d}_2(\theta) = -\frac{1}{2}\xi_2(\theta)\xi_1(\theta)$，引理1表明 $\operatorname{sgn}(\mathrm{D}_2(\theta)) = -\operatorname{sgn}(\theta)$。当代理量 (11) 的分布具有 $\theta > 0$ （分别为 $\theta < 0$）时，这会使偏度向左（分别向右）。换言之，上述提出的最大似然估计近似能够捕捉最大似然估计的偏度。

边界层效应。令

$$f_m(\theta) := \frac{(-1)^m(1-\theta^2)^m}{m!}\xi_m(\theta). \tag{13}$$

Then f_{2k+1} 为正且有界（其上界和下界均为正数） ,

$f_{2k}(0) = 0$ 且 $f_{2k}(\theta)$ 有界。因此，(11) 可改写为：

$$\check{\theta}_n^{[3]} = \theta + \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sqrt{f_1(\theta)}} \frac{\mathsf{P}_n(\theta)}{(Tn)^{1/4}} + \frac{f_2(\theta)}{f_1(\theta)^2} \left(\frac{\mathsf{P}_n(\theta)}{(Tn)^{1/4}} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} \frac{2(f_2(\theta))^2 - f_3(\theta) f_1(\theta)}{f_1(\theta)^{7/2}} \left(\frac{\mathsf{P}_n(\theta)}{(Tn)^{1/4}} \right)^3,$$

也就是说

$$\mathsf{D}_1(\theta)\mathfrak{z}(\theta) = \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sqrt{f_1(\theta)}}, \quad \mathsf{D}_2(\theta)\mathfrak{z}(\theta)^2 = \frac{f_2(\theta)}{f_1(\theta)^2}$$
$$\text{and } \mathsf{D}_3(\theta)\mathfrak{z}(\theta)^3 = \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} \frac{2f_2(\theta)^2 - f_3(\theta) f_1(\theta)}{f_1(\theta)^{7/2}}.$$

当 $f_2(0) = 0$ 时，$\theta = 0$ 的二阶项消失。通过这一展开可以看出，当 $|\theta|$ 接近 1 时，三阶系数的爆炸呈现出一种“边界层”效应。事实上，如果将展开推进到 k 阶（此处我们停在了 $k = 3$ 阶），当 $|\theta|$ 接近 1 时，相应系数会以 $(1-\theta^2)^{(k-2)/2}$ 的形式爆炸。我们进行了数值模拟，结果表明不存在抵消效应，因此多项式展开近似不再适用。

在 [20] 中，我们讨论了二项分布族中类似的边界层现象。由于偏斜布朗运动（SBM）的路径构造方式是：将参数为 $(1+\theta)/2$ 的相互独立的伯努利随机变量与反射布朗运动从 0 出发的偏离过程相关联，并根据伯努利随机变量的结果翻转每个偏离过程，因此可以预期偏度参数 θ 也会出现同样的现象。

变量代换与坐标变换。将法阿·迪·布鲁诺公式与（8）相结合，可以对任意解析函数 φ 给出 $\varphi(\theta_n)$ 的一些显式展开。同样，也可以在另一个坐标系中考察 θ_n，如 [20] 中所述。就此而言，以下两种变量代换似乎是自然的：$\varphi_1(\theta) = \sqrt{1-\theta^2}$ 以及 $\varphi_1(\theta) = 1/\sqrt{1-\theta^2}$。后者可以稳定方差。然而，任何坐标变换都不会影响得分函数的渐近行为。此外，我们通过数值实验发现，使用 φ_1 或 φ_2 并不能改善 Wald 置信区间。

2 得分函数及其导数的渐近行为

本节给出证明命题3所必需的结果。这些结果是对 [14] 中关于布朗运动的结果，以及 [22] （收敛）和 [27]（中心极限定理）中关于（真实）偏斜布朗运动结果的应用。

回顾一下，式（4）中的 S_m 不过是得分函数导数的一个缩放形式，而 $\xi_m(\theta)$ 是式（5）中定义的一个常数。根据引理1，对于所有 $\theta \in (-1,\ 1)$，$\xi_0(\theta) = 0$ 且 $\xi_1(\theta)$ 为负；对于所有整数 m，$\xi_{2m}(0) = 0$。

命题 4. 对于任意 $\theta \in (-1,\ 1)$，由 （5）定义的族 $\{\xi_k(\theta)\}_{k\geq 0}$ 满足：

(i) 在 $\mathbb{P}_\theta$ 条件下，存在一个标准高斯随机变量 H （均值0 、方差1），它与 $\mathscr{F}_T$ 相互独立（概率空间$(\Omega\ \mathscr{F},\ \mathbb{P}_0)$ 已扩充以容纳 H），使得对于任意 $m \geq 0$,

$$n^{1/4}\mathsf{S}_0(n,\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{stably} \sqrt{-\xi_1(\theta)}\sqrt{L_T}H,$$
$$(\mathsf{S}_1(n,\theta),\ldots,\mathsf{S}_m(n,\theta)) \xrightarrow[n\to\infty]{prob.} (\xi_1(\theta)L_T,\ldots,\xi_m(\theta)L_T).$$

得益于稳定收敛的性质，我们有 $(n^{1/4}\mathsf{S}_0(n,\theta), \mathsf{S}_1(n,\theta) \ldots, \mathsf{S}_m(n,\theta))$ 的联合稳定收敛。

(ii) 对于 $\theta = 0$ （偏斜布朗运动实际上是布朗运动），在 $\mathbb{P}_0$ 下，存在一个高斯族 $H = \{H_k\}_{k=0,\ldots,m}$，它与 $\mathscr{F}_T$ 独立，均值为 0，协方差为 $\mathrm{Cov}(H_j, H_\ell) = \Psi_{2j,2\ell}$，其中 $0 \leq j, \ell \leq m$ 如第 *3.5* 节所述（概率空间 $(\Omega\ \mathscr{F}, \mathbb{P}_0)$ 已扩展以容纳 H），使得对任意 $m \geq 0$,

$$\{n^{1/4}\mathsf{S}_{2k}(n,0)\}_{k=0,\ldots,m} \xrightarrow[n\to\infty]{stably} \{\sqrt{L_T}H_k\}_{k=0,\ldots,m},$$
$$\{\mathsf{S}_{2k+1}(n,0)\}_{k=0,\ldots,m} \xrightarrow[n\to\infty]{prob.} \{\xi_{2k+1}(0)L_T\}_{k=0,\ldots,m}.$$

得益于稳定收敛的性质，我们有 $(n^{1/4}\mathsf{S}_0(n,\theta), \mathsf{S}_1(n,\theta)\ n^{1/4}\mathsf{S}_2(n,\theta) \ldots)$ 的联合稳定收敛。

注记10。根据 [14, 27], ，一个更强的结果成立：在一个扩展概率空间上，存在一个与 L 独立的 m 维布朗运动 $\{W_k\}_{k\geq 0}$

以及一个 $m \times m$ 矩阵 $\Xi(\theta)$，使得

$$\left\{ \frac{1}{n^{1/4}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \partial^{\ell} k_{\theta}(X_{i-1}\sqrt{n}, X_i\sqrt{n}) - \xi_{\ell}(\theta) L_t \right) \right\}_{\ell=0,\ldots,m,\ t\in[0,T]} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{stably}} \{\Xi(\theta) W(L_t)\}_{t\in[0,T]}. \quad (14)$$

矩阵 $\Xi(\theta) = (\Xi_{i,j}(\theta))_{i,j=0,\ldots\ldots m}$存在一个闭式表达式，但较为繁琐。此处，我们着重讨论特殊情形 $m = 0$ 和 $\theta = 0$，并研究这些情形下的 $\{\xi_k(\theta)\}_{k=1,\ldots\ldots\max(m,1)}$ 和 Ξ。

注 11。当 $\xi_m(\theta) = 0$ 时，(14) 可改写为

$$n^{1/4} \mathsf{S}_m(n,\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{stably}} \Xi_{m,m}(\theta) \sqrt{L_T} G$$

对于某个常数 $\Xi_{m,m}(\theta)$，以及与 L_T 无关的 $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$。特别地，(i) 对于任意 $\theta \in (-1, 1)$ 和 $m = 0$,

$$\Xi_{0,0}(\theta) = \sqrt{-\xi_1(\theta)} = \frac{1}{\mathfrak{s}(\theta)}.$$

这由 [27] 和引理 4 得出。

(ii) 对于 $\theta = 0$，$\Xi(0)\Xi(0)^{\mathrm{T}} = \Psi$，其中 Ψ 出现在命题 4.(ii) 中，并在第 3.5 节中进行了讨论。

统计学含义。命题 4 的收敛结果是定理 1 中最大似然估计收敛的关键。此外，我们还可以利用这些结果来构造

- 使用 $\mathsf{S}_1(n, \theta_n)/\xi_1(\theta_n)$ 的局部时估计量；
- 使用 $\mathfrak{s}(\theta_n)$代替 $\mathfrak{s}(\theta)$构造 Wald 置信区间；
- 对 θ 的真实值进行假设检验，可使用围绕 θ的置信区间，或使用 $\mathsf{S}_0(n, \theta)^2/\mathsf{S}_1(n, \theta)$，后者渐近服从 χ^2_1分布。

2.1 收敛速率

本节通过数值计算，估计得分函数极限分布的收敛速率。具体而言，我们通过实证研究 $\mathsf{S}_k(n, \theta)$ 在式（4）中的收敛速率。特别地，我们表明，当 $|\theta|$ 趋近于 1 时，收敛速度会变慢。

我们在图 5 中绘制了经验分布之间的柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫距离 $\Delta_{\mathrm{KS}}(n)$

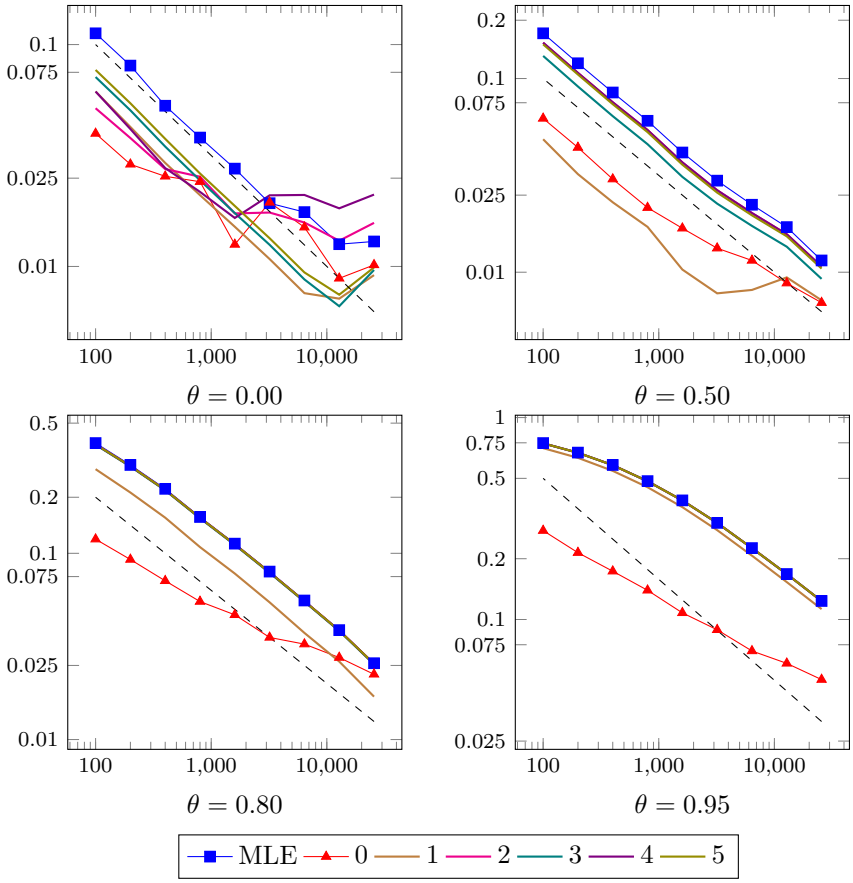

图 5：在双对数坐标下，使用 $T = 1$ 的偏斜布朗运动的 10000 个样本，统计量 (a)（最大似然估计）、(b)（对于任意 θ 均为 0，若 $\theta = 0$ 则为 2,4）和 (c)（其他情况）下 $n \mapsto \Delta_{\mathrm{KS}}(n)$ 的行为，以及与 $C/\sqrt{n}$ （虚线）的比较。

(a) $\mathfrak{z}(\theta)^{-1} n^{1/4}(\theta_n - \theta)$ 与 $H/\sqrt{L_T}$（其中 $H \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$）的经验分布，且与局部时独立。(b) $\mathsf{S}_k(n,\ \theta)/\Xi_{k,\ \underline{k}}(\theta)$ 与 $\sqrt{L_T} H$（其中 $H \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$）的经验分布，且与局部时独立，适用于 $k = 0$ 或 $\theta = 0$ 且 k 为偶数的情况。(c) $\mathsf{S}_k(n,\ \theta)/\xi_k(\theta)$ 与 L_T 在其他情况下的经验分布。

即使样本量 n 较小但适中，大多数情况下也已达到渐近状态。柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫统计量的 5% 分位数为 0.52，而 1% 分位数为 0.44。

在每种情况下，统计量 $\Delta_{\mathrm{KS}}(n)$ 的表现都类似于 C/n^{η}，其中 η 接近 $1/2$。

对于 0 阶得分，或当 θ 接近 1 时，速率 η 低于 $1/2$。最大似然估计的常数 C 大于其他柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫

统计量。在每种情况下，常数都会随 θ增大，最大似然估计的常数 C 与 0 阶得分的常数之比也会增大。

请注意，尽管我们的样本并非由独立同分布的随机变量组成，但我们得到的结果已接近 Berry–Esseen 速率。

在图 5 中，当柯尔莫哥洛夫–斯米尔诺夫距离较小且 n 较大时，绘制出的距离会受到蒙特卡洛误差的影响。对于 $\theta = 0$，最大似然估计（8）展开中的二阶和四阶项为零。这些系数的渐近分布与 (b) 中给出的一致。请注意，在最大似然估计（10）的另一种展开中，后一个展开的奇数阶项涉及 (b) 和 (c) 中的统计量。对于 $\theta \neq 0$，展开式（8）中 $k \geq 2$ 阶项的影响会有所增强；这些项的渐近表现为 $(1-\theta^2)^{1-k/2}$。

3 极限系数

我们的目标是研究式（3）中的极限系数 $\mathfrak{z}(\theta)$、式（5）中的 $\xi_m(\theta)$，以及命题 4 中出现的 Ψ。我们还将证明命题 2 和引理1。实际上，我们还确立了一些有助于数值研究和应用的其他性质。例如，在第 3.4 节中，我们给出了 $\theta \mapsto \xi_m(\theta)$ 在 0 附近的展开。在第 3.5 节中，我们研究了命题 4.(ii) 中的矩阵 Ψ。

3.1 系数 ξ_k

在第 3.4 节之前，我们研究极限系数 ξ_k。

我们利用密度的显式表达式，进而也利用 k_θ的显式表达式。我们方便地改写为

$$k_\theta(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{\theta + \exp(2xy)} & \text{if } x \geq 0,\ y \geq 0, \\ \dfrac{1}{\exp(2xy) - \theta} & \text{if } x \leq 0,\ y \leq 0, \\ \dfrac{1}{\theta - 1} & \text{if } x \geq 0,\ y \leq 0, \\ \dfrac{1}{1 + \theta} & \text{if } x \leq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$$

引理 2. 对于任意 $m \geq 0$,

$$\partial_\theta^m k_\theta(x,y) = m!(-1)^m k_\theta^{m+1}(x,y) \tag{15}$$

对于任意 $x, y \in \mathbb{R}$。

证明。 首先注意到

$$\partial_\theta k_\theta(x,y) = \frac{-\operatorname{sgn}(y)^2}{(\operatorname{sgn}(y)\theta + \exp(2(xy)^+))^2} = \frac{-1}{(\operatorname{sgn}(y)\theta + \exp(2(xy)^+))^2} = -k_\theta(x,\ y)^2. \quad (16)$$

因此，对于 $m = 0$，1，(15) 成立。假设对于某个 $m \geq 1$，(15) 成立。由 (16),

$$\begin{aligned}\partial_\theta^{m+1} k_\theta(x,y) &= (-1)^m m! \partial_\theta (k_\theta(x,y)^{m+1}) \\ &= (-1)^m (m+1)! \partial_\theta k_\theta(x,y) \cdot k_\theta(x,y)^m = (-1)^{m+1}(m+1)! k_\theta(x,y)^{m+2}.\end{aligned}$$

这证明了 (15) 对 $m+1$ 成立，因而对任意 m 都成立。 □

记号 1。 对于某个整数 $m \geq 1$，我们定义

$$\chi_m^{\pm\pm}(\theta) := \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\pm x \geq 0, \pm y \geq 0} k_\theta(x,y)^m p_\theta(1,x,y) \mu_\theta(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad (17)$$

$$\text{and } \chi_m(\theta) := \chi_m^{++}(\theta) + \chi_m^{--}(\theta) + \chi_m^{+-}(\theta) + \chi_m^{-+}(\theta). \quad (18)$$

根据引理 2，由 (5) 给出的系数 ξ_m 与 χ_m 的关系为

$$\xi_m(\theta) = m!(-1)^m \chi_{m+1}(\theta). \quad (19)$$

现在我们研究 $\chi_m(\theta)$ 在 $\theta \in (-1,\ 1)$ 时以及 m 取不同值时的情况。

我们注意到以下关系

$$p_\theta(1,-x,-y) = p_{-\theta}(1,x,y), \quad (20)$$

$$k_\theta(-x,-y) = -k_{-\theta}(x,y) \quad (21)$$

$$\text{and } \mu_\theta(-x) = \mu_{-\theta}(x). \quad (22)$$

对称关系 (20)-(22) 的直接推论是以下引理

引理 3 (对称关系)。 对于任意 $m \geq 1$ 以及任意 $\theta \in (-1,1)$,

$$\chi_m^{--}(\theta) = (-1)^m \chi_m^{++}(-\theta) \ and \ \chi_m^{-+}(\theta) = (-1)^m \chi_m^{+-}(-\theta). \quad (23)$$

推论2. 对于任意 $\theta \in (-1,1)$ 以及任意 $m \geq 1$,

(i) $\theta \mapsto \chi_{2m}(\theta)$ 为偶数，且 $\chi_{2m}(\theta) > 0$。(ii) $\theta \mapsto \chi_{2m+1}(\theta)$ 为奇数；特别地，$\chi_{2m+1}(0) = 0$ （我们将在下文的引理7中看到，对于任意 $\theta \in (0,\ 1)$，$\chi_{2m+1}(\theta) < 0$）。

证明。由引理 3 得出；要证明 $\chi_{2m}(\theta) > 0$，只需注意到方程（17）的被积函数均为正。 □

引理 4（$m = 1$的取值）。对于 $\theta \in (-1,1)$，$\chi_1(\theta) = 0$。

证明。这直接源于 k_θ的定义，以及以下事实：$\int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(1,x,y)\,\mathrm{d}y = 1$，因此 $\partial_\theta \int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(1,x,y)\,\mathrm{d}y = 0$。事实上，

$$\chi_1(\theta) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_\theta[k_\theta(X_0,X_1) \mid X_0 = x]\mu_\theta(x)\,\mathrm{d}x$$

并且对所有 $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}_\theta[k_\theta(X_0,X_1) \mid X_0 = x] = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial_\partial p_\theta(1,x,y)}{p_\theta(1,x,y)} p_\theta(1,x,y)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{24}$$

因此 $\chi_1(\theta) = 0$。 □

关于 $m \geq 2$的计算。情形 $m \geq 2$ 和 $\theta > 0$ 稍微复杂一些。

引理 5。对于 $m \geq 2,\ \theta \in (-1,\ 1)$,

$$\chi_m^{+-}(\theta) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+\theta}{(1-\theta)^{m-1}} \ and\ \chi_m^{-+}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-\theta}{(1+\theta)^{m-1}}. \tag{25}$$

证明。首先,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{x\geq 0, y\geq 0} \exp\left(\frac{-(x+y)^2}{2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \overline{\Phi}(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

其中 $\overline{\Phi}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$ 是单位中心高斯随机变量的互补分布函数。

因此,

$$\chi_m^{+-}(\theta) = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{x\geq 0, y\leq 0} k_\theta(x,y)^m p_\theta(1,x,y)\mu_\theta(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{-(1+\theta)}{(1-\theta)^{m-1}} \int_0^{+\infty} \overline{\Phi}(x)\,\mathrm{d}x.$$

χ_m^{-+} 的值由（23）得出。 □

我们表示为

$$\begin{aligned}\chi_m^{++}(\theta) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{x\geq 0, y\geq 0} k_\theta(x,y)^m p_\theta(1,x,y)\mu_\theta(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{x\geq 0, y\geq 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1+\theta)\frac{\exp\left(\frac{-(x-y)^2}{2}\right)}{(\theta+\exp(2xy))^m}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\quad + \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{x\geq 0, y\geq 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\theta(1+\theta)\frac{\exp\left(\frac{-(x+y)^2}{2}\right)}{(\theta+\exp(2xy))^m}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{x\geq 0, y\geq 0} \frac{1+\theta}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(x+y)^2}{2}\right)\frac{1}{(\theta+\exp(2xy))^{m-1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{26}$$

我们也可以采用以下形式

$$\chi_m^{++}(\theta) = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{x\geq 0, y\geq 0} \frac{1+\theta}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp\left(\frac{-x^2-y^2}{2}\right)\exp(xy) + \theta\exp(-xy)}{(\theta+\exp(2xy))^m}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{27}$$

这适用于蒙特卡罗模拟，因为

$$\chi_m^{++}(\theta) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+\theta)\mathbb{E}\left[\frac{\exp(|G\cdot G'|)+\theta\exp(-|G\cdot G'|)}{(\theta+\exp(2|G\cdot G'|))^m}\right] \tag{28}$$

对于两个相互独立、单位方差且均值为零的高斯分布随机变量 G 和 G'。

注 12。本节余下部分的讨论或引理1（我们将在本节中证明）表明，可以考虑以下等价表达式

$$\chi_m^{++}(\theta) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4(1-\theta)^m}(1+\theta)\mathbb{E}\left[(1-\theta)^m\frac{\exp(|G\cdot G'|)+\theta\exp(-|G\cdot G'|)}{(\theta+\exp(2|G\cdot G'|))^m}\right]$$

这降低了经验均值的方差，同时不会增加计算成本。

我们首先考虑一个涉及 $\chi_m^{++}(0)$ 的积分的闭式公式。

引理6 （ $\theta = 0$ 处的一些取值）。设 $m \geq 2$，则

$$\sqrt{2\pi}\chi_m^{++}(0) = \frac{1}{2\sqrt{m(m-1)}}\log\left(2m-1+2\sqrt{m(m-1)}\right) \in (0,1).$$

特别地，当 m 很大时，$\sqrt{2\pi\chi_m^{++}(0)} \sim \log(4m)/2m$。

注 13。我们也可以将 $\chi_m^{++}(0)$ 写成 $= \frac{1}{2\sqrt{m(m-1)}}\operatorname{atanh}\frac{2\sqrt{m(m-1)}}{2m-1}$。

引理6的证明。由（26）可知 $\sqrt{2\pi}\chi_m^{++}(0) = \alpha_{2m-1}$ 其中

$$\alpha_n := \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{-x^2-y^2}{2} - nxy\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

对于 $n \geq 1$。令 $n \geq 2$ 为固定值。通过变量代换 $(x, y) = (\sqrt{v\log(u)}\ \sqrt{\log(u)/v})$，其中 $u \geq 1, v \geq 0$，我们得到

$$\alpha_n = \int_0^{+\infty}\int_1^{+\infty} \frac{1}{2vu}\frac{1}{u^{n+v/2+1/2v}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^2+2nv+1}\,\mathrm{d}v.$$

由于 $n \geq 2$，由 [1]，中的 (3.3.17) 可得

$$\alpha_n = \frac{1}{2\sqrt{n^2-1}}\log\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n-\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\log(n+\sqrt{n^2-1}) \in (0,1)$$

这也可以写成 $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\,\mathrm{atanh}\,\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$。 □

以下不等式是 (26) 的推论。对于所有 $\theta \in [0,1)$，$m \geq 2$:

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(1\pm\theta)^{m-2}}\sqrt{2\pi}\chi_m^{++}(0) \leq \pm\chi_m^{++}(\pm\theta) \leq \pm\frac{1\pm\theta}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}\chi_m^{++}(0). \tag{29}$$

引理7。对于任意 $m \geq 1$ 和 $\theta \in (-1,1)$，若 $\theta \neq 0$，则 $\xi_m(\theta) \neq 0$。

证明。等式 (19) 和推论2确保只需证明 $(0,1) \ni \theta \mapsto \chi_{2m+1}(\theta) < 0$。令 $m \geq 1$ 和 $\theta \in (0,1)$ 为固定值。
方程（23）、（25）中 $\chi_{2m+1}^{-+}(\theta)$的显式表达式、（29）中的上界不等式，以及 $\sqrt{2\pi}\chi_{2m+1}^{++}(0) < 1$ 这一事实（见引理6）可得

$$\begin{aligned}
\chi_{2m+1}(\theta) &= \chi_{2m+1}^{++}(\theta) - \chi_{2m+1}^{++}(-\theta) + \chi_{2m+1}^{+-}(\theta) - \chi_{2m+1}^{+-}(-\theta) \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(2\theta\sqrt{2\pi}\chi_{2m+1}^{++}(0) - \frac{1+\theta}{(1-\theta)^{2m}} + \frac{1-\theta}{(1+\theta)^{2m}}\right) \\
&< \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(2\theta - \frac{1+\theta}{(1-\theta)^{2m}} + \frac{1-\theta}{(1-\theta)^{2m}}\right) = \frac{2\theta}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{1}{(1-\theta)^{2m}}\right) < 0.
\end{aligned}$$

这证明了对于 $\theta \neq 0$，$\xi_m(\theta)$不为零。 □

现在我们可以给出引理1的证明了。我们还将证明命题 2，这需要研究 $\chi_2(\theta) = -\xi_1(\theta) = \jmath(\theta)^{-2}$。

3.2 引理1的证明

由于 (19) 将 ξ 与 χ联系起来，引理1中的第 (i) 项由引理 4 得出。第 (ii) 项和第 (iv) 项即为推论2。现在我们证明第 (iii) 项和第 (v) 项。实际上，我们给出一个更精细的结果。

对于每个 $\theta \in (-1,1)$ 和 $k \geq 1$，由 (23) 和 (25) 可得

$$\begin{aligned}\frac{\xi_{2m}(\theta)}{(2m)!} &= \chi_{2m+1}(\theta) = \chi^{++}_{2m+1}(\theta) - \chi^{++}_{2m+1}(-\theta) + \chi^{+-}_{2m+1}(\theta) - \chi^{+-}_{2m+1}(-\theta) \\ &= \chi^{++}_{2m+1}(\theta) - \chi^{++}_{2m+1}(-\theta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(1+\theta)^{2m+1} - (1-\theta)^{2m+1}}{(1-\theta^2)^{2m}}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}-\frac{\xi_{2m-1}(\theta)}{(2m-1)!} &= \chi_{2m}(\theta) = \chi^{++}_{2m}(\theta) + \chi^{++}_{2m}(-\theta) + \chi^{+-}_{2m}(\theta) + \chi^{+-}_{2m}(-\theta) \\ &= \chi^{++}_{2m}(\theta) + \chi^{++}_{2m}(-\theta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\theta}{(1-\theta)^{2m}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-\theta}{(1+\theta)^{2m}}.\end{aligned}$$

在引理7的证明中，我们已经得到了一个界。下面给出更精细的界。先回顾这个界：对于每个 $\theta \in (0,1)$

$$\frac{\xi_{2m}(\theta)}{(2m)!} = \chi_{2m+1}(\theta) < -\frac{2\theta}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{(1-\theta)^{2m}} - 1\right).$$

与引理7的证明类似，通过结合不等式(29)和引理6，我们可以得到所需的界。对于每个 $\theta \in (0,\ 1)$，有

$$\begin{aligned}\frac{\xi_{2m}(\theta)}{(2m)!} &\geq -\frac{1+\sqrt{2\pi}\chi^{++}_{2m+1}(0)}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{(1-\theta)^{2m}} - \frac{1}{(1+\theta)^{2m}}\right) \\ &\quad - \theta\frac{1-\sqrt{2\pi}\chi^{++}_{2m+1}(0)}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{(1-\theta)^{2m}} + \frac{1}{(1+\theta)^{2m}}\right) \\ &\geq -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{(1-\theta)^{2m}} + \frac{1}{(1+\theta)^{2m}}\right) > -\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(1-\theta)^{2m}};\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}-\frac{\xi_{2m-1}(\theta)}{(2m-1)!} &= \chi_{2m}(\theta) \leq \chi^{++}_{2m}(0)\left(1+\theta+\frac{1}{(1-\theta)^{2(m-1)}}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\theta}{(1-\theta)^{2m-1}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-\theta}{(1+\theta)^{2m-1}},\end{aligned} \tag{31}$$

and

$$\begin{aligned}-\frac{\xi_{2m-1}(\theta)}{(2m-1)!} &\geq \chi^{++}_{2m}(0)\left(1-\theta+\frac{1}{(1+\theta)^{2(m-1)}}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\theta}{(1-\theta)^{2m-1}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-\theta}{(1+\theta)^{2m-1}}.\end{aligned} \tag{32}$$

由此可得，对于所有 $\theta \in (-1,\ 1)$,

$$-\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(1-|\theta|)^{2m-1}} < \frac{\xi_{2m-1}(\theta)}{(2m-1)!} < -\frac{1+|\theta|}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(1-|\theta|)^{2m-1}}$$

以及

$$-\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(1-|\theta|)^{2m}} < \frac{\xi_{2m}(|\theta|)}{(2m)!} < -\frac{2|\theta|}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{(1-|\theta|)^{2m}}-1\right) \le 0,$$
$$0 \le \frac{2|\theta|}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{(1-|\theta|)^{2m}}-1\right) < \frac{\xi_{2m}(-|\theta|)}{(2m)!} < \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(1-|\theta|)^{2m}}.$$

这些不等式推出了引理1的第 (iii) 项和第 (v) 项，并完成了其证明 f.

3.3 命题 2 的证明

我们证明命题 2，从而完成定理 1 中渐近混合正态性的分析。

引理1的证明，尤其是 (31)-(32)，表明对所有 θ,

$$-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\theta^2}{1-\theta^2} - \chi_2^{++}(0)(2+|\theta|) < \xi_1(\theta) < -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\theta^2}{1-\theta^2} - \chi_2^{++}(0)(2-|\theta|),$$

其中，根据引理6，$\chi_2^{++}(0) \approx 0.62$ 。这已经足以证明命题 2，但下一个引理使我们能够建立更好的界。

引理 8. 设

$$\mathcal{I}(\theta) := \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(1-e^{-2xy})}{(1-\theta^2 e^{-4xy})} e^{-4xy-\frac{(x+y)^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

则 $\mathcal{I}$ 在 $[0,1]$ 上递增，且 $\mathcal{I}(\theta) \in [\mathcal{I}(0)\ \mathcal{I}(1)]$ 其中

$$\mathcal{I}(0) = \sqrt{2\pi}(\chi_3^{++}(0) - \chi_4^{++}(0)) \approx 0.088,$$
$$\mathcal{I}(1) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(1+e^{-2xy})} e^{-4xy-\frac{(x+y)^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \in [\sqrt{2\pi}\chi_3^{++}(0)/2, \sqrt{2\pi}\chi_4^{++}(0)],$$

and

$$\mathfrak{z}(\theta)^{-2} = -\xi_1(\theta) = \chi_2(\theta) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1+\theta^2}{1-\theta^2} + \sqrt{2\pi}\chi_2^{++}(0) - \theta^2\mathcal{I}(\theta)\right). \tag{33}$$

回顾一下，引理6表明 $\sqrt{2\pi}\chi_2^{++}(0) \approx \overline{0.62}$、$\sqrt{2\pi}\chi_3^{++}(0)/2 \approx \overline{0.24}$，以及$\sqrt{2\pi}\chi_4^{++}(0) \approx \overline{0.38}$.

证明。 首先注意到 $[-1,1] \ni \theta \mapsto \mathcal{I}(\theta)$ 是偶函数，且在 $[0,1]$, 上递增，因此由式 (26) 和引理6可得命题的第一部分。我们已经得到了表达式 (25) 和 (27)，于是

$$\begin{aligned}\chi_2(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\theta^2}{1-\theta^2} \\ &\quad + \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(1+\theta)(1-\theta e^{-2xy}) + (1-\theta)(1+\theta e^{-2xy})}{(1-\theta^2 e^{-4xy})} e^{-2xy} e^{-\frac{(x+y)^2}{2}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

我们以一种合适的方式重写被积函数

$$\begin{aligned}\chi_2(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\theta^2}{1-\theta^2} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(1-\theta^2 e^{-2xy})}{(1-\theta^2 e^{-4xy})} e^{-2xy} e^{-\frac{(x+y)^2}{2}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\theta^2}{1-\theta^2} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(1 - \frac{\theta^2 e^{-2xy}(1-e^{-2xy})}{(1-\theta^2 e^{-4xy})}\right) e^{-2xy} e^{-\frac{(x+y)^2}{2}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中我们认出了式 (33) 的右端。 □

注 14。 我们得到了关于 $\chi_2(\theta) = -\xi_1(\theta) = \mathfrak{z}(\theta)^{-2}$ 的以下界：由式 (33),

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\theta^2}{1-\theta^2} + 2\chi_2^{++}(0) - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\theta^2 \mathcal{I}(0) \le \chi_2(\theta) \le \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\theta^2}{1-\theta^2} + 2\chi_2^{++}(0) - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\theta^2 \mathcal{I}(1).$$

由于 $\mathcal{I}(0) = \sqrt{2\pi}(\chi_3^{++}(0) - \chi_4^{++}(0)) \approx 0.088$ 且 $\mathcal{I}(1) \le \sqrt{2\pi}\overline{\chi_4^{++}}(0)$，通过研究上述关于 θ 的界，我们可以证明

$$\frac{\mathfrak{z}(\theta)}{\sqrt{1-\theta^2}} \in [0.79, 0.88].$$

通过数值计算，我们发现 $\mathfrak{z}(\theta)$ 非常接近其上界。

3.4 在 0 附近展开

我们给出 $\theta \mapsto \xi_m(\theta)$ 在 0 附近的多项式展开。根据（19），只需给出 $\theta \mapsto \chi_m(\theta)$ 的展开。由于我们无法显式计算 $\xi_m(\theta)$，因此可以利用此展开，根据引理6中给出的其在 $\theta = 0$ 处的值来计算它。还需回顾的是，我们可以将 $\chi_m(\theta)$ 改写为适用于蒙特卡罗模拟的形式，见（28）。

我们定义

$$\zeta_m(\theta) := \chi_m^{++}(\theta) + \chi_m^{+-}(\theta) - \chi_m^{--}(\theta) - \chi_m^{-+}(\theta).$$

利用对称关系 (20)-(22)， $\theta \mapsto \zeta_{2m}(\theta)$ 是奇函数，而 $\theta \mapsto \zeta_{2m+1}(\theta)$ 是偶函数。特别地，$\zeta_{2m}(0) = 0$。

此外，

$$\chi_{2m}(0) = \beta_{2m} \text{ and } \zeta_{2m+1}(0) = \beta_{2m+1}$$

with

$$\beta_m := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big(\sqrt{2\pi}\chi_m^{++}(0) + (-1)^m\Big)$$

以及引理6中给出的 $\chi_m^{++}(0)$。

引理9。对于任意 $m \geq 1$，

$$\partial_\theta \chi_m(\theta) = -(m-1)\chi_{m+1}(\theta) + \zeta_m(\theta), \tag{34}$$
$$\partial_\theta \zeta_m(\theta) = -(m-1)\zeta_{m+1}(\theta) + \chi_m(\theta). \tag{35}$$

证明。对 θ求导，

$$\begin{aligned}\partial_\theta \chi_m^{\pm\pm}(\theta) = m &\iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\pm x\geq 0,\pm y\geq 0}\partial_\theta k_\theta(x,y)k_\theta(x,y)^{m-1}p_\theta(1,x,y)\mu_\theta(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &+ \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\pm x\geq 0,\pm y\geq 0}k_\theta(x,y)^m\frac{\partial_\theta p_\theta(1,x,y)}{p_\theta(1,x,y)}p_\theta(1,x,y)\mu_\theta(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &+ \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\pm x\geq 0,\pm y\geq 0}\,\mathrm{sgn}(x)k_\theta(x,y)^m p_\theta(1,x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

根据（15），且由于 $k_\theta(x,\ y) = \partial_\theta p_\theta(1,\ x,\ y)/p_\theta(1,\ x,\ y)$，

$$\begin{aligned}\partial_\theta \chi_m^{\pm\pm}(\theta) = -m &\iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\pm x\geq 0,\pm y\geq 0}\mu_\theta(x)k_\theta(x,y)^{m+1}p_\theta(1,x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &+ \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\pm x\geq 0,\pm y\geq 0}\mu_\theta(x)k_\theta(x,y)^{m+1}p_\theta(1,x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &+ \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\pm x\geq 0,\pm y\geq 0}\,\mathrm{sgn}(x)k_\theta(x,y)^m p_\theta(1,x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}\partial_\theta \chi_m^{++}(\theta) &= -(m-1)\chi_{m+1}^{++}(\theta) + \chi_m^{++}(\theta), \\ \partial_\theta \chi_m^{+-}(\theta) &= -(m-1)\chi_{m+1}^{+-}(\theta) + \chi_m^{+-}(\theta), \\ \partial_\theta \chi_m^{-+}(\theta) &= -(m-1)\chi_{m+1}^{-+}(\theta) - \chi_m^{-+}(\theta), \\ \partial_\theta \chi_m^{--}(\theta) &= -(m-1)\chi_{m+1}^{--}(\theta) - \chi_m^{--}(\theta).\end{aligned}$$

利用这四个表达式，我们很容易得到式（34）和（35）。 □

推论 3。对于 $k \geq 1$ 和 $m \geq 1$,

$$\partial_\theta^k \chi_m(\theta) = \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^\ell b_\ell \binom{k}{\ell} \Big(\chi_{m+\ell}(\theta) a_\ell + \zeta_{m+\ell}(\theta)(1 - a_\ell) \Big) \tag{36}$$

with

$$a_\ell = \begin{cases} 1 & \text{if } k-\ell \text{ is even,} \\ 0 & \text{if } k-\ell \text{ is odd} \end{cases} \text{ and } b_\ell = \begin{cases} 1 & \text{if } \ell = 0, \\ (m-1)\cdots(m-\ell-2) & \text{if } \ell \geq 1. \end{cases}.$$

证明。我们将关于未知量 λ 和 μ 的形式幂级数在 $\mathbb{R}[[\lambda, \mu]]$ 中写为

$$X(\theta) = \sum_{m \geq 1} \lambda^m \chi_m(\theta) + \sum_{m \geq 1} \mu^m \zeta_m(\theta).$$

接着，我们在 $\mathbb{R}[[\lambda, \mu]]$ 上定义两个线性算子 S 和 J，定义如下： $S(\nu^{m+1}) = -(m-1)\nu^m$，其中 $\nu = \lambda,\ \nu$，并且 $J(\lambda^m) = \mu^m,\ J(\mu^m) = \lambda^m$，使得 J 交换 μ 与 λ，且 J^2 是幂等的。算子 S 和 J 可交换。按照我们对 S 的选择，

$$S(X(\theta)) = -\sum_{m \geq 1} (m-1)\lambda^m \chi_{m+1}(\theta) - \sum_{m \geq 1} \mu^m \zeta_{m+1}(\theta),$$

因此，我们将 (34)-(35) 写成

$$\partial_\theta X(\theta) = (S + J)X(\theta).$$

因此,

$$\partial_\theta^k X(\theta) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} S^\ell J^{k-\ell} X(\theta).$$

由此可推出 (36)。 □

由 (36) 得,

$\partial_\theta^2 \chi_m(\theta) = (m-1)m\chi_{m+2}(\theta) - 2(m-1)\zeta_{m+1}(\theta) + \chi_m(\theta), \partial_\theta^3 \chi_m(\theta) = -(m-1)m(m+1)\chi_{m+3}(\theta) + 3(m-1)m\zeta_{m+2}(\theta) - 3(m-1)\chi_{m+1} + \zeta_m(\theta).$

在 0 附近进行泰勒展开可得以下结果。

推论 4。对于任意满足 $|\theta| < 1$ 的 θ，$\chi_m(\theta) = \chi_m(0) + \sum_{k \geq 1} c_{m,k} \theta^k$ 其中 $c_{2m,1} = 0$、$c_{2m+1,1} = -2m\chi_{2m+2}(0)$，且每个 $c_{m,k}$ 都是 β_ℓ 在 $\ell = m$、.....、$\ell + k$ 处取值的线性叠加。

特别是,

$$\chi_2(\theta) \approx 1.29 + 2.17 \cdot \theta^2 + \cdots \text{ and } \chi_3(\theta) \approx -0.42 \cdot \theta - 2.93 \cdot \theta^2 + \cdots.$$

3.5 极限协方差

现在我们说明如何计算命题 4.(ii) 中出现的协方差矩阵 Ψ，至少可以通过数值计算得到。回忆一下，对于任意 $i \geq 0$，都有 $\xi_{2i}(0) = 0$。
根据 [14, 定理 1.2，第 511] 页或 [27],

$$\Psi_{2i,2j} := \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\big[\big(\partial_\theta^{2i} k_0(B_0, B_1)\partial_\theta^{2j} k_0(B_0, B_1)\big) \,\big|\, B_0 = x\big]\,\mathrm{d}x \\ + 2\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\sum_{\ell\geq 1} \partial_\theta^{2i} k_0(B_0, B_1)\partial_\theta^{2j} k_0(B_\ell, B_{\ell+1}) \,\middle|\, B_0 = x\right]\mathrm{d}x,$$

对于布朗运动 B。由引理 2 中的式 (15),

$$\Psi_{2i,2j} = (2i)!(2j)!\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\sum_{\ell\leq 0} k_0^{2i+1}(B_0, B_1)k_0^{2j+1}(B_\ell, B_{\ell+1}) \,\middle|\, B_0 = x\right]\mathrm{d}x.$$

我们将此表达式分解为

$$\Psi_{2i,2j} = (2i)!(2j)!\big(\underline{\Psi}^I_{2i,2j} + \underline{\Psi}^{II}_{2i,2j} + \underline{\Psi}^{III}_{2i,2j}\big)$$

with

$$\begin{aligned}
\underline{\Psi}^I_{2i,2j} &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\big[k_0^{2i+1}(B_0, B_1)k_0^{2j+1}(B_0, B_1) \,\big|\, B_0 = x\big]\,\mathrm{d}x, \\
\underline{\Psi}^{II}_{2i,2j} &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\big[k_0^{2i+1}(B_0, B_1)k_0^{2j+1}(B_1, B_2) \,\big|\, B_0 = x\big]\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\big[k_0^{2j+1}(B_0, B_1)k_0^{2i+1}(B_1, B_2) \,\big|\, B_0 = x\big]\,\mathrm{d}x, \\
\underline{\Psi}^{III}_{2i,2j} &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\sum_{\ell\geq 2} k_0^{2i+1}(B_0, B_1)k_0^{2j+1}(B_\ell, B_{\ell+1}) \,\middle|\, B_0 = x\right]\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\sum_{\ell\geq 2} k_0^{2j+1}(B_0, B_1)k_0^{2i+1}(B_\ell, B_{\ell+1}) \,\middle|\, B_0 = x\right]\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

引理 10. 成立

$$\underline{\Psi}^I_{2i,2j} = \chi_{2(i+j)+2}(0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(1 + \sqrt{2\pi}\chi^{++}_{2(i+j+1)}(0)\right) = \frac{-\xi_{2(i+j)+1}(0)}{(2(i+j)+1)!}. \tag{37}$$

特别地，$\Xi_{0,\,0}(0) = \sqrt{\Psi^I_{0,\,0}} = \sqrt{-\xi_1(0)}$。

—

证明。式（37）由（5）和（19）中 ξ_m 的定义得到。当 $i=j=0$ 时，根据马尔可夫性质和（24），有 $\Psi_{0,\,0}^{II}=\Psi_{0,\,0}^{III}=0$。□

根据(18)和引理 5，可得 $\chi_{2(i+j)+2}(0)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}(1+\sqrt{2\pi}\chi_{2\,(i+j)+2}^{++}(0))$，而 $\chi^{++}(0)$ 的一个近似式见引理6。

对于 $m\geq 1$，当 m 为奇数时，我们设

$$\kappa_m(x,y):=\exp(-2m(xy)_+)\operatorname{sgn}(y)=k_0(x,y)^m$$
$$\text{and }\widehat{\kappa}_m(x,y):=\exp(-2m(xy)_+)\operatorname{sgn}(x)=\kappa_m(y,x).$$

我们还定义

$$K_m(x):=\int\kappa_m(x)\exp\left(\frac{-(x-y)^2}{2}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}}=\mathbb{E}[\kappa_m(x,B_1)\mid B_0=x]$$
$$\text{and }\widehat{K}_m(x):=\int\widehat{\kappa}_m(x)\exp\left(\frac{-(x-y)^2}{2}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}}=\mathbb{E}[\widehat{\kappa}_m(x,B_1)\mid B_0=x]$$

对于布朗运动 B。经过一些直接计算，

$$K_m(x)=\operatorname{sgn}(x)\exp(2x^2m(m-1))\Phi(-(2m-1)|x|)-\operatorname{sgn}(x)\Phi(-|x|)$$
$$\text{and }\widehat{K}_m(x)=\operatorname{sgn}(x)\exp(2x^2m(m-1))\Phi(-(2m-1)|x|)+\operatorname{sgn}(x)\Phi(-|x|).$$

记号 2（（缩放）互补误差函数）。互补误差函数和缩放互补误差函数分别为

$$\operatorname{erfc}(x):=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y=2\overline{\Phi}(x\sqrt{2})\text{ and }\operatorname{erfcx}(x):=\exp\bigl(x^2\bigr)\operatorname{erfc}(x)$$

对于 $x\geq 0$。

函数 $x\in[0,1]\mapsto$互补误差函数(x) 和 $x\in[0,1]\mapsto$互补误差函数缩放形式(x) 的取值范围是 $[0,1]$。根据米尔斯比率，当 x 较大时，互补误差函数缩放形式(x) $\sim 1/x\sqrt{\pi}$。

我们还引入

$$b_m:=\frac{2m-1}{\sqrt{2}}\text{ so that }2m(m-1)=b_m^2-\frac{1}{2}.$$

由于 $\Phi(-|x|)=\Phi(|x|)$，我们将 K_m 和 K_m 改写为

$$K_m(x)=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x)e^{-x^2/2}\Bigl(\operatorname{erfcx}(b_m|x|)-\operatorname{erfcx}(|x|/\sqrt{2})\Bigr)$$
$$\text{and }\widehat{K}_m(x)=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x)e^{-x^2/2}\Bigl(\operatorname{erfcx}(b_m|x|)+\operatorname{erfcx}(|x|/\sqrt{2})\Bigr).$$

引理 11。对于 $i,\ j \geq 0$,

$$\underline{\Psi}^{III}_{2i,2j} = \sum_{\ell \geq 2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\ell-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{K}_{2i}(y) K_{2j}(z) \exp\left(\frac{-(z-y)^2}{2(\ell-1)}\right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + \sum_{\ell \geq 2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\ell-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{K}_{2j}(y) K_{2i}(z) \exp\left(\frac{-(z-y)^2}{2(\ell-1)}\right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

证明。 我们定义 $m, n \geq 0$,

$$A(\ell, m, n) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[\kappa_m(B_0, B_1)\kappa_n(B_\ell, B_{\ell+1}) \mid B_0 = x]\, \mathrm{d}x \tag{38}$$

使得

$$\underline{\Psi}^{III}_{2i,2j} = \sum_{\ell \geq 2} 2A(\ell, 2i+1, 2j+1).$$

我们用其积分形式重写 $A(\ell, m, n)$:

$$A(\ell, m, n) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\ell-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa_m(x, y)\kappa_n(z, u) \times \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{2}\right) \exp\left(\frac{-(z-y)^2}{2(\ell-1)}\right) \exp\left(\frac{-(z-u)^2}{2}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}u. \tag{39}$$

我们先计算 $A(\ell, m, n)$，其中 $\ell \geq 2$。由于 $\widehat{\kappa}_m(y, x) = \kappa_m(x, y)$，对 x 和 y、$\widehat{\ }$ 取逆，并利用 K_m 和 K_m 的定义，可得

$$A(\ell, m, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\ell-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{K}_m(y) K_n(z) \exp\left(\frac{-(z-y)^2}{2(\ell-1)}\right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

由此得到所需结果。 □

注 15. 作变量代换 $(y, z) \to (y/\sqrt{j-1}, z/\sqrt{j-1})$，其中 A 在（38）中引入，

$$A(\ell, m, n) = \sqrt{2\pi}\sqrt{\ell-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{K}_m(y\sqrt{\ell-1}) K_n(z\sqrt{\ell-1}) \exp(yz) \times \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2\pi}}.$$

对于两个独立的高斯随机变量 $G,\ G' \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$，我们可以写 e

$$A(\ell, m, n) = \sqrt{2\pi}\sqrt{\ell-1}\mathbb{E}[K_m(G'\sqrt{\ell-1})\widehat{K}_n(G\sqrt{\ell-1}) \exp(G \cdot G')],$$

其中 $G, G' \sim \mathcal{N}(0,1)$ 相互独立。然而，方差较大，因此蒙特卡罗技术在此处不稳定。

引理 12. 对于 $i, j \geq 1$,

$$\underline{\Psi}^{II}_{2i,2j} = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \operatorname{erfcx}(b_{2i+1}x) \operatorname{erfc}(b_{2j+1}x)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big(\sqrt{2}-1\Big).$$

证明。与上文一样,

$$\begin{aligned} A(1,m,n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{K}_m(x) K_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \operatorname{erfcx}(b_m x) \operatorname{erfc}(b_n x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \operatorname{erfcx}(x/\sqrt{2})^2\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

量 $\Psi^{III}_{2i,\,2j}$ 因此为

$$\underline{\Psi}^{II}_{2i,2j} = A(1, 2i+1, 2j+1) + A(1, 2j+1, 2i+1).$$

根据 [29, 4.7.2],

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \operatorname{erfcx}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big(\sqrt{2}-1\Big) \approx 0.467.$$

似乎不存在 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \operatorname{erfcx}(b_m x) \operatorname{erfc}(b_n x)\mathrm{d}x$ 的闭式表达式。不过，由于 erfcx 有多种实现方法，这个积分很容易进行数值计算。可以通过求积法计算该积分，也可以使用蒙特卡洛方法，具体如下:

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \operatorname{erfcx}(b_m x) \operatorname{erfc}(b_n x)\,\mathrm{d}x \\ &\qquad = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2m-1}} \mathbb{E}\left[\operatorname{erfcx}\left(\frac{\sqrt{2m-1}}{\sqrt{2}}|G|\right) \operatorname{erfcx}\left(\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}|G|\right)\right]. \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

数值计算。下面给出通过数值计算得到的 Ψ 的一些初始值:

$$\{\Psi_{2i,2j}\}_{i,j=0,1,2} \approx \begin{bmatrix} 1.295 & 1.422 & 12.576 \\ 1.422 & 1.891 & 18.135 \\ 12.576 & 18.135 & 181.421 \end{bmatrix}.$$

最后，我们通过一个观察来作结：对于 $m \geq 2$, m 为奇数的情形，我们发现了经验法则：当 m取中等值时，$\Psi_{m,m}/\Psi^I_{m,m}$ 的行为近似于 $C_m/\sqrt{2m}$，其中前置因子 C_m 缓慢变化。此外，$\Psi^I_{m,m}$ 在 $m \to \infty$ 时收敛到 $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$（见引理6和引理10），而 $\Psi^{II}_{m,m}$ 收敛到 $-2(\sqrt{2}-1)/\sqrt{\pi}$。

4 渐近结果的证明

本节的目标是证明命题 4。命题3作为命题 4的推论，在第 2 节中得到证明。定理2是 [20, 定理 3]的直接应用。定理 1中的收敛可由定理2中的展开与命题3结合得到。

命题 4 是注 10 中所述结果的推论，尤其是收敛式 (14)；它是 [27] 的一个简单应用。接下来的引理13是一个可积性条件，它确保 [27] 中主要结果的假设得到满足。虽然 (14) 涉及 k_θ 的导数，但该引理涉及其幂。这由第3节中的引理 2 得到证明，其中表明 $\partial_\theta^m k_\theta(x,\ y)$ 与 $k_\theta(x,\ y)^m$ 成正比，比例因子仅取决于 $m \in \mathbb{N}$。

引理13。 对于 $m = 1$、2、3、..，以及任意 $\gamma > 3$，存在 $a > 0$，使得对每个 $\theta \in (-1,\ 1)$，都存在一个可测有界函数 h_θ： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，满足

$$\int_{\mathbb{R}} h_\theta(x)|x|^\gamma \,\mathrm{d}x < +\infty \ and\ |k_\theta^m(x,y)| \le h_\theta(x)e^{a|y-x|},\ for\ any\ x,y \in \mathbb{R}.$$

证明。 固定 $a > 0$。注意到

$$|k_\theta(x,y)| \le \frac{1}{(1-|\theta|)}\mathbf{1}_{\{xy\le 0\}} + \frac{1}{(1-|\theta|)}e^{-2xy}\mathbf{1}_{\{xy>0\}} =: h_\theta(x,y) \le \frac{1}{(1-|\theta|)}.$$

现在， $\mathbf{1}_{\{xy\le 0\}} \le e^{-a|x|}e^{a|y-x|}$。我们来为 $e^{-2xy}e^{-a|y-x|}\mathbf{1}_{\{xy>0\}}$ 求一个上界。首先假设 $xy > 0$ 和 $|y| \ge |x|$，那么

$$e^{-2xy}e^{-a|y-x|} = e^{-2|x||y|}e^{-a|y|+a|x|} \le e^{-2x^2}$$

并且，如果 $xy > 0$ 和 $|y| < |x|$，那么

$$e^{-2xy}e^{-a|y-x|} = e^{-2|x||y|}e^{-a|x|+a|y|} \le e^{-2x^2}\mathbf{1}_{\{|x|\le a/2\}} + e^{-a|x|}\mathbf{1}_{\{|x|>a/2\}}.$$

我们得出，对于任意 $x,\ y \in \mathbb{R}$,

$$|k_\theta(x,y)|^m \le (1-|\theta|)^{-(m-1)}h_\theta(x,y) \le (1-|\theta|)^{-m}\left(e^{-2x^2} + e^{-a|x|}\right)e^{a|y-x|}$$

且 $\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-2x^2} + e^{-a|x|}\right)|x|^\gamma \,\mathrm{d}x < +\infty$。

□

4.0.1 项(i)：情形 $\theta \neq 0$

命题 4 的 (i) 项可直接由注 10、注记11 和引理1 中陈述的结果推出。该结果保证，当 $\theta \in (-1,\ 1)$ 时，$\xi_0(\theta) = 0$；此外，当 $\theta \neq 0$ 时，只要 $m \geq 1$ 且 $\xi_{2m}(0) = 0$，便有 $\xi_m(\theta) \neq 0$。
利用以下事实：给定两个序列，一个依概率收敛，另一个稳定收敛，则二者联合稳定收敛（见 [2,定理 1]）），我们得到向量 $(S_k(\theta))_{k=0,\ \ldots,\ m}$ 对任意 $m \geq 0$ 的联合稳定收敛。

4.0.2 项(ii)：情形 $\theta = 0$

根据上述论证，我们只需关注以下对象的收敛：

$$S^{\sim}(n,0) := (n^{1/4}S_0(n,0), n^{1/4}S_2(n,0), \ldots, n^{1/4}S_{2m}(n,0))$$

因为对每个 $m \geq 0$，$S_{2m+1}(n,\ 0)$ 依概率收敛到 $\xi_{2m+1}(\theta)L_T$。
该结果直接由 [14, 定理1.2，第 511] 页得出（因为引理13成立，故该定理可适用）。

参考文献

[1] Milton Abramowitz 和 Irene A. Stegun。《含公式、图表和数学表格的数学函数手册》，第 55 卷，《国家标准局应用数学丛书》。1964 年。

[2] D. J. Aldous 和 G. K. Eagleson。论极限定理的混合与稳定性。《概率年刊》，6：325–331，1978 年。

[3] Héctor Araya、Meryem Slaoui 和 Soledad Torres。分数阶振荡布朗运动的贝叶斯推断。计算统计学，37(2)：887–907，2022。[4] Yizhou Bai、Yongjin Wang、Haoyan Zhang 和 Xiaoyang Zhuo。偏斜奥恩斯坦–乌伦贝克过程的贝叶斯估计。计算经济学，60(2)：479–527，2021年7月。[5] Manuel Barahona、Laura Rifo、Maritza Sepúlveda 和 Soledad Torres。偏斜布朗运动贝叶斯估计量的基于模拟的研究。熵，18(7)：论文编号241，14页，2016。[6] Olivier Bardou 和 Miguel Martinez。反射偏斜过程的统计估计。统计推断与随机过程，13(3)：231–248，2010。

[7] Said Karim Bounebache 和 Lorenzo Zambotti。偏斜随机热方程。理论概率期刊，27(1)：168–201，2014。[8] R.S. Cantrell 和 C. Cosner。纳入边界处个体行为的种群动力学扩散模型：避难所设计的应用。理论种群生物学，55(2)：189–207，1999。[9] Marc Decamps、Marc Goovaerts 和 Wim Schoutens。自激阈值利率模型。国际理论与应用金融期刊，9(7)：1093–1122，2006。[10] Alexander Gairat 和 Vadim Shcherbakov。偏斜布朗运动及其泛函的密度及其在金融中的应用。数理金融，27(4)：1069–1088，2017。[11] J. M. Harrison 和 L. A. Shepp。论偏斜布朗运动。概率年刊，9(2)：309–313，1981。[12] I.A. Ibragimov 和 R.Z. Has'minskii。统计估计渐近理论。Springer，1981。[13] Andrey Itkin、Alexander Lipton 和 Dmitry Muravey。多层热方程及其振荡积分变换解法。*Physica A*，601：34，2022。编号127544。[14] J. Jacod。扩散过程局部时的收敛速率。*H. Poincaré*研究所概率与统计年刊，34(4)：505–544，1998。[15] Yu.A. Kutoyants。随机过程参数估计。Heldermann，1984。[16] A. Lejay。偏斜布朗运动的构造。概率调查，3：413–466，2006。[17] A. Lejay 和 P. Pigato。振荡布朗运动的统计估计。《伯努利》，24(4B)：3568–3602，2018。[18] Antoine Lejay。偏斜随机游走偏置参数的估计及其在偏斜布朗运动中的应用。统计推断与随机过程，21(3)：539–551，2018。[19] Antoine Lejay。偏斜随机游走偏置参数的估计及其在偏斜布朗运动中的应用。统计推断与随机过程，21(3)：539–551，2018。

[20] Antoine Lejay 和 Sara Mazzonetto。超越 delta 方法，2022。预印本 https://hal.inria.fr/hal-03738371v1。[21] Antoine Lejay、Ernesto Mordecki 和 Soledad Torres。布朗运动是偏斜的吗？《斯堪的纳维亚统计学杂志》，41(2):346–364，2014。[22] Antoine Lejay、Ernesto Mordecki 和 Soledad Torres。偏斜布朗运动的两种一致估计量。*ESAIM*：概率与统计，23:567–583，2019。[23] Antoine Lejay 和 Géraldine Pichot。不连续介质中的扩散过程模拟：一种采用恒定时间步长的数值格式。《计算物理学杂志》，231(21):7299–7314，2012。[24] Antoine Lejay 和 Paolo Pigato。振荡布朗运动的统计估计。《伯努利》，24(4B):3568–3602，2018。[25] Antoine Lejay 和 Paolo Pigato。局部波动率的阈值模型：历史数据揭示的杠杆效应和均值回归效应。*Int. J. Theor. Appl. Finance*，22(4):1950017，24，2019。[26] Antoine Lejay 和 Paolo Pigato。阈值扩散的最大似然漂移估计。《斯堪的纳维亚统计学杂志》，47(3):609–637，2020。[27] Sara Mazzonetto。振荡布朗运动和偏斜布朗运动局部时的收敛速率，2019。[28] Pedro P. Mota 和 Manuel L. Esquível。具有机制转换、时滞和阈值的连续时间股票价格模型。《定量金融》，14(8):1479–1488，2014。[29] Edward W. Ng 和 Murray Geller。误差函数积分表。《国家标准局研究杂志*B*辑》，73B:1–20，1969。[30] Otso Ovaskainen 和 Stephen J. Cornell。边界处的偏置运动与扩散过程的条件占据时间。《应用概率学杂志》，40(3):557–580，2003。[31] Jorge M. Ramirez、Enrique A. Thomann、Edward C. Waymire、Roy Haggerty 和 Brian Wood。广义 Taylor-Aris 公式与偏斜扩散。《多尺度建模与仿真》，5(3):786–801，2006。[32] Christian Y. Robert。时齐扩散的扩散系数跳跃间断有多大？《计量经济理论》，第1–33页，2022。

[33] Fei Su 和 Kung-Sik Chan。阈值扩散过程的拟似然估计。《计量经济学杂志》，189(2):473–484，2015。[34] Fei Su 和 Kung-Sik Chan。阈值扩散检验。《商业与经济统计学杂志》，35(2):218–227，2017。[35] J. B. Walsh。一种具有不连续局部时的扩散过程。载于《局部时间》，第52-53卷，第37–45页。法国数学学会，1978。[36] M. Zhang。利用偏斜布朗运动计算带电粒子的扩散激波加速。《天体物理学杂志》，541:428–435，2000。