重尾伽尔顿–沃森树合并结构的普适性类别

SIMON C. HARRIS、SAMUEL G.G. JOHNSTON 和 JUAN CARLOS PARDO

arXiv:2302.02960v1 [math.PR] 6 Feb 2023

Abstract. 考虑一个作为临界连续时间伽尔顿-沃森（GW）树演化的种群。给定种群存活至较大的时间 T，从时间 T仍存活的个体中均匀随机抽取 k 个个体（不放回）。这个个体样本的谱系是什么？当后代分布具有有限方差时，这 k 个粒子的联合祖先关系的概率性质已得到充分理解，正如 [17, 21]所示。本文研究以下情形下 k 个粒子样本的联合祖先关系：后代分布的均值为 1（临界），且后代分布的尾部很重，即 $\alpha \in$ （其中，$1, 2]$ 是使 β^{th} 矩有限的指标 β 的上确界）。我们证明，对于每个 α，将时间按 $1/T$重新缩放后，都存在一个描述 k 个不同粒子联合合并结构的普适随机过程。特殊情形 $\alpha = 2$ 推广了从具有有限方差的临界 GW 树中进行抽样这一已知情形；在那里只能观察到成对合并，而谱系树粗略地说是某种经时间变换的 Kingman 合并过程的混合。在 $\alpha \in$ （1，2）的情形下，我们引入了新的普适极限取值于划分的随机过程，它们具有有趣的概率结构；特别是，这些过程具有与 Lauricella 函数和狄利克雷分布相关的表示，其合并结构表现出家系的多重合并。此外，在 $\alpha \in$ （1，2）的情形下，我们证明 k 个粒子祖先关系中的合并事件与出生事件相对应；这些出生事件产生数量巨大、且与整个种群规模同阶的后代，并计算出祖先关系与这些巨量出生规模的联合分布。

Key words and phrases: 伽尔顿-沃森树、合并、谱系、脊柱、正则变函数

MSC 2000 学科分类：60J80, 60G09。

1. Introduction

1.1. 连续时间伽尔顿–沃森树及其合并过程。设 $r > 0$，并设 $\overline{p} = (p_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ 是定义在非负整数上的概率质量函数。考虑一棵分枝率为 r、后代分布为 $\overline{p}$ 的连续时间 Galton-Watson 树，其初始时刻只有一个粒子。初始粒子的寿命服从参数为 r 的指数分布（即预期寿命为 $1/r$），死亡后由随机数量为 L 的后代粒子取代，其中 $\mathbb{P}(L = i) = p_i$。同样，每个后代粒子都独立地重复其亲代的行为，后续世代也依此类推：每个粒子以速率 r 死亡，死亡后由数量随机、分布与 $\overline{p}$ 相同的后代取代。在这一过程中，我们用 Z_t 表示时间 t 存活的粒子数。

连续时间伽尔顿–沃森树具有一种自然的谱系概念：在某个时间 t 存活的每个粒子，在更早的每个时间 $s < t$ 都有唯一的祖先粒子。于是，自然会提出这样的问题：在某个特定时间存活的种群中，不同粒子共享怎样的谱系。具体而言，在给定事件 $\{Z_T \geq k\}$ （即在时间 $T > 0$至少有 k 个粒子存活）发生的条件下，从时间 T存活的种群中均匀随机地无放回抽取 k 个粒子。用整数 1 到 k为这 k 个抽取出的粒子编号。回顾一些标准的

术语，由 $\{1,\dots,k\}$ 中两两不相交且非空的子集组成、并且其并集为 $\{1,\dots,k\}$ 的集合称为 $\{1,\dots,k\}$的集合划分。我们可以将一个由 k 个带标签粒子组成的样本与一个随机过程 $\pi^{(k,T)}:=(\pi^{(k,T)}{}_t)_{t\in[0,T]}$ 关联起来，该过程取值于 $\{1,\dots,k\}$ 的集合划分所组成的集合中，具体定义如下

(1.1) i 和 j 属于 $\pi_t^{(k,T)} \iff i$ 和 j 中的同一块，它们都源自同一个时间为 t 的祖先，

更确切地说，在 (1.1) 中，我们指的是：时间为 T、标记为 $i\in\{1,\dots,k\}$ 的粒子与时间为T、标记为 $j\in\{1,\dots,k\}$ 的粒子，在时间为 t 的种群中拥有同一个唯一祖先。这种集合划分过程的构造也见于例如 [8] 和 [21]。

由于整个过程始于时间 0 的单个粒子，因此 k 个粒子都有同一个初始祖先，相应地，$\pi_0^{(k,T)}=\{\{1,\dots,k\}\}$，也就是说，$\pi_0^{(k,T)}$ 是将$\{1,\dots,k\}$ 划分为一个单块的划分。反过来，由于我们采用无放回均匀抽样，时间 T的各个粒子彼此不同，因此 $\pi_T^{(k,T)}=\{\{1\},\dots,\{k\}\}$ 是将 $\{1,\dots,k\}$ 划分为单元素集合。更一般地，随着 t在 $[0,T]$中递增，随机过程 $\pi^{(k,T)}$ 在 $\{1,\dots,k\}$的各个划分中取值，并且该过程中的各个块会随着时间推移而分裂。基于这一图景，我们定义分裂时间

$$\tau_1<\ldots<\tau_m$$

作为 $\pi^{(k,T)}$的不连续点的时间。也就是说，在每个时间 τ_i，$\pi_{\tau_i-}^{(k,T)}$ 中的一个块会在 $\pi^{(k,T)}{}_{\tau_i}$ 分裂成数个更小的块。注意，$\pi^{(k,T)}$ 几乎必然是右连续的。

许多作者研究了过程 $\pi^{(k,T)}$ 的各种形式，以及各种连续时间伽尔顿–沃森树背景下的情形（详见第 1.6 节）。Harris、Johnston 和 Roberts [17] 研究了在后代分布为临界分布（即 $\sum_{i\geq 0} ip_i=1$）且具有有限方差（即 $\sum_{i\geq 0} i(i-1)p_i<\infty$）的情况下，过程 $\pi^{(k,T)}$ 的大 T 渐近行为。在这些条件下，他们证明了重整化过程 $(\pi_{sT}^{(k,T)})_{s\in[0,1]}$ 依分布收敛于一个取值于 $\{1,\dots,k\}$的划分集合中的普适随机过程 $\nu^{(k,2)}:=(\nu_s^{(k,2)})_{s\in[0,1]}$。这一极限过程 $\nu^{(k,2)}$ 之所以具有普适性，是因为它不依赖于后代分布的具体形式，只要求该分布是（近似）临界的且具有有限方差。Harris 等人 [17] 证明，$\nu^{(k,2)}$ 只表现出二元分裂（即每个不连续点都对应于一个块恰好分裂成两个子块），其中：若当前有 i 个大小分别为 a_1、a_2、.....、a_i 的块，则下一个分裂的块为块 j 的概率是 $(a_j-1)/(k-i)$；对于任何大小为 a 的分裂块，其第一个子块的大小在 $\{1,2,\dots,a-1\}$上均匀分布；并且，与块拓扑相互独立地，$k-1$ 个分裂时间 $0<\tau_1<\ldots<\tau_{k-1}<1$ 的联合分布为

$$f_k(t_1,\dots,t_{k-1})=k\int_0^\infty\prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{\varphi}{(1+\varphi(1-t_i))^2}\right)\frac{1}{(1+\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{k-1}. \tag{1.2}$$

此外，从时间上向后观察时，这个分割过程 $\nu^{(k,2)}$ 与 Kingman聚并过程具有相同的拓扑 [24], ，也就是说，任意两个块都同样有可能成为下一对合并的块。

1.2. 主要结果。本文将研究后代分布为临界但具有重尾的伽尔顿–沃森树，最终发现一组新的普适随机过程 $\{\nu^{(k,\alpha)}:=(\nu_s^{(k,\alpha)})_{s\in[0,1]}:\ \alpha\in(1,2]\}$，它们描述了这些树的极限谱系结构。我们将后代分布 $\overline{p}=(p_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ 的概率生成函数（概率生成函数）定义为

$$f(s):=\mathbb{E}[s^L]=\sum_{j\geq 0}p_js^j,\qquad \text{for}\quad s\in[0,1].$$

在全文中，我们假设 $p_0 > 0$。对于某些 $\alpha \in (1, 2]$，假设 $\overline{p}$ 的概率生成函数可以写成

(H1) $$f(s) = s + (1-s)^{\alpha}\ell\left(\frac{1}{1-s}\right)$$

其中 ℓ 是一个在无穷远处缓变的函数，也就是说，对任意 $\lambda > 0$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ell(\lambda x)}{\ell(x)} = 1.$$

注意，这样的 α 是唯一的，并且可以验证，对于 (H1) 中形式的 f，有 $f'(1) = \sum_{j\geq 0} jp_j = 1$，也就是说，$f$ 是临界后代分布的概率生成函数。高阶矩的情况则稍微复杂一些。若 $\alpha \in (1, 2)$，我们稍后将看到，若 L 是一个整数值随机变量，且其矩母函数具有 (H1) 中的形式，那么当 $\kappa < \alpha$ 时，$\mathbb{E}[L^{\kappa}] < \infty$；而当 $\kappa > \alpha$ 时，$\mathbb{E}[L^{\kappa}] = \infty$。矩 $\mathbb{E}[L^{\alpha}]$ 本身既可能有限，也可能无限。然而，在 $\alpha = 2$ 的情形下，事实证明，(H1) 形式的矩母函数涵盖了所有定义在非负整数上且方差有限、均值为一的概率分布。另一方面，正如我们将在 (1.3) 中看到的，可以找到无限方差随机变量，其矩母函数具有 (H1) 的形式，且 $\alpha = 2$。

现在我们可以陈述关于具有重尾后代分布的伽尔顿–沃森树合并结构普适性类别的首个主要结果。

定理 1. 考虑一棵分枝率为 r、具有临界后代分布 $\overline{p}$ 的连续时间 Galton-Watson 树，其矩母函数对某个 $\alpha \in (1, 2]$ 满足 (H1)。在给定 $\{Z_T \geq k\}$ 的条件下，令 $(\pi^{(k,T)}_t)_{t\in[0,T]}$ 表示与从时间 T 存活的种群中均匀随机且不放回抽取的 k 个粒子相关联的祖先过程。那么，当时间趋于无穷时，祖先过程依分布收敛到

$$\left(\pi^{(k,T)}_{sT}\right)_{s\in[0,1]} \implies (\nu^{(k,\alpha)}_s)_{s\in[0,1]} \qquad as \quad T\to\infty,$$

其中，对每个 $\alpha \in (1, 2]$，$(\nu^{(k,\alpha)}_s)_{s\in[0,1]}$，它都是一个取值于 $\{1, \ldots, k\}$ 的划分集合中的随机过程，并且具有普适性，即其分布仅取决于矩指数 α，而不取决于具体的后代分布。换言之，对每个 $\alpha \in (1, 2]$，具有 (H1) 形式的后代生成函数的伽尔顿–沃森树构成一个普适类，其适用范围是渐近样本合并结构。

我们指出，由于 T 中的时间缩放，分枝率参数 r 在定理 1 中不起作用。我们将在定理 2 中描述这些普适划分过程（$\nu^{(k,\alpha)}_s$）（$s\in[0,1]$）（也可以将其视为合并树）的完整结构。

在讨论随机过程 $\nu^{(k,\alpha)} := (\nu^{(k,\alpha)}_s)_{s\in[0,1]}$ 在一般情形 α 下的分布性质之前，我们先进一步阐明情形 $\alpha = 2$。我们很快会看到（参见定理 2 的情形 $\alpha = 2$），随机过程 $\nu^{(k,2)}$ 与 Harris 等人 [17], 的上述研究中提到的过程一致；特别是，$\nu^{(k,2)}$ 具有二元分裂，且 $k-1$ 次分裂的联合分布由（1.2）给出。因此，定理 1 的情形 $\alpha = 2$ 蕴含了 Harris 等人 [17] 的临界情形（定理 3），即 $\nu^{(k,2)}$ 是有限方差临界树合并结构的一个极限对象。

事实上，正如上文所述，满足形式为 (H1) 且含有 $\alpha = 2$ 的矩母函数的后代分布类别，比具有有限方差的临界分布更广。确实，有些情况下 $\alpha = 2$，但方差是无限的；一个明确的例子是具有以下后代分布的

矩生成函数

$$f(s) = s + (1-s)^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{1-s}\right)\right). \tag{1.3}$$

更多详情请参见 Slack [33] 。因此，我们对定理1和定理2的特殊情形 $\alpha = 2$ 是对 [17] 中临界有限方差情形的略微推广。基本上，本文之所以能够将结果推广到无限方差后代情形，仅仅是通过在各种脊柱测度变换中引入对总种群规模的折扣；与此同时，或许有些出人意料的是，我们还能保留关键性质，并理解其更复杂的结构。 [17], 中并未采用这种新方法，而是需要结合截断逼近论证，施加一些 k^{th} 矩条件。Harris、Palau 和 Pardo [19] 同时提出了一种类似的、带折扣的脊柱测度变换方法，适用于一个（显著不同的）情形：有限方差、变化环境中的离散时间临界Galton-Watson过程。

现在我们转而描述 $\nu^{(k,\alpha)}$ 在 $\alpha \in$ (1,2) 下的过程，这些过程比其$\alpha = 2$ 对应形式更复杂。在 $\alpha \in$ (1,2) 的情形中，随机过程 $(\nu_s^{(k,\alpha)})_{s\in[0,1]}$ 的块可能在任一分裂事件中分裂成三个或更多子块，因此我们需要谨慎描述过程的拓扑结构。

设 $\nu := (\nu_s)_{s\in[0,1]}$ 是一个取值于 $\{1,\dots,k\}$ 的划分集合的随机过程，且满足： ν_0 是一个块， ν_1 是单元素集合，而 ν 的每个不连续点都是一个块分裂成若干子块的时刻。记 $0 =: \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m < 1$ 为 ν 的分裂时间（即不连续点的时间）。 ν 的拓扑结构 $\mathcal{T}(\nu)$是以下划分序列

$$\mathcal{T}(\nu) := (\mathcal{T}_0, \dots, \mathcal{T}_m) \qquad \text{with} \quad \mathcal{T}_i := \nu_{\tau_i}.$$

由此得到的序列 $(\mathcal{T}_0, \dots, \mathcal{T}_m)$ 就是我们所说的 $\{1,\dots,k\}$ 的分裂序列。分裂序列是 $\{1,\dots,k\}$ 的一组划分 $(\beta_0, \dots, \beta_m)$，其中 β_0 是一个块， β_m 是由单元素集合组成的划分，并且每个 β_{i+1} 都是由 β_i 将 β_i 中的一个块拆分成两个或更多子块得到的。

给定一个分裂序列 $(\beta_0, \dots, \beta_m)$，我们将 i^{th} 分裂大小 g_i 定义为在 i^{th} 分裂时刻产生的新块数，即

$$g_i := \#\beta_i - \#\beta_{i-1} + 1 \qquad i = 1, \dots, m$$

其中 $\#\beta_i$ 表示划分 β_i 中块的数量。由于 β_0 包含 1 个块，而 β_m 包含 k 个块，因此整个序列中共生成 $k-1$ 个块，所以我们有

$$\sum_{i=1}^{m}(g_i - 1) = k - 1.$$

有了这些记号，我们现在可以陈述第二个主要结果，该结果刻画了定理 1 中出现的极限过程 $(\nu_s^{(k,\alpha)})_{s\in[0,1]}$ 的分布律。

定理 2。（a ）对于 $\alpha \in$ (1, 2)， $\nu^{(k,\alpha)}$ 的概率律 $\mathbb{P}^{(k,\alpha)}$ 由以下公式给出

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}^{(k,\alpha)}\left(\mathcal{T}(\nu^{(k,\alpha)}) = \overline{\beta}, \tau_1 \in \mathrm{d}t_1, \dots, \tau_m \in \mathrm{d}t_m\right)\\ &\quad = \frac{1}{(\alpha-1)(k-1)!}\cdot\prod_{i=1}^{m}\frac{\alpha\Gamma(g_i-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}\cdot\int_0^1(1-w)^{k-1}w^{m+\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}\prod_{i=1}^{m}(1-wt_i)^{-g_i}\mathrm{d}t_i\,\mathrm{d}w,\end{aligned} \tag{1.4}$$

其中， $m \geq 1$, $\overline{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_m)$ 是 $\{1,\dots,k\}$ 的任意分裂序列，其分裂大小为 $g_1, \dots, g_m$，而 $0 < t_1 < \ldots < t_m < 1$ 是分裂时间。

(b) 对于 $\alpha = 2$，这里我们有 $\mathbb{P}^{(k,2)}(m = k-1, g_i = 2\ \forall i) = 1$，并且我们有 e

$$\mathbb{P}^{(k,2)}\left(\mathcal{T}(\nu^{(k,2)}) = \bar{P}, \tau_1 \in \mathrm{d}t_1, \ldots, \tau_{k-1} \in \mathrm{d}t_{k-1}\right)$$
$$= \frac{2^{k-1}}{(k-1)!}\int_0^1 (1-w)^{k-1} w^{k-1} \prod_{i=1}^{k-1}(1-wt_i)^{-2}\mathrm{d}t_i\,\mathrm{d}w. \tag{1.5}$$

where $\bar{P}$ 是仅由二元分裂组成的 $\{1,\ldots,k\}$ 的任意分裂序列 .

我们来谈几点。首先注意，在定理 2 的设定下，固定分裂大小g_1、…、g_m后，拓扑结构 $\mathcal{T}(\nu^{(k,\alpha)})$不会影响公式 (1.4)。因此，在给定事件 $\nu^{(k,\alpha)}$ 具有 m 次分裂，发生时间分别为 t_1、…、t_m，分裂大小分别为 g_1、…、g_m 的条件下，过程的拓扑结构在所有由 m 次分裂组成、分裂大小为 g_1、…、g_m的可能分裂序列中均匀分布。这一性质可以看作是 Kingman 拓扑的一种推广，该拓扑出现在 $\alpha = 2$的情形中：沿时间向后追溯，每当即将发生一次涉及 g 条祖先谱系的合并时，它由 g 条现存祖先谱系中的任意子集构成的可能性都相同。

接下来请注意，当 $\alpha \uparrow 2$ 时，$\alpha = 2$ 公式 (1.5) 与 $\alpha \in (1, 2)$ 的公式在极限下相符。当 $\alpha = 2$ 时，该公式渐近地集中于 $\{g_1 = 2, \ldots, g_m = 2\}$，这对应于如下事实：当 $\alpha \uparrow 2$ 时，$\alpha\Gamma(g-\alpha)/\Gamma(2-\alpha) \to \mathbf{1}_{\{g=2\}}$。

此外，我们注意到，在进行变量替换 $w = (1+\varphi)^{-2}$ 并考虑到由 k 个带标签的叶子和 $k-1$ 个有序内部节点构成的 $k!(k-1)!/2^{k-1}$ 棵不同二叉树后，可以验证 (1.5) 等价于 (1.2) 中的公式。

回忆一下，分裂序列 $(\beta_0, \ldots, \beta_m)$ 是 $\{1,\ldots,k\}$ 的一系列划分，其中 β_0 是一个块，β_m 是由单元素集合构成的划分，并且对每个 $i \geq 1$，β_i 都可由 β_{i-1} 将 β_{i-1} 的一个块分裂为 $g_i \geq 2$ 个子块而得到。注意，β_i 比 β_{i-1} 多 $g_i - 1$ 个块，因此

$$\#\beta_j = 1 + \sum_{i=1}^{j}(g_i - 1) =: k_j.$$

特别地，$k_0 = 1$ 和 $k_m = k$。现在我们注意到

$$\#\{\text{Splitting sequences of } \{1,\ldots,k\} \text{ with ordered split sizes } (g_1,\ldots,g_m)\} = k!\prod_{i=1}^{m}\frac{k_i}{g_i!}. \tag{1.6}$$

要得到方程（1.6），最好倒推。令 $(g'_1, \ldots, g'_m)$ 表示按逆序排列的分裂数，并令 $(k'_0, \ldots, k'_m)$ 表示 $(k_0, \ldots, k_m)$ 的逆序排列。那么，从 β_{m-i+1} 到 β_{m-i}，有 $\binom{k'_i}{g'_i}$ 种方法从 β_{m-i+1} 中的 k'_i 个块里选出 g'_i 个块，并将它们合并成一个单块。由于每个分裂过程 $(\beta_0, \ldots, \beta_m)$ 都恰好以这种方式产生，因此可得

$$\#\{\text{Splitting sequences of } \{1,\ldots,k\}\} = \prod_{i=1}^{m}\binom{k'_i}{g'_i}, \tag{1.7}$$

然后注意到 $k'_{i+1} = k'_i - g'_i + 1$ 并重新排列，即可得到方程（1.6）。

最后，我们指出，方程（1.6）现在提供了一种描述分裂时间和分裂大小的边缘分布的方法，而无需考虑过程的拓扑结构。具体而言，将（1.4）乘以具有按顺序排列的分裂大小（$g_1, \ldots, g_m$）的划分分裂序列的数量 $k!\prod_{j=1}^{m}\frac{k_j}{g_j}!$，即可得到在时间 $\mathrm{d}t_1, \ldots, \mathrm{d}t_m$ 内发生的、分裂大小按顺序为（$g_1, \ldots, g_m$）的分裂的概率密度

表示为

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}^{(k,\alpha)}\left(\text{Splits of sizes } (g_1,\dots,g_m) \text{ at times } \mathrm{d}t_1,\dots,\mathrm{d}t_m\right)\\&\quad=\frac{k}{(\alpha-1)}\cdot\prod_{i=1}^{m}\frac{\alpha k_i\Gamma(g_i-\alpha)}{g_i!\Gamma(2-\alpha)}\cdot\int_0^1(1-w)^{k-1}w^{m+\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}\prod_{i=1}^{m}(1-wt_i)^{-g_i}\mathrm{d}t_i\,\mathrm{d}w,\end{aligned}$$

对所有 $0<t_1<\ldots<t_m<1$，其中，如上所述，对于 $j=1,\ldots,m$, $k_j:=1+\sum_{i=1}^{j}(g_i-1)$ 是第 j^{th} 次分裂后块的数量。

1.3. Lauricella 表示。事实证明，可以用一种称为 Lauricella 超几何函数 [13] 的特殊函数来描述分割过程 $\nu^{(k,\alpha)}$ 的分布。Lauricella 函数定义为

$$F_D^{(n)}(c,a;b;t)=\int_{\mathbb{T}_n}\Big(1-\langle t,x\rangle\Big)^{-c}D_n(a;b;x)\mathrm{d}x\qquad a\in\mathbb{R}^n_{>0},b>0,c>0,\tag{1.8}$$

其中 $\langle t,x\rangle:=\sum_{i=1}^{n}t_ix_i$，且

$$D_n(a;b;x)=\frac{\Gamma(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)}{\Gamma(b)\Gamma(\sum_{i=1}^{n}a_i)}\cdot\left(1-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{b-1}\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_i-1}$$

是参数为 $(a,b)=(a_1,\dots,a_n,b)$ 的狄利克雷分布的密度。在第 5.5 节中，我们证明描述 $\nu^{(k,\alpha)}$ 分布的方程 (1.4) 也可以写成

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}^{(k,\alpha)}\left(\mathcal{T}(\nu)=\overline{\beta},\tau_1\in\mathrm{d}t_1,\dots,\tau_m\in\mathrm{d}t_m\right)\\&=\frac{1}{(\alpha-1)}\prod_{i=1}^{m}\frac{\alpha\Gamma(g_i-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{\alpha-1})}{\Gamma(k+m+\frac{1}{\alpha-1})}F_D^{(m)}\left[m+\frac{1}{\alpha-1},g_1,\dots,g_m;k+m+\frac{1}{\alpha-1};t_1,\dots,t_m\right].\end{aligned}\tag{1.9}$$

1.4. 种群规模与巨型出生事件。除了描述在设置 $\alpha\in(1,2)$下，从属于普适类（H1）的分枝过程种群中，于较大时间 T 均匀抽取的 k 个粒子的联合祖先结构之外，我们还发现，巨型出生事件也会伴随分裂时刻发生。

为了解释这种联系，我们先指出，在第 4 节中，我们借助 Pakes 的工具 [32], ，对后代生成函数属于普适类（H1）的分枝树的生成函数进行了细致分析。最终，我们证明存活概率具有如下形式

$$\overline{F}(T):=\mathbb{P}(Z_T>0)\sim T^{-1/(\alpha-1)}\tilde{\ell}(T),$$

其中，$\tilde{\ell}(\cdot)$ 是另一个在无穷远处缓变的函数，可以用（H1）中出现的缓变函数 $\ell(\cdot)$ 显式表示。见下文（4.5）。

现在考虑到后代分布的临界性 $\mathbb{E}[L]=1$ 意味着，时间 T存活的粒子数期望满足 $\mathbb{E}[Z_T]=1$，对所有 T均成立。这表明 $\mathbb{E}[Z_T|Z_T>0]=\overline{F}(T)^{-1}$，因此我们可以预期，在事件 $\{Z_T>0\}$发生的条件下，存活粒子数的量级为 $\overline{F}(T)^{-1}$。事实上，Pakes [32] 给出的以下极限表明，在条件 $\{Z_T>0\}$下，$\overline{F}(T)Z_T$在 T趋大时收敛到一个极限，其中

$$\lim_{T\to\infty}\mathbb{E}[e^{-\theta\overline{F}(T)Z_T}|Z_T>0]=1-(1+\theta^{1-\alpha})^{-1/(\alpha-1)}.\tag{1.10}$$

回顾过程 $(\pi_{sT}^{(k,T)})_{s\in[0,1]}$，它刻画了从时间 T的种群中抽取的 k 个粒子的样本的联合祖先结构；我们用 $\tau_1 < \ldots < \tau_m$ 表示该过程的不连续点，即分裂时间。根据定理 3（我们很快将陈述该定理），当 T 很大时，分裂时间 $\tau_1 < \ldots < \tau_m$ 与规模和整个种群处于同一数量级的地震式出生事件相对应。为精确表述这一观察，令

$$L_i := \text{Number of individuals born at time } \tau_i, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

令 $(\pi^{k,\ T}_{s\ T})_{s\in[0,1]}$ 为刻画在时间 T从种群中抽取的 k 个粒子的联合祖先关系的重标度划分过程。我们的下一个结果是定理 2 的推广。

定理 3。令 $\alpha \in (1, 2)$。在事件 $\{Z_T \geq k\}$ 的条件下，当 $T \to \infty$ 时，我们有依分布收敛

$$((\pi_{sT}^{k,T})_{s\in[0,1]}, \overline{F}(T)L_1, \ldots, \overline{F}(T)L_m) \to ((\nu_s^{(k,\alpha)})_{s\in[0,1]}, X_1, \ldots, X_m),$$

时间重标度划分过程 $(\pi^{k,\ T}_{s\ T})_{s\in[0,1]}$ 与分裂时间处经 $\overline{F}(T)$ 重标度的子代数量一同收敛，其中极限对象 $((\nu_s^{(k,\alpha)})_{s\in[0,1]}, X_1, \ldots, X_m)$ 是一个划分过程 $(\nu_s^{(k,\alpha)})_{s\in[0,1]}$，并伴随一个由非负随机变量 $(X_1, \ldots, X_m)$ 构成的随机向量，其中 m 是 $\nu^{k,\ \alpha}$ 的（随机）分裂事件数量。

此外，$((\nu_s^{(k,\alpha)})_{s\in[0,1]}, X_1, \ldots, X_m)$的联合分布由下式给出

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{(k,\alpha)}\left(\mathcal{T}(\nu) = \overline{\beta}, \tau_1 \in \mathrm{d}t_1, \ldots, \tau_m \in \mathrm{d}t_m, X_1 \in \mathrm{d}x_1, \ldots, X_m \in \mathrm{d}x_m\right) \\
&= \frac{1}{(\alpha-1)(k-1)!} \prod_{i=1}^{m} \frac{\alpha\Gamma(g_i-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^1 (1-w)^{k-1} w^{m+\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \prod_{i=1}^{m} (1-wt_i)^{-g_i} \mathrm{d}t_i \ \Delta^w_{g_i,t_i}(x_i)\mathrm{d}x_i \ \mathrm{d}w.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

其中，$\overline{\beta} = (\beta_0, \ldots, \beta_m)$ 是 $\{1, \ldots, k\}$ 的任意分裂序列，具有 $m \geq 1$ 次分裂，分裂大小为 $g_1, \ldots, g_m$；$0 < t_1 < \ldots < t_m < 1$ 是分裂时刻，$x_1, \ldots, x_m \geq 0$ 是分裂后代大小，并且

$$\Delta^w_{g,t}(x) := \frac{x^{g-\alpha-1}}{\Gamma(g-\alpha)(1/w-t)^{\frac{g-\alpha}{\alpha-1}}} \exp\left\{-\frac{x}{(1/w-t)^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right\} \tag{1.12}$$

是形状参数为 $g-\alpha$、率参数为 $(w/(1-wt))^{\frac{1}{\alpha-1}}$ 的标准伽马随机变量的概率密度函数。

让我们花点时间来解读定理 3。首先注意到，(1.11) 是 (1.4) 的直接推广；事实上，对前者中的变量 $x_1, \ldots, x_m$ 积分，便可立即得到后者。进一步说明，变量 w 类似于一个（不可观测的）混合随机变量，它作为整个种群规模的代理变量；固定 w 的取值后，拓扑和分裂时刻的联合分布正比于 $\prod_{i=1}^{m} \frac{\Gamma}{(g_i-\alpha)\,\Gamma(2-\alpha)} (1-wt_i)^{-g_i}$。选定 w、拓扑和分裂大小 $g_1, \ldots, g_m$ 后，后代事件的条件分布服从伽马分布，其形状参数为$g-\alpha$，尺度因子为 $(1/w-t)^{\frac{1}{\alpha-1}}$（等价地，率参数为 $w^{\frac{1}{\alpha-1}}/(1-wt)^{\frac{1}{\alpha-1}}$）。

我们来简要说明定理 3 作为 $\alpha \uparrow 2$ 的解释。回想定理 2 的陈述之后的讨论，$\nu^{(k,2)}$ 只有二元分裂事件，也就是说，当 $\alpha = 2$ 时，每个 $g_i = 2$。在 $g = 2$ 的情况下，我们可以将概率测度 $\Delta^{w}_{g,\ t}(x)\mathrm{d}x$ 解读为当 $\alpha \uparrow 2$ 时近似于零处的狄拉克质量。这体现了巨型出生事件随着 $\alpha \uparrow 2$ 而消失。

最后请注意，利用伽马分布的拉普拉斯变换，我们有

$$\int_0^\infty e^{-\gamma x} \Delta^w_{g,t}(x)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{1-(1/w-t)^{\frac{1}{\alpha-1}}\gamma}\right)^{g-\alpha} \qquad (\gamma \geq 0).$$

因此 因此，对于非负参数 $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$，我们也可以写成

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{(k,\alpha)}\left[e^{-\sum_{j=1}^m \gamma_m X_m};\, \mathcal{T}(\nu)=\overline{\beta}, \tau_1 \in \mathrm{d}t_1, \ldots, \tau_m \in \mathrm{d}t_m\right] \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)(k-1)!}\prod_{i=1}^m \frac{\alpha\Gamma(g_i-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^1 (1-w)^{k-1} w^{m+\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \prod_{i=1}^m \frac{(1-wt_i)^{-g_i}}{\left(1-(1/w-t_i)^{\frac{1}{\alpha-1}}\gamma_i\right)^{g_i-\alpha}}\,\mathrm{d}w. \end{aligned} \tag{1.13}$$

1.5. 证明概要。我们简要概述证明定理1、2和3的方法。首先引入一组脊柱，它们是沿时间正向贯穿连续时间 Galton-Watson 树的特殊世系。我们改进并推广 Harris 等人 [17], 的技巧，通过构造一种测度变换 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$, 促使脊柱以这样的方式贯穿树：在时间 T，它们代表树中 k 个不同粒子的均匀样本，同时使总体种群按函数 $n \mapsto n(n-1)\ldots(n-k+1)e^{-\theta n}$ 进行尺寸偏倚。（Harris 等人 [17] 在其框架中采用了 $\theta = 0$。）参数 θ 是控制树规模的折扣参数；即使不存在二阶矩（更不用说 k^{th}），它也能对从尺寸偏倚 k 倍的树中抽样给出简单解释。这里还要提到，这种指数折扣技巧由第一和第三作者在与 Sandra Palau [19] 的同期合作研究中使用。

我们在此方法中的另一项创新，是将脊柱分裂时间处后代事件的规模纳入考量。这一工具最终使定理 3 给出了更具描述性的极限，不仅涵盖脊柱的祖先过程，也涵盖出生事件的规模。

在确立测度变换的基本性质 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$ 之后，我们将在第 4 节仔细分析普适类 (H1) 中各过程相关的生成函数，这使我们最终能够在第 5 节将研究成果融会贯通，从而证明主要结果。

在 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$ 下，脊柱的行为可视为原测度下均匀选取粒子的祖先行为的代理变量；该原测度支配着伽尔顿-沃森树。不过，在$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$ 下，脊柱具有易于处理的分布，也相当容易描述。

此外，在测度 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$ 下，我们能够完整详尽地描述整个种群规模与脊柱祖先行为的联合分布。

最后，我们提到，Lager˚as 和 Sagitov [25] 研究了与重尾极限 $\alpha = 1$下连续时间伽尔顿–沃森过程相关的所谓约化过程；截至时间 t 的约化过程，是由那些在时间 $s \in [0, t]$ 存活、且在时间 t仍有后代存活的粒子构成的伽尔顿–沃森过程所对应的随机过程。Lager˚as 和 Sagitov 指出，可以证明，对于具有重尾且满足 $\alpha \in$ （$1, 2$]属于我们的普适类 (H1)）的伽尔顿–沃森过程，其相关的约化过程可以通过对具有特定后代分布的超临界伽尔顿–沃森过程进行某种确定性时间变换来描述。（这一后代分布也出现在 Berestycki 等人 [7] 关于 Beta 合并的命题 19 中。）原则上，这为我们在定理 2 中的中间结果提供了一种潜在的替代途径：为了获得我们普适类 (H1) 中伽尔顿–沃森树的合并结构，可以指出，伽尔顿–沃森树的合并结构与其约化树的合并结构相同，继而研究特定超临界树的合并结构，最后再撤销时间变换。尽管如此，我们仍倾向于采用更直接的方法，因为它不仅能对尺寸偏倚测度变换下的合并结构提供丰富的概率描述，而且还能结合对大时间均匀抽样的理解。后者使我们能够更深入地理解均匀样本的合并结构与种群规模之间的关系，尤其是给出了定理 3 所提供的这一关系的完整描述。

1.6. 相关工作的进一步讨论。如上所述，许多作者研究了与从连续时间伽尔顿–沃森树中均匀抽取的粒子之祖先关系相关的分割过程 $(\pi^{(k,T)}{}_t)_{t\in[0,T]}$ 的各种特殊情形。情形 $k = 2$相当于从种群中抽取两个粒子，并研究它们到最近共同祖先的时间，这一情形已有大量研究 [3, 4, 5, 11, 14, 31]。关于 $k \geq 3$ 的研究则是近来才出现的。在一般连续时间伽尔顿–沃森树的框架下，第二作者 [21] 利用该过程的代数生成函数 $F_t(s) := \mathbb{E}[s^{Z_t}]$ ，找到了 $\pi^{(k,T)}$ 有限维分布的显式积分公式，随后研究了超临界和次临界情形下的大-T 渐近性质；另见 Grosjean 和 Huillet [16] 以及 Le [30]。Zukhov [34] 研究了临界伽尔顿–沃森树情形 $k = \infty$ 的某个方面，并证明整个种群在时间 T的最近共同祖先渐近服从 $[0, T]$上的均匀分布。

此外，人们还研究了若干相关模型。第一位和最后一位作者近期研究了在变化环境中的临界分枝过程中抽取 k 粒子的问题（见 [19]）。Boenkost 等人 [10]独立得到了类似结果。第二位作者近期与 David Cheek [12] 合作，研究了如何从连续时间 Galton-Watson 树的种群中均匀抽取单个粒子，并考察沿该粒子的祖先谱系的繁殖时间点过程；还与 Amaury Lambert [22] 合作研究了连续状态分枝过程的祖先关系。本文的三位作者还研究了从无穷均值的临界分枝过程中抽取 k 粒子的问题（见 [18]）。此外，还应提及 Amaury Lambert 及其合作者 [27, 28] 关于与树相关的合并点过程的研究，以及 Aldous 和 Popovic [2] 、Gernhard [15]的相关工作。

1.7. 概述。现在我们介绍本文其余部分的结构。在第 2 节中，我们引入多脊以及支撑我们方法的测度变换。在第 3 节中，我们证明测度变换 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\,T}$, 下多脊的性质。第 4 节专门研究普适类（H1）中树的基本性质，以及该普适类中树在 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\,T}$, 下多脊的大-$T$ 渐近行为。在最后一节，即第 5 节中，我们研究 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\,T}$, 下种群规模与多脊的联合分布，从而最终对测度变换求逆。

2. Spines and changes of measures

本节介绍各种概率测度，它们将成为理解在时间 T从种群中不放回抽取的 k 个体样本谱系的重要工具。我们首先更精确地描述连续时间伽尔顿-沃森（GW）种群模型。随后，我们将通过确定 k 条特殊的世系（称为脊柱）来扩展原始 GW 模型。借助测度变换，我们将定义关键的大小偏倚和贴现伽尔顿-沃森过程，该过程在概率测度 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\,T}$, 下带有 k-脊柱，并描述其性质，以及它如何改变种群过程和脊柱的行为。

2.1. 记号。全文中，我们采用约定 $\mathbb{Z}^+ := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ and $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$。我们将使用标准的乌拉姆-哈里斯标记系统来追踪粒子的谱系信息：当标记为 u 的个体死亡并由 L个后代取代时，这些后代的标记由父代标记与每个子代的编号连接而成，依次为 $u1, u2, \dots, uL$，等等。如果只有一个初始粒子，为方便起见，通常将唯一的根标记为 $\emptyset$。例如，2.3.1 表示初始祖先的第二个子代的第三个子代的第一个子代。使用这种记号，可以轻松地引用现有树中的子树，或将子树接入现有树中。

用 $\mathcal{Z}_t$ 表示时间 $t>0$仍存活的所有粒子的标记集合，并令 $Z_t=|\mathcal{Z}_t|$ 表示时间 $t>0$仍存活的粒子数。如果 u 是 v 的祖先或与 v 相同，则记作 $u\preceq v$；如果 u 是 v 的严格祖先，则记作 $u\prec v$。只要没有任何一个初始个体是另一个初始个体的祖先或与之相同，初始标记 $\mathcal{Z}_0$ 就称为允许的；也就是说，对于任意不同的一对 u、$v\in\mathcal{Z}_0$，均有 $u\not\preceq v$。

在全文中，我们将使用一个公共样本空间和 σ-代数 $(\Omega,\mathcal{F})$，该空间和代数足够丰富，能够描述下文所涉及的所有各种过程相关的随机性。在接下来的小节中，我们将引入多个概率测度，$\mathbb{P},\mathbb{P}_{\theta,T},\mathbb{P}^{(k)},\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}$，以及 $\mathbb{P}^{(k)}$均匀 T，它们都定义在同一个公共空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上。在不同的概率律下考察同一过程，将是我们方法的基础。

我们将 $(\mathcal{F}_t,t\geq 0)$ 定义为种群过程 $\mathcal{Z}:=(\mathcal{Z}_s)_{s\geq 0}$ 的自然滤子，即 $\mathcal{F}_t:=\sigma(\mathcal{Z}_s:\ s\leq t)$。（后文还将介绍其他滤过；见小节 2.4.2。）

2.2. $\mathbb{P}$ 下的连续时间 Galton-Watson 过程。设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 为一个概率空间。假设 $\overline{p}=(p_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}$ 是 $\mathbb{Z}^+$ 上的一个概率分布，其有限均值为 $m:=\sum_{i\in\mathbb{Z}^+}ip_i<\infty$。

定义 1（在 $\mathbb{P}$ 下的伽尔顿-沃森过程）。在概率测度 $\mathbb{P}$ 下，我们称 $\mathcal{Z}=(\mathcal{Z}_s)_{s\geq 0}$ 是一个分枝率为 r、后代分布为 $\overline{p}$，且以一个个体为初始状态的连续时间 Galton-Watson 过程，当且仅当：

（1）过程初始时有一个存活粒子（即 $Z_0=1$，标记为 $\mathcal{Z}_0=\{\emptyset\}$）。（2）分枝性质：当前存活的任意粒子，其后续演化彼此独立，且独立于过程的历史。（3）在时间 t 存活的任意粒子以 r 的速率发生分枝（即粒子分枝前的时间服从速率为 r 的指数分布）。（4）若粒子 v 在时间 t 发生分枝，它会立即死亡，同时被 L_v 个后代取代，其中 L_v 是后代随机变量 L 的一个独立实现，且 $\mathbb{P}(L=i)=p_i$，对于 $i\in\mathbb{Z}^+$。

类似地，初始时有 $j\geq 2$ 个存活粒子的 Galton-Watson 过程也以类似方式定义，只需修改条件（1）；通常采用标记约定 $\mathcal{Z}_0=\{1,2,\ldots,j\}$，但也可以指定任何可行的标记方式 $\mathcal{Z}_0$。

2.3. 在 $\mathbb{P}_{\theta,T}$ 下按种群规模折扣的伽尔顿-沃森过程。任取固定的 $T>0$和 $\theta\geq 0$，并通过拉东-尼科迪姆导数在 $\mathcal{F}_T$ 上定义新的概率测度 $\mathbb{P}_{\theta,T}$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\theta,T}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_T}:=\frac{e^{-\theta Z_T}}{\mathbb{E}\left[e^{-\theta Z_T}\right]}. \tag{2.1}$$

换言之，在 $\mathbb{P}_{\theta,T}$ 下，过程 $\mathcal{Z}$ 的概率律与原始概率律 $\mathbb{P}$ 类似，区别在于根据时间 T 的种群规模，以速率 θ 进行指数折扣。事实上，在 $\mathbb{P}_{\theta,T}$ 下，该过程仍是一个分枝过程，但其行为会随时间变化，如下所述（引理 1）。

按最终种群规模进行折扣事实证明是相当自然的，而且对于使我们的方法无需对后代分布 L 作出任何额外的矩假设便能奏效至关重要；特别是，这使我们能够涵盖所关注的重尾分布。

以下引理描述了在 $\mathbb{P}_{\theta,T}$ 下粒子的行为。

引理 1（在 $\mathbb{P}_{\theta,T}$ 下按种群规模折扣的伽尔顿-沃森过程）。在概率律 $\mathbb{P}_{\theta,T}$ 下，过程 $\mathcal{Z}=(\mathcal{Z}_s)_{s\geq 0}$ 在时间段 $[0,T]$ 内演化为一个非齐次马尔可夫分枝过程，其中：

(1) 该过程最初由一个存活的粒子启动。

(2) 当前存活的任意粒子都会向前演化，且彼此独立，也独立于过程的历史（分枝性质）。(3) 在时间 t 存活的任意粒子都以如下速率发生分枝

$$r\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{L-1}\right].$$

(4) 已知粒子 v 在时间 t分裂，它会立即死亡，并同时被 L_v个后代替代，其中 L_v 是在时间 t后代随机变量的一次独立实现， $L(t)$，其中

$$\mathbb{P}_{\theta,T}(L(t)=\ell)=p_\ell\frac{\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{\ell}}{\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{L}\right]}.$$

Lemma 1 由引理 13 的情形 $k=0$ 推出，该情形已在第 3 节中证明 .

2.4. 带有 k条脊柱的伽尔顿-沃森过程 $\mathbb{P}^{(k)}$。对于任意固定的 $k\in\mathbb{N}$，我们现在定义测度 $\mathbb{P}^{(k)}$，在该测度下，种群过程 $\mathcal{Z}$ 具有 k 条特殊的世系，称为脊柱。测度 $\mathbb{P}^{(k)}$ 将作为一种自然且便利的参考测度，用于考察具有 k 个特殊粒子的其他种群过程的行为（例如，稍后我们将在时间 T从 k 个个体中均匀随机地抽取一个样本）。

我们将 k 条脊柱记为 $\xi=(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\ldots,\xi^{(k)})$，其中 $\xi^{(i)}$ 对应于 i^{th} 号脊柱的特殊世系。每条脊柱都由一列乌拉姆–哈里斯标签 $v_0v_1v_2\ldots$ 表示，这些标签从初始祖先开始，并且序列中的下一个标签总是前一个标签的后代（即 $v_0=\emptyset$，且对于每个 $i\in\mathbb{N}$， $v_{i+1}=v_i\ell$ 对某个 $\ell\in\{1,\ldots,L_{v_i}\}$成立）。脊柱可以是一条无限世系，也可以是一条在底层种群谱系树的叶节点处终止的有限路径。如果粒子 u 有 j 条彼此不同的脊柱经过它（即 $\#\{i\in\{1,\ldots,k\}:\ u\in\xi^{(i)}\}=j$），则称粒子 u 携带 j 条脊柱。

测度 $\mathbb{P}^{(k)}$ 下具有 k 条脊柱的过程 $\mathcal{Z}$ ξ，是对测度 $\mathbb{P}$ 下的 $\mathcal{Z}$ 的简单扩展：所有粒子的行为都与原分枝过程完全相同，但其中一些粒子还会被标记为携带脊柱，具体如下。首先，按照 $\mathbb{P}$ 构造种群 $\mathcal{Z}$。然后，给定种群 $\mathcal{Z}$ 的一个实现，独立地选取 k 条脊柱谱系。每条脊柱都从初始祖先开始延伸，随后在每次分支事件中，随机均匀地选择一个后代继续延伸（若没有后代，则脊柱终止）。更准确地说，构造如下：

定义 2（ $\mathbb{P}^{(k)}$下具有 k 条脊柱的 Galton-Watson过程）。在概率测度 $\mathbb{P}^{(k)}$下，过程 $\mathcal{Z}=(\mathcal{Z}_s)_{s\geq0}$，即具有 k 条脊柱 $\xi=(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\ldots,\xi^{(k)})$，定义如下：

(1) 该过程最初从一个存活粒子开始（即 $\mathcal{Z}_0=\{\emptyset\}$，其中标记为根 $\emptyset$ 的粒子 $Z_0=1$ 携带 k 条脊柱）。(2) 分枝性质：任何存活粒子——无论是否携带脊柱——都会独立于系统中的其他粒子以及过程的历史，随时间向前演化。(3) 任何在时间 t 存活的粒子都以速率 r 发生分枝。(4) 给定粒子 v 在时间 t 发生分枝，它会立即死亡，并同时被 L_v 个后代取代，其中 L_v 是后代随机变量 L 的一个独立实现，且 $\mathbb{P}(L=i)=p_i$，对于 $i\in\mathbb{Z}^+$。(5) 在粒子 v 分枝时携带 j 条脊柱且有 $L_v=\ell$ 个后代的条件下：(a) 若 $\ell\geq1$，每条 j 脊柱都会独立且均匀随机地选择继续追随L_v 个后代中的哪一个。

(b) $\ell = 0$，脊柱没有后代可以继续追随，因此这些 j 条脊柱路径终止并进入墓地状态 $\overline{\delta}$。

注释1. 请注意，带有 k-脊柱的 Galton-Watson过程，在 $\mathbb{P}^{(k)}$ 下也可以看作一个多类型 Galton-Watson过程，其中每个粒子在 $\{0,1,\dots,k\}$ 中的类型对应于沿其经过的脊柱数量。在此，类型为 j 的个体只能拥有类型值相同或更低的后代，且后代类型值之和必须与亲代类型值相符（脊柱数量在分支事件中保持不变）。作为追踪每条脊柱轨迹的一种更丰富的替代方法，每个粒子的类型还可以包含沿其经过的脊柱标签（例如，将类型空间设为 $\{1,\dots,k\}$的所有可能子集）；不过，同样只有沿每个粒子经过的脊柱数量会影响其分枝。

我们用 $\xi_t = (\xi_t^{(1)},\dots,\xi_t^{(k)})$ 来标识时间 t 的 k 条脊柱，其中 $\xi_t^{(i)}$ 是时间 t 携带脊柱 i 的粒子的标签。由于每条脊柱都会从可用的后代中独立且等概率地选择路径，我们可以立即观察到，对于任意 $u_1,\dots,u_k \in \mathcal{Z}_t$ 和 $\underline{u} = (u_1,\dots,u_k)$，

$$\mathbb{P}^{(k)}\Big(\xi_t = \underline{u}\Big|\mathcal{F}_t\Big) = \prod_{i=1}^{k}\prod_{v\prec u_i}\frac{1}{L_v}. \tag{2.2}$$

还要注意，脊柱路径可能会在 $\mathbb{P}^{(k)}$ 下终止于一个叶节点。更多详情请参见 Harris 等人 [17] 中引理 6 的证明。

2.4.1. 一些补充术语和记号。当我们关注哪些特定脊柱经过某个给定粒子时，有时将粒子看作携带标记会比较方便。k 条脊柱分别标记（即编号）为 $1,\dots,k$，因此我们可以通过标记来确定粒子携带的是哪些脊柱。由于所有脊柱都从初始祖先出发，粒子 $\emptyset$ 携带全部 k 个标记 $1, 2, 3, \dots, k$。若粒子 v 有 j 条脊柱经过，则它会携带 j 个标记，其中 $b_1 < b_2 < \cdots < b_j$ 为某个数，且每个 $b_i \in \{1,\dots,k\}$ 都唯一标识一条脊柱。

此外，令 n_t 表示时间 t时不同脊柱的数量（即 $\mathcal{Z}_t$ 中携带标记的不同粒子数量）。对于 $i \geq 1$，令 τ_i 表示第 i 个脊柱分裂时刻

$$\tau_0 = 0, \qquad \tau_i = \inf\{t \geq 0 : n_t \notin \{1,2,\dots,i\}\}$$

其中，τ_i 是脊柱组首次多于 i 组的时刻，等价地说，是计入重数后的第 i 个脊柱分裂时刻（即，如果一组脊柱在分枝时刻 t 分裂成 i 个独立的组，那么在 t 时就会有 $i-1$ 个新的分裂时刻）。我们还令 $\rho_t^{(i)}$ 表示时间 t时伴随脊柱 i 的脊柱总数，包括 i 自身（如果对应于脊柱 i 的 $\xi^{(i)} = \overline{\delta}$ 已处于墓地状态，则为 $\rho_t^{(i)} = 0$ ）。

任意时间 t时不同脊柱粒子的集合，以及跟随这些脊柱粒子的标记，确定了 $\{1,\dots,k\}$ 的一个划分 $\pi_t^{(k)}$，具体如下：若 $\xi_t^{(i)} = \xi_t^{(j)}$，则我们规定 i和 j属于 $\pi_t^{(k)}$ 的同一个块。接着，令 $\mathcal{T}_i = \pi_{\tau_i}^{(k)}$（ $i = 0$），……，m，其中 m是分割过程的分裂时刻数，则我们得到划分的分裂序列 $\mathcal{T}_0$、$\mathcal{T}_1$、……、$\mathcal{T}_m$，它描述了脊柱的拓扑信息，但不包含脊柱分裂时刻的信息。

对于任意粒子 $u \in \mathcal{Z}_t$，存在一个最后时刻，使得 u 曾是脊柱（该时刻可能是 t）。若此时刻等于某个 i 对应的 τ_i，则称 u 为残余粒子；若对任何 i，此时刻都不等于 τ_i，且 u 不是脊柱，则称 u 为普通粒子。每个粒子恰好属于残余粒子、普通粒子或脊柱之一（即携带一个或多个标记）。

2.4.2. 滤过。尽管我们假设所有过程和概率测度都定义在一个足够丰富的公共空间（Ω $\mathcal{F}$）上，但根据我们希望了解粒子和脊柱多少信息，使用若干不同的子-σ-代数和滤过会非常方便。为此，我们令：

- $(\mathcal{F}_{(k)\ t})_{t\geq 0}$ 是包含截至时间 t 过程所有信息的滤过，其中包括 k 脊柱。
- $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 是仅包含伽尔顿-沃森树相关信息、但不包含任何脊柱身份信息的滤过。
- $(\widetilde{\mathcal{G}}_{(k)\ t})_{t\geq 0}$ 是包含截至时间 t 的 k 脊柱所有信息的滤过，包括脊柱上的出生事件及其后代数量，但不包含树其余部分的信息。
- $(\mathcal{G}_{(k)\ t})_{t\geq 0}$ 是仅包含脊柱分裂事件信息（包括哪些标记跟随哪条脊柱）的滤过；$(\mathcal{G}_{(k)\ t})_{t\geq 0}$ 并不知道普通粒子沿脊柱出生的时间（即脊柱保持汇合时从脊柱分出的任何出生事件）。

注意，$\mathbb{P}^{(k)}$ 可以定义在 $\mathcal{F}_{(k)\infty} \subseteq \mathcal{F}$ 上，这是我们可能使用的最小 σ-代数。详情请参见 Harris 和 Roberts [20]

2.5. k-脊柱测度 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\ T}$,。现在我们将引入一个关键的概率测度，在该测度下，脊柱将从时间 T 存活的种群中均匀地（不放回）选取，这正如所需；同时还会按照时间 T 的种群规模进行 k-大小偏倚和折扣。在此测度下，带有脊柱的种群过程将具有足够的结构独立性，从而极大地方便计算；此外，折扣使我们能够发展 k-脊柱方法，而无需任何额外的矩条件。

我们将经常使用记号 $n^{(k)}$ 来表示从 n 个对象中选取 k 个不同对象的方式数。更准确地说，对于任意整数 n 和 k,

$$n^{(k)} := \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1), & \text{if } n \geq k \geq 1, \\ 1 & \text{if } n \geq 1, k = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令我们固定 $T > 0$ 和 $\theta \geq 0$，并引入一个新的概率测度 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\ T}$,，定义在 $\mathcal{F}^{(k)}_T$ 上，具体如下：

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}}{\mathrm{d}\mathbb{P}^{(k)}}\right|_{\mathcal{F}^{(k)}_T} := \frac{\mathbf{1}_{A_{k,T}} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{v\prec\xi^{(i)}_T} L_v\right) e^{-\theta Z_T}}{\mathbb{E}^{(k)}\left[Z^{(k)}_T e^{-\theta Z_T}\right]}, \tag{2.3}$$

其中 $A_{k,T}$:= $\{\xi^{(i)}_T \neq \xi^{(j)}_T, \forall i \neq j, i, j = 1, \ldots, k\}$ 表示 k 条脊柱在时间 T 仍存活且彼此不同这一事件。

现在我们来讨论 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\ T}$, 的一些关键性质。首先，我们注意到 $\mathbb{Q}^{(0)}_{\theta\ ,T} = \mathbb{P}_{\theta,T}$。

令 $\mathcal{Z}^{(k)}_T$ 表示在时间 T存活的个体所组成的不同 k 元组的集合，因此 $\#\mathcal{Z}^{(k)}_T = Z^{(k)}_T$。根据给定底层种群过程（定义 2）时脊柱的选取方式 $\mathbb{P}^{(k)}$，再利用 (2.2)，我们得到

$$\mathbb{E}^{(k)}\left[\mathbf{1}_{A_{k,T}} e^{-\theta Z_T} \prod_{i=1}^k \prod_{v\prec\xi^{(i)}_T} L_v \middle| \mathcal{F}_T\right] = \sum_{u_1,\ldots,u_k\in\mathcal{Z}^{(k)}_T} \mathbb{P}^{(k)}\left(\xi_T = \underline{u}\middle|\mathcal{F}_T\right) e^{-\theta Z_T} \prod_{i=1}^k \prod_{v\prec u_i} L_v = Z^{(k)}_T e^{-\theta Z_T}. \tag{2.4}$$

这证实了 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$, 是一个概率测度，同时也表明

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}}{\mathrm{d}\mathbb{P}^{(k)}}\right|_{\mathcal{F}_T} = \frac{Z^{(k)}_T e^{-\theta Z_T}}{\mathbb{E}^{(k)}\left[Z^{(k)}_T e^{-\theta Z_T}\right]}. \tag{2.5}$$

特别地，随机变量 Z_T 在 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$, 下的分布，是 $\mathbb{P}^{(k)}$ 经 k 尺寸偏倚并由函数 $n \mapsto n^{(k)}e^{-\theta n}$ 按 θ 折扣后的分布。

重要的是，对于任意 $u_1, \ldots, u_k \in Z_T$，我们有

$$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\left(\xi_T = \underline{u}\middle|\mathcal{F}_T\right) \propto \mathbb{P}^{(k)}\left(\xi_T = \underline{u}\middle|\mathcal{F}_T\right)\mathbf{1}_{A_{k,T}}\left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{v\prec u_i} L_v\right)e^{-\theta Z_T},$$

于是由 (2.2)，我们推得关键方程

$$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\left(\xi_T = \underline{u}\middle|\mathcal{F}_T\right) = \frac{\mathbf{1}_{A_{k,T}}}{Z^{(k)}_T}, \tag{2.6}$$

这说明，在测度 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$, 下， k-脊柱是从时间 T 仍存活的粒子中无放回均匀抽样得到的。

根据前述观察及其在 (2.3) 中的定义，我们可以这样理解 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$,：首先 (i) 在给定 $\mathcal{F}_T$ 的条件下，按种群规模 Z_T 对 k 进行尺寸偏倚和折扣；然后 (ii) 在给定 $\mathcal{F}_T$ 的条件下，根据 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$, 无放回均匀抽取 k 条脊柱，即

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}}{\mathrm{d}\mathbb{P}^{(k)}}\right|_{\mathcal{F}^{(k)}_T} = \frac{Z^{(k)}_T e^{-\theta Z_T}}{\mathbb{E}^{(k)}\left[Z^{(k)}_T e^{-\theta Z_T}\right]}\cdot\frac{\mathbf{1}_{A_{k,T}}}{Z^{(k)}_T}\cdot\prod_{i=1}^{k}\prod_{v\prec\xi^{(i)}_T} L_v. \tag{2.7}$$

另请注意， $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$,$(Z_T \geq k) = 1$。

我们的目标是完整描述带有 k条脊柱、处于 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$,下的Galton-Watson过程的演化——它的理想性质（包括均匀抽样的脊柱）以及因其结构中的独立性（源于大小偏置）而具有的可处理性，对于我们后续对均匀抽样的分析至关重要。

我们已经指出，带有 k条脊柱、处于 $\mathbb{P}^{(k)}_{\theta\, T}$,下的Galton-Watson过程，可以视为一个非齐次多类型Galton-Watson过程，其中粒子的类型由其携带的脊柱数量决定。由于(2.3)中的拉东－尼科迪姆导数具有“乘积”结构，分枝结构得以保留，因此，带有 k条脊柱、处于 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$,下的Galton-Watson过程，也可视为另一个非齐次多类型Galton-Watson过程（参见Abraham和Debs [1]，其中以这种方式描述了带有k条脊柱的离散GW过程）。我们有如下性质：

引理 2（分枝马尔可夫性质／对称性引理）。假设 $u \in \mathcal{Z}_t$ 在时间 t 带有 j 个标记，即 u 有 j 条脊柱经过它。那么，在 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$, 下， u 在时间 t 之后生成的子树独立于过程的其余部分，其行为如同处于 $\mathbb{Q}^{(j)}_{\theta}$, $_{T-t}$ 之下。

该引理的证明沿用了 Harris 等人 [17], 中引理 8 的相同论证，其中考虑的测度 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$, 不含补偿项 θ。因此，只需确定 k 条脊柱的分枝率，以描述 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$, 。

下面的结果完整描述了测度变换 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$,下脊柱和非脊粒子的行为。

引理 3（测度 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\,T,}$下具有 k 条脊柱的大小偏倚折扣伽尔顿－沃森过程）。过程$\mathcal{Z}=(\mathcal{Z}_s)_{s\in[0,T]}$具有 k 条脊柱 $\xi=(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\ldots,\xi^{(k)})$，其在测度 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\,T,}$ 下的演化如下：

(1) 该过程在时间 0 开始，此时一个粒子携带所有 k 条脊柱（即 $\mathcal{Z}_0=\{\emptyset\}$ 和 $\xi_0=(1,2,\ldots,k)$）。(2) 携带 j 条脊柱的粒子会独立于过程的其余部分，随时间向前演化出一棵子树（分枝马尔可夫性质）。(3) 在时间 t，携带 $j\geq 1$ 条脊柱的粒子分枝为 ℓ 个后代，j 条脊柱分裂为 $g\in\{1,\ldots,j\}$ 组，大小分别为 $k_1,\ldots,k_g\geq 1$，速率为 $\sum_{i=1}^{g}k_i=j$

$$\frac{j!}{\prod_{m=1}^{j}h_m!\prod_{i=1}^{g}k_i!}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{g}\mathbb{E}[Z^{(k_i)}_{T-t}e^{-\theta Z_{T-t}}]}{\mathbb{E}[Z^{(j)}_{T-t}e^{-\theta Z_{T-t}}]}r\mathbb{E}\left[L^{(g)}\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{L-g}\right]\cdot\frac{\ell^{(g)}\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{\ell-g}p_\ell}{\mathbb{E}\left[L^{(g)}\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{L-g}\right]},$$

其中 $h_m:=|\{i:\,k_i=m\}|$ 是大小为 m 的脊柱组数，因此 $\sum_{m=1}^{j}mh_m=j$ 和$\sum_{m=1}^{j}h_m=g$。

(4) 给定一个携带 $j\geq 1$ 条脊柱的粒子分枝为 ℓ 个后代，其中 j 条脊柱分裂为 g 组，大小分别为 $k_1,\ldots,k_g\geq 1$，脊柱按如下方式分配给这些后代：

(a) 从 ℓ 个后代中均匀选择 g 个来承载脊柱组，共有 $\ell!/(g!(\ell-g)!$ 种不同的方式。(b) 将组大小 $k_1,\ldots,k_g$ 均匀分配给所选的 g 个承载脊柱组的后代，共有 $g!/\prod_{m=1}^{j}h_m!$ 种不同的分配方式。(c) 将 j 个（带标签的）脊柱，按照给定的组大小 $k_1,\ldots,k_g$，均匀划分给所选的 g 个后代，共有 $j!/\prod_{m=1}^{g}k_m!$ 种不同的方式。

(5) 最后，任何在时间 t 仍存活且不承载脊柱的粒子，其行为独立于过程的其余部分，并以速率分枝为 ℓ 个不承载脊柱的后代

$$r\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{L-1}\right]\cdot\frac{\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{\ell}p_\ell}{\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{L}\right]}.$$

引理 3 的证明中，第 (1) 部分由定义得出，第 (2) 部分由引理 2 的马尔可夫分枝性质得出，第 (3) 部分和第 (4) 部分由引理 10 得出，最后，第 (5) 部分由引理 13 给出。

每个后代所承载的脊柱数量尤其值得关注，因为随着时间向前推进，脊柱一旦彼此分裂，就对应于从末端抽取的个体出发、沿时间向后观察时家系的合并。还有各种其他方式可以描述带有脊柱的过程，每一种都可以从上述涉及粒子所承载脊柱数量的描述中提取出来。如果我们转而关注由单个脊柱形成的划分及其如何分裂，或者希望将该过程视为多类型Galton-Watson过程，那么只需根据所需的组合因子，对上述脊柱分裂速率进行相应调整即可。

注意，在时间 t 携带 j 条脊柱的粒子发生分枝且所有脊柱保持聚集（因此 $g=1$）的速率为

$$r\mathbb{E}\left[L\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{L-1}\right]$$

当所有脊柱保持聚集时，时间 t 发生分枝事件的后代分布是大小偏倚的，并按剩余时间进行折扣，获得 ℓ 个后代的概率为

$$\frac{\ell\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{\ell-1} p_\ell}{\mathbb{E}\left[L\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{L-1}\right]}.$$

所有脊柱都沿着同一个粒子（$g = 1$）延伸的这类分枝事件，有时称为脊柱外出生；与之相对的是脊柱分裂分枝事件，在这种事件中，脊柱会分裂成两个或更多组（$g \geq 2$）。重要的是，任何脊柱分支上的脊柱外出生都独立于沿该分支延伸的脊柱数量（即当 $g = 1$时，与 j 无关，如上所述）。这一非常方便的特性意味着，从任一特定脊柱分支分出的子群体仅取决于该分支延续的时间段，而不取决于沿该分支的脊柱数量，也不取决于该数量是否沿分支发生变化。由于总群体由脊柱以及从各脊柱分支分出的子群体构成，因此在 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$, 下，这一观察将使我们能够相对轻松地理解总种群规模。

2.6. 从Galton-Watson过程进行均匀抽样。正如 Harris 等人 [17], 所指出的，易于处理的测度 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$, 极为有用，因为在时间 T 于 $\mathbb{P}^{(k)}{}_{\text{unif}\, T}$ 下对粒子进行均匀抽样后，关于其过去系谱的问题可以转化为更易处理的问题，即研究脊柱在 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$, 下随时间向前演化的行为。下面引入概率测度$\mathbb{P}^{(k)}{}_{\text{unif}\, T}$。设 f 是定义在 k元粒子组的谱系上的可测泛函。也就是说，设 f 是关于这些 k 个粒子的祖先（采用Ulam-Harris标记）、出生时间、死亡时间，以及其死亡时拥有的后代数量的泛函。设 $\xi_T = (\xi_T^{(1)}, \ldots, \xi_T^{(k)})$是在时间 T 从一个以事件 $\{Z_T \geq k\}$为条件的Galton-Watson过程中抽取的无放回均匀样本。

定义概率测度 $\mathbb{P}^{(k)}{}_{\text{均匀}\, T}$ 如下

$$\mathbb{E}^{(k)}_{\text{unif},T}\left[f(\xi_T)\middle| Z_T \geq k\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{Z_T^{(k)}}\sum_{\underline{u}\in\mathcal{Z}_T^{(k)}} f(\underline{u})\middle| Z_T \geq k\right], \tag{2.8}$$

其中，(2.8) 右侧的第一项是任意给定一组互不相同的$\underline{u} \in \mathcal{Z}_T^{(k)}$ 的概率。等价地，我们可以作如下定义

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^{(k)}_{\text{unif},T}(\,\cdot\,|Z_T \geq k)}{\mathrm{d}\mathbb{P}^{(k)}}\right|_{\mathcal{F}_T^{(k)}} := \frac{\mathbf{1}_{A_{k,T}}}{Z_T^{(k)}} \cdot \prod_{i=1}^{k}\prod_{v\prec\xi_T^{(i)}} L_v. \tag{2.9}$$

特别 地，回顾 (2.7)，我们可以直接看出大小偏倚关系 $\mathrm{n}\ \mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}$ 与 $\mathbb{P}^{(k)}{}_{\text{均匀}\, T}$ 之间的关系为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}}{\mathrm{d}\mathbb{P}^{(k)}_{\text{unif},T}(\,\cdot\,|Z_T \geq k)}\right|_{\mathcal{F}_T^{(k)}} = \frac{Z_T^{(k)} e^{-\theta Z_T}}{\mathbb{E}^{(k)}\left[Z_T^{(k)} e^{-\theta Z_T}\right]}.$$

对于在 T 时刻存活的不同 k元组粒子的分裂时间，在 $\{Z_T \geq k\}$事件下，我们有 $\mathbb{P}^{(k)}{}_{\text{unif}\, T}$ 与 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$, 之间的如下关系，这对我们的研究将非常有用。

引理4. 设 f 是定义在 k元组粒子谱系上的可测泛函。该 n

$$\mathbb{E}^{(k)}_{\mathrm{unif},T}\left[f(\xi_T)\middle|Z_T\geq k\right]=\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\left[\frac{f(\xi_T)}{Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}}\right]\mathbb{E}\left[Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}\middle|Z_T\geq k\right]. \tag{2.10}$$

特别地，如果 $\tau_1,\ldots,\tau_{k-1}$ 是均匀选取的个体 $\xi_T\in\mathcal{Z}_T^{(k)}$ 的分裂时间，则有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}^{(k)}_{\mathrm{unif},T}\Big(\tau_1\in\mathrm{d}t_1,\ldots,\tau_{k-1}\in\mathrm{d}t_{k-1}\Big|Z_T\geq k\Big)\\&\qquad=\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\left(\frac{1}{Z_T^{(k)}}\mathbf{1}_{\{\tau_1\in\mathrm{d}t_1,\ldots,\tau_{k-1}\in\mathrm{d}t_{k-1}\}}\right)\mathbb{E}\Big[Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}\Big|Z_T\geq k\Big].\end{aligned}$$

证明。首先由 (2.6) 可知，对于沿脊柱 $\xi_T=(\xi_T^{(1)},\ldots,\xi_T^{(k)})$ 的泛函，有

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\left[f(\xi_T)|\mathcal{F}_T\right]&=\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\left[\sum_{u\in\mathcal{Z}_T^{(k)}}\mathbf{1}_{\{\xi_T=\underline{u}\}}f(\underline{u})\middle|\mathcal{F}_T\right]\\&=\sum_{\underline{u}\in\mathcal{Z}_T^{(k)}}f(\underline{u})\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}(\xi_T=\underline{u}|\mathcal{F}_T)\\&=\frac{1}{Z_T^{(k)}}\sum_{\underline{u}\in\mathcal{Z}_T^{(k)}}f(\underline{u}).\end{aligned}$$

因此，由 (2.8) 和上述恒等式可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{(k)}_{\mathrm{unif},T}\left[f(\xi_T)\middle|Z_T\geq k\right]&=\mathbb{E}\left[\frac{1}{Z_T^{(k)}}\sum_{\underline{u}\in\mathcal{Z}_T^{(k)}}f(\underline{u})\middle|Z_T\geq k\right]\\&=\mathbb{E}\left[\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\left[f(\xi_T)|\mathcal{F}_T\right]\middle|Z_T\geq k\right].\end{aligned}$$

最后，利用 (2.5)，我们推得

$$\mathbb{E}^{(k)}_{\mathrm{unif},T}\left[f(\xi_T)\middle|Z_T\geq k\right]=\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\left[\frac{f(\xi_T)}{Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}}\right]\mathbb{E}\left[Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}\middle|Z_T\geq k\right].$$

证明至此完成。 □

正如我们将在下一节中展示的，在 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\,T,}$ 下可以完整描述脊柱的行为；因此，借助上述结果，也就隐含地描述了在 $\mathbb{P}^{(k)}$ 均匀 T 下的情形。我们还注意到，如果适当地选择 θ，使其依赖于 T，则可以利用相关的 Yaglom定理计算 (2.10) 最右端的项。（例如，在有限方差情形下，当 $T\to\infty$ 时，Z_T/T 依分布收敛于指数分布。）此外，对于描述 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\,T,}$ 时出现的其他单独项，情况也类似。这一标度过程将导出一个极限 k-脊柱构造，并最终确定大时间下均匀样本的渐近谱系，正如我们所期望的那样。

3. Behaviour of Galton-Watson with k-spines under $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\,T}$.

3.1. 脊柱的行为及脊柱外出生。本节旨在明确计算具有 k-脊柱的伽尔顿–沃森树在 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\,T}$, 下的一些泛函，这些泛函将在后续各节中发挥关键作用。在深入证明之前，我们先简要概述本节的一些重要结果：

- 根据引理 9，如果一个粒子携带 $j \geq 1$ 条脊柱，那么“脊柱外出生”（即沿着该粒子发生的出生，且出生后所有 j 条脊柱都沿着同一个子代粒子延伸）以速率

$$r\mathbb{E}\left[L\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{L-1}\right]$$

在时间 t 发生；发生时，后代数量服从大小偏倚概率分布

$$\mathbb{P}(\text{A birth-off-the-spine at time } t \text{ has size } \ell) = \frac{\ell\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]^{\ell-1}]p_\ell}{\mathbb{E}[L\mathbb{E}[e^{-\theta Z_t}]^{L-1}]}.$$

需要注意的是，这两个量（即脊柱外出生的速率和后代分布）均与 j 无关，也就是说，与所携带的脊柱数量无关。

- 本节的另一个主要结果是引理 12，它揭示了

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\Big(\tau_1 \in \mathrm{d}t_1, \ldots, \tau_m \in \mathrm{d}t_m, \mathcal{T}(\xi) = (\beta_0, \ldots, \beta_m), L_{\tau_1} = \ell_1, \ldots, L_{\tau_m} = \ell_m\Big)& \\ = \frac{F'_T(e^{-\theta})}{\mathbb{E}[Z^{(k)}_T e^{-\theta Z_T}]} \prod_{i=1}^{m} \ell_i^{(g_i)} \left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t_i}}]\right)^{\ell-g} p_{\ell_i} F'_{T-t_i}(e^{-\theta})^{g_i-1},& \qquad (3.1)\end{aligned}$$

其中 $F_t(s) = \mathbb{E}[s^{Z_t}]$, 对于 $|s| < 1$ 和 $t \geq 0$, $0 < t_1 < \ldots < t_m < T$ 是时间，$(\beta_0, \ldots, \beta_m)$ 是 $\{1, \ldots, k\}$ 的分裂过程，其分裂大小为 $g_1, \ldots, g_m$，而 $\ell_1, \ldots, \ell_m$ 是满足 $\ell_i \geq g_i$ 的整数。

如前所述，本节中 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\,T}$, 下的脊柱测度变换结果推广了 [21]（第 4 节）和 [17]（第 4 节）中针对连续时间伽尔顿-沃森过程的一些早期脊柱方法，重要的新增之处是，除了按 k 进行大小偏倚外，还按最终种群规模进行指数 θ 折扣。虽然这增加了额外的复杂性，但所有关键性质都得以保留，而且当存在重尾子代分布时，折扣对于应用脊柱方法至关重要。

首先，我们计算截至时间 t 脊柱上没有出生的事件。以下结果的证明沿用了 [17], 中引理 9 的类似论证；为求完整起见，我们给出其证明。

引理 5。设 χ_1 为整个种群中首次出生事件发生的时间。则

$$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}(\chi_1 > t) = e^{-rt}\frac{\mathbb{E}^{(k)}[Z^{(k)}_{T-t}e^{-\theta Z_{T-t}}]}{\mathbb{E}^{(k)}[Z^{(k)}_T \mathbb{E}^{-\theta Z_T}]}.$$

证明。回顾一下， A_T 表示脊柱在时间 T 前已经分离且存活的事件。则

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_{\theta,T}^{(k)}(\chi_1 > t) &= \frac{\mathbb{E}^{(k)}\left[\left(\prod_{i=1}^k \prod_{v\prec\xi_T^{(i)}} L_v\right) e^{-\theta Z_T}\mathbf{1}_{\{\chi_1>t, A_{k,T}\}}\right]}{\mathbb{E}^{(k)}[Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}]} \\ &= \mathbb{P}(\chi_1 > t)\frac{\mathbb{E}^{(k)}\left[\left(\prod_{i=1}^k \prod_{v\prec\xi_T^{(i)}} L_v\right) e^{-\theta Z_T}\mathbf{1}_{A_{k,T}}\middle| Z_t = 1\right]}{\mathbb{E}^{(k)}[Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}]} \\ &= e^{-rt}\frac{\mathbb{E}^{(k)}[Z_{T-t}^{(k)}e^{-\theta Z_{T-t}}]}{\mathbb{E}^{(k)}[Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}]},\end{aligned}$$

whe其中第三个等式由马尔可夫性质和恒等式 (2.4) 得出。 □

回顾一下，我们将沿脊柱发生但不发生在脊柱分裂事件处的出生事件称为脊柱外出生。下面的引理给出了在时间 t 首次发生脊柱外出生时子代数量的分布。

引理 6。令 B_{χ_1} 表示脊柱在时间 χ_1 保持在一起这一事件，令 L_{χ_1} 表示首次出生事件中的后代数量，则

$$\mathbb{Q}_{\theta,T}^{(k)}(\chi_1 \in \mathrm{d}t, L_{\chi_1} = \ell; B_{\chi_1}) = \ell\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{\ell-1} p_\ell r e^{-rt}\frac{\mathbb{E}^{(k)}[Z_{T-t}^{(k)}e^{-\theta Z_{T-t}}]}{\mathbb{E}^{(k)}[Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}]}\mathrm{d}t.$$

证明。我们首先注意到，如果第一个粒子有 ℓ 个后代，那么全部 k 条脊柱都沿着这些后代中的同一个后代延伸的概率为 $1/\ell^{k-1}$。因此，根据马尔可夫性质、引理 5 和恒等式 (2.4)，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_{\theta,T}^{(k)}(\chi_1 \in \mathrm{d}t, L_{\chi_1} = \ell; B_{\chi_1}) &= \frac{\mathbb{E}^{(k)}\left[\left(\prod_{i=1}^k \prod_{v\prec\xi_T^{(i)}} L_v\right) e^{-\theta Z_T}\mathbf{1}_{\{A_{k,T};\chi_1\in\mathrm{d}t, L_{\chi_1}=\ell; B_{\chi_1}\}}\right]}{\mathbb{E}^{(k)}[Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}]} \\ &= re^{-rt}\mathrm{d}t\ p_\ell\left(\frac{1}{\ell}\right)^{k-1}\ell^k\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{\ell-1}\frac{\mathbb{E}^{(k)}[Z_{T-t}^{(k)}e^{-\theta Z_{T-t}}]}{\mathbb{E}^{(k)}[Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}]} \\ &= \ell\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{\ell-1} p_\ell r e^{-rt}\frac{\mathbb{E}^{(k)}[Z_{T-t}^{(k)}e^{-\theta Z_{T-t}}]}{\mathbb{E}^{(k)}[Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}]}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

□

由 前一个引理，对 ℓ 的所有可能取值求和，可得 t

$$\mathbb{Q}_{\theta,T}^{(k)}(\chi_1 \in \mathrm{d}t, B_{\chi_1}) = \mathbb{E}\left[L\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{L-1}\right] r e^{-rt}\frac{\mathbb{E}^{(k)}[Z_{T-t}^{(k)}e^{-\theta Z_{T-t}}]}{\mathbb{E}^{(k)}[Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}]}\mathrm{d}t.$$

以下结果计算了截至时间 t 脊柱尚未分裂的事件发生的概率。

引理 7. 设 τ_1 为脊柱分裂的首次时刻，则

$$\mathbb{Q}_{\theta,T}^{(k)}(\tau_1 > t) = \exp\left\{-\int_0^t r\left(1 - \mathbb{E}\left[L\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-s}}]\right)^{L-1}\right]\right)\mathrm{d}s\right\}\frac{\mathbb{E}^{(k)}[Z_{T-t}^{(k)}e^{-\theta Z_{T-t}}]}{\mathbb{E}^{(k)}[Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}]}. \tag{3.2}$$

证明. 设 G_t 为在时间 t 之前尚未发生分裂的事件，因此根据 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$, 的定义，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}(\tau_1 > t) &= \frac{\mathbb{E}^{(k)}\left[\left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{v\prec\xi_T^{(i)}} L_v\right) e^{-\theta Z_T}\mathbf{1}_{\{\tau_1>t;\, A_{k,T}\}}\right]}{\mathbb{E}^{(k)}[Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}]}\\ &= \frac{\mathbb{E}^{(k)}\left[\left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{v\prec\xi_T^{(i)}} L_v\right) e^{-\theta Z_T}\mathbf{1}_{\{\tau_1>t;\, A_{k,T};\, G_t\}}\right]}{\mathbb{E}^{(k)}[Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}]}.\end{aligned}$$

展开乘积后，进一步化简为

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}(\tau_1 > t) &= \frac{1}{\mathbb{E}^{(k)}[Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}]}\mathbb{E}^{(k)}\left[\prod_{u\preceq\xi_t^{(1)}}\left(\frac{1}{L_u}\right)^{k-1}\mathbf{1}_{\{\tau_1>t;\, A_{k,T}\}}\right.\\ &\qquad\left.\times\left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{\xi_t^{(i)}\prec v\prec\xi_T^{(i)}} L_v\prod_{w\preceq\xi_t^{(i)},} L_w\right)e^{-\theta Z^{(1)}_{T-t}}\prod_{u\preceq\xi_t^{(1)}} e^{-\theta\sum_{k=1}^{L_u-1}Z^{u,k}_{T-\sigma_u}}\right]\\ &= \frac{1}{\mathbb{E}^{(k)}[Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}]}\mathbb{E}^{(k)}\left[\mathbf{1}_{\{\tau_1>t;\, A_{k,T}\}}\prod_{u\preceq\xi_t^{(1)}}\left(\frac{1}{L_u}\right)^{k-1}\right.\\ &\qquad\left.\times\left(\prod_{u\preceq\xi_t^{(1)}} L_u^k\right)\left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{\xi_t^{(i)}\prec w\prec\xi_T^{(i)}} L_w\right)e^{-\theta Z^{(1)}_{T-t}}\prod_{u\preceq\xi_t^{(1)}} e^{-\theta\sum_{j=1}^{L_u-1}Z^{u,j}_{T-\sigma_u}}\right],\end{aligned}$$

其中， σ_u 表示粒子 u 的脊柱出生时间， $Z^{u,\ j}_{\ T-\sigma_u}$ 表示粒子 u的第 j个子代对 T时刻存活种群的贡献。此外， $Z^{(1)}_{T-t}$表示 $\xi_t^{(1)}$ 对 T 时刻存活种群的贡献，这意味着 Z_T 可以改写为如下形式

$$Z_T = \sum_{u\preceq\xi_t^{(1)}}\sum_{j=1}^{L_u-1} Z^{u,j}_{T-\sigma_u} + Z^{(1)}_{T-t}.$$

需要注意的是，对于每个节点 u，在给定 σ_u 的条件下，随机变量 $(Z^{u,\ j}_{\ T-\sigma_u}, j\geq 1)$ 独立同分布；此外，对于 $u\prec v\preceq\xi_t^{(1)}$，在给定 (σ_u,σ_v) 的条件下，族 $(Z^{u,\ j}_{\ T-\sigma_u}, j\geq 1)$ 与 $(Z^{v,\ j}_{\ T-\sigma_v}, j\geq 1)$ 相互独立。除此之外，我们注意到，通过观察下式可以简化上述恒等式:

$$\mathbf{1}_{\{\tau_1>t;\, A_{k,T}\}}\prod_{u\preceq\xi_t^{(1)}}\left(\frac{1}{L_u}\right)^{k-1} = \mathbf{1}_{\{A_{k;t,T}\}}\prod_{u\preceq\xi_t^{(1)}}\left(\frac{1}{L_u}\right)^{k-1},$$

其中，$A_{k;t,T}$ 表示脊柱在 $(t,T]$ 上分裂的事件，并在时间 t 使用马尔可夫分枝性质，从而得到

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_{\theta,T}^{(k)}(\psi_1 > t) &= \frac{\mathbb{E}^{(k)}\left[\mathbf{1}_{A_{k;t,T}} \prod_{u\preceq\xi_t^{(1)}} L_u\, e^{-\theta\sum_{i=1}^{L_u-1} Z_{T-\sigma_u}^{u,i}} \left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{\xi_t^{(i)}\prec v\prec\xi_T^{(i)}} L_v\right) e^{-\theta Z_{T-t}^{(1)}}\right]}{\mathbb{E}^{(k)}[Z_T^{(k)} e^{-\theta Z_T}]} \\ &= \mathbb{E}^{(k)}\left[\prod_{u\preceq\xi_t^{(1)}} L_u\, e^{-\theta\sum_{i=1}^{L_u-1} Z_{T-\sigma_u}^{u,i}}\right] \frac{\mathbb{E}^{(k)}\left[Z_{T-t}^{(k)} e^{-\theta Z_{T-t}}\right]}{\mathbb{E}^{(k)}\left[Z_T^{(k)} e^{-\theta Z_T}\right]} \\ &= \exp\left\{-\int_0^t r\left(1-\mathbb{E}\left[L\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-s}}]\right)^{L-1}\right]\right)\mathrm{d}s\right\} \frac{\mathbb{E}^{(k)}\left[Z_{T-t}^{(k)} e^{-\theta Z_{T-t}}\right]}{\mathbb{E}^{(k)}\left[Z_T^{(k)} e^{-\theta Z_T}\right]},\end{aligned}$$

其中，在最后一个等式中我们使用了坎贝尔公式，即

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{(k)}\left[\prod_{u\preceq\xi_t^{(1)}} L_u\, e^{-\theta\sum_{i=1}^{L_u-1} Z_{T-\sigma_u}^{u,i}}\right] &= \mathbb{E}^{(k)}\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{\eta_t}\left(\ln(L_i) - \theta\sum_{j=1}^{L_i-1} Z_{T-\sigma_i}^{i,j}\right)\right\}\right] \\ &= \exp\left\{-\int_0^t r\left(1-\mathbb{E}\left[L\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-s}}]\right)^{L-1}\right]\right)\mathrm{d}s\right\}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

更准确地说，令 η_t 表示截至时间 t 脊柱外的出生数量，令 L_i 表示脊柱外第 i 次出生的后代数量。在 $\mathbb{P}^{(k)}$ 下，过程 $(\eta_t, t\geq 0)$ 显然是强度为 $\lambda(t) := \int_0^t r\mathrm{d}s$ 的泊松过程。回顾在此情形下，坎贝尔公式表述如下：对于 $Y_t = \sum_{i=1}^{\eta_t} X_i(\sigma_i)$，其中 $(X_i(\cdot)\ i\geq 1)$ 相互独立，且 σ_i 表示第 i 次到达的时间，有

$$\mathbb{E}\left[e^{-\theta Y_t}\right] = \exp\left\{\int_0^t \lambda(s)\left(1-\mathbb{E}\left[e^{-\theta X(s)}\right]\right)\mathrm{d}s\right\}.$$

证明完毕。 □

尽管上述证明提供了一些清晰的概率学直观，但请注意，文献 [17] 给出了一种替代方法，用于计算在时间 t 所有脊柱处于同一位置这一事件。更准确地说，在当前背景下，概率 $\mathbb{Q}_{\theta,T}^{(k)}(\psi_1 > t)$ 无需使用坎贝尔公式即可计算，并且等价地可写成 $F_t(s) = \mathbb{E}(s^{Z_t})$ 的导数形式，如下所示。

引理 8. 设 τ_1 为脊柱分裂的首次时刻，则

$$\mathbb{Q}_{\theta,T}^{(k)}(\tau_1 > t) = \frac{F_{T-t}^{(k)}(e^{-\theta})}{F_T^{(k)}(e^{-\theta})} \frac{F_T'(e^{-\theta})}{F_{T-t}'(e^{-\theta})}, \tag{3.4}$$

其中 $F_t^{(j)}(s) := \frac{\partial^j}{\partial s^j} F_t(s)$.

证明。使用与上一引理相同的记号，我们注意到，在 G_t 条件下，可以将种群 Z_T 分解为

$$Z_T = Z_T' + Z_T'',$$

其中， Z'_T 是在时间 t 唯一一条粒子所跟随的脊柱的后代， Z''_T 统计时间 T 的其余粒子。注意到 $Z''_T = Z_T - Z'_T$，并且在给定 G_t 的条件下， Z'_T 和 Z''_T 相互独立。因此

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{(k)}\left[\left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{v\prec\xi_T^{(i)}} L_v\right) e^{-\theta Z_T}\mathbf{1}_{\{G_t;\, A_{k,T}\}}\right] \\
&= \mathbb{E}^{(k)}\left[\mathbb{E}^{(k)}\left[\left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{v\prec\xi_T^{(i)}} L_v\right) e^{-\theta Z_T}\mathbf{1}_{\{G_t;\, A_{k,T}\}}\middle|\mathcal{F}_t^{(k)}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}^{(k)}\left[\left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{v\prec\xi_t^{(i)}} L_v\right)\mathbb{E}^{(k)}\left[\left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{\xi_t^{(i)}\preceq v\prec\xi_T^{(i)}} L_v\right) e^{-\theta Z'_T}\mathbf{1}_{\{A_{k,T}\}}\middle|\mathcal{F}_t^{(k)}\right]\mathbb{E}[e^{-\theta Z''_T}|\mathcal{F}_t]\mathbf{1}_{\{G_t\}}\right].
\end{aligned}$$

On 一方面，我们有 $\mathbb{E}[e^{-\theta Z''_T}|\mathcal{F}_t] = F_{T-t}(e^{-\theta})^{Z_t-1}$. 另一方面，我们有 e

$$\mathbb{E}^{(k)}\left[\left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{\xi_t^{(i)}\preceq v\prec\xi_T^{(i)}} L_v\right) e^{-\theta Z'_T}\mathbf{1}_{\{A_{k,T}\}}\middle|\mathcal{F}_t^{(k)}\right] = \mathbb{E}^{(k)}[Z_{T-t}^{(k)}e^{-\theta Z_{T-t}}],$$

在给定 G_t 的条件下，独立于 $\mathcal{F}_t^{(k)}$ 。将所有部分合在一起，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{(k)}\left[\left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{v\prec\xi_T^{(i)}} L_v\right) e^{-\theta Z_T}\mathbf{1}_{\{G_t;\, A_{k,T}\}}\right] \\
&\qquad = \mathbb{E}^{(k)}[Z_{T-t}^{(k)}e^{-\theta Z_{T-t}}]\mathbb{E}^{(k)}\left[\left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{v\prec\xi_t^{(i)}} L_v\right) F_{T-t}(e^{-\theta})^{Z_t-1}\mathbf{1}_{\{G_t\}}\right]. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

最后，对时间 t种群中可能的元素求和，我们推得

$$\mathbb{E}\left[\left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{v\prec\xi_t^{(i)}} L_v\right)\mathbf{1}_{\{G_t\}}\middle|\mathcal{F}_t^{0}\right] = Z_t. \qquad (3.6)$$

对 (3.5) 取 $\mathcal{F}_t$-条件期望，并利用 (3.6)，我们推得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{(k)}\left[\left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{v\prec\xi_T^{(i)}} L_v\right) e^{-\theta Z_T}\mathbf{1}_{\{G_t;\, A_{k,T}\}}\right] &= \mathbb{E}^{(k)}[Z_{T-t}^{(k)}e^{-\theta Z_{T-t}}]\mathbb{E}^{(k)}\left[Z_t F_{T-t}(e^{-\theta})^{Z_t-1}\right] \qquad (3.7)\\
&= F_{T-t}^{(k)}(e^{-\theta})F_t'(F_{T-t}(\theta)).
\end{aligned}$$

注意，由半群恒等式 $F_T(s) = F_t(F_{T-t}(s))$，我们有

$$F_t'(F_{T-t}(s)) = F_T'(s)/F_{T-t}'(s). \qquad (3.8)$$

将 (3.7) 代入 (3.5)，并利用 (3.8)，即可推出 (3.4)。 □

注意到 $\mathbb{E}^{(k)}[Z_t^{(k)}e^{-\theta Z_t}] = F_t^{(k)}(e^{-\theta})$，引理 7 和引理 8 中 $\mathbb{Q}_{\theta\,T,}^{(k)}(\psi_1 > t)$ 的两种表示一致，这等价于以下恒等式

$$\exp\left\{-\int_0^t r\left(1-\mathbb{E}\left[L\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-s}}]\right)^{L-1}\right]\right)\mathrm{d}s\right\} = F_t'(F_{T-t}(e^{-\theta})),$$

其证明是连续时间伽尔顿-沃森过程理论中的标准计算；例如参见 [12]的引理 2.5。

我们继续阐述，计算脊柱外出生的速率 .

引理 9. 令 σ_1 表示首次发生脊柱外出生事件的时刻，即所有脊柱仍聚在一起时发生的出生事件。发生在 k 条脊柱外的出生速率为

$$\mathbb{Q}_{\theta,T}^{(k)}(\sigma_1 \in \mathrm{d}t; L_{\sigma_1} = \ell|\tau_1 > t) = \ell\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{\ell-1} p_\ell r e^{-rt}\frac{F_{T-t}'(e^{-\theta})}{F_T'(e^{-\theta})}. \tag{3.9}$$

证明. 为了推导这一恒等式，我们将使用引理 6 和引理 8。注意，在事件$\{\tau_1 > t\}$下，直到时间 t 脊柱都聚在一起；并且到时间 t，首次出生事件与首次脊柱外出生是同一事件。更确切地说，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_{\theta,T}^{(k)}(\sigma_1 \in \mathrm{d}t; L_{\sigma_1} = \ell|\tau_1 > t) &= \frac{\mathbb{Q}_{\theta,T}^{(k)}(\sigma_1 \in \mathrm{d}t; L_{\sigma_1} = \ell, B_{\sigma_1}, \tau_1 > t)}{\mathbb{Q}_{\theta,T}^{(k)}(\tau_1 > t)} \\
&= \frac{\mathbb{Q}_{\theta,T}^{(k)}(\chi_1 \in \mathrm{d}t; L_{\chi_1} = \ell, B_{\chi_1})}{\mathbb{Q}_{\theta,T}^{(k)}(\tau_1 > t)} \\
&= \frac{\ell\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{\ell-1} p_\ell r e^{-rt}\frac{\mathbb{E}[Z_{T-t}^{(k)}e^{-\theta Z_{T-t}}]}{\mathbb{E}[Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}]}\mathrm{d}t}{\frac{F_{T-t}^{(k)}(e^{-\theta})}{F_T^{(k)}(e^{-\theta})}\frac{F_T'(e^{-\theta})}{F_{T-t}'(e^{-\theta})}} \\
&= \ell\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{\ell-1} p_\ell r e^{-rt}\frac{F_{T-t}'(e^{-\theta})}{F_T'(e^{-\theta})},
\end{aligned}$$

如所需。 □

我们来 简要说明一下式 (3.9) 的含义。注意，我们也可以改写为 e

$$\mathbb{Q}_{\theta,T}^{(k)}(\sigma_1 \in \mathrm{d}t; L_{\sigma_1} = \ell|\tau_1 > t) = \frac{\ell(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}])^{\ell-1}p_\ell}{\mathbb{E}\left[L\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{L-1}\right]} \times \mathbb{E}\left[L\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{L-1}\right] r e^{-rt}\frac{F_{T-t}'(e^{-\theta})}{F_T'(e^{-\theta})}\mathrm{d}t. \tag{3.10}$$

如本节开头所述，上述恒等式中的第一项

$$\frac{\ell(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}])^{\ell-1}p_\ell}{\mathbb{E}\left[L\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{L-1}\right]}$$

是变量 ℓ 的概率质量函数。后一项表示脊柱外出生的总速率。换言之，脊柱分支的脊柱外出生速率和脊柱外出生数量均经过尺寸偏倚，并按剩余时间进行折扣，且与沿该分支延伸的脊柱数量相互独立 k。

现在，我们计算脊柱在时间 t 分裂为 ℓ 个后代这一事件的概率。假设 k条脊柱分裂成 $g \in \{2,\ldots,k\}$ 组，大小分别为 k_1、k_2、$\ldots k_g \geq 1$。设 h_i 为大小为

i的组数。注意到

$$\sum_{i=1}^{g} k_i = k \qquad \text{and} \qquad \sum_{j=1}^{k} j h_j = k.$$

引理 10. 令 $C_{g;k_1,\dots,k_g}$ 表示在首次分裂事件中，脊柱分裂成 g 组，大小分别为 k_1、…、k_g 的事件。于是

$$\begin{aligned}&\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\Big(\tau_1 \in \mathrm{d}t; C_{g;k_1,\dots,k_g}; L_{\tau_1} = \ell\Big)\\ &\qquad = \ell^{(g)} \left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{\ell-g} p_\ell \frac{k!}{\prod_{j=1}^{k} h_j! \prod_{i=1}^{g} k_i!} \frac{\prod_{i=1}^{g} \mathbb{E}[Z^{(k_i)}_{T-t} e^{-\theta Z_{T-t}}]}{\mathbb{E}[Z^{(k)}_T e^{-\theta Z_T}]} \frac{F'_T(e^{-\theta})}{F'_{T-t}(e^{-\theta})} r\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

注意，项 $\ell^{(g)} \left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{\ell-g} p_\ell$ 表示尺寸偏倚的 g 折现后代。证明。回想一下，$A_{k_j,T}$ 表示到时间 T 时， k_j 条脊柱已彼此分离且仍然存活的事件，

n

$$\begin{aligned}&\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\Big(\tau_1 \in \mathrm{d}t; C_{g;k_1,\dots,k_g}; L_{\tau_1} = \ell\Big)\\ &= \frac{\mathbb{E}^{(k)}\left[\left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{v\prec\xi_T^{(i)}} L_v\right) e^{-\theta Z_T}; \tau_1 \in \mathrm{d}t; G_t; C_{g;k_1,\dots,k_g}; L_{\tau_1}=\ell; A_{k,T}\right]}{\mathbb{E}[Z^{(k)}_T e^{-\theta Z_T}]}\\ &= \frac{1}{\mathbb{E}[Z^{(k)}_T e^{-\theta Z_T}]} \mathbb{E}^{(k)}\Bigg[\prod_{u\preceq\xi_t^{(1)}} \left(\frac{1}{L_u}\right)^{k-1} \binom{\ell}{g} \frac{g!}{\prod_{i=1}^{k-1} h_i!} \frac{k!}{\prod_{j=1}^{g} k_j!} \left(\frac{1}{\ell}\right)^{k} \mathbf{1}_{\{\tau_1\in\mathrm{d}t; L_{\tau_1}=\ell\}}\\ &\qquad \times \prod_{i=1}^{\ell-g} e^{-\theta Z^{(i)}_{T-t}} \prod_{u\preceq\xi_t^{(1)}} e^{-\theta\sum_{m=1}^{L_u-1} Z^{u,m}_{T-\sigma_u}} \left(\prod_{j=1}^{g} \mathbf{1}_{A_{k_j,T}} \prod_{i=1}^{k_j} \prod_{\xi_t^{(j)}\prec v\prec\xi_T^{(j,i)}} L_v\right)\\ &\qquad\qquad \times \prod_{u\preceq\xi_t^{(1)}} L_u^k \left(\prod_{n=1}^{g} e^{-\theta Z^{(n)}_{T-t}}\right)\Bigg],\end{aligned}$$

其中， $\xi_T^{(j,i)}$ 表示时间 T 的第 i 条脊柱，其祖先在时间 t 是 $\xi_t^{(j)}$；类似地，在引理 7 的证明中， σ_u 表示粒子 u 的脊柱外出生时间，而 $Z^{u,j}_{T-\sigma_u}$ 表示粒子 u 的第 j 个子代对时间 T 存活种群的贡献。此外， $Z^{(i)}_{T-t}$ 表示首次脊柱分裂时第 i 个后代对时间 T 存活种群的贡献。换言之， Z_T 可改写如下

$$Z_T = \sum_{u\preceq\xi_t^{(1)}} \sum_{j=1}^{L_u-1} Z^{u,j}_{T-\sigma_u} + \sum_{i=1}^{\ell} Z^{(i)}_{T-t}.$$

需要注意的是，对于每个节点 u，随机变量 $(Z^{u,j}_{T-\sigma_u}, j \geq 1)$ 在给定 σ_u 的条件下是独立同分布的；并且对于 $u \prec v \preceq \xi_t^{(1)}$， 族 $(Z^{u,j}_{T-\sigma_u}, j \geq 1)$ 和 $(Z^{v,j}_{T-\sigma_v}, j \geq 1)$ 在给定 (σ_u, σ_v) 的条件下相互独立。

在继续简化期望中的各项之前，我们先对每一项作些说明。第二个恒等式中，期望内的第一项表示

在 t之前的出生过程中，所有脊柱始终聚在一起。期望内的第二项（组合学）可以解释如下：项 $\binom{\ell}{g}$ 表示我们选择哪些后代获得脊柱组的方式；下一项表示我们选择哪个组对应哪种组大小的方式；第三项则表示将 k 条脊柱划分为大小分别为 k_1、k_2、.....、k_g的各组的方式数。这三项合在一起，表示从 k 条脊柱中选出带有 ℓ 个后代的 g 个组，且各组大小分别为 k_1、k_2、.....、k_g的方式数。最后，第四项是在 ℓ个后代中选择特定脊柱的概率。第二行的第一项（即乘积符号之后）表示非脊柱个体在时间 T 的贡献。下一项表示时间 t之前脊柱之外的出生对 Z_T 的贡献。括号内的三项表示时间 t之后，带有 k_1、.....、k_g 条脊柱的 g 个组所作的贡献。最后两项分别表示 k 条脊柱在时间 t 之前沿着同一条路径，以及这些脊柱对 Z_T 的贡献。

因此，根据马尔可夫分枝性质，我们推得

$$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\Big(\tau_1 \in \mathrm{d}t; C_{g;k_1,\ldots,k_g}; L_{\tau_1} = \ell\Big) = r\mathrm{d}t\mathbb{E}\left[\prod_{u\prec\xi^{(1)}_t} L_u e^{-\theta\sum_{j=1}^{L_u-1} Z^{u,j}_{T-\sigma_u}}\right] \times \frac{\ell!}{(\ell-g)!}\left(\mathbb{E}\left[e^{-\theta Z_{T-t}}\right]\right)^{\ell-g} p_\ell \frac{k!}{\prod_{i=1}^{k-1} h_i! \prod_{j=1}^{g} k_j!} \frac{\prod_{i=1}^{g}\mathbb{E}\left[Z^{(k_i)}_{T-t}e^{-\theta Z_{T-t}}\right]}{\mathbb{E}\left[Z^{(k)}_T e^{-\theta Z_T}\right]},$$

其中，应用坎贝尔公式后即可得到所需恒等式，见（3.3）。 □

结合引理7和引理10，我们还可以得到 k-脊柱分裂的速率，即

$$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\Big(\tau_1 \in \mathrm{d}t; C_{g;k_1,\ldots,k_g}; L_{\tau_1} = \ell \Big| \tau_1 > t\Big) = \frac{\ell^{(g)}\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{\ell-g}}{\mathbb{E}\left[L^{(g)}\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{L-g}\right]} p_\ell \times \frac{k!}{\prod_{j=1}^{k} h_j! \prod_{i=1}^{g} k_i!} \frac{\prod_{i=1}^{g}\mathbb{E}[Z^{(k_i)}_{T-t}e^{-\theta Z_{T-t}}]}{\mathbb{E}[Z^{(k)}_{T-t}e^{-\theta Z_{T-t}}]} r\mathbb{E}\left[L^{(g)}\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{L-g}\right]\mathrm{d}t. \tag{3.11}$$

需要特别注意的是，（3.11）右侧的第一项表示尺寸偏倚且经过折扣的 g 后代分裂为 g 组时的情形，而其余各项表示 k 条脊柱分裂为由大小 k_1、.....、k_g 组成的 g 组时的速率。

重要的是，还可以从划分的角度对上述结果进行另一种诠释。回顾一下，我们用（$\mathcal{T}_0$，$\mathcal{T}_1$，.....，$\mathcal{T}_m$）表示脊过程的拓扑——也就是说，在 i^{th}分裂时刻之后，$\mathcal{T}_i$ 是脊划分。因此，第一次脊柱分裂时刻 τ_1、分裂时的子代数量 L_{τ_1}，以及 $\mathcal{T}_1$（即描述第一次分裂后脊柱分组情况的划分）的联合分布满足

引理 11 。设 β_1 是将 $\{1,\ldots,k\}$ 划分为 g 个大小分别为 k_1、.....、k_g 的块的划分。则

$$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\Big(\tau_1 \in \mathrm{d}t; \mathcal{T}_1 = \beta_1; L_{\tau_1} = \ell\Big) = \ell^{(g)}\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{\ell-g} p_\ell \frac{\prod_{i=1}^{g}\mathbb{E}[Z^{(k_i)}_{T-t}e^{-\theta Z_{T-t}}]}{\mathbb{E}[Z^{(k)}_T e^{-\theta Z_T}]} \frac{F'_T(e^{-\theta})}{F'_{T-t}(e^{-\theta})} r\mathrm{d}t. \tag{3.12}$$

证明。设 $k_1 \geq \ldots \geq k_g$ 为满足 $k_1 + \ldots + k_g = k$ 的整数。令 $h_j := \#\{i : \ k_i = j\}$。则存在

$$\frac{k!}{k_1!\ldots k_g! h_1!\ldots h_k!}$$

使得 $\{1,\ldots,k\}$ 的不同集合划分的块大小按递减顺序列出为k_1、k_2、.....、k_g。由于脊柱是可交换的，因此给定引理 10 中的事件，任何一个这样的划分出现的可能性都相同。因此，将引理 10 中的公式除以组合因子 $k!/(k_1!\ \ldots k_g! h_1!\ \ldots h_k!)$即可得到结果。□

现在我们可以陈述本节的主要结果，它将明确描述脊柱祖先过程 $(\pi_t^k)_{t\in[0,T]}$（通过其分裂时间 τ_1、……、τ_m 及拓扑结构（β_0、……、β_m））以及在这些分裂时刻的出生规模 L_{τ_1}、……、L_{τ_m} 的联合分布。

引理 12. 设 $0 < t_1 < \ldots < t_m < T$。设 $(\beta_0, \ldots, \beta_m)$ 是 $\{1, \ldots, k\}$ 的分裂过程，且 $g_1, \ldots, g_m$ 是相应的分裂大小。设 $\ell_1, \ldots, \ell_m$ 为满足 $\ell_i \geq g_i$ 的整数。那么

$$\begin{aligned}&\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\Big(\tau_1 \in \mathrm{d}t_1, \ldots, \tau_m \in \mathrm{d}t_m, \mathcal{T}(\xi) = (\beta_0, \ldots, \beta_m), L_{\tau_1} = \ell_1, \ldots, L_{\tau_m} = \ell_m\Big)\\ &= \frac{F'_T(e^{-\theta})}{\mathbb{E}[Z_T^{(k)} e^{-\theta Z_T}]} \prod_{i=1}^{m} \ell_i^{(g_i)} \left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t_i}}]\right)^{\ell_i - g_i} p_{\ell_i} F'_{T-t_i}(e^{-\theta})^{g_i - 1} \mathrm{d}t_i. \end{aligned} \tag{3.13}$$

证明. 对 m 作归纳。当 $m = 1$ 时，结论由前一个引理立即得出。

现在假设该结论对 $m' = 1, \ldots, m-1$ 次分裂成立，并证明它对 $m' = m$ 次分裂也成立。令 $p_1 := \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{g_1}\}$ 为第一次分裂后的划分，因此 Γ_i 包含 k_i 个元素。根据对称性引理，在第一次分裂时刻 $\tau_1 = t_1$ 之后，各个不同组中的脊柱彼此独立地演化，且其行为如同处于 $\mathbb{Q}^{(k_i)}_{\theta, T-t_1}$ 之下。

现在考虑后续的每个分裂事件 $\tau_2, \ldots, \tau_m$。这些分裂事件各自对应于某个 Γ_j $(1 \leq j \leq g_1)$ 的某个子块分裂成更小的块。因此，我们可以将 $(\tau_i)_{i=2,\ldots,m}$ 重新编号为 $(\tau_{i,j})_{1\leq i\leq m_j, 1\leq j\leq g_1}$，其中 $m_j \geq 0$ 是涉及 Γ_j 的子块的后续分裂事件的数量。具体而言，对于 $i \geq 1$, $\tau_{i,j}$ 是在 τ_1 之后的 i^{th} 时间，此时 Γ_j 的某个子块（可能就是 Γ_j 本身）分裂成更小的子块。在相同的重新编号下，我们可以将 $(t_i)_{i=2,\ldots,m}$ 重新编号为 $(t_{i,j})_{1\leq i\leq m_j, 1\leq j\leq g_1}$，将 $(\ell_i)_{i=2,\ldots,m}$ 重新编号为 $(\ell_{i,j})_{1\leq i\leq m_j, 1\leq j\leq g_1}$，并将 $(g_i)_{i=2,\ldots,m}$ 重新编号为 $(g_{i,j})_{1\leq i\leq m_j, 1\leq j\leq g_1}$。

令 $\mathcal{T}(\xi) := (\mathcal{T}_0, \ldots, \mathcal{T}_m)$ 为与脊柱分裂时间相关联的划分 $\{1, \ldots, k\}$ 的分裂序列。给定 $\mathcal{T}_1$ 的一个块 Γ_j，我们将 $\mathcal{T}^{\Gamma_j}(\xi) = (\mathcal{T}_0^{\Gamma_j}, \ldots, \mathcal{T}_{m_j}^{\Gamma_j})$ 定义为与时间 t_1 之后涉及 Γ_j 中某个脊柱的任意脊柱分裂事件相关联的 Γ_j 的分裂序列。$\mathcal{T}^{\Gamma_j}(\xi) = (\mathcal{T}_0^{\Gamma_j}, \ldots, \mathcal{T}_{m_j}^{\Gamma_j})$ 是 Γ_j 的一个划分序列，具有如下性质：$\mathcal{T}_0^{\Gamma_j} = \{\Gamma_j\}$, $\mathcal{T}_{m_j}^{\Gamma_j}$ 是单元素集合，且每个 $\mathcal{T}_{\ell+1}^{\Gamma_j}$ 都由 $\mathcal{T}_\ell^{\Gamma_j}$ 通过将 $\mathcal{T}_\ell^{\Gamma_j}$ 的恰好一个块拆分成两个或更多子块得到。

我们来逐步考察图 1 中这个例子的若干方面。这里，在第一次分裂后，我们分成三个块：$\Gamma_1 = \{1\}$、$\Gamma_2 = \{2, 5\}$ 和 $\Gamma_3 = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$。每个块 Γ_i 后续还会发生 m_i 次分裂；这里分别是 $m_1 = 0$、$m_2 = 1$、$m_3 = 2$。我们可以将后续分裂时刻 τ_2、τ_3、τ_4 重新编号，使得例如 $\tau_{1,\,3} = \tau_2$ 且 $\tau_{2,\,3} = \tau_4$。现在考虑与块 $\Gamma_3 = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ 相关联的子分裂过程。它由 $\mathcal{T}^{\Gamma_3} = (\mathcal{T}_0^{\Gamma_3}, \mathcal{T}_1^{\Gamma_3}, \mathcal{T}_2^{\Gamma_3})$ 给出，其中 $\mathcal{T}_0^{\Gamma_3} = \{\Gamma_3\}$ 是将 Γ_3 划分为一个单块所得的划分，$\mathcal{T}_1^{\Gamma_3} = \{\{3\}, \{4, 6, 7, 9\}, \{8\}\}$；最后，$\mathcal{T}_2^{\Gamma_3} = \{\{x\} : x \in \Gamma_3\}$ 是单元素集合。

写作 $\Gamma := \{\tau_1 \in \mathrm{d}t_1, \ldots, \tau_m \in \mathrm{d}t_m, \mathcal{T}(\xi) = (\beta_0, \ldots, \beta_m)\ L_{\tau_1} = \ell_1, \ldots, L_{\tau_m} = \ell_m\}$。于是，我们可以将事件 Γ 分解为

$$\Gamma = \{\tau_1 \in \mathrm{d}t_1, \mathcal{T}_1 = \beta_1, L_{\tau_1} = \ell_1\} \cap \bigcap_{j=1}^{g_1} \Gamma_j \tag{3.14}$$

其中

$$\Gamma_j = \{\tau_{i,j} \in \mathrm{d}t_{i,j}\ \forall 1 \leq i \leq m_j, \mathcal{T}^{\Gamma_j} = (\beta_0^{\Gamma_j}, \ldots, \beta_{m_j}^{\Gamma_j})\}.$$

现在根据对称性引理，在给定事件 $\{\tau_1 \in \mathrm{d}t_1$、$\mathcal{T}_1 = \beta_1$、$L_{\tau_1} = \ell_1\}$ 的条件下，组 Γ_j 中的脊柱的行为就如同处于 $\mathbb{Q}^{(k_1)}_{\theta,\ T-t_1}$。利用归纳假设（由于

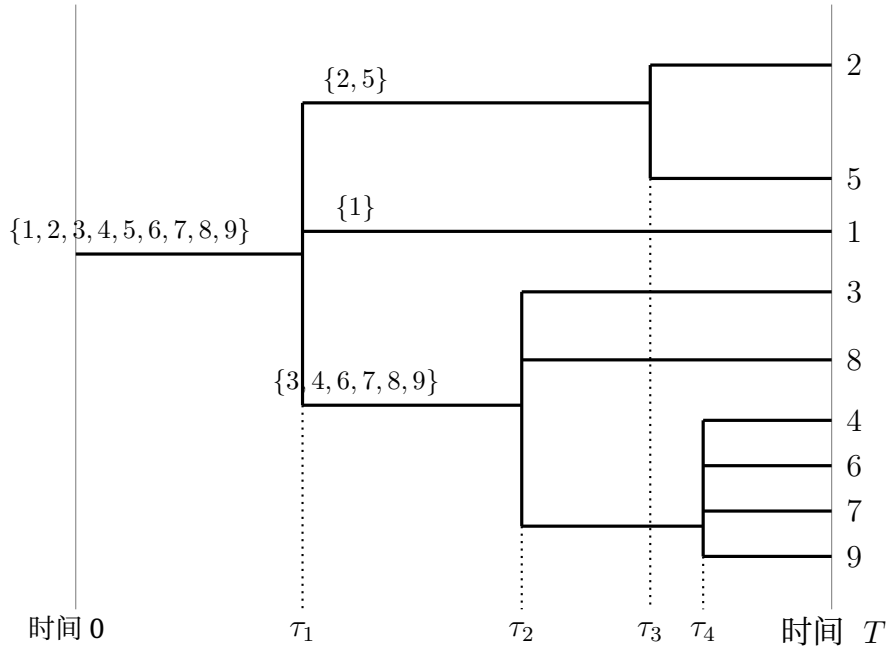

FIGURE 1. $k = 9$ 条脊柱的祖先树。在时间 τ_1 初次分裂成三个块之后，其余的分裂时间和分裂过程可以分配到这三个块中。

$m_j < m$），我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}(\Gamma_j|\tau_1 = t_1, \mathcal{T}_1 = \beta_1, L_{\tau_1} = \ell_1)\\ &= \frac{F'_{T-t_1}(e^{-\theta})}{\mathbb{E}[Z^{(k_j)}_{T-t_1} e^{-\theta Z_{T-t_1}}]} \prod_{i=1}^{m_j} \ell_{i,j}^{(g_{i,j})} \left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{(T-t_1)-(t_{i,j}-t_1)}}]\right)^{\ell_{i,j}-g_{i,j}} p_{\ell_{i,j}} F'_{(T-t_1)-(t_{i,j}-t_1)}(e^{-\theta})^{g_{i,j}-1} \mathrm{d}t_{i,j}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

此外，利用组 Γ_1、……、Γ_{g_1} 中的脊柱在时间 t_1 之后相互独立这一事实，并在 (3.14) 中使用 (3.15)（以及利用简化式 $(T - t_1) - (t_{i,\ j} - t_1) = T - t_{i,\ j}$），可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}(\Gamma|\tau_1 = t_1, \mathcal{T}_1 = \beta_1, L_{\tau_1} = \ell_1)\\ &= \prod_{j=1}^{g_1} \frac{F'_{T-t_1}(e^{-\theta})}{\mathbb{E}[Z^{(k_j)}_{T-t_1} e^{-\theta Z_{T-t_1}}]} \prod_{i=1}^{m_j} \ell_{i,j}^{(g_{i,j})} \left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t_{i,j}}}]\right)^{\ell_{i,j}-g_{i,j}} p_{\ell_{i,j}} F'_{T-t_{i,j}}(e^{-\theta})^{g_{i,j}-1} \mathrm{d}t_{i,j}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

重新汇总所有指标后，(3.16) 化简为

$$\begin{aligned}&\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\Big(\Gamma\Big|\tau_1 = t_1, \mathcal{T}_1 = \beta_1, L_{\tau_1} = \ell_1\Big)\\ &= \frac{F'_{T-t_1}(e^{-\theta})^{g_1}}{\prod_{j=1}^{g_1} \mathbb{E}[Z^{(k_j)}_{T-t} e^{-\theta Z_{T-t_1}}]} \prod_{i=2}^{m} \ell_i^{(g_i)} \left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{(T-t_1)-(t_i-t_1)}}]\right)^{\ell_i-g_i} p_{\ell_i} F'_{(T-t_1)-(t_i-t_1)}(e^{-\theta})^{g_i-1} \mathrm{d}t_i.\end{aligned} \tag{3.17}$$

现在，根据引理 11，我们有

(3.18)

$$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\Big(\tau_1 \in \mathrm{d}t_1; \mathcal{T}_1 = \beta_1; L_{\tau_1} = \ell_1\Big) = \ell_1^{(g_1)} \left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t_1}}]\right)^{\ell_1-g_1} p_\ell \frac{\prod_{i=1}^{g_1} \mathbb{E}[Z^{(k_i)}_{T-t_1} e^{-\theta Z_{T-t_1}}]}{\mathbb{E}[Z^{(k)}_T e^{-\theta Z_T}]} \frac{F'_T(e^{-\theta})}{F'_{T-t_1}(e^{-\theta})} r \mathrm{d}t_1.$$

将 (3.17) 和 (3.18) 相乘，并利用 Γ的定义，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\Big(\tau_1 \in \mathrm{d}t_1, \dots, \tau_m \in \mathrm{d}t_m, \mathcal{T}(\xi) = (\beta_0, \dots, \beta_m), L_{\tau_1} = \ell_1, \dots, L_{\tau_m} = \ell_m\Big)\\ &= \frac{F_T'(e^{-\theta})}{\mathbb{E}[Z_T^{(k)} e^{-\theta Z_T}]} \prod_{i=1}^{m} \ell_i^{(g_i)} \left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t_i}}]\right)^{\ell_i - g_i} p_{\ell_i} F'_{T-t_i}(e^{-\theta})^{g_i - 1} \mathrm{d}t_i, \end{aligned} \tag{3.19}$$

如所需。

□

注释 2. 我们指出，引理 12 的一个推论是，给定大小为 g_i 的分裂发生在时间 t_i，此时出生的规模服从概率质量函数$\ell \mapsto \ell^{(g)} \left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{\ell - g} p_\ell / \mathbb{E}[\mathbb{E}[L^{(g)} e^{-\theta Z_{T-t}}]^{L-g}]$。特别地，在 $g = 1$的情况下，我们看到脊柱外出生（即出生后所有脊柱都跟随同一个粒子）服从分布
$\ell \mapsto \ell \left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t_i}}]\right)^{\ell - 1} p_\ell / \mathbb{E}[L \mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]^{L-1}]$。

注释 3. 我们还注意到，对 ℓ_i 求和可以得到引理 12 的以下投影版本：

$$\begin{aligned}&\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\Big(\tau_1 \in \mathrm{d}t_1, \dots, \tau_m \in \mathrm{d}t_m, \mathcal{T}(\xi) = (\beta_0, \dots, \beta_m)\Big)\\ &= \frac{F_T'(e^{-\theta})}{\mathbb{E}[Z_T^{(k)} e^{-\theta Z_T}]} \prod_{i=1}^{m} \mathbb{E}[L^{(g_i)} \left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t_i}}]\right)^{L - g_i}] F'_{T-t_i}(e^{-\theta})^{g_i - 1} \mathrm{d}t_i. \end{aligned} \tag{3.20}$$

最后，迄今为止的结果已详细描述了 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$, 下的脊粒子。在本节最后一个引理中，我们将描述 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$, 下非脊粒子的行为。

引理 13. 在 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$, 下，非脊粒子的行为独立于其他粒子，也独立于过程的历史。此外，在时间 t，任何非脊粒子的行为都如同初始祖先在测度 $\mathbb{P}_{\theta,T-t}$ 的副本下的行为；该测度定义于 (2.1)。

特别地，在 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$, 下，时间 t 的非脊粒子以速率 e

$$r \frac{\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{L}\right]}{\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]},$$

并且，已知它们在时间 t 分枝时，其后代分布为

$$\mathbb{P}_{\theta,T}(L(t) = \ell) = p_\ell \frac{\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{\ell}}{\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]\right)^{L}\right]}.$$

证明。设 v 是一个在时间 t 存活的非脊粒子。那么，$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\, T}$, 相对于 $\mathbb{P}$ （定义于 (2.3)）的拉东-尼科迪姆导数可写为

$$\frac{\mathbf{1}_{A_{k,T}} \left(\prod_{i=1}^{k} \prod_{v \prec \xi_T^{(i)}} L_v\right) e^{-\theta Z_T}}{\mathbb{E}^{(k)}\left[Z_T^{(k)} e^{-\theta Z_T}\right]} = e^{-\theta Z_T^v} \frac{\mathbf{1}_{A_{k,T}} \left(\prod_{i=1}^{k} \prod_{v \prec \xi_T^{(i)}} L_v\right) e^{-\theta (Z_T - Z_T^v)}}{\mathbb{E}^{(k)}\left[Z_T^{(k)} e^{-\theta Z_T}\right]},$$

其中，Z_T^v 表示在时间 t 仍存活且由 v繁衍而来的粒子数。现在，在 $\mathbb{P}$条件下，由于 v 在时间 t不携带任何标记，随机变量（$Z_T - Z_T^v$）和 $\mathbf{1}_{A_{k,\ T}} \left(\prod_{i=1}^{k} \prod_{v \prec \xi_T^{(i)}} L_v\right)$ 彼此独立于

粒子 v 和 在 $[t,T]$期间 v的行为。由此可写为 e

$$\frac{\mathbf{1}_{A_{k,T}}\left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{v\prec\xi_T^{(i)}}L_v\right)e^{-\theta Z_T}}{\mathbb{E}^{(k)}\left[Z_T^{(k)}e^{-\theta Z_T}\right]}=e^{-\theta Z_T^v}Q_T^{(v)},$$

其中， $Q_T^{(v)}$ 是一个随机变量，与 v 以及 v的后代相互独立。根据分枝性质，在 $\mathbb{P}$下， Z_T^v的分布与 Z_{T-t}相同。因此，在 $\mathbb{Q}_{\theta\,T,}^{(k)}$ 下，非脊粒子 v在时间 t的行为独立于系统中的其他粒子，且其行为受到指数因子 $e^{-\theta Z_T^v}$的倾斜。简言之， v的行为与在一份测度$\mathbb{P}_{\theta,\ T-t}$下的初始祖先相同。

因此，为了描述 v 在时间 t的分枝，我们只需描述一份$\mathbb{P}_{\theta,\ T}$下初始祖先的分枝。（此后，我们可根据需要将 T替换为 $T-t$。）

现在注意，若 $\Gamma(h,\ell)$是事件的示性函数，表示初始祖先在时间区间 $[0,h)$内死亡，且有 ℓ 个后代，那么根据测度变换$\mathbb{P}_{\theta,\ T}$ 的定义（2.1），我们有

$$\mathbb{P}_{\theta,T}(\Gamma(h,\ell)):=\frac{\mathbb{P}[\Gamma(h,\ell)e^{-\theta Z_T}]}{\mathbb{P}[e^{-\theta Z_T}]} \tag{3.21}$$

当 h 较小时，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\Gamma(h,\ell)e^{-\theta Z_T}]&=rhp_\ell(h+o(h))\mathbb{P}[e^{-\theta Z_T}|\Gamma(h,\ell)]\\&=rhp_\ell(h+o(h))\mathbb{P}[e^{-\theta Z_{T-h}}]^\ell\\&=rhp_\ell\mathbb{P}[e^{-\theta Z_T}]^\ell+o(h).\end{aligned}$$

将其代入（3.21），可得 $\mathbb{P}_{\theta,\ T}(\Gamma(h,\ell))=rhp_\ell\mathbb{P}[e^{-\theta Z_T}]^\ell/\mathbb{P}[e^{-\theta Z_T}]+o(h)$。

由于在 $\mathbb{P}_{\theta,\ T}$ 下，时间 t 的粒子相互独立地活动，且其行为如同处于 $\mathbb{P}_{\theta,\ T-t}$ 的一个独立副本下，因此在时间 t 分裂成 ℓ 个粒子的速率为 $rp_\ell\mathbb{P}[e^{-\theta Z_{T-t}}]^\ell/\mathbb{P}[e^{-\theta Z_{T-t}}]$。重新整理，使该量与关于 ℓ 的概率质量函数成正比，即可得到所述的分枝率和概率。□

3.2. 子种群规模。稍后我们需要了解在 $\mathbb{Q}_{\theta\,T}^{(k)}$， 下从脊柱分出的子种群规模。

假设一个非脊粒子 v 在时间 t 存活，且 Z_T^v 表示 v 在时间 T 存活的后代数量，那么根据引理 13 和定义（2.1），我们有

$$\mathbb{Q}_{\theta,T}^{(k)}[e^{-\phi Z_T^v}|\mathcal{F}_t]=\mathbb{P}_{\theta,T-t}[e^{-\phi Z_{T-t}}]=\frac{\mathbb{E}[e^{-(\phi+\theta)Z_{T-t}}]}{\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]}. \tag{3.22}$$

类似地，若粒子 v 在时间 t 存活并携带 j 条脊柱，且 Z_T^v 表示在时间 T存活的 v 的后代数量，那么根据引理 2 和 (2.5)，可得

$$\mathbb{Q}_{\theta,T}^{(k)}[e^{-\phi Z_T^v}|\mathcal{F}_t^{(k)}]=\mathbb{Q}_{\theta,T-t}^{(j)}[e^{-\phi Z_{T-t}}]=\frac{\mathbb{E}[Z_{T-t}^{(j)}\,e^{-(\phi+\theta)Z_{T-t}}]}{\mathbb{E}[Z_{T-t}^{(j)}\,e^{-\theta Z_{T-t}}]}.$$

特别地，从一条在时间 t 开始的脊柱分支（$k=1$）产生的出生数（加上脊柱本身）的拉普拉斯变换为

$$\frac{\mathbb{E}[Z_{T-t}\,e^{-(\phi+\theta)Z_{T-t}}]}{\mathbb{E}[Z_{T-t}\,e^{-\theta Z_{T-t}}]}. \tag{3.23}$$

此外，由于我们观察到，任一脊粒子的出生率及其相应的后代分布均不取决于跟随它的脊柱的实际数量，因此，对于在时间段 $[T-t,T]$ 内从任一脊柱分支产生的后代数量，上述表达式保持不变。

3.3. 祖先树的谱系与种群分解。现在我们定义脊柱外的子种群。首先将脊树分解为谱系。回顾一下，与 k 脊柱相关的分裂时间$\tau_1<\ldots<\tau_m$，是指携带若干脊柱的粒子死亡，且这些脊柱并非都沿着同一个子代延续的时刻。基于此，我们现在定义脊柱的分离时刻。定义 $\varsigma_1:=0$，并对 $1\le j\le k-1$，将（$j+1$）th 的分离时刻 ς_{j+1} 定义为（$j+1$）th 脊柱与脊柱 1、.....、j分离的首次时刻，即

$$\varsigma_{j+1}:=\inf\{t\ge 0:\xi_t^{(j+1)}\neq\xi_t^{(i)}\text{ for all }1\le i\le j\}. \tag{3.24}$$

注意，对于所有 $j\ge 1$，ς_{j+1} 都等于某个 τ_i。事实上，若 g_i 是时刻 τ_i发生的分裂的大小，则恰好有 g_i-1 个元素 $j\in\{1,\ldots,k\}$ 满足 $\varsigma_j=\tau_i$。

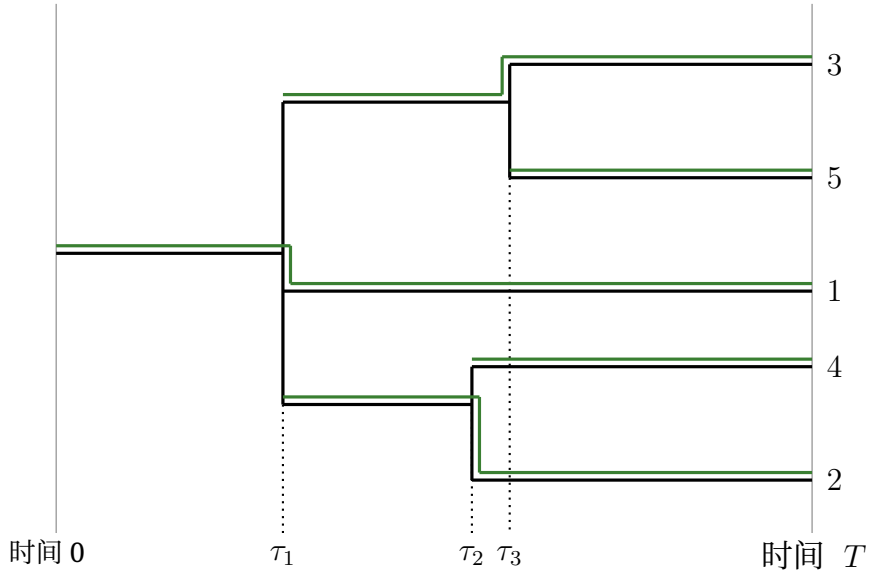

FIGURE 2. 将脊树分解为各个谱系。利用 (3.24)，可知此处的分离时刻为 $\varsigma_1=0,\varsigma_2=\tau_1$, $\varsigma_3=\tau_1,\varsigma_4=\tau_2,\varsigma_5=\tau_3$)。

有了分离时刻，我们便可将脊柱的整个祖先树分解为 j个谱系，其中谱系 j 的长度为 $T-\varsigma_j$。因此，树的总长度为 $kT-\sum_{j=1}^k\varsigma_j$。这种谱系分解使我们能够将时间 T的整个种群分解开来。先给出一个非正式的定义，我们定义

$$\mathcal{Z}_{T,j}:=\{u\in\mathcal{Z}_T:u\text{ is a descendant of a birth off the spine of the }j^{\text{th}}\text{ lineage}\}.$$

现在给出一个更精确的定义。若一个携带脊柱的粒子死亡时，其死亡事件是在脊柱之外发生的一次出生，即该粒子死亡时，它所携带的所有脊柱都沿着该粒子的同一个子代延续，则称该粒子为非分裂粒子。现在定义，对于 $1\le j\le k-1$, $\mathcal{Z}_{T,\ j+1}$ 表示时间 T的粒子集合（不包括 $\xi_T^{(j+1)}$）；这些粒子是 $\xi_T^{(j+1)}$ 的某个非分裂祖先的后代，而该祖先不是任何一个 $\xi_T^{(1)},\ldots,\xi_T^{(j)}$ 的祖先，也就是说

$$\mathcal{Z}_{T,\ j+1}:=\{u\in\mathcal{Z}_T-\{\xi_T^{(j+1)}\}:\ \exists t,\ \exists v\in\mathcal{Z}_t\text{ 非分裂：}\ v\prec u,\ v\prec\xi_T^{(j+1)},\ v\not\prec\xi_T^{(i)}\ \forall 1\le i\le j\}.$$

˜ ˜现在我们通过令$\mathcal{Z}_{T,\,1}$、.....、$\mathcal{Z}_{T,\,m}$来定义

$\tilde{\mathcal{Z}}_{T,j} := \{u \in \mathcal{Z}_T :$ u 是由分裂事件 $\tau_j\}$ 中诞生的一个非脊粒子的后代 .

我们知道，在时间 T 存活的每个粒子，要么是脊柱粒子，要么是脊柱上某次出生的后代，要么是在某次分裂事件中诞生的非脊粒子的后代。这将时间 T 的种群分解为

$$\mathcal{Z}_T := \{\xi_T^{(1)}, \ldots, \xi_T^{(k)}\} \cup \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{Z}_{T,j} \cup \bigcup_{j=1}^{m} \tilde{\mathcal{Z}}_{T,j}.$$

˜ ˜因此，若 $Z_{T,\,j}$:=#$\mathcal{Z}_{T,\,j}$ 以及 $Z_{T,\,j}$:= #$\mathcal{Z}_{T,\,j}$ 表示基数，则有

$$Z_T = k + \sum_{j=1}^{k} Z_{T,j} + \sum_{j=1}^{m} \tilde{Z}_{T,j}.$$

此外，在给定分离时刻的条件下，利用 (3.22) 和 (3.23)，可以很容易地写出该分解中各个亚种群的拉普拉斯变换。

4. Uniform sampling for critical Galton-Watson trees in the regularly varyingregime

在本节中，只要 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 是依赖于实数或整数值参数的函数，我们就使用记号

$$A(\lambda) \sim B(\lambda) \qquad \text{as} \quad \lambda \to \infty$$

表示 $\lim_{\lambda\to\infty} B(\lambda)/A(\lambda) = 1$。考虑一个取值于 $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \ldots\}$ 的随机变量 L，其分布与 $L_\emptyset$ 相同，并回顾 Z 表示一个临界 Galton-Watson过程，其后代分布由 L 给出。换言之，

$$p_n = \mathbb{P}(L = n) \quad \text{for } n \geq 0, \qquad \mathbb{E}[L] = \sum_{j\geq 0} j p_j = 1 \qquad \text{and} \qquad f(s) = \mathbb{E}[s^L].$$

回顾一 下我们假设 (H1) 成立，即 $p_0 > 0$，并且对于 $\alpha \in (1, 2]$ ，

$$f(s) = s + (1-s)^\alpha \ell\left(\frac{1}{1-s}\right),$$

其中 ℓ 是在 ∞ 处的缓变函数。 f 的渐近行为为 k 较大时后代概率 p_k 的行为提供了足够的信息。

事实上，首先利用几何级数并交换求和次序，我们可以观察到

$$1 - f(s) = \sum_{j\geq 1} p_j(1 - s^j) = (1-s)\sum_{j\geq 1} p_j \sum_{k=0}^{j-1} s^k = (1-s)\sum_{k\geq 0} \overline{p}_k s^k,$$

其中 $\overline{p}_j := \sum_{i>j} p_i$。

利用类似的论证可得下方的最后一个等式:

$$\frac{f(s) - s}{1-s} = 1 - \frac{1 - f(s)}{1-s} = 1 - \sum_{k\geq 0} \overline{p}_k s^k = (1-s)\sum_{k\geq 0} \overline{\overline{p}}_k s^k,$$

其中 $\overline{\overline{p}}_k := \sum_{j>k} \overline{p}_j$。

换言之，我们有

$$(1-s)^{\alpha-2}\ell\left(\frac{1}{1-s}\right)=\frac{f(s)-s}{(1-s)^2}=\sum_{k\geq 0}\overline{\overline{p}}_k s^k.$$

因此，关于幂级数的 Karamata的Tauberian定理（例如参见 Bingham、Goldie和Teugels [9] 中的推论 1.7.3）使我们能够在 $\alpha\in(1,2)$ 的情况下推导出

$$\overline{\overline{p}}_k\sim\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}k^{1-\alpha}\ell(k),\qquad \text{as}\quad k\to\infty, \tag{4.1}$$

以及在 $\alpha=2$ 的情况下

$$\sum_{j=0}^{k}\overline{\overline{p}}_j\sim\ell(k)\qquad \text{as}\quad k\to\infty.$$

现在，由于序列 $\{\overline{\overline{p}}_k\}_{k\geq 0}$ 是单调的，根据单调密度定理（例如参见 [9] 中的定理 1.7.2），我们在 $\alpha=2$ 的情况下得到

$$\overline{\overline{p}}_k\sim k^{-1}\ell(k)\qquad \text{as}\quad k\to\infty. \tag{4.2}$$

综合 (4.1) 和 (4.2)，我们得到

$$\overline{\overline{p}}_k\sim\tilde{Q}_\alpha k^{1-\alpha}\ell(k)\qquad \text{as}\quad k\to\infty, \tag{4.3}$$

其中 $\tilde{Q}_\alpha:=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}$ 在 $\alpha\in(1,2)$ 的情况下，而 $Q_2:=1$。

由于序列 $\{\overline{p}_k\}_{k\geq 0}$ 单调递增，根据单调密度定理（例如参见 [9] 中的定理 1.7.2），在 $\alpha\in(1,2]$ 的情况下，我们得到

$$\overline{p}_k\sim Q_\alpha k^{-\alpha}\ell(k),\qquad \text{as}\quad k\to\infty.$$

其中 $Q_\alpha=(\alpha-1)\,\tilde{Q}_\alpha$，因此当 $\alpha\in(1,2)$ 时，$Q_\alpha=\frac{\alpha-1}{\Gamma(2-\alpha)}$，而当 $\alpha=2$ 时，$Q_\alpha=1$。

我们的假设（H1）还意味着生存概率在无穷远处正则变，且具有下文推导出的精确指数。回顾一下，Z_t 的矩母函数（$t>0$ 时）记为 $F_t(s)$。因此，根据后向Kolmogorov方程，它满足

$$\int_s^{F_t(s)}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)-y}=rt.$$

当 $s=0$ 时，显然

$$F(t):=F_t(0)=\mathbb{P}_1(Z_t=0)=\mathbb{P}_1(T_0\leq t),$$

其中 $T_0=\inf\{s:\ Z_s=0\}$，因此

$$\int_0^{F(t)}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)-y}=rt.$$

我们还引入

$$V(x):=\int_0^{1-1/x}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)-y},\qquad \text{for}\quad x\geq 1,$$

它是递增且凹的，并记 R 为其反函数，该反函数是凸且递增的（参见 Pakes [32] 中的引理 2.1）。在我们的假设下，函数 V 可以改写如下

$$V(x)=\int_1^x\frac{\mathrm{d}u}{u^{2-\alpha}\ell(u)}.$$

Foll沿用 [9], 中命题 1.5.8 证明中的相同思路，我们可以看出 t

$$(\alpha-1)V(x)\sim\frac{x^{\alpha-1}}{\ell(x)}=x^{\alpha-1}\ell_1(x),\qquad \text{as}\quad x\to\infty,$$

其中

$$\ell_1(x):=\frac{1}{\ell(x)} \tag{4.4}$$

也是在 ∞ 处的缓变函数。由 [9], 中的定理 1.5.12 可知， R 在无穷远处以 $1/(\alpha-1)$ 为指数正则变，即

$$R(x)\sim x^{\frac{1}{\alpha-1}}\ell_2(x),\qquad \text{as}\quad x\to\infty,$$

其中 ℓ_2 是另一个在 ∞ 处的缓变函数。因此，在假设（H1）下，我们推得存活概率 $\overline{F}(t):=\mathbb{P}(Z_t>0)$ 满足以下恒等式

$$(\alpha-1)V\left(\frac{1}{\overline{F}(t)}\right)=r(\alpha-1)t=V(R((\alpha-1)rt)),$$

这意味着

$$\overline{F}(t)\sim\frac{1}{R((\alpha-1)rt)}=c_{\alpha,r}\frac{t^{-1/(\alpha-1)}}{\ell_2(t)},\qquad \text{as}\quad t\to\infty, \tag{4.5}$$

其中 $c_{\alpha,\ r}=((\alpha-1)r)^{-1/(\alpha-1)}$，并且

$$\mathbb{E}\left[e^{-\theta\overline{F}(t)Z_t}\middle|Z_t>0\right]\xrightarrow[t\to\infty]{}1-\left(1+\theta^{1-\alpha}\right)^{-1/(\alpha-1)}. \tag{4.6}$$

我们将拉普拉斯变换满足如下条件的随机变量记为 $W_{\alpha-1}$

$$\mathbb{E}\left[e^{-\theta W_{\alpha-1}}\right]=1-\left(1+\theta^{1-\alpha}\right)^{-1/(\alpha-1)}.$$

注意，当 $\alpha=2$ 时，极限随机变量 W_1 是参数为 1 的指数随机变量，无论 σ^2 是有限还是无限。

ℓ_1 与 ℓ_2 之间存在一种有趣的关系，这在后文中会非常有用。为描述这种关系，我们引入 ℓ^*（x）的德布鲁因共轭：= （ℓ_1（x））$^{\frac{1}{\alpha-1}}$，也就是说，一个满足以下条件的缓变函数 $\ell^\sharp$

$$\ell^*(x)\ell^\sharp(x\ell^*(x))\to1\qquad\text{and}\qquad\ell^\sharp(x)\ell^*(x\ell^\sharp(x))\to1\qquad\text{as}\quad x\to\infty. \tag{4.7}$$

此外，当 $x\to\infty$ 时， $\ell^{\sharp\sharp}$（x） $\sim\ell^*$（x）（见 [9] 中的定理 1.5.13）。根据 [9], 中的命题 1.5.15，我们有

$$\ell_2(x)\sim\ell^\sharp(x^{1/(\alpha-1)})\qquad\text{as}\quad x\to\infty. \tag{4.8}$$

例如，如果 $\ell(x)\to q$，当 $x\to\infty$ 时，我们观察到 $\ell^*(x)$ 在 $x\to\infty$ 时趋于 $q^{-1/(\alpha-1)}$；此外，$\ell_2(x)$ 在 $x\to\infty$ 时趋于 $q^{1/(\alpha-1)}$。

4.1. $W_{\alpha-1}$ 的性质。当 $\alpha = 2$ 时，不难验证 W_1 具有所有正阶矩。更确切地说，对于 $k \geq 1$，我们有

$$\mathbb{E}\left[W_1^k\right] = k! \qquad \text{and} \qquad \mathbb{E}\left[W_1^k e^{-\theta W_1}\right] = \frac{k!}{(1+\theta)^{k+1}}. \tag{4.9}$$

在设定 $\alpha \in (1,2)$ 下， $W_{\alpha-1}$ 的补偿矩更加复杂。为计算这些补偿矩，记

$$f_\alpha(\theta) := \mathbb{E}[e^{-\theta W_{\alpha-1}}] = g_\alpha(h_\alpha(\theta))$$

其中 $g_\alpha(\theta) = 1 - (1+\theta)^{-\frac{1}{\alpha-1}}$，且 $h_\alpha(\theta) = \theta^{1-\alpha}$。我们可以使用 Fa`a di Bruno 公式（ [23] 的公式 (2)）计算 $f_\alpha(\theta)$ 的导数。该公式表明，对于充分可微的函数 f 和 g ，有

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\theta^k} g(h(\theta)) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_k} g^{(\#\pi)}(h(\theta)) \prod_{\Gamma \in \pi} h^{(\#\Gamma)}(\theta),$$

其中求和遍历 $\{1, \ldots, k\}$ 的所有集合划分 π；给定一个划分 π 后，乘积遍历 π 的所有块 Γ 。

事实上，注意到 g_α 和 h_α 的 j^{th} 阶导数为

$$g_\alpha^{(j)}(\theta) = (-1)^{j-1}(1+\theta)^{-\frac{1}{\alpha-1}-j} \prod_{i=1}^{j} \left(\frac{1}{\alpha-1} + i - 1\right),$$

and

$$h_\alpha^{(j)}(\theta) = (-1)^j \theta^{1-\alpha-j} \prod_{i=1}^{j} (\alpha + i - 2).$$

由 Fa`a di Bruno 公式可得

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\theta^k} f_\alpha(\theta) = \sum (-1)^{\#\pi-1}(1+\theta^{1-\alpha})^{-\frac{1}{\alpha-1}-\#\pi} \prod_{i=1}^{\#\pi} \left(\frac{1}{\alpha-1} + i - 1\right) \prod_{\Gamma \in \pi} \left\{(-1)^{\#\Gamma} \theta^{1-\alpha-\#\Gamma} \prod_{i=1}^{\#\Gamma} (\alpha + i - 2)\right\},$$

利用 $\sum_{\Gamma \in \pi} \#\Gamma \overset{\pi \in \mathcal{P}_k}{=} k$，可简化为

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\theta^k} f_\alpha(\theta) = (-1)^{k-1}\theta^{-k} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_k} (-1)^{\#\pi}(1+\theta^{1-\alpha})^{-\frac{1}{\alpha-1}-\#\pi} \theta^{(1-\alpha)\#\pi} \prod_{i=1}^{\#\pi} \left(\frac{1}{\alpha-1} + i - 1\right) \prod_{\Gamma \in \pi} \prod_{i=1}^{\#\Gamma} (\alpha + i - 2). \tag{4.10}$$

由此可得，一阶补偿矩为

$$\mathbb{E}\left[W_{\alpha-1} e^{-\theta W_{\alpha-1}}\right] = -f'_\alpha(\theta) = \frac{1}{(1+\theta^{\alpha-1})^{1+1/(\alpha-1)}}, \tag{4.11}$$

特别地， $\mathbb{E}[W_{\alpha-1}] = 1$。对于二阶补偿矩，我们得到

$$\mathbb{E}\left[W_{\alpha-1}^2 e^{-\theta W_{\alpha-1}}\right] = f''_\alpha(\theta) = \frac{\alpha}{(1+\theta^{\alpha-1})^{2+1/(\alpha-1)}\theta^{2-\alpha}}.$$

最后，三阶补偿矩满足

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[W_{\alpha-1}^3 e^{-\theta W_{\alpha-1}}\right] &= -f_\alpha^{(3)}(\theta) = \frac{\alpha}{(1+\theta^{\alpha-1})^{2+1/(\alpha-1)}} \left(\frac{2\alpha-1}{(1+\theta^{\alpha-1})\theta^{2(2-\alpha)}} + \frac{2-\alpha}{\theta^{3-\alpha}}\right) \\ &= \frac{\alpha}{\theta^2(1+\theta^{\alpha-1})^{3+1/(\alpha-1)}} \left((\alpha+1)\theta^{2(\alpha-1)} + (2-\alpha)\theta^{\alpha-1}\right).\end{aligned}$$

我们在此指出，只要 $\alpha \in (1,2)$，$\mathbb{E}[W_{\alpha-1}^2]$ 就是无穷大，因此对于 $k \geq 2$，所有更高阶矩 $\mathbb{E}[W_{\alpha-1}^k]$ 也都是无穷大。不过，我们可以研究 $\mathbb{E}[W_{\alpha-1}^k e^{-\theta W_{\alpha-1}}]$ 在 $\theta \to 0$ 时的渐近行为。事实上，由 (4.10) 可知，这些渐近行为集中于使幂次 $(1-\alpha)\#\pi$ 最小的划分，即将 $\{1,\dots,k\}$ 划分为 k 个单元素集合的划分。特别地，可以证明

$$\mathbb{E}\left[W_{\alpha-1}^k e^{-\theta W_{\alpha-1}}\right] \sim \alpha(k-1-\alpha)\cdots(2-\alpha)\theta^{\alpha-k} = \alpha\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}\theta^{\alpha-k} \qquad \text{as} \quad \theta \to 0. \tag{4.12}$$

4.2. 正则变动情形下的临界伽尔顿-沃森过程。下文需要了解我们的伽尔顿-沃森过程在较大时间下的阶乘补偿矩。为在本节开始计算这些量，我们先指出，由 (4.5) 可得下式第二行，由 (4.6) 可得第三行；对于 $\rho \in [0,1)$，我们有

$$\begin{aligned} 1-\mathbb{E}\left[e^{-\theta\overline{F}(T)Z_{T(1-\rho)}}\right] &= \overline{F}(T(1-\rho))\mathbb{E}\left[1-e^{-\theta\frac{\overline{F}(T)}{\overline{F}(T(1-\rho))}\overline{F}(T(1-\rho))Z_{T(1-\rho)}}\middle| Z_{T(1-\rho)}>0\right] \\ &\sim (1-\rho)^{-\frac{1}{\alpha-1}}\overline{F}(T)\mathbb{E}\left[1-e^{-\theta(1-\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}}\overline{F}(T(1-\rho))Z_{T(1-\rho)}}\middle| Z_{T(1-\rho)}>0\right] \\ &\sim \frac{\overline{F}(T)}{(1-\rho+\theta^{-(\alpha-1)})^{\frac{1}{\alpha-1}}} \end{aligned} \tag{4.13}$$

当 $T \to \infty$时。我们指出，上述各情形中的相应收敛均由单调收敛定理得到。

回忆一下，对于 $n \geq k$，$n^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$。那么对于 $k \geq 1$ 和 $\rho \in [0,1)$，由 (4.6) 可得

$$\mathbb{E}\left[Z_{T(1-\rho)}^{(k)} e^{-\theta\overline{F}(T)Z_{T(1-\rho)}}\right] \sim \overline{F}(T(1-\rho))^{-(k-1)}\mathbb{E}\left[W_{\alpha-1}^k e^{-\theta(1-\rho)^{1/(\alpha-1)}W_{\alpha-1}}\right], \tag{4.14}$$

当 T 趋于无穷大时。

W当 $\alpha = 2$ 时，前面的渐近式写起来要简单得多。事实上，当 T 足够大时，我们有

$$\mathbb{E}\left[Z_{T(1-\rho)}^{(k)} e^{-\theta\overline{F}(T)Z_{T(1-\rho)}}\right] \sim r^{k-1}(1-\rho)^{k-1}T^{k-1}\ell_3^{k-1}(T)\frac{k!}{(1+\theta(1-\rho))^{k+1}},$$

and

$$\mathbb{E}\left[Z_{(1-p)T}^{(k)} e^{-\theta\overline{F}(T)Z_{(1-p)T}}\middle| Z_{(1-p)T} \geq k\right] \sim r^k(1-\rho)^k T^k \ell_3^k(T)\frac{k!}{(1+\theta(1-p))^{k+1}},$$

其中 $\ell_3(T) = \frac{1}{\ell_2(T)}$。回顾 $\mathbb{Q}_{\theta T,}^{(k)}$ 的定义 (2.3)，我们研究 Z_T 在重标度 $\theta \to \theta\overline{F}(T)$ 下的渐近行为。由满足 $\rho = 0$ 时的渐近式 (4.14)，可得

$$\mathbb{Q}_{\theta\overline{F}(T),T}^{(k)}\left[e^{-\varphi\overline{F}(T)Z_T}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[Z_T^{(k)}e^{-(\theta+\varphi)\overline{F}(T)Z_T}\right]}{\mathbb{E}\left[Z_T^{(k)}e^{-\theta\overline{F}(T)Z_T}\right]} \xrightarrow[T\to\infty]{} \frac{\mathbb{E}\left[W_{\alpha-1}^k e^{-(\theta+\varphi)W_{\alpha-1}}\right]}{\mathbb{E}\left[W_{\alpha-1}^k e^{-\theta W_{\alpha-1}}\right]}. \tag{4.15}$$

特别是，单条脊柱之外的种群满足

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{\theta\overline{F}(T),T}^{(1)}\left[e^{-\varphi\overline{F}(T)Z_T}\right] &\xrightarrow[T\to\infty]{} \frac{\mathbb{E}[W_{\alpha-1}e^{-(\theta+\varphi)W_{\alpha-1}}]}{\mathbb{E}[W_{\alpha-1}e^{-\theta W_{\alpha-1}}]} \\ &= \left(\frac{1+\theta^{\alpha-1}}{1+(\theta+\varphi)^{\alpha-1}}\right)^{1+1/(\alpha-1)}. \end{aligned}$$

此外，s 沿长度为 $(1-\rho)T$ 且具有 $\rho \in [0,1)$ 的脊柱分支的子种群满足

$$\mathbb{Q}^{(1)}_{\theta\overline{F}(T),T}\left[e^{-\varphi\overline{F}(T)Z_{(1-\rho)T}}\right] \xrightarrow[T\to\infty]{} \left(\frac{1+\theta^{\alpha-1}(1-\rho)}{1+(\theta+\varphi)^{\alpha-1}(1-\rho)}\right)^{1+1/(\alpha-1)}.$$

当 $\alpha = 2$ 时，我们有一个显式表达式，对于 $k \geq 1$，即

$$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}\left[e^{-\varphi\overline{F}(T)Z_T}\right] \xrightarrow[T\to\infty]{} \frac{\mathbb{E}\left[W_1^k e^{-(\theta+\varphi)W_1}\right]}{\mathbb{E}\left[W_1^k e^{-\theta W_1}\right]} = \left(\frac{1+\theta}{1+\theta+\varphi}\right)^{k+1},$$

其中，前述渐近式的右侧不过是参数为 $k+1$ 和 $1+\theta$的伽马随机变量的拉普拉斯指数，在此记作 $\Gamma_{k+1,\ 1+\theta}$。换言之，当 $\alpha = 2$时，在 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}$下，$\overline{F}(T)Z_T$趋于 $\Gamma_{k+1,\ 1+\theta}$，其中采用一个新的概率测度，记为 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,\ \infty}$。也就是说，它是 $k+1$ 个独立的、参数为 $1+\theta$的 $e_{1+\theta}$ 指数随机变量之和。特别地，单个脊柱分支流出的质量服从$\Gamma_{2,\ 1+\theta}$。

4.3. 大量后代。

引理 14. 若 L 是满足（H1）的后代变量，则当 $\lambda \to 0$ 时，我们有

$$\mathbb{E}[Le^{-\lambda L}] \sim 1. \tag{4.16}$$

更一般地，对于 $g = 2$、$\alpha = 2$ 中的任意一个，或对于任意的 $g \geq 2$ 和 $\alpha \in (1,2],$，我们有

$$\mathbb{E}[L^{(g)}e^{-\lambda L}] \sim \frac{\Gamma(g-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)}\lambda^{\alpha-g}\ell\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{4.17}$$

当 $\lambda \to 0$ 时。

证明。等式 (4.16) 是由以下事实及单调收敛定理推得的：$\mathbb{E}[L] = 1$。

至于 (4.17)，假设（H1）表明 $f(s) = \mathbb{E}[s^L]$ 具有如下形式：$f(s) = s + (1-s)^{\alpha}\ell\left(\frac{1}{1-s}\right)$，当 $s \to 1$ 时，其中 $\ell(\cdot)$ 在 ∞ 处缓变。注意到 f 的每个导数均单调递减，因此根据单调密度定理，只要 $g = 2$、$\alpha = 2$ 或 $g \geq 2$、$\alpha \in (1,2)$，我们就有

$$f^{(g)}(s) := \mathbb{E}[L^{(g)}s^{L-g}] \sim (-1)^g\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-g+1)(1-s)^{\alpha-g}\ell\left(\frac{1}{1-s}\right),$$

如 $s \to 1$。现在令 $s = e^{-\lambda}$，并使用伽马函数的定义。 □

前面的结果推出了以下有用的引理。

引理 15. 对于任意 $\alpha \in (1,2],$，如 $T \to \infty$，我们有

$$\mathbb{E}\left[L\left(\mathbb{E}\left[e^{-\theta\overline{F}(T)Z_{T(1-\rho)}}\right]\right)^{L-1}\right] \sim 1, \tag{4.18}$$

对于 $g = 2$、$\alpha = 2$ 中的任意一个，或者对于任意 $g \geq 2$ 和 $\alpha \in (1,2)$，我们有

$$\mathbb{E}\left[L^{(g)}\left(\mathbb{E}\left[e^{-\theta\overline{F}(T)Z_{T(1-\rho)}}\right]\right)^{L-g}\right] \sim \frac{\Gamma(g-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)}\left(\frac{\overline{F}(T)}{(1-\rho+\theta^{-(\alpha-1)})^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right)^{\alpha-g}\ell_2(T)^{(\alpha-1)}, \tag{4.19}$$

如 $T \to \infty$。

证明。回顾一下，根据 (4.13) $1-\mathbb{E}\left[e^{-\theta\overline{F}(T)Z_{T(1-\rho)}}\right]\sim\lambda_T$其中

$$\lambda_T=\frac{\overline{F}(T)}{(1-\rho+\theta^{-(\alpha-1)})^{\frac{1}{\alpha-1}}}\to 0$$

如 $T\to\infty$。

第一部分（4.18）现在可由（4.16）推出。

至于后一个方程（4.19），我们首先注意到，由（4.17）可得

$$\mathbb{E}\left[L^{(g)}\left(\mathbb{E}\left[e^{-\theta\overline{F}(T)Z_{T(1-\rho)}}\right]\right)^{L-1}\right]\sim\frac{\Gamma(g-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)}\lambda_T^{\alpha-g}\ell\left(\frac{1}{\lambda_T}\right).$$

利用（4.4）、（4.5）、（4.7）和（4.8）进行简单计算可知，$\ell(1/\lambda_T)\sim\ell_2(T)^{(\alpha-1)}$当 $T\to\infty$时成立。结果即得。□

下一个结果说明，在大小为 g 的分裂事件中，后代数量的渐近分布满足$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T)}$ T。

引理 16. 设 $\alpha\in(1,2)$和 $g\geq 2$。令 J 表示在时间 ρT 发生的规模为 g 的分裂事件中的后代数量。那么

$$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}[e^{-\varphi\overline{F}(T)J}|\mathcal{G}^{(k)}_T,\textit{split of size } g \textit{ at time } \rho T]\sim\left(1+\varphi(1-\rho+\theta^{1-\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)^{-(g-\alpha)}.$$

证明。根据注释 2，给定在时间 t 发生规模为 g 的分裂事件，在 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\,T}$，下，后代事件规模的条件分布为 $\ell^{(g)}\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]^{\ell-g}p_\ell/\mathbb{E}[L^{(g)}\mathbb{E}[e^{-\theta Z_{T-t}}]^{L-g}]$。特别地，令 $t=\rho T$，则有

$$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}[e^{-\varphi\overline{F}(T)J}|\mathcal{G}^{(k)}_T,\text{split of size } g \text{ at time } \rho T]\sim\frac{\mathbb{E}[L^{(g)}\mathbb{E}[e^{-\theta\overline{F}(T)Z_{T(1-\rho)}}]^{L-g}e^{-\varphi\overline{F}(T)Z_{T(1-\rho)}}]}{\mathbb{E}[L^{(g)}\mathbb{E}[e^{-\theta\overline{F}(T)Z_{T(1-\rho)}}]^{L-g}]}.$$

现在取 λ_T 如引理 15 的证明中所示，我们有 $\mathbb{E}[e^{-\theta\overline{F}(T)Z_{T(1-\rho)}}]=e^{-(1+o(1))\lambda_T}$，因此

$$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}[e^{-\varphi\overline{F}(T)J}|\mathcal{G}^{(k)}_T,\text{split of size } g \text{ at time } \rho T]\sim\frac{\mathbb{E}[L^{(g)}e^{-(\lambda_T L+\varphi\overline{F}(T))L}]}{\mathbb{E}[L^{(g)}e^{-\lambda_T L}]}.$$

现在利用 (4.17)，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}[e^{-\varphi\overline{F}(T)J}|\mathcal{G}^{(k)}_T,\text{split of size } g \text{ at time } \rho T]&\sim\left(\frac{\lambda_T}{\lambda_T+\varphi\overline{F}(T)}\right)^{g-\alpha}\\&\sim\left(1+\varphi(1-\rho+\theta^{1-\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)^{-(g-\alpha)}.\end{aligned}$$

其中，最后一个公式由使用前一个引理证明中的 λ_T 的定义得到。证明完毕。□

注意，前一个引理指出，$\overline{F}(T)J$ 渐近服从形状参数为 $g-\alpha$、尺度参数为 $(1-\rho+\theta^{1-\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}$ 的伽马随机变量。更明确地说，我们立即得到以下推论。

推论 1. 设 $\alpha\in(1,2)$和 $g\geq 2$。令 J_j 表示在时间 $\rho_j T$发生的规模为g_j 的分裂事件中的后代数。则

$$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}(\overline{F}_T J_j\in\mathrm{d}x|\mathcal{G}^{(k)}_T,\textit{split of size } g_j \textit{ at time } \rho_j T)=\Delta^{\theta}_{g_j,\rho_j}(x)\mathrm{d}x,$$

其中

$$\Delta^{\theta}_{g,\rho}(x) := \Delta^{\theta}_{g,\rho,\alpha,\theta}(x) := \frac{x^{g-\alpha-1}}{\Gamma(g-\alpha)(1-\rho+\theta^{1-\alpha})^{\frac{g-\alpha}{\alpha-1}}} \exp\left\{-\frac{x}{(1-\rho+\theta^{1-\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right\} \tag{4.20}$$

是具有参数 $g-\alpha$ 的伽马随机变量乘以 $\frac{1}{\alpha-1}$ 倍 $(1-\rho+\theta^{1-\alpha})$ 的密度函数。

我们的最终结果揭示了在分裂事件中诞生的非脊柱粒子所产生的子代数量的渐近分布。回想第 3.3 节，$Z_{T,\ j}$ 表示由在 j^{th} 分裂事件 τ_j 中诞生的非脊柱粒子产生的粒子数量。

引理17. 设 $\alpha \in (1,2]$. 那么在 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T)\,T}$ 下，给定 $\overline{F}(T)J_j = x_j$ 时，$\tilde{Z}_{T,\ j}$ 的渐近分布为

$$\begin{aligned}&\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}[e^{-\varphi\overline{F}(T)\tilde{Z}_{T,j}}|\mathcal{G}^{(k)}_T, \textit{split of size } g \textit{ at time } \rho T, \overline{F}(T)J_j = x_j]\\ &\sim \exp\left\{-\left(\frac{1}{(1-\rho_j+(\varphi+\theta)^{1-\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}} - \frac{1}{(1-\rho_j+\theta^{1-\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right)x_j\right\},\end{aligned}$$

无论分裂的规模 g 如何。

证明. 回想一下，不携带脊柱的粒子在时间 t 的行为，就像处于原测度 $\mathbb{P}$ 下，但在 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T)\,T}$ 下受到 $e^{-\theta\overline{F}(T)Z_{T-t}}$ 折扣一样。换言之，若 Y_T 表示一个在时间 t 存活的非脊柱粒子 u 于时间 T 的后代数量，则有

$$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}[e^{-\varphi\overline{F}(T)Y_T}|\mathcal{F}^{(k)}_t] = F_T(e^{-(\theta+\varphi)\overline{F}(T)})/F_T(e^{-\theta\overline{F}(T)}).$$

此外，Y_T与种群的其余部分相互独立。特别地，由于在时间 τ_j 出生了 $\overline{F}^{\,x_j}{}_{(T)} - g$ 个非脊柱粒子，我们有

$$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}[e^{-\varphi\overline{F}(T)\tilde{Z}_{T,j}}|\mathcal{G}^{(k)}_T, \text{split of size } g \text{ at time } \rho T, \overline{F}(T)J_j = x_j] = \left(\frac{F_T(e^{-(\theta+\varphi)\overline{F}(T)})}{F_T(e^{-\theta\overline{F}(T)})}\right)^{\frac{x_j}{\overline{F}(T)}-g}.$$

结论由 (4.13) 立即得出。 □

我们指出，引理17中拉普拉斯变换关于 x 的线性依赖是由分枝性质导致的。

5. Inverting the change of measure

5.1. 在 $\mathbb{Q}^{(k)}{}_{,\theta\overline{F}}{}^{T}{}_{T()}$ 下的祖先树概率。

引理18. 设 $(\beta_0, \ldots, \beta_m)$ 是 $\{1,\ldots,k\}$ 的分裂过程。设 $0 < t_1 < \ldots < t_m < 1$。则

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty} \mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}\Big(\tau_1/T \in \mathrm{d}t_1, \ldots, \tau_m/T \in \mathrm{d}t_m, \mathcal{T}(\xi) = (\beta_0,\ldots,\beta_m)\Big)\\ &= \frac{\prod_{i=1}^m \mathrm{d}t_i}{\mathbb{E}[W^k_{\alpha-1}e^{-\theta W_{\alpha-1}}]} \prod_{i=1}^m \frac{\alpha\Gamma(g_i-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}(1-t_i+\theta^{1-\alpha})^{\frac{g_i-\alpha}{\alpha-1}} \prod_{i=0}^m \theta^{-\alpha(g_i-1)}(\theta^{1-\alpha}+1-t_i)^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}(g_i-1)}.\end{aligned} \tag{5.1}$$

证明. 根据 (3.20)，我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}\Big(\tau_1/T\in \mathrm{d}t_1,\dots,\tau_m/T\in \mathrm{d}Tt_m,\mathcal{T}(\xi)=(\beta_0,\dots,\beta_m)\Big)\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{F_T'(e^{-\theta\overline{F}(T)})}{\mathbb{E}[Z_T^{(k)}e^{-\theta\overline{F}(T)Z_T}]}\prod_{i=1}^m\mathbb{E}\left[L^{(g_i)}\left(\mathbb{E}[e^{-\theta\overline{F}(T)Z_{T(1-t_i)}}]\right)^{L-g_i}\right]p_{\ell_i}F'_{T(1-t_i)}(e^{-\theta})^{g_i-1}.\end{aligned}\tag{5.2}$$

现在根据（4.14），再由（4.11），我们有 $F'_{T\ (1-\rho)}\ (e^{-\theta\overline{F}(T_{\ }})\ \sim(1+\theta^{\alpha-1}(1-\rho))^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}$。结合（4.19）和（4.14）中的渐近式使用这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}\Big(\tau_1/T\in \mathrm{d}t_1,\dots,\tau_m/T\in \mathrm{d}Tt_m,\mathcal{T}(\xi)=(\beta_0,\dots,\beta_m)\Big)\\&=\lim_{T\to\infty}\prod_{i=1}^m\Big(rT\mathrm{d}t_i\Big)\frac{\overline{F}(T)^{(k-1)}}{\mathbb{E}[W_{\alpha-1}^ke^{-\theta W_{\alpha-1}}]}\\&\times\prod_{i=1}^m\frac{\Gamma(g_i-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)}\left(\frac{\overline{F}(T)}{(1-t_i+\theta^{1-\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right)^{\alpha-g_i}\ell_2(T)^{(\alpha-1)}\prod_{i=0}^m(1+\theta^{\alpha-1}(1-\rho))^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}(g_i-1)}.\end{aligned}\tag{5.3}$$

现在我们汇总 T 中的渐近项。回忆（4.5），有 $\overline{F}(T)\ \sim((\alpha-1)r)^{-\frac{1}{\alpha-1}}T^{-\frac{1}{\alpha-1}}\ell_3(T)$。结合这一事实和简单恒等式 $\sum_{i=1}^m(g_i-1)\ =k-1$，我们有

$$T^m\overline{F}(T)^{k-1}\prod_{i=1}^m\overline{F}(T)^{\alpha-g_i}\ell_2(T)^{(\alpha-1)}\sim\frac{1}{((\alpha-1)r)^m}\tag{5.4}$$

当 $T\to\infty$ 时。将（5.4）代入（5.3），并使用恒等式 $(\alpha-1)\Gamma(-\alpha)\ =\Gamma(2-\alpha)/\alpha$，我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}\Big(\tau_1/T\in \mathrm{d}t_1,\dots,\tau_m/T\in \mathrm{d}Tt_m,\mathcal{T}(\xi)=(\beta_0,\dots,\beta_m)\Big)\\&=\frac{\prod_{i=1}^m\mathrm{d}t_i}{\mathbb{E}[W_{\alpha-1}^ke^{-\theta W_{\alpha-1}}]}\prod_{i=1}^m\frac{\alpha\Gamma(g_i-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}(1-t_i+\theta^{1-\alpha})^{\frac{g_i-\alpha}{\alpha-1}}\prod_{i=0}^m\theta^{-\alpha(g_i-1)}(\theta^{1-\alpha}+1-t_i)^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}(g_i-1)}.\end{aligned}\tag{5.5}$$

将乘积中的各项合并，并利用恒等式 $\sum_{i=1}^m(g_i-1)\ =k-1$，即可得到该结果。 □

结合前一个结果和推论 1，我们得到以下结果。

推论 2。我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}\left(\frac{\tau_1}{T}\in \mathrm{d}t_1,\dots,\frac{\tau_m}{T}\in \mathrm{d}t_m,\mathcal{T}(\xi)=(\beta_0,\dots,\beta_m),\overline{F}(T)L_{\tau_1}\in \mathrm{d}x_1,\dots,\overline{F}(T)L_{\tau_m}\in \mathrm{d}x_m\right)\\&=\frac{\theta^{-\alpha k}(\theta^{1-\alpha}+1)^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\mathbb{E}[W_{\alpha-1}^ke^{-\theta W_{\alpha-1}}]}\prod_{i=1}^m\frac{\alpha\Gamma(g_i-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}(1-t_i+\theta^{1-\alpha})^{-g_i}\mathrm{d}t_i\prod_{i=1}^m\Delta^{\theta}_{g_i,t_i}(\mathrm{d}x_i).\end{aligned}\tag{5.6}$$

5.2. 在 $\mathbb{Q}^{(k)}_{,\ \theta\overline{F}\ T()}$ 条件下给定祖先树时 Z_T 的条件分布。在上一节中，我们计算了与极限祖先树相关的 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\ ,\ \infty}$ 概率。在本节中，对于在分裂事件中具有特定子代数量的某棵祖先树，我们计算给定该祖先树时 Z_T 在时间 T 的整个种群的条件拉普拉斯变换。

让我们首先回顾第 3.3 节中的分解

$$Z_T = k + \sum_{j=1}^{k} Z_T^{(j)} + \sum_{j=1}^{m} \tilde{Z}_{T,j} \tag{5.7}$$

将时间 T 的整个种群划分为条件独立的组成部分。这里，$Z_T^{(j)}$ 计数的是谱系 j 的脊柱外出生的个体数量，而 $Z_{T,\ j}$ 计数的是在 j^{th} 分裂事件发生时出生的非脊柱粒子的后代数量。接下来的两个引理刻画了给定祖先树、分裂时间和子代数量时，$Z_T^{(j)}$ 和 $\tilde{Z}_{T,\ j}$ 的条件分布。

结果表明，在 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T)\,T}$ 下，当渐近地考虑时，脊柱子种群具有一种极易处理的形式：

引理19. 给定 $\mathcal{G}_T^{(k)}$ 且已知 $\varsigma_j = \rho T$，有

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{Q}^{(k),T}_{\theta\overline{F}(T)}[e^{-\varphi\overline{F}(T)Z_T^{(j)}}|\mathcal{G}_T^{(k)}, \varsigma_j = \rho T] = \left(\frac{1+(1-\rho)\theta^{\alpha-1}}{1+(1-\rho)(\theta+\varphi)^{\alpha-1}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, \tag{5.8}$$

当 $T\to\infty$ 时。

证明. 注意，根据引理 9，脊柱外出生的速率与粒子所跟随的脊柱数量无关。特别地，谱系 $[\rho T, T]$ 上脊柱外出生的贡献，与在 $[0,(1-\rho)T]$ 上运行的单脊柱测度下的贡献相同。因此

$$\mathbb{Q}^{(k),T}_{\theta\overline{F}(T)}[e^{-\varphi\overline{F}(T)Z_T^{(j)}}|\mathcal{G}_T^{(k)}, \varsigma_j = \rho T] = \mathbb{Q}^{(1),T(1-\rho)}_{\theta\overline{F}(T)}[e^{-\varphi\overline{F}(T)Z_{T(1-\rho)}}].$$

现在利用 (2.5) 的 $k=1$ 情形，我们得到

$$\mathbb{Q}^{(1),T(1-\rho)}_{\theta\overline{F}(T)}[e^{-\varphi\overline{F}(T)Z_{T(1-\rho)}}] = \frac{\mathbb{E}[Z_{T(1-\rho)}e^{-(\varphi+\theta)\overline{F}(T)Z_{T(1-\rho)}}]}{\mathbb{E}[Z_{T(1-\rho)}e^{-\theta\overline{F}(T)Z_{T(1-\rho)}}]}.$$

利用 (4.5) 将 $\overline{F}(T)$ 替换为 $\overline{F}(T(1-\rho))$，并利用单调收敛定理，我们得到

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{Q}^{(1),T(1-\rho)}_{\theta\overline{F}(T)}[e^{-\varphi\overline{F}(T)Z_{T(1-\rho)}}] = \lim_{T\to\infty} \frac{\mathbb{E}[Z_{T(1-\rho)}e^{-(\varphi+\theta)(1-\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}}\overline{F}(T(1-\rho))Z_{T(1-\rho)}}]}{\mathbb{E}[Z_{T(1-\rho)}e^{-\theta(1-\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}}\overline{F}(T(1-\rho))Z_{T(1-\rho)}}]}.$$

现在使用 (4.11)。 □

这里提及，利用 (5.8) 的一个简单计算可得到以下在 $\alpha=2$ 情形下的推论：

推论3. 设 $\alpha=2$。则 $Z_T^{(j)}$ 的分布在 $T\to\infty$ 时依分布收敛于两个独立的参数为 $\frac{1}{1-\rho}+\theta$ 的指数随机变量之和。

我们现在还回顾引理17中的结论：

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}[e^{-\varphi\overline{F}(T)\tilde{Z}_{T,j}}|\mathcal{G}_T^{(k)}, \text{split of size } g \text{ at time } \rho T, \overline{F}(T)J_j = x_j] = \exp\{-G(\rho_j,\varphi)x_j\}, \tag{5.9}$$

其中 $G(\rho_j,\varphi) := \left(\frac{1}{1-\rho_j+\ \varphi+\theta^{(()^{1-\alpha})\ \frac{1}{\alpha-1}}} - \frac{1}{(1-\rho_j+\theta^{1-\alpha})\ \frac{1}{\alpha-1}}\right)$。本节的主要结果是由迄今为止本节中讨论的内容直接得出的简单推论，并给出了在给定脊柱祖先树以及分裂时刻的子代数量后，Z_T在 $\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T)\,T}$下的渐近条件分布的刻画。

引理 20。简记 $\Gamma_T := \{\tau_1/T \in \mathrm{d}t_1, \ldots, \tau_m/T \in \mathrm{d}t_m, \mathcal{T}(\xi) = (\beta_0, \ldots, \beta_m)\ \overline{F}(T)L_{\tau_1} \in \mathrm{d}x_1, \ldots, \overline{F}(T)L_{\tau_m} \in \mathrm{d}x_m\}$。那么

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}[e^{-\varphi\overline{F}(T)Z_T}|\Gamma_T] = \prod_{j=0}^{m}\left(\frac{1+(1-\rho_j)\theta^{\alpha-1}}{1+(1-\rho_j)(\theta+\varphi)^{\alpha-1}}\right)^{(g_j-1)\frac{\alpha}{\alpha-1}} \exp\left(-\sum_{j=1}^{m} x_j G(\rho_j,\varphi)\right), \tag{5.10}$$

这里我们采用约定 $\rho_0 = 0$, $g_0 = 2$。

证明。利用分解 (5.7)，我们得到

$$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}[e^{-\varphi\overline{F}(T)Z_T}|\Gamma] = e^{-\theta\overline{F}(T)k}\prod_{j=1}^{k}\mathbb{Q}^{(k),T}_{\theta\overline{F}(T)}[e^{-\varphi\overline{F}(T)Z_{T,j}}|\Gamma_T]\prod_{j=1}^{m}\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}[e^{-\varphi\overline{F}(T)\tilde{Z}_{T,j}}|\Gamma_T].$$

回顾第 3.3 节中给出的 ς_j 的定义。每个 ς_j 都是一个谱系的初始时间，并且等于某个 τ_i。此外，对于每个 $i = 0, \ldots, m$，恰有 $g_i - 1$ 个不同的 j 使得 $\varsigma_j = \tau_i$。由 (5.8) 可得

$$\lim_{T\to\infty}\prod_{j=1}^{k}\mathbb{Q}^{(k),T}_{\theta\overline{F}(T)}[e^{-\varphi\overline{F}(T)Z_T^{(j)}}|\Gamma_T] = \prod_{j=0}^{m}\left(\frac{1+(1-\rho)\theta^{\alpha-1}}{1+(1-\rho)(\theta+\varphi)^{\alpha-1}}\right)^{(g_j-1)\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

至于另一项，由 (5.9) 可立即得到

$$\lim_{T\to\infty}\prod_{j=1}^{m}\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}[e^{-\varphi\overline{F}(T)\tilde{Z}_{T,j}}|\Gamma_T] = \exp\left(-\sum_{j=1}^{m} x_j G(\rho_j,\varphi)\right).$$

结合这两个等式即可完成证明。 □

5.3. 祖先树、分裂后代大小与整个种群的联合分布。借助推论 2 和引理 20，我们现在证明如下结果。

引理 21. 设 Γ_T 如引理 20 中所示，则有

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}[e^{-(\varphi-\theta)\overline{F}(T)Z_T};\Gamma_T] &= \frac{1}{\mathbb{E}[W_{\alpha-1}^k e^{-\theta W_{\alpha-1}}]}\varphi^{-\alpha k}(1+\varphi^{1-\alpha})^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}\\ &\quad\times\prod_{i=1}^{m}\frac{\alpha\Gamma(g_i-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}(1-t_i+\varphi^{1-\alpha})^{-g_i}\Delta^{\varphi}_{g_i,t_i}(x_i).\end{aligned}$$

证明。将推论 2 和引理 20 的主要等式相乘（并在式 (5.10) 的乘积中仔细地将 $j = 0$ 项分离出来），即可得到

$$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}[e^{-(\varphi-\theta)\overline{F}(T)Z_T};\Gamma_T] = \frac{\theta^{-\alpha k}(\theta^{1-\alpha}+1)^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\mathbb{E}[W_{\alpha-1}e^{-\theta W_{\alpha-1}}]}\left(\frac{1+\theta^{\alpha-1}}{1+\varphi^{\alpha-1}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\prod_{i=1}^{m}R_i\mathrm{d}x_i\mathrm{d}t_i, \tag{5.11}$$

$$R_i = \frac{\alpha\Gamma(g_i-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}(1-t_i+\theta^{1-\alpha})^{-g_i}\left(\frac{1+(1-t_i)\theta^{\alpha-1}}{1+(1-t_i)\varphi^{\alpha-1}}\right)^{(g_i-1)\frac{\alpha}{\alpha-1}}\Delta^{\theta}_{g_i,t_i}(x_i).$$

利用 Δ^{θ}_{g} 的定义 (4.20)$_\rho(x)$，经计算可验证

$$R_i = \frac{\alpha\Gamma(g_i-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}(\theta/\varphi)^{(g_i-1)\alpha}(1-t_i+\varphi^{1-\alpha})^{-g_i}\Delta^{\varphi}_{g_i,t_i}(x_i), \tag{5.12}$$

whe这里需要注意的是，上述后一个表达式涉及 $\Delta^{\varphi}_{g_i,\ t_i}$ 而不是 $\Delta^{\theta}_{g_i,\ t_i}$。

将 (5.11) 代入 (5.12)，并充分利用恒等式 $\sum_{i=1}^{m}(g_i-1) = k-1$，即可得到所需结果。

□

读者从引理 21 可以看出，我们有

$$\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta\overline{F}(T),T}[e^{-(\varphi-\theta)\overline{F}(T)Z_T};\Gamma_T] = \mathbb{Q}^{(k)}_{\varphi\overline{F}(T),T}[\Gamma_T]\frac{\mathbb{E}[W_{\alpha-1}e^{-\varphi W_{\alpha-1}}]}{\mathbb{E}[W_{\alpha-1}e^{-\theta W_{\alpha-1}}]}.$$

这一恒等式也可以　通过考察相应的测度变换推导得出。

5.4. $\mathbb{P}^{(k)}_{\text{unif}\,T}$ 下均匀选择的树概率。我们已基本准备好证明主要结果，即定理 1、定理 2 和定理 3。我们从以下表述开始。

定理 4. 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}\mathbb{P}^{(k)}_{\text{unif},T}\Big(\mathcal{T}(\xi)=(\beta_0,\dots,\beta_m),\tau_i/T\in \mathrm{d}t_i,\overline{F}(T)L_{\tau_i}\in\mathrm{d}x_i,i=1,\dots,m|Z_T\geq k\Big)\\ &=\frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty \varphi^{-(\alpha-1)k-1}(1+\varphi^{1-\alpha})^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}\prod_{i=1}^m\frac{\alpha\Gamma(g_i-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}(1-t_i+\varphi^{1-\alpha})^{-g_i}\Delta^{\varphi}_{g_i,t_i}(x_i)\,\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}\tag{5.13}$$

回顾式 (4.20)，我们有

$$\Delta^{\varphi}_{g,\rho}(x) := \frac{x^{g-\alpha-1}}{\Gamma(g-\alpha)(1-\rho+\varphi^{1-\alpha})^{\frac{g-\alpha}{\alpha-1}}}\exp\left\{-\frac{x}{(1-\rho+\varphi^{1-\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right\}.\tag{5.14}$$

证明。对式 (2.10) 取渐近形式（只需将 $Z_T^{(k)}$ 替换为 Z_T^k），并以 $\theta\overline{F}(T)$ 代替 θ，可得

$$\mathbb{E}^{(k)}_{\text{unif},T}\left[f(\underline{u})\middle|Z_T\geq k\right]\sim\mathbb{E}\left[Z_T^ke^{-\theta\overline{F}(T)Z_T}\middle|Z_T\geq k\right]\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\left[\frac{f(\xi_T)}{Z_T^ke^{-\theta\overline{F}(T)Z_T}}\right].\tag{5.15}$$

根据伽马积分，我们有 $\frac{1}{z^k} = \frac{1}{k-1\,(\,)\,!}\int_0^\infty\varphi^{k-1}e^{-\varphi z}\mathrm{d}\varphi$，因此利用富比尼定理，我们也可以写成

$$\mathbb{E}^{(k)}_{\text{unif},T}\left[f(\underline{u})\middle|Z_T\geq k\right]\sim\frac{1}{(k-1)!}\mathbb{E}\left[Z_T^ke^{-\theta\overline{F}(T)Z_T}\middle|Z_T\geq k\right]\int_0^\infty\varphi^{k-1}\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\left[f(\xi_T)e^{Z_T}e^{-(\varphi-\theta\overline{F}(T))Z_T}\right]\mathrm{d}\varphi.\tag{5.16}$$

将变量从 φ 换为 $\varphi\overline{F}(T)$，可得

$$\mathbb{E}^{(k)}_{\text{unif},T}\left[f(\underline{u})\middle|Z_T\geq k\right]\sim\frac{\overline{F}(T)^k}{(k-1)!}\mathbb{E}\left[Z_T^ke^{-\theta\overline{F}(T)Z_T}\middle|Z_T\geq k\right]\int_0^\infty\varphi^{k-1}\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\left[f(\xi_T)e^{-(\varphi-\theta)\overline{F}(T))Z_T}\right]\mathrm{d}\varphi.\tag{5.17}$$

现在利用情形 $\rho=0$ (4.14)，可将其化简为

$$\mathbb{E}^{(k)}_{\text{unif},T}\left[f(\underline{u})\middle|Z_T\geq k\right]\sim\frac{\mathbb{E}[W_{\alpha-1}^ke^{-\theta W_{\alpha-1}}]}{(k-1)!}\int_0^\infty\varphi^{k-1}\mathbb{Q}^{(k)}_{\theta,T}\left[f(\xi_T)e^{-(\varphi-\theta)\overline{F}(T))Z_T}\right]\mathrm{d}\varphi.\tag{5.18}$$

现在考虑这样的情形： $f(\underline{u})$ 是事件 $\{\mathcal{T}(\xi) = (\beta_0, \ldots, \beta_m)\ \tau_i/T \in \mathrm{d}t_i, \overline{F}(T)L_{\tau_i} \in \mathrm{d}x_i, i = 1, \ldots, m\}$ 的示性函数。利用引理 21 和有界收敛定理，我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}^{(k)}_{\mathrm{unif},T}\left[f(\underline{u})\middle| Z_T \geq k\right]\\ &= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty \varphi^{k-1}\varphi^{-\alpha k}(1+\varphi^{1-\alpha})^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}} \prod_{i=1}^m \frac{\alpha\Gamma(g_i-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}(1-t_i+\varphi^{1-\alpha})^{-g_i}\Delta^{\varphi}_{g_i,t_i}(x_i)\ \mathrm{d}\varphi,\end{aligned} \tag{5.19}$$

由此完成证明。

□

现在考虑进行变量替换 $w = (1+\varphi)^{1-\alpha}$。以下等式很容易验证

$$\varphi^{-(\alpha-1)} = \frac{1-w}{w}, \tag{5.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi} = \frac{\mathrm{d}w}{(\alpha-1)w(1-w)}. \tag{5.21}$$

在 (5.13) 中使用 (5.20) 和 (5.21)，可得

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty} \mathbb{P}^{(k)}_{\mathrm{unif},T}\Big(\{\mathcal{T}(\xi) = (\beta_0, \ldots, \beta_m), \tau_i/T \in \mathrm{d}t_i, \overline{F}(T)L_{\tau_i} \in \mathrm{d}x_i, i = 1, \ldots, m\}|Z_T \geq k\Big)\\ &= \frac{1}{(\alpha-1)(k-1)!}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}w}{w(1-w)}\left(\frac{1-w}{w}\right)^k w^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \prod_{i=1}^m \frac{\alpha\Gamma(g_i-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}(\frac{1}{w}-t_i)^{-g_i}\Delta^{w}_{g_i,t_i}(x_i),\end{aligned} \tag{5.22}$$

这里我们稍微滥用了记号，写作

$$\Delta^w_{g,\rho}(x) := \frac{x^{g-\alpha-1}}{\Gamma(g-\alpha)(1/w-\rho)^{\frac{g-\alpha}{\alpha-1}}}\exp\left\{-\frac{x}{(1/w-\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right\} \tag{5.23}$$

表示 $(1/w-\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ 乘以一个形状参数为 $g-\alpha$ 的伽马随机变量的概率密度函数。整理 (5.22)，并利用恒等式 $\sum_{i=1}^m (g_i - 1) = k-1$，最终可得

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty} \mathbb{P}^{(k)}_{\mathrm{unif},T}\Big(\{\mathcal{T}(\xi) = (\beta_0, \ldots, \beta_m), \tau_i/T \in \mathrm{d}t_i, \overline{F}(T)L_{\tau_i} \in \mathrm{d}x_i, i = 1, \ldots, m\}|Z_T \geq k\Big)\\ &= \frac{1}{(\alpha-1)(k-1)!}\int_0^1 (1-w)^{k-1}w^{m+\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \prod_{i=1}^m \frac{\alpha\Gamma(g_i-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}(1-wt_i)^{-g_i}\Delta^{w}_{g_i,t_i}(x_i)\ \mathrm{d}w.\end{aligned} \tag{5.24}$$

现在我们来回顾一下，并明确证明定理 1、定理 2 和定理 3。

定理1、2和3的证明。考虑一棵后代分布属于普适类 (H1) 的连续时间伽尔顿-沃森树。在概率测度 $\mathbb{P}^{(k)}_{\mathrm{unif}\ T}(\cdot|Z_T \geq k)$ 下，以事件 $\{Z_T \geq k\}$ 在时间 T 至少有 k 个粒子存活为条件，并从时间 T 的种群中均匀抽取 k 个粒子。令 $(\pi^{(k,T)}_t)_{t\in[0,T]}$ 表示这些粒子的联合祖先过程。令 $\mathcal{T}(\pi^{(k,T)})$ 表示与这些祖先关系相对应的分裂过程，并令 τ_1、……、τ_m 表示分裂时刻。最后，令 L_1、……、L_m 表示这些分裂时刻对应的子代数量。

当 T 趋于无穷时，等式 (5.24) 成立。特别是，该等式不取决于后代分布的具体形式，而只取决于决定普适类 (H1) 的参数 α。因此，定理 1 得证。

接下来我们指出，此普适类中这类树的依分布收敛证明了定理 3。

最后，我们不 请注意，定理 2 是通过对 x_i 积分从定理 3 推导得出的。

□

5.5. Lauricella 表示。本节将推导分裂时间联合密度的 Lauricella 表示。根据定理 2，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\mathcal{T}(\nu)=\overline{\beta}, \tau_1 \in \mathrm{d}t_1, \ldots, \tau_m \in \mathrm{d}t_m\right)\\ &= \frac{1}{(\alpha-1)(k-1)!}\prod_{i=1}^{m}\frac{\alpha\Gamma(g_i-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^1 (1-w)^{k-1}w^{m+\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}\prod_{i=1}^{m}(1-wt_i)^{-g_i}\,\mathrm{d}w.\end{aligned} \tag{5.25}$$

现在我们推导右侧的另一种表示。首先注意到

$$\begin{aligned}&\int_0^1 w^{m+\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}(1-w)^{k-1}\prod_{i=1}^{m}(1-wt_i)^{-g_i}\mathrm{d}w\\ &\quad=\int_0^1 \mathrm{d}w\, w^{m+\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}(1-w)^{k-1}\sum_{j_i,\ldots,j_m=0}^{m}\frac{(g_1)_{j_1}\cdots(g_m)_{j_m}}{j_1!\cdots j_m!}(wt_1)^{j_1}\cdots(wt_m)^{j_m}\\ &\quad=\sum_{j_i,\ldots,j_m=0}^{m}\frac{(g_1)_{j_1}\cdots(g_m)_{j_m}}{j_1!\cdots j_m!}t_1^{j_1}\cdots t_m^{j_m}\int_0^1 w^{m+\frac{1}{\alpha-1}+\sum_{i=1}^m j_i-1}(1-w)^{k-1}\mathrm{d}w\\ &\quad=\frac{\Gamma(m+\frac{1}{\alpha-1})\Gamma(k)}{\Gamma(k+m+\frac{1}{\alpha-1})}\sum_{j_i,\ldots,j_m=0}^{m}\frac{(m+\frac{1}{\alpha-1})_{j_1+\cdots+j_m}(g_1)_{j_1}\cdots(g_m)_{j_m}}{(k+m+\frac{1}{\alpha-1})_{j_1+\cdots+j_m}j_1!\cdots j_m!}t_1^{j_1}\cdots t_m^{j_m}\\ &\quad=\frac{\Gamma(m+\frac{1}{\alpha-1})\Gamma(k)}{\Gamma(k+m+\frac{1}{\alpha-1})}F_D^{(m)}\left[m+\frac{1}{\alpha-1}, g_1, \ldots, g_m; k+m+\frac{1}{\alpha-1}; t_1, \ldots, t_m\right],\end{aligned} \tag{5.26}$$

其中，$F_D^{(m)}$ 是含 m 个变量 t_1，……，t_m 的 Lauricella 超几何函数，由 Lauricella [29]引入。现在注意，将（5.26）代入（5.25），即可得到引言中所述的（1.9）。

现在我们借助 Chamayou 和 Wesolowski [13]的概率表示。为此，设（X_1，……，X_n）是一个服从狄利克雷分布的随机向量，其参数为 $a=$（a_1，……，a_n）和 $b>0$，这里记作 Dir（a；b）。换言之，其分布相对于 $\mathbb{R}^d$ 上的勒贝格测度绝对连续，并且

$$D_n(a;b;x)=C\left(1-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{b-1}\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_i-1}\mathbf{1}_{\mathbb{T}_n}(x),$$

其中 $x=$（x_1，……，x_n）$\in\mathbb{R}^n$，

$$\mathbb{T}_n=\left\{(x_1,\ldots,x_n): x_i>0, i=1,\ldots,n, \sum_{i=1}^{n}x_i<1\right\}\quad\text{and}\quad C=\frac{\Gamma(b+\sum_{i=1}^n a_i)}{\Gamma(b)\Gamma(\sum_{i=1}^n a_i)}.$$

狄利克雷分布的一个重要性质是，它可以通过相互独立的伽马分布来表示。也就是说，设 U_1，……，U_n 是参数为（σ，a_i）的相互独立的伽马随机变量，其中 $i=1$，……，n，则

$$(X_1,\ldots,X_n)\overset{d}{=}\frac{(U_1,\ldots,U_n)}{\sum_{i=1}^n U_i},$$

其中后者与 $\sum_{i=1}^n U_i$ 相互独立。

此外，狄利克雷分布的拉普拉斯指数满足

$$\mathbb{E}\left[e^{\langle t,X\rangle}\right]=C\int_{\mathbb{T}_n}e^{\langle t,x\rangle}\left(1-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{b-1}\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_i-1}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\Phi_2^{(n)}(a;b;t),$$

其中 $t=(t_1,\ldots,t_n)$。函数 $\Phi_2^{(n)}$ 可以视为超几何函数 ${}_1F_1$的多元版本，即

$$\Phi_2^{(1)}(a,b,t)={}_1F_1(a;a+b;t),$$

其中右　　端是一个参数为 (a,b) 的贝塔随机变量的拉普拉斯变换　　.

接下来，令 Z为参数为 $(1,c)$ 的伽马随机变量。若 $X\sim\mathrm{Dir}(a;\ b)$，且 X和 Z相互独立，则随机向量 $Y=ZX$ 满足

$$\mathbb{E}\Big[\exp\{\langle t,Y\rangle\}\Big]=F_D^{(n)}(c,a;b;t).$$

因此，对 Z进行条件化可得

$$F_D^{(n)}(c,a;b;t)=\frac{1}{\Gamma(c)}\int_0^\infty z^{c-1}e^{-z}\Phi_2^{(n)}(a;b;tz)\mathrm{d}z.$$

关于 X进行条件化，我们得到

$$F_D^{(n)}(c,a;b;t)=\int_{\mathbb{T}_n}\Big(1-\langle t,x\rangle\Big)^{-c}D_n(a;b;x)\mathrm{d}x. \tag{5.27}$$

将（5.27）代入（5.26），我们得到

$$\begin{aligned}&\int_0^1 w^{m+\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}(1-w)^{k-1}\prod_{i=1}^{m}(1-wt_i)^{-g_i}\mathrm{d}w\\&=\frac{\Gamma(m+\frac{1}{\alpha-1})\Gamma(k)}{\Gamma(k+m+\frac{1}{\alpha-1})}\int_{\mathbb{T}_m}(1-\langle t,x\rangle)^{-m-\frac{1}{\alpha-1}}\,D_m(g_1,\ldots,g_m,k+m+\frac{1}{\alpha-1};\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

最后注意到，若（$E_1,\ldots,E_m$）服从 $D_m(g_1,\ldots,g_m,k+m+\frac{1}{\alpha-1};\mathrm{d}x)$，则有如下分布恒等式

$$E_i=\frac{W_i}{W_1+\ldots+W_m+Q}\qquad W_i\sim\Gamma(g_i),Q\sim\Gamma(k+m+\frac{1}{\alpha-1}).$$

因此，我们也可以写成

$$\int_0^1 w^{m+\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}(1-w)^{k-1}\prod_{i=1}^{m}(1-wt_i)^{-g_i}\mathrm{d}w=\frac{\Gamma(m+\frac{1}{\alpha-1})\Gamma(k)}{\Gamma(k+m+\frac{1}{\alpha-1})}\mathbb{E}\left[\left(1-\frac{t_1W_1+\ldots+t_mW_m}{W_1+\ldots+W_m+Q}\right)^{-m-\frac{1}{\alpha-1}}\right].$$

利用（5.25），我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\mathcal{T}(\nu)=\overline{\beta},\tau_1\in\mathrm{d}t_1,\ldots,\tau_m\in\mathrm{d}t_m\right)\\&=\frac{1}{(\alpha-1)(k-1)!}\prod_{i=1}^{m}\frac{\alpha\Gamma(g_i-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{\alpha-1})\Gamma(k)}{\Gamma(k+m+\frac{1}{\alpha-1})}\mathbb{E}\left[\left(1-\frac{t_1W_1+\ldots+t_mW_m}{W_1+\ldots+W_m+Q}\right)^{-m-\frac{1}{\alpha-1}}\right],\end{aligned} \tag{5.28}$$

其中，如上所述，W_1 服从参数为 g_i 的伽马分布，而 Q 服从参数为 $k+m+\frac{1}{\alpha-1}$ 的伽马分布。

References

[1] Abraham, R. and Debs, P. (2020) 伽尔顿-沃森过程的惩罚化。《随机过程及其应用》 **130** (5),3095–3119.
[2] Aldous, D. and Popovic, L. (2005). 一种用于生物多样性的临界分枝过程模型, 《应用概率进展》 **37**(04):1094-1115.[3] Athreya, K.B. (2012). 快速增长种群近期的合并。《随机过程及其应用》 **122** 3757-3766.
[4] Athreya, K.B. (2012). 临界与次临界 Galton-Watson 分枝过程中的合并。《应用概率杂志》**49** 627-638.
[5] Athreya, K.B. (2016). 《分枝过程中的合并》。载于《分枝过程及其应用》, 《统计学讲义》 **219** Springer.
[6] Athreya, K.B. and Ney, P.E. (1972). 《分枝过程》。施普林格出版社, 纽约。[7] Berestycki, J., Berestycki, N. and Schweinsberg, J. (2007) Beta 合并过程与连续稳定随机树。《概率年刊》35, 1835–1887.[8] Bertoin, J. and Le Gall, J.-F. (2000) Bolthausen-Sznitman 合并过程与连续状态分枝过程的谱系。《概率论及相关领域》 117, 246–266.[9] Bingham, N.H., Goldie, C.M. and Teugels, J.L. (1987) 正则变差。剑桥大学出版社
[10] Boenkost, F., Foutel-Rodier, F. and Schertzer, E. (2022) 变化环境中近临界分枝过程的谱系。arXiv: 2207.11612.[11] Bühler, W. (1971). 超临界马尔可夫分枝过程中的世代与亲缘程度。《概率论与相关领域杂志》 **18** 141-152.[12] Cheek, D. and Johnston, S.G.G. (2022). 分枝过程中的祖先繁殖偏倚。《数学生物学杂志》（即将发表）。[13] Chamayou, J-F. and Wesołowski, J. (2009). 通过概率工具研究 Lauricella 函数与 Humbert 函数, 《积分变换与特殊函数》 **20**(7) 529—538.[14] Durrett, R. (1978). 临界分枝过程的谱系。《随机过程及其应用》 **8**(1) 101-116.[15] Gernhard, T. (2008) 条件重建过程。《理论生物学杂志》 **253**(4):769-778.[16] Grosjean, N. and Huillet, T. (2018). 关于 Bienayme-Galton-Watson 分枝过程的谱系与合并时间。《随机模型》, Volume **34**(1).[17] Harris, S.C., Johnston, S.G.G. and Roberts, M.I. (2020) 连续时间伽尔顿–沃森树的合并结构。《应用概率年刊》30 (3), 1368–1414.[18] Harris, S.C., Johnston, S.G.G. and Pardo, J.-C. (2023) 无穷均值临界伽尔顿–沃森树合并结构的普适性类别。研究进行中。[19] Harris, S.C., Palau, S. and Pardo, J.-C. (2022) 变化环境中伽尔顿–沃森树的合并结构。arXiv: 2207.10923.[20] Harris, S.C. and Roberts, M.I. (2017) 多对少引理与多脊。《亨利·庞加莱研究所年刊：概率与统计》53, 226–242.[21] Johnston, S.G.G. (2019) 伽尔顿–沃森树的谱系。《电子概率杂志》24, 1-35.[22] Johnston, S.G.G. and Lambert, A. (2019) 多类型分枝过程均匀样本与泊松样本的合并结构。《应用概率年刊》（即将发表）。[23] Johnston, S.G.G. and Prochno, J. (2022) Fa`a di Bruno 公式与幂级数反演。《数学进展》395, 108080.[24] Kingman, J.F.C. (1982). 《合并过程》, 《随机过程及其应用》 **13**(3) 235-248.
[25] Lagerås, A. and Sagitov, S. (2008). 具有极重尾的约化分枝过程。《应用概率杂志》45190-200.[26] Lambert, A. (2003). 分枝过程的合并时间。《应用概率进展》 **35**(04) 1071-1089.[27] Lambert, A. and Popovic, L. (2013). 分枝树的合并点过程。《应用概率年刊》**23**(1):99-144.[28] Lambert, A. and Stadler, T. (2013). 生灭模型与合并点过程：重建系统发育树的形状与概率。《理论种群生物学》 **90**:113-128.[29] Lauricella, G. (1893). 关于多变量超几何函数。《巴勒莫数学学会会刊》7, 111–158.[30] Le, V. (2014). Bienayme-Galton-Watson 过程的合并时间。《应用概率杂志》 **51** 209-218.

[31] O'Connell, N. (1995) 分枝过程的谱系与最近共同祖先的年龄。应用概率进展 **27**(02) 418-442[32] Pakes, A.G. (2010) 允许无限方差的临界马尔可夫分枝过程极限定理。应用概率进展，**42**, 460–488[33] Slack, R.S. (1968) 均值为一且方差可能无限的分枝过程。概率论杂志 **9**,139–145[34] Zubkov, A. M. (1976). 到最近共同祖先的距离的分布。概率论及其应用 **20**(3),602–612.University of Auckland, Private Bag 92019, Auckland 1142, New Zealand电子邮箱：simon.harris@auckland.ac.nzKing's College London, Strand Building, London, WC2R 2LS, United Kingdom电子邮箱：sggjohnston@gmail.comCIMAT A.C. Calle Jalisco s/n. C.P. 36240, Guanajuato, Mexico电子邮箱：jcpardo@cimat.mx