arXiv:2302.02963v1 [math.PR] 6 Feb 2023

任意维环面上的多调和场与刘维尔量子引力测度：从离散到连续

Lorenzo Dello Schiavo[1]、Ronan Herry[2]、Eva Kopfer[3] 和 Karl-Theodor Sturm[3]

[1] *Institute of Science and Technology Austria*

lorenzo.delloschiavo@ist.ac.at [2] *IRMAR, Université de Rennes 1263 avenue du Général Leclerc, 35042 Rennes Cedex ronan.herry@univ-rennes1*

[3] *Institute for Applied Mathematics – University of Bonn*

eva.kopfer@iam.uni-bonn.de

sturm@uni-bonn.de

2023年2月7日

摘要

对于任意维度 n，我们研究：

- 离散环面 $\mathbb{T}_L^n = \frac{1}{L}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n$上的多调和高斯场 h_L，即其在 $\mathbb{R}^{\mathbb{T}_L^n}$ 上的概率律由下式给出的随机场

$$c_n\, e^{-b_n \left\| (-\Delta_L)^{n/4} h \right\|^2} dh,$$

其中，dh 是勒贝格测度，Δ_L 是离散拉普拉斯算子；

- 与之关联的离散刘维尔量子引力测度，即定义在 $\mathbb{T}_L^n$上的随机测度

$$\mu_L(dz) = \exp\left(\gamma h_L(z) - \frac{\gamma^2}{2}\mathbf{E}h_L(z)\right) dz,$$

其中，γ 是正则性参数。

当 $L \to \infty$时，我们证明场 h_L 收敛到连续环面 $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$上的多调和高斯场 h，并证明随机测度 μ_L 收敛到定义在 $\mathbb{T}^n$上的 LQG 测度 μ，对所有 $|\gamma| < \sqrt{2n}$均成立。

目录

1 连续与离散环面上的拉普拉斯算子和核 4

1.1 连续环面上的拉普拉斯算子与核. 4

1.2 离散环面上的拉普拉斯算子与核. 7

1.3 延拓与投影. 8

2 离散环面上的多调和高斯场 11
2.1 场的定义与构造.11 2.2 离散环面上的多调和高斯场再探.12 2.3 离散环面上的约化多调和高斯场.14

3 连续环面上的多调和高斯场及其（半）离散近似 14
3.1 连续环面上的多调和高斯场及其投影的收敛性质.15 3.2 离散环面上的多调和高斯场及其延拓的收敛性质.19 3.3 识别.24

4 连续与离散环面上的 LQG 测度 25
4.1 连续环面上的 LQG 测度及其近似.26 4.2 离散环面上的 LQG 测度及其收敛性.27 4.3 离散环面上的约化 LQG 测度及其收敛性.28 4.4 半离散 LQG 测度的收敛结果.29 4.5 离散与半离散 LQG 测度的一致可积性.30

引言

我们研究任意维度的连续与离散环面上的高斯随机场及其对应的 LQG 测度。连续环面上的随机场 h 是余多调和场的一个特例；该场由 [5]在所有偶数维“可容许”流形上以极一般的形式引入并进行了详细分析。当前的主要目标之一是研究这些场及其对应 LQG 测度的离散对应物对它们的近似。

多调和场 h 在 $\mathbb{T}^n \cong [0,1)^n$ 和 h_L 在 $\mathbb{T}_L^n \cong \{0, \frac{1}{L}, \dots, \frac{L-1}{L}\}^n$ 上，对于 $L \in \mathbb{N}$，是协方差函数为

$$\mathbf{E}\Big[h(x)\,h(y)\Big] = k(x,y) \coloneqq \frac{1}{a_n}\,\mathring{G}^{n/2}(x,y)\ ,$$
$$\mathbf{E}\Big[h_L(x)\,h_L(y)\Big] = k_L(x,y) \coloneqq \frac{1}{a_n}\,\mathring{G}_L^{n/2}(x,y)\ .$$

由（分别为连续和离散）多拉普拉斯算子 $(-\Delta)^{n/2}$ 和 $(-\Delta_L)^{n/2}$ 的“零均值”逆算子的积分核，以及归一化常数 $a_n \coloneqq \Gamma^2(n/2)\,(4\pi)^{n/2}$ 给出。采用此归一化常数

引理 0.1（参见引理 1.4）。

$$\Big|k(x,y) - \log\frac{1}{d(x,y)}\Big| \le C\ .$$

离散多调和场的刻画。 给定 n，$L \in \mathbb{N}$，并为方便起见假设 L 为奇数，令 $\mathbb{Z}_L^n = \{-\frac{L-1}{2}, -\frac{L-1}{2}+1, \dots, \frac{L-1}{2}\}^n$，并设 $N \coloneqq L^n$ 和

$$c_n \coloneqq \Big(\frac{a_n}{2\pi N}\Big)^{\frac{N-1}{2}} \cdot \prod_{z \in \mathbb{Z}_L^n \setminus \{0\}} \Big(4L^2 \sum_{k=1}^{n} \sin^2\big(\pi z_k / L\big)\Big)^{n/4}\ .$$

定义 $\mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^{\mathbb{T}_L^n}$ 上的测度 $\widehat{\boldsymbol{\nu}}(h)$ 为

$$d\widehat{\boldsymbol{\nu}}(h) \coloneqq c_n\, e^{-\frac{a_n}{2N}\|(-\Delta_L)^{n/4}h\|^2}\, d\mathcal{L}^N(h)\ ,$$

并将其在映射下的推前记为 $\boldsymbol{\nu}$

$$h \mapsto \mathring{h}, \quad \mathring{h}_v \coloneqq h_v - \frac{1}{N}\sum_{v=1}^{N} h_v\ .$$

换言之， $\boldsymbol{\nu} = \widehat{\boldsymbol{\nu}}\left(\cdot \,\middle|\, \sum_{v=1}^{N} h_v = 0\right)$.

此外，

$$\mathring{T}_*\boldsymbol{\nu} = \mathring{\mathbf{P}} \qquad \mathring{T}_*^{-1}\mathring{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\nu}$$

其中 $\mathbf{P}$ 表示 $\mathbb{T}_L^n$ 上“扎根白噪声”的分布，具体定义为

$$d\mathring{\mathbf{P}}(\Xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2N}\|\Xi\|^2}\, d\mathcal{L}_H^{N-1}(\Xi)$$

在超平面 $H = \{\Xi \in \mathbb{R}^N : \ \sum_{v=1}^{N} \Xi_v = 0\}$ 上，且其中

$$\mathring{T} : h \mapsto \Xi = \sqrt{a_n}\,(-\Delta_L)^{n/4} h \qquad \mathring{T}^{-1} : \Xi \mapsto h = \frac{1}{\sqrt{a_n}}\, \mathring{G}_L^{n/4} \Xi \ .$$

定理 0.2 (参见定理2.4)。 离散多调和场在 $\mathbb{T}_L^n$ 上的分布由概率测度 $\boldsymbol{\nu}$ 在 $\mathbb{R}^{\mathbb{T}_L^n} \cong \mathbb{R}^N$上给出。

随机场的收敛。 当 $L \to \infty$ 时，离散环面上的多调和场 h_L 收敛到连续环面上的多调和场 h 。事实上，场的这种收敛在非常一般的条件下都成立。

要精确表述这一点，要么指定 $\mathbb{T}^n$ 上一类具有 $\mathbb{T}_L^n$ 上的迹的测试函数，要么指定将 $\mathbb{T}_L^n$ 上的函数延拓到 $\mathbb{T}^n$ 上的唯一方式。

定理 0.3 （参见定理 3.7）。 对于所有 $f \in \bigcup_{s>n/2} H^s(\mathbb{T}^n)$ ，

$$\langle h_L, f\rangle_{\mathbb{T}_L^n} \to \langle h, f\rangle_{\mathbb{T}^n} \quad \text{in } L^2(\mathbf{P}) \text{ as } L \to \infty.$$

令 $\mathcal{D}_L \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ 表示负拉普拉斯算子的特征函数 φ_z 的线性张成，其中相应的特征值为 $0 < \lambda_z <(L\pi)^2,$ ，更明确地说，

$$\mathcal{D}_L := \left\{ f : \ f(x) = \sum_{z \in \mathbb{Z}_L^n} \Big[\alpha_z \cos(2\pi x \cdot z) + \beta_z \sin(2\pi x \cdot z)\Big],\ \alpha_z, \beta_z \in \mathbb{R} \right\} .$$

定理 0.4 （参见定理3.9）。 对于所有 $f \in \mathring{H}^{-n/2}(\mathbb{T}^n)$ ，

$$\langle h_{L,\sharp}, f\rangle_{\mathbb{T}^n} \to \langle h, f\rangle_{\mathbb{T}^n} \quad \text{in } L^2(\mathbf{P}) \text{ as } L \to \infty$$

其中，对于每个 $h_{L,\,\sharp}^{\omega}$ ω 表示 $\mathcal{D}_L$ 中与 $\mathbb{T}_L^n$ 上的 h_L^ω 重合的唯一函数。

同样的收敛断言也适用于所谓的谱约化多调和场$h_L^{-\circ}$ ，它定义在 $\mathbb{T}_L^n$ 上，并通过离散拉普拉斯算子的特征基 $\{\varphi_z\}_{z\in\mathbb{Z}_L^n}$ 表示为 Δ_L

$$h_L^{-\circ}(x) := \sum_{z \in \mathbb{Z}_L^n} \left(\frac{L^2}{\pi^2 |z|^2} \sum_{k=1}^{n} \sin^2(\pi z_k / L) \right)^{-n/4} \langle h_L | \varphi_z \rangle_{\mathbb{T}_L^n} \cdot \varphi_z(x) \ .$$

我们的收敛结果适用于任意维度 n。在维度 $n \le 4$中，文献中已有若干关于其他整数阶离散分数高斯场收敛到连续体中相应对象的结果，例如沙堆模型的 里程表函数 ，或膜模型。关于这些结果与本文结果的比较，请参见下文§3.2.5 。

随机测度的收敛。与之相关的随机测度的收敛问题则更加微妙。当然，同样可以预期，离散环面上的刘维尔测度 μ_L 会随着 $L \to \infty$ 收敛到连续环面上的刘维尔测度 μ 。然而，这种随机测度的收敛仅在参数 γ较小时成立。

定理 0.5 (参见定理 4.7)。 假设 $|\gamma| < \sqrt{\frac{n}{e}}$ ，并设 a 为一个奇整数 ≥ 2。那么在 $\mathbf{P}$-概率意义下以及在 $L^1(\mathbf{P})$中，

$$\mu_{a^\ell} \to \mu \qquad \text{as } \ell \to \infty.$$

与离散多调和场及约化离散多调和场的傅里叶延拓相关联的随机测度也有类似的收敛结果；对于后者，即使在整个次临界范围 $\gamma \in (-\sqrt{2n},\ \sqrt{2n})$ 内亦然。

定理 0.6 (参见定理 4.9、定理 4.10)。 对于 $|\gamma| < \sqrt{\frac{n}{e}}$，

$$\mu_{L,\sharp} \to \mu \qquad as\ L \to \infty,$$

且对于 $|\gamma| < \sqrt{2n}$,

$$\mu^{\circ}_{L,\sharp} \to \mu \qquad as\ L \to \infty.$$

随机测度的一致可积性。 作为一项本身具有独立意义的辅助结果，我们直接证明多维环面上（离散、半离散和连续）随机测度的一致可积性。

定理 0.7 (参见定理 4.11)。 假设 $|\gamma| < \sqrt{\frac{n}{e}}$。那么

$$\sup_L \mathbf{E}\Big[\big|\mu_L(\mathbb{T}^n_L)\big|^2\Big] < \infty$$

and

$$\sup_L \mathbf{E}\Big[\big|\mu_{L,\sharp}(\mathbb{T}^n)\big|^2\Big] < \infty\ .$$

致谢 KTS 感谢 Christoph Thiele 提供宝贵的讨论和有益的参考文献。LDS 感谢 Nathana¨el Berestycki 就高斯乘法混沌所进行的宝贵讨论。

LDS 衷心感谢欧洲研究理事会提供的经费支持（拨款协议编号 716117，授予 J. Maas），以及奥地利科学基金（FWF）通过项目 F65 提供的资助。他还感谢奥地利科学基金（FWF）通过项目 ESPRIT 208 为其目前的职位提供经费支持。RH、EK 和 KTS 衷心感谢德国研究联合会通过 SPP 2265“随机几何系统”中的“随机黎曼几何”项目、豪斯多夫数学中心（项目编号 390685813）以及 CRC 1060 中的 B03 项目（项目编号 211504053）提供的资助。RH 和 KTS 还衷心感谢欧洲研究理事会通过 ERC 高级资助项目“RicciBounds”（拨款协议编号 694405）提供的经费支持。

由于本研究未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享声明
。

1 连续环面与离散环面上的拉普拉斯算子和核

1.1 连续环面上的拉普拉斯算子和核

(a) 对于 $n \in \mathbb{N}$，我们用 $\mathbb{T}^n := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ 表示连续 n-环面。在适当之处，可以始终将环面 $\mathbb{T}^n$ 视为集合 $[0,1)^n \subset \mathbb{R}^n$。它继承了 $\mathbb{R}^n$ 的加法群结构和勒贝格测度，后文记作 $d\mathcal{L}^n(x)$ 或简记为 dx。$\mathbb{T}^n$ 上的距离定义为

$$d(x,y) := \left(\sum_{k=1}^{n} \big(|x_k - y_k| \wedge |1 - x_k + y_k|\big)^2\right)^{1/2}\ .$$

(b) 对于 $z \in \mathbb{Z}^n$ 和 $x \in \mathbb{T}^n$，令

$$\Phi_z(x) := \exp\Big(2\pi i\, z \cdot x\Big)\ .$$

族 $(\Phi_z)_{z\in\mathbb{Z}^n}$ 是 $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}^n)$的一组完备正交归一基。它由 $\mathbb{T}^n$ 上的负拉普拉斯算子 $-\Delta = -\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ 的特征函数组成，对应的特征值为

$$\lambda_z := (2\pi|z|)^2\ .$$

(c) 函数 $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}^n)$的傅里叶变换是函数（或"序列"） $g \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$，定义为

$$g(z) \coloneqq \langle f, \Phi_z \rangle_{\mathbb{T}^n} \coloneqq \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\, \overline{\Phi}_z(x)\, dx \ .$$

反过来，对于上述的 g 以及几乎处处的 $x \in \mathbb{T}^n$,

$$f(x) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} g(z) \Phi_z(x) \ .$$

(d) 要为实 L^2-空间构造完备正交归一基 $(\varphi_z)_{z\in\mathbb{Z}^n}$，取 $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ 的一个子集 $\hat{}\mathbb{Z}^n$，使得

$$\mathbb{Z}^n \setminus \{0\} = \hat{\mathbb{Z}}^n \,\dot\cup\, \big(-\hat{\mathbb{Z}}^n\big) \ ,$$

并定义

$$\varphi_z(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\Phi_z + \Phi_{-z}\big)(x) = \sqrt{2}\, \cos\big(2\pi\, z \cdot x\big) & \text{if } z \in \hat{\mathbb{Z}}^n \ , \\ \frac{1}{\sqrt{2}\, i}\big(\Phi_z - \Phi_{-z}\big)(x) = \sqrt{2}\, \sin\big(2\pi\, z \cdot x\big) & \text{if } z \in -\hat{\mathbb{Z}}^n \ , \\ \mathbf{1} & \text{if } z = 0 \ . \end{cases}$$

(e) 若 $\int f\, d\mathcal{L}^n = 0$，则称 $\mathbb{T}^n$ 上的函数 f 为零均值的。对于 $s \in \mathbb{R}$，（零均值的、实）Sobolev空间 $H^s(\mathbb{T}_n)$ 可视为由形式级数组成的集合：

$$\mathring{H}^s(\mathbb{T}^n) = \left\{ f = \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \alpha_z \varphi_z : \ \alpha_z \in \mathbb{R}, \ \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} |z|^{2s}\, |\alpha_z|^2 < \infty \right\} \ .$$

°那么，对于所有满足 $r + s \geq 0$ 的 $f = \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \alpha_z \varphi_z \in H^r(\mathbb{T}^n)$ 和 $g = \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \beta_z \varphi_z \in H^s(\mathbb{T}^n)$,

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{T}^n} = \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \alpha_z\, \beta_z.$$

范数 $\mathring{H}^s(\mathbb{T}^n)$ 定义为 $\sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} |z|^{2s}\, |\alpha_z|^2$ 的平方根。等价地，也可以用 λ_z^s 代替 $|z|^{2s}$来定义。这是[5]中采用的约定。两个范数只相差一个因子 $(2\pi)^s$。

(f) Giv对于任意函数 $u\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$，我们定义级数 $\sum_z u(z)$ 沿立方体的主值为

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}^n}^{\square} u(z) := \lim_{L\to\infty} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n,\ \|z\|_\infty < L/2} u(z)$$

前提是后一个极限在 $\mathbb{C}$ 或在 $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 中存在。

°**(g)** 由于 M 是紧的，存在唯一的零均值 *Green* 核 G 满足

$$\mathring{G}(x,y) \simeq |x-y|^{2-n} \ .$$

°特别地，对所有 $p < \frac{n}{n-2}$， $G \in L^p(M \times M)$。我们断言：

$$\begin{aligned} \mathring{G}(x,y) &= \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}^{\square} \frac{1}{(2\pi|z|)^2}\, \varphi_z(x)\, \varphi_z(y) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}^{\square} \frac{1}{(2\pi|z|)^2}\, \Phi_z(x)\, \overline{\Phi}_z(y) \\ &= \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}^{\square} \frac{1}{(2\pi|z|)^2}\, \Phi_z(x-y) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}^{\square} \frac{1}{(2\pi|z|)^2}\, \cos\Big(2\pi\, z\cdot(x-y)\Big), \end{aligned}$$

其中，收敛几乎处处成立，并且在 L^p 中对 $p < n/(n-2)$成立。事实上，考虑滤过 $(\mathfrak{F}_L)$，其中 $\mathfrak{F}_L$ 是由 $z \in \mathbb{Z}^n$、 $\|z\|_\infty < L/2$的 φ_z 生成的 σ代数，而

°相关闭鞅 $G_L = \mathbf{E}[G|\mathfrak{F}_L]$，其中期望是相对于体积测度 vol ⊗vol 而取的。取满足 $\|z\|_\infty < L/2$的 $z \in \mathbb{Z}^n$。由于 φ_z 是 $\mathfrak{F}_L$可测的，我们得到

$$\int \mathring{G}_k(x,y)\varphi_z(y)dy = \int \mathring{G}(x,y)\varphi_z(y)dy = (-\Delta)^{-1}\varphi_z(x) = \lambda_z^{-1}\varphi_z(x).$$

另一方面，当 $\|z\|_\infty \geq L/2$ 时，由于 φ_z 构成正交归一基，我们得到$\mathbf{E}[\varphi_z|\mathfrak{F}_L] = 0$，因此

$$\int \mathring{G}_L(x,y)\varphi_z(y)dy = 0.$$

这表明

$$\mathring{G}_L(x,y) = \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}} \lambda_z^{-1}\varphi_z(x)\varphi_z(y),$$

因此 该级数几乎处处收敛，由鞅收敛定理可知 .

(h) 该多重调和算子定义为

$$a_n \cdot (-\Delta)^{n/2} \qquad \text{with} \qquad a_n := \frac{2}{\Gamma(n/2)\,(4\pi)^{n/2}}\ .$$

逆算子的核记为 k。

关于 Green 核，我们有如下表示。

引理 1.1. 我们有

$$k = \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}^{\square} \frac{1}{(2\pi|z|)^n}\,\varphi_z \otimes \varphi_z,$$

其中，级数在 $L^2(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$ 中收敛，且几乎处处收敛。

注 1.2. 我们猜想该收敛性实际上处处成立，但尚无证明。

证明。 由于右侧的级数是正交的，我们得到

$$\left\| \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \lambda_z^{-n/2}\varphi_z \otimes \varphi_z \right\|_{L^2} = \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} (2\pi z)^{-2n} < \infty.$$

这表明该级数实际上在 L^2 中收敛。其余结论可通过与前一个引理相同的鞅论证得到。

□

引理 1.3. 函数

$$f\colon x \longmapsto k(x,0) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty \mathring{p}_t(x,0)\, t^{n/2-1} dt \tag{1}$$

在每个 $x \in \mathbb{T}^n \setminus \{0\}$ 处均可微，且对每个 $k \leq n$,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_k}\mathring{p}_t(x,0)\, t^{n/2-1} dt\ . \tag{2}$$

证明。 (1) 中的热核表示与 [6, 引理 2。4]相同。对固定的 $k \leq n$，标准的高斯热核上界估计保证了 (2) 右端的可求和性，因此 (2) 可由积分号下求导得到。由于 $x \mapsto (\frac{\partial}{\partial x_k}\mathring{p}_t)(x,0)$ 对整个 k 上的每个 $\mathbb{T}^n$ 均连续，因此 $\frac{\partial}{\partial x_k} f$ 在 0 以外连续，而 f 的可微性可由多元微积分中的标准论证得到。

□

常数 a_n 的取值使得 k具有精确的对数发散。

引理 1.4 ([5])。 $\exists C = C(n)$: $\forall x,\ y \in \mathbb{T}^n$:

$$\left| k(x,y) - \log\frac{1}{d(x,y)} \right| \leq C\ . \tag{3}$$

证明。 注意， [5] 中关于格林算子的 $n/2$ 次幂的核 $G^{n/2}(x,y)$ 的命题 2.13 中的估计不仅对偶数 n 成立，对奇数 n 也成立。 □

1.2 离散环面上的拉普拉斯算子与核

（a）在下文中，固定 $L \in \mathbb{N}$。为方便起见，我们假设 L 是奇数。令

$$\mathbb{Z}_L^n := \{z \in \mathbb{Z}^n : \|z\|_\infty := \max_{k=1,\dots,n} |z_k| < L/2\} ,$$

并令

$$\mathbb{T}_L^n := \big(\tfrac{1}{L}\mathbb{Z}\big)^n / \mathbb{Z}^n$$

表示边长为 $\frac{1}{L}$ 的离散 n-环面。在适当情况下，可以将离散环面 $\mathbb{T}_L^n$ 视为集合 $\frac{1}{L}\mathbb{Z}_L^n = \{\frac{k}{L} : k \in \mathbb{Z}, 0 \le k < L\})^n \subset \mathbb{R}^n$。我们始终将其视为连续环面 $\mathbb{T}^n$ 的子集。此外，令

$$m_L := \frac{1}{L^n} \sum_{z \in \mathbb{T}_L^n} \delta_z$$

表示 $\mathbb{T}_L^n$ 上的归一化计数测度。若点 $v, u \in \mathbb{T}_L^n$ 满足 $d(v, u) = \frac{1}{L}$，则称它们为邻点，简称 $v \sim u$。$\mathbb{T}_L^n$ 中的每个点都有 $2n$ 个邻点。

(b) 我们定义作用于函数 $f \in L^2(\mathbb{T}_L^n)$ 的离散拉普拉斯算子 Δ_L 为

$$\Delta_L f(v) := L^2 \cdot \sum_{u \sim v} \Big[f(u) - f(v)\Big] = 2nL^2 \big(\mathsf{p}_L f - f\big)(v)$$

其在 $\mathbb{T}_L^n$ 上的转移核定义为

$$p_L(v, u) := \frac{L^n}{2n} \mathbf{1}_{v \sim u}$$

其作用为 $(\mathsf{p}_L f)(v) = L^{-n} \sum_u p_L(v, u) f(u)$。此外，我们定义锚定转移核为 $\mathring{p}_L(v, u) := p_L(v, u) - 1$。

作用于锚定函数 $f \in$ 的离散格林算子 $\mathring{L}^2(\mathbb{T}_L^n)$ 定义为

$$\mathring{\mathsf{G}}_L f := \frac{1}{2nL^2} \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{p}_L^k f = \frac{1}{2nL^2} \sum_{k=0}^{\infty} \mathring{\mathsf{p}}_L^k f .$$

特别地，锚定离散格林核为

$$\mathring{G}_L(v, u) = \frac{1}{2nL^2} \sum_{k=0}^{\infty} \mathring{p}_L^k(v, u)$$

$\mathring{}$ $\mathring{}$其作用为 $(\mathsf{G}_L f)(v) = L^{-n} \sum_y G_L(v, u) f(u)$。

(c) 复数 $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}_L^n, m_L)$ 的完备标准正交基由 $(\Phi_z)^{z \in \mathbb{Z}_L^n}$ 给出，其中

$$\Phi_z(v) := \exp\Big(2\pi i\, z \cdot v\Big) \qquad (\forall v \in \mathbb{T}_L^n) .$$

函数 Φ_z 是负离散拉普拉斯算子 $-\Delta_L$ 的（归一化）特征函数，其特征值

$$\lambda_{L,z} := 4L^2 \sum_{k=1}^{n} \sin^2\Big(\pi z_k / L\Big) . \tag{4}$$

注意，当 $L \to \infty$时，右侧收敛至 $\lambda_z = (2\pi|z|)^2$，对任意 $z \in \mathbb{Z}^n$均成立。

$L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}_L^n, m_L)$ 的完备正交归一基由函数 φ_z 给出，其中 $z \in \mathbb{Z}_L^n$；与之前一样，$\varphi_0 \equiv 1$，且当 $z \in \hat{\mathbb{Z}}^n \cap \mathbb{Z}_L^n$ 时，$\varphi_z(v) = \sqrt{2}\cos\big(2\pi\, z \cdot v\big)$；当 $z \in (-\hat{\mathbb{Z}}^n) \cap \mathbb{Z}_L^n$ 时，$\varphi_z(v) = \sqrt{2}\sin\big(2\pi\, z \cdot v\big)$。

注 1.5。当 L 为偶数时，之前的定义需要作一些修改。集合 $\mathbb{Z}_L^n$ 必须重新定义为

$$\mathbb{Z}_L^n := \big\{-L/2+1, \dots, L/2-1, L/2\big\}^n .$$

对于每个 $z \in \mathbb{Z}_L^n$，我们将其分解为 $z' := (z_k)_{k\in\sigma_z}$ 和 $\tilde{z} := (z_k)_{k\in\tau_z}$，其中 $\sigma_z := \{k \in \{1,\dots,n\} : z_k = L/2\}$，$\tau_z := \{k \in \{1,\dots,n\} : z_k < L/2\}$。类似地，对于 $v \in \mathbb{T}_L^n$，我们令 $v' := (v_k)_{k\in\sigma_z}$ 和 $\tilde{v} := (v_k)_{k\in\tau_z}$。于是

$$\Phi_z(v) = (-1)^{L\,|v'|_{\sigma_z}} \cdot \Phi_{\tilde{z}}(\tilde{v}) \quad \text{with } |v'|_{\sigma_z} := \sum_{k\in\sigma_z} v_k \ .$$

因此，$L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}_L^n,\ m_L)$ 的完备正交归一基由以下函数给出

$$\varphi_z(v) := (-1)^{L\,|v'|_{\sigma_z}} \cdot \varphi_{\tilde{z}}(\tilde{v}) \ , \quad z \in Z_L^n \ , \tag{5}$$

其中，对于满足 $\|\tilde{z}\|_\infty < L/2$ 的 $\tilde{z} \in \mathbb{Z}^n$，$\varphi_{\tilde{z}}$ 的定义与前文相同。

(d) 用离散特征函数表示，离散有界格林核，即 $-\Delta_L$ 在零均值 L^2-函数上作用的逆算子的积分核，表示为

$$\begin{aligned} \mathring{G}_L(v,u) &= \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda_{L,z}} \varphi_z(v)\,\varphi_z(u) = \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda_{L,z}} \Phi_z(v)\,\overline{\Phi}_z(u) \\ &= \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}} \frac{1}{4L^2\,\sum_{k=1}^n \sin^2\Big(\pi z_k/L\Big)} \cdot \cos\Big(2\pi\, z\cdot(v-u)\Big) \ , \end{aligned}$$

以及离散多调和核，即作用于零均值的 L^2-函数上的 $a_n(-\Delta_L)^{n/2}$ 的逆算子的积分核，

$$\begin{aligned} k_L(v,u) &= \frac{1}{a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/2}} \varphi_z(v)\,\varphi_z(u) = \frac{1}{a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/2}} \Phi_z(v)\,\overline{\Phi}_z(u) \\ &= \frac{1}{a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}} \frac{1}{\Big(4L^2\,\sum_{k=1}^n \sin^2\big(\pi z_k/L\big)\Big)^{n/2}} \cdot \cos\Big(2\pi\, z\cdot(v-u)\Big) \ . \end{aligned} \tag{6}$$

1.3 延拓与投影

(a) 分片常数延拓/投影。令 $Q_L := [-\frac{1}{2L}, \frac{1}{2L})^n$ 以及 $Q_L(v) := v + Q_L$ 对 $v \in \mathbb{T}_L^n$。注意到

$$\mathbb{T}^n = \dot{\bigcup_{v\in\mathbb{T}_L^n}} Q_L(v) \ .$$

$\mathbb{T}^n$ 上的函数若在每个立方体 $Q_L(v)$ $v \in \mathbb{T}_L^n$ 上都为常数，则称为分段常数函数。离散环面 $\mathbb{T}_L^n$ 上的每个函数 f 都可以唯一地延拓为分段常数函数 $f_{L,\flat}(x)$，方法是令 $f_{L,\flat}(x) := f(v)$，若 $x \in Q_L(v)$。换言之，

$$f_{L,\flat}(x) = (\dot{\mathsf{q}}_L f)(x) := \langle q_L(x,\cdot), f\rangle_{\mathbb{T}_L^n}$$

其马尔可夫核为 $q_L(x,\ v) := L^n\,\mathbf{1}_{v+Q_L}(x)$，定义在 $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}_L^n$ 上。后者是马尔可夫核的限制

$$q_L = L^n \sum_{v\in\mathbb{T}_L^n} \mathbf{1}_{v+Q_L} \otimes \mathbf{1}_{v+Q_L} \quad \text{on } \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n. \tag{7}$$

注意，$\int_{\mathbb{T}^n} q_L(x,\ y)dy = 1$ 以及 $\int_{\mathbb{T}_L^n} q_L(x,\ v)dm_L(v) = 1$。

从 $L^2(\mathbb{T}^n)$ 到 $\mathbb{T}^n$ 上分段常数函数集合的投影由 $f \mapsto f_{\flat,\ L}$ 给出，其中

$$f_{\flat,L}(x) := (\mathsf{q}_L f)(x) := \langle q_L(x,\cdot), f\rangle_{\mathbb{T}^n} = L^n \sum_{v\in\mathbb{T}_L^n} \langle 1_{v+Q_L}, f\rangle_{\mathbb{T}^n} \cdot 1_{v+Q_L}(x) \ .$$

此处及下文中，与核 p、q、r 相关的积分算子分别记为 p、q、r。一般而言，这些算子被视为作用在 $\mathbb{T}^n$ 上的积分算子。若要将它们视为作用在 $\mathbb{T}_L^n$ 上的积分算子，则记作 $\dot{\mathsf{p}}$ $\dot{\mathsf{q}}$ $\dot{\mathsf{r}}$。

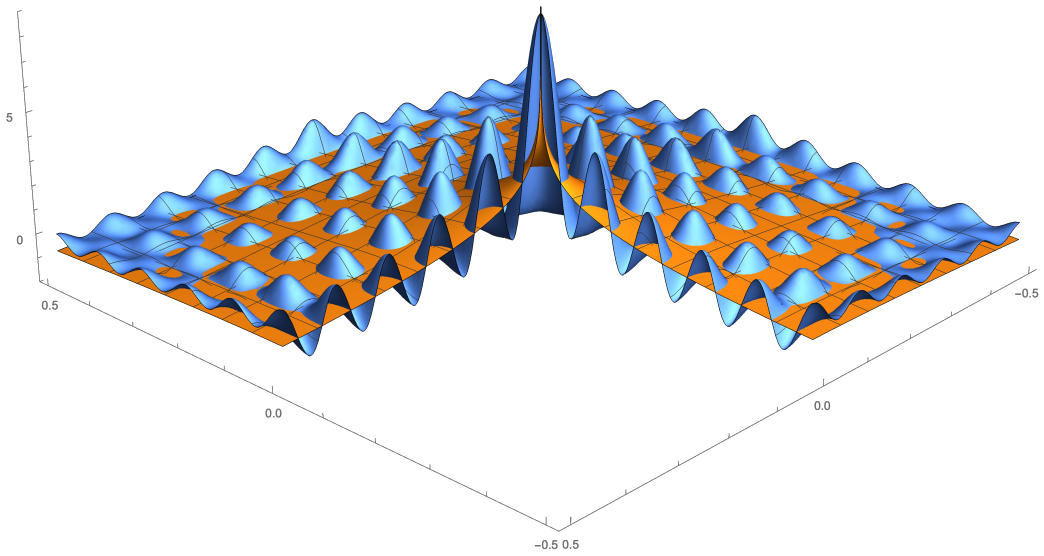


图 1： $k(0,\ y)$（橙色）和 $k_{11}(0,\ y)$（蓝色），对应于 $y \in \mathbb{T}^2$（剖面图，移除了一个象限）。

(b) 傅里叶延拓/投影。令 $\mathcal{D}_L$ 表示由 $\{\varphi_z$ 线性张成的空间：$z \in \mathbb{Z}_L^n\}$。离散环面 $\mathbb{T}_L^n$ 上的每个函数 f 都可唯一表示为 $f = \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n} \alpha_z\varphi_z$，其中系数 $\alpha_z \in \mathbb{R}$ 适用于 $z \in \mathbb{Z}_L^n$；因此，它可唯一延拓为连续环面 $\mathbb{T}^n$ 上的函数 $f_{L,\ \sharp} \in \mathcal{D}_L$。形式上，

$$f_{L,\sharp}(x) \coloneqq (\dot{\mathsf{r}}_L f)(x) \coloneqq \langle f, r_L(x,\cdot)\rangle_{\mathbb{T}_L^n} \coloneqq \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n} \langle f,\varphi_z\rangle_{\mathbb{T}_L^n}\cdot\varphi_z(x)$$

其核为

$$r_L \coloneqq \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n} \varphi_z\otimes\varphi_z \quad \text{on } \mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n. \tag{8}$$

将后者视为定义在 $\mathbb{T}_L^n\times\mathbb{T}^n$ 上的核时，它定义了傅里叶延拓算子。将其视为定义在$\mathbb{T}_L^n\times\mathbb{T}_L^n$ 上的核时，它确实是恒等算子。

反过来，从 $\bigcup_s H^s(\mathbb{T}^n)$ 到 $\mathcal{D}_L$ 的投影 由 $f \mapsto f_{\sharp,\ L}$ 给出，其中

$$f_{\sharp,L}(x) \coloneqq (\mathsf{r}_L f)(x) \coloneqq \langle f, r_L(x,\cdot)\rangle_{\mathbb{T}^n} \coloneqq \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n} \langle f,\varphi_z\rangle_{\mathbb{T}^n}\,\varphi_z(x).$$

特别地，若 $f = \sum_{z\in\mathbb{Z}^n}\alpha_z\varphi_z$，则 $f_{\sharp,\ L} = \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n}\alpha_z\varphi_{z_\circ}$

(c) 增强与约化。对于 $f = \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n}\alpha_z\varphi_z \in \bigcup_s H^s(\mathbb{T}^n)$，我们定义其 谱约化 及其 谱增强，分别如下：

$$f_L^{-\circ} \coloneqq \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n}\left(\frac{\lambda_{L,z}}{\lambda_z}\right)^{n/4}\alpha_z\varphi_z, \qquad f_L^{+\circ} \coloneqq \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n}\left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{L,z}}\right)^{n/4}\alpha_z\varphi_z.$$

请注意

$$\frac{\lambda_{L,z}}{\lambda_z} = \frac{L^2}{\pi^2|z|^2}\sum_{k=1}^n \sin^2(\pi z_k/L) \ \in\ \left[(2/\pi)^2, 1\right] \quad \text{and } \to 1 \text{ as } L\to\infty. \tag{9}$$

类似地，我们分别将其定义为积分约化和积分增强，即

$$f_L^{\circ-} \coloneqq \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n}\vartheta_{L,z}\alpha_z\varphi_z, \qquad f_L^{\circ+} \coloneqq \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n}\frac{1}{\vartheta_{L,z}}\alpha_z\varphi_z$$

with

$$\vartheta_{L,z} \coloneqq \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{L}{\pi z_k} \sin\left(\frac{\pi z_k}{L}\right) \right) \in [(2/\pi)^n, 1] \quad \text{and} \ \to 1 \text{ as } L \to \infty. \tag{10}$$

用积分算子表示，可写为

$$f_L^{-\circ} = \mathsf{r}_L^{-\circ} f, \qquad f_L^{+\circ} = \mathsf{r}_L^{+\circ} f, \qquad f_L^{\circ-} = \mathsf{r}_L^{\circ-} f, \qquad f_L^{\circ+} = \mathsf{r}_L^{\circ+} f$$

在 $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ 上定义如下积分核和增强核

$$r_L^{+\circ} = \sum_{z \in \mathbb{Z}_L^n} \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{L,z}} \right)^{n/4} \varphi_z \otimes \varphi_z, \qquad r_L^{-\circ} = \sum_{z \in \mathbb{Z}_L^n} \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{L,z}} \right)^{-n/4} \varphi_z \otimes \varphi_z$$

$$r_L^{\circ+} = \sum_{z \in \mathbb{Z}_L^n} \vartheta_{L,z}^{-1} \, \varphi_z \otimes \varphi_z, \qquad r_L^{\circ-} = \sum_{z \in \mathbb{Z}_L^n} \vartheta_{L,z} \, \varphi_z \otimes \varphi_z$$

$$r_L^{+} = \sum_{z \in \mathbb{Z}_L^n} \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{L,z}} \right)^{n/4} \vartheta_{L,z}^{-1} \, \varphi_z \otimes \varphi_z, \qquad r_L^{-} = \sum_{z \in \mathbb{Z}_L^n} \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{L,z}} \right)^{-n/4} \vartheta_{L,z} \, \varphi_z \otimes \varphi_z$$

引理 1.6。对于 $f \in \mathcal{D}_L$,

$$\mathsf{q}_L f = f_L^{\circ-} \ \textit{on} \ \mathbb{T}_L^n \quad \textit{and} \quad \mathsf{q}_L (f_L^{\circ+}) = f \ \textit{on} \ \mathbb{T}_L^n.$$

证明。对于 $f = \Phi_z$，若 $z \in \mathbb{Z}_L^n$，且对于 $v \in \mathbb{T}_L^n$,

$$\begin{aligned} \mathsf{q}_L f(v) &= L^n \int_{v+Q_L} \Phi_z(x) dx = \Phi_z(v) \cdot L^n \int_{Q_L} \Phi_z(x) dx \\ &= \Phi_z(v) \cdot \prod_{k=1}^{n} L \int_{-\frac{1}{2L}}^{\frac{1}{2L}} \cos(2\pi x_k z_k) dx_k = \Phi_z(v) \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{L}{\pi z_k} \sin\left(\frac{\pi z_k}{L}\right) \right). \end{aligned}$$

因此，对于满足 $z \in \mathbb{Z}_L^n$ 的 $f = \varphi_z$，且对于 $v \in \mathbb{T}_L^n$,

$$\mathsf{q}_L f(v) = f(v) \cdot \vartheta_{L,z}.$$

由此即可得出结论。 □

(d) 连续与离散标量积。对于函数 $f = \sum_{z \in \mathbb{Z}_L^n} \alpha_z \varphi_z$ 和 $g = \sum_{w \in \mathbb{Z}_L^n} \beta_w \varphi_w$，$\mathbb{T}_L^n$ 与 $\mathbb{T}^n$ 中的标量积相同:

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{T}_L^n} = \langle f, g \rangle_{\mathbb{T}^n} = \sum_{z \in \mathbb{Z}_L^n} \alpha_z \, \beta_z \ .$$

然而，如果 f 和 g 的傅里叶表示中也包含高频项，这个简单的恒等算子便不再成立。

引理 1.7。 *(i)* 对于 $f = \sum_{z \in \mathbb{Z}_K^n} \alpha_z \varphi_z$ 和 $g = \sum_{w \in \mathbb{Z}_K^n} \beta_w \varphi_w$,

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{T}_L^n} = \sum_{z \in \mathbb{Z}_K^n} \sum_{w \in \mathbb{Z}^n, \|z+Lw\|_\infty < K/2} \alpha_z \, \beta_{z+Lw}.$$

□*(ii)* 对任意 $\alpha\colon \ \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$，极限 $f = \sum \alpha_z \varphi_z$ 在 $L^2(\mathbb{T}_L^n)$ 中存在，当且仅当$_{z \in \mathbb{Z}^n}$

$$\sup_K \Big\| \sum_{z \in \mathbb{Z}_K^n} \alpha_z \varphi_z \Big\|_{\mathbb{T}_L^n}^2 < \infty \tag{11}$$

(iii) For all $f = \overset{\square}{\sum_{z \in \mathbb{Z}^n}} \alpha_z \varphi_z$ *and* $g = \overset{\square}{\sum_{w \in \mathbb{Z}^n}} \beta_w \varphi_w$ *in* $L^2(\mathbb{T}_L^n)$,

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{T}_L^n} = \lim_{K \to \infty} \sum_{z \in \mathbb{Z}_K^n} \sum_{w \in \mathbb{Z}^n : \|z+Lw\|_\infty < K/2} \alpha_z \beta_{z+Lw} \ , \qquad \langle f, g \rangle_{\mathbb{T}^n} = \overset{\square}{\sum_{z \in \mathbb{Z}^n}} \alpha_z \, \beta_z.$$

证明。 我们先证明 (i)。为此，我们证明复希尔伯特空间中的类似断言：对于所有 $f=\sum_{z\in\mathbb{Z}_K^n} a_z\Phi_z$ 和 $g=\sum_{w\in\mathbb{Z}_K^n} b_w\Phi_w$,

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_{\mathbb{T}_L^n} &= \Big\langle \sum_{z\in\mathbb{Z}_K^n} a_z\Phi_z,\ \sum_{w\in\mathbb{Z}_K^n} b_w\Phi_w\Big\rangle_{\mathbb{T}_L^n}\\ &= \int_{\mathbb{T}_L^n}\sum_{z\in\mathbb{Z}_K^n}\sum_{w\in\mathbb{Z}_K^n} a_z\,\bar{b}_w\exp\big(2\pi i\,v(z-w)\big)\,dm_L(v)\\ &= \sum_{z\in\mathbb{Z}_K^n}\sum_{w\in\mathbb{Z}_K^n} a_z\,\bar{b}_w\cdot\int_{\mathbb{T}_L^n}\exp\big(2\pi i\,v(z-w)\big)\,dm_L(v)\\ &= \sum_{z\in\mathbb{Z}_K^n}\ \sum_{w\in\mathbb{Z}^n,\|z+Lw\|_\infty<K/2} a_z\,\bar{b}_{z+Lw}\end{aligned}$$

因为对每个 $z\in\mathbb{Z}^n$

$$\int_{\mathbb{T}_L^n}\exp(2\pi i\,vz)\,dm_L(v)=\begin{cases}1, & \text{if } z\in L\mathbb{Z}^n\\ 0, & \text{else}\end{cases}.$$

实希尔伯特空间的结论由此得出：取 $a_z=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_z+i\alpha_{-z})$ 和 $a_{-z}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_z-i\alpha_{-z})$ˆ作为 $z\in\mathbb{Z}^n$,并对 b_z 作类似处理。

我们证明 (ii)。首先假设 $f\in L^2(\mathbb{T}_L^n)$。那么 $\sum_{z\in\mathbb{Z}_K^n}\alpha_z\varphi_z$ 收敛到 f 中的 $L^2(\mathbb{T}_L^n)$。这意味着 (11)。

反过来，假设 (11) 成立。与引理1.1中的论证类似的鞅论证表明， f 是 $L^2(\mathbb{T}_L^n)$ 中 $\sum_{z\in\mathbb{Z}_K^n}\alpha_z\varphi_z$的极限。

我们证明 (iii)。只需证明第一个等式。根据线性性，只需对$f=g$证明即可。鉴于前面的结果，我们有

$$\|f\|_{\mathbb{T}_L^n}^2=\lim_{K\to\infty}\Big\|\sum_{z\in\mathbb{Z}_K^n}\alpha_z\varphi_z\Big\|^2=\lim_{K\to\infty}\sum_{z\in\mathbb{Z}_K^n}\ \sum_{w\in\mathbb{Z}^n:\|z+Lw\|_\infty<K/2}\alpha_z\alpha_{z+Lw},$$

这就证明了所声称的结论。根据 (11)，该级数收敛。 □

□注 1.8。 根据前一个引理，特别是，对于每个$f=\sum\alpha_z\varphi_z,z\in\mathbb{Z}^n$

$$\|f\|_{\mathbb{T}_L^n}^2=\sum_{z\in\mathbb{Z}^n}\sum_{w\in\mathbb{Z}^n}\alpha_z\,\alpha_{z+Lw}$$

如果后一个级数绝对收敛。

可以证明（参见定理3.7的证明），若 $f\in\bigcup_{s>n/2}H^s(\mathbb{T}^n)$，则后一个级数绝对收敛。这与索伯列夫嵌入定理相符，该定理表明此时 $f\in\mathcal{C}(\mathbb{T}^n)$，从而保证 f （在 $\mathbb{T}_L^n$的格点处）的逐点取值是有意义的。

2 离散环面上的多调和高斯场

2.1 场的定义与构造

在下文中，固定整数 n 和 L。为方便起见，我们假设 L 为奇数，并设 $N:=L^n$。

定义 2.1. 随机场 $h_L=(h_L(v))^{v\in\mathbb{T}_L^n}$ ——定义在某个概率空间 $(\Omega,\mathfrak{A},\mathbf{P})$ ——称为离散 环面上的多调和高斯场 n-若它是一个中心化高斯场，其协方差函数为 k_L (见 (6))。

命题 2.2. 给定概率空间 $(\Omega\ \mathfrak{A},\mathbf{P})$上的独立同分布标准正态变量 ξ_z *for* $z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}$，在 $\mathbb{T}_L^n$ 上定义的多调和高斯场为

$$h_L^\omega(v)\coloneqq\frac{1}{\sqrt{a_n}}\sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}}\frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/4}}\cdot\xi_z^\omega\cdot\varphi_z(v)\qquad(\forall v\in\mathbb{T}_L^n,\ \omega\in\Omega)\ . \tag{12}$$

这里 $\lambda_{L,\ z}=4L^2\sum_{k=1}^n\sin^2\left(\pi z_k/L\right)$ 对于 $z\in\mathbb{Z}_L^n$ 是离散拉普拉斯算子的特征值，见（4），并且在随机场的表示中排除了特征值 0。

证明。 对于所有 $v,\ u\in\mathbb{T}_L^n$,

$$\mathbf{E}\big[h_L(v)\,h_L(u)\big]=\frac{1}{a_n}\sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}}\frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/2}}\cdot\varphi_z(v)\,\varphi_z(u)=k_L(v,u)\ .\qquad\square$$

或者，也可以根据离散环面上的白噪声来定义离散环面 $\mathbb{T}_L^n$ 上的多调和场。回顾一下，若随机场 $\Xi=(\Xi_v)^{v\in\mathbb{T}_L^n}$ 满足：对于 $v\in\mathbb{T}_L^n$，Ξ_v 是相互独立的中心化高斯随机变量，且方差为 L^n，则称其为定义在 $(\mathbb{T}_L^n,\ m_L)$ 上的白噪声。（这种归一化保证了 $\int_{\mathbb{T}_L^n}\Xi_v dm_L(v)$ 服从 $\mathcal{N}(0,\ 1)$ 分布。）

命题 2.3。 给定白噪声 $\Xi=(\Xi_v)^{v\in\mathbb{T}_L^n}$，定义在$(\mathbb{T}_L^n,\ m_L)$上，则在$\mathbb{T}_L^n$ 上的多调和高斯场定义为

$$h_L^\omega(v)=\frac{1}{\sqrt{a_n}\,L^n}\sum_{u\in\mathbb{T}_L^n}\mathring{G}_L^{n/4}(v,u)\,\Xi_u^\omega$$

with

$$\mathring{G}_L^{n/4}(v,u)=\sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}}\frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/4}}\cdot\cos\left(2\pi z(v-u)\right)\ .$$

证明。 对于所有 $v,\ w\in\mathbb{T}_L^n$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[h_L(v)\,h_L(w)\big]&=\frac{1}{a_n\,L^{2n}}\sum_{u\in\mathbb{T}_L^n}\mathring{G}_L^{n/4}(v,u)\cdot\mathring{G}_L^{n/4}(w,u)\cdot L^n\\&=\frac{1}{a_n}\mathring{G}_L^{n/2}(v,w)=k_L(v,w)\ .\end{aligned}\qquad\square$$

换句话说,

$$h_L^\omega=\frac{1}{\sqrt{a_n}}\,\mathring{\mathsf{G}}_L^{n/4}\,\Xi^\omega \tag{13}$$

其中，$\Xi\coloneqq(\Xi_v)^{v\in\mathbb{T}_L^n}$ 是 $\mathbb{T}_L^n$ 上的白噪声。后者是定义在 $\mathbb{R}^N\cong\mathbb{R}^{\mathbb{T}_L^n}$ 上的高斯随机变量——回忆一下，$N=L^n$ ——其分布为

$$d\mathbf{P}(\Xi)=\frac{1}{(2\pi N)^{N/2}}\,e^{-\frac{1}{2N}\|\Xi\|^2}\,d\mathcal{L}^N(\Xi)\ .$$

这里 $\|\Xi\|$ 表示 $\Xi\in\mathbb{R}^N$ 的欧几里得范数，因此在同一 $\mathbb{R}^N\cong\mathbb{R}^{\mathbb{T}_L^n}$ 下,

$$\frac{1}{N}\|\Xi\|^2=\|\Xi\|^2_{L^2(\mathbb{T}_L^n,m_L)}\ .$$

2.2 对离散环面上的多调和高斯场的再审视

(a) 考虑将 $\mathbb{R}^N$正交分解为直线 $\mathbb{R}\cdot(1,\dots,1)$ 及其正交补 $\mathring{H}\coloneqq\{\Xi\in\mathbb{R}^N\colon\ \sum_{v=1}^N\Xi_v=0\}$。更准确地说，考虑映射

$$\bar{A}:\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R},\quad\Xi\longmapsto\bar{\Xi}\coloneqq\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{v=1}^N\Xi_v$$

and

$$\mathring{A} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathring{H}, \quad \Xi \longmapsto \mathring{\Xi} \quad \text{with} \quad \mathring{\Xi}_j := \Xi_j - \frac{1}{\sqrt{N}} \bar{\Xi} \, .$$

注意， $A := (\mathring{A}, \bar{A}) : \mathbb{R}^N \to \mathring{H} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{1+N}$ 是一个双射线性映射，其 $A^T A = E_N$，且逆映射为

$$B : \mathring{H} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N, \quad (\mathring{\Xi}, t) \mapsto \mathring{\Xi} + \frac{t}{\sqrt{N}} \cdot (1, \dots, 1) \, .$$

因此，若 $\mathcal{L}_H^{N-1}$ 表示超平面 $\mathring{H}$ 上的 $(N-1)$ 维勒贝格测度，则在 $\mathbb{R}^N$ 上，

$$\mathcal{L}^N = \mathcal{L}_{\mathring{H}}^{N-1} \otimes \mathcal{L}^1 \, .$$

推前测度 $\bar{A}_* \mathbf{P}$ 是实数轴上的正态分布 $\mathcal{N}(0, \sqrt{N})$。推前测度 $\mathring{\bar{A}}_* \mathbf{P}$ 是超平面 $\mathring{H}$ 上的高斯测度，具体表示为 $\mathring{A}_* \mathbf{P}$，称为“扎根白噪声的分布”，是超平面 H 上的高斯测度，具体表示为

$$d\mathring{\mathbf{P}}(\Xi) = \frac{1}{(2\pi N)^{\frac{N-1}{2}}} \, e^{-\frac{1}{2N}\|\Xi\|^2} \, d\mathcal{L}_{\mathring{H}}^{N-1}(\Xi) \, .$$

它也可以刻画为条件分布 $\mathbf{P}(\cdot \,|A = 0)$。

(b) 我们定义 $\mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^{\mathbb{T}_L^n}$ 上的一个测度为

$$d\widehat{\boldsymbol{\nu}}(h) := c_n \, e^{-\frac{a_n}{2N}\|(-\Delta_L)^{n/4} h\|^2} \, d\mathcal{L}^N(h) \tag{14}$$

其中常数为

$$c_n := \left(\frac{a_n}{2\pi N}\right)^{\frac{N-1}{2}} \cdot \prod_{z \in \mathbb{Z}_L^n \setminus \{0\}} \left(4L^2 \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \left(\pi z_k / L\right) \right)^{n/4} \, , \tag{15}$$

并考虑上述映射 A 和 A 下的推前测度。于是

$$\bar{A}_* \widehat{\boldsymbol{\nu}} = c_n \, \mathcal{L}^1 \quad \text{on } \mathbb{R}^1$$

以及 $\boldsymbol{\nu} := A_* \widehat{\boldsymbol{\nu}}$ 是超平面 $\mathring{H}$ 上的一个测度（实际上，正如我们将在下文看到的，它是一个概率测度）$= \{\Xi \in \mathbb{R}^N : \ \bar{\Xi} = 0\} \cong \mathbb{R}^{N-1}$ 给出为

$$d\boldsymbol{\nu}(h) := c_n \, e^{-\frac{a_n}{2N}\|(-\Delta_L)^{n/4} h\|^2} \, d\mathcal{L}_{\mathring{H}}^{N-1}(h) \, .$$

(c) 现在考虑映射

$$T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \, , \qquad h \mapsto \Xi = \sqrt{a_n} \, (-\Delta_L)^{n/4} h$$

以及其限制 $T : \ H \to H$。后者是双射，其逆映射为

$$\mathring{T}^{-1} : \mathring{H} \to \mathring{H} \, , \qquad \Xi \mapsto h = \frac{1}{\sqrt{a_n}} \, \mathring{\mathsf{G}}_L^{n/4} \Xi \, ,$$

参见（13），其行列式为

$$\det \mathring{T} = a_n^{\frac{N-1}{2}} \cdot \prod_{z \in \mathbb{Z}_L^n \setminus \{0\}} \lambda_{L,z}^{n/4} \, .$$

定理 2.4. 离散多调和场在 $\mathbb{T}_L^n$ 上的分布由 $\boldsymbol{\nu}$ 上的概率测度给出。（事实上，它由锚定场的超平面支撑。）此外，

$$\mathring{T}_* \boldsymbol{\nu} = \mathring{\mathbf{P}} \, .$$

°证明。 对于 H 上有界可测的 f，

$$\begin{aligned}\int_{\mathring{H}} f(\Xi)\, d\mathring{T}_*\boldsymbol{\nu}(\Xi) &= \int_{\mathring{H}} f(\mathring{T}h)\, d\boldsymbol{\nu}(h)\\ &= c_n \int_{\mathring{H}} f(\mathring{T}h)\, e^{-\frac{a_n}{2N}\|(-\Delta_L)^{n/4}h\|^2}\, d\mathcal{L}_{\mathring{H}}^{N-1}(h)\\ &= c_n \int_{\mathring{H}} f(\mathring{T}h)\, e^{-\frac{1}{2N}\|\mathring{T}h\|^2}\, d\mathcal{L}_{\mathring{H}}^{N-1}(h)\\ &= c_n \det \mathring{T}^{-1} \int_{\mathring{H}} f(\Xi)\, e^{-\frac{1}{2N}\|\Xi\|^2}\, d\mathcal{L}_{\mathring{H}}^{N-1}(\Xi)\\ &= c_n \det \mathring{T}^{-1} (2\pi N)^{\frac{N-1}{2}} \int_H f(\Xi)\, d\mathring{\mathbf{P}}(\Xi).\end{aligned}$$

由于根据我们对 c_n的选择， $c_n \det \mathring{T}^{-1}(2\pi N)^{\frac{N-1}{2}} = 1$，这就证明了该断言。 □

2.3 离散环面上的约化多调和高斯场

除了离散环面上的多调和高斯场 h_L 之外，我们有时还会考虑两个密切相关的随机场 $h_L^{-\circ}$ 和 h_L^-，在它们的定义性质中，离散拉普拉斯算子的特征值$\lambda_{L,}$

$4L^2 \sum_{k=1}^n {}^2(\pi z_k/L)$ $\lambda_z = 2\pi|z|^2$ $_z =$ sin 被连续拉普拉斯算子的特征值 ( ) 或 $\lambda_z \cdot \vartheta_{L\,z}^{-4/n}$. 分别替代，其中$\vartheta_{L,\ z}$ 如式 (10) 所示。

更准确地说，谱约化离散多重调和高斯场是一个中心化高斯场 $h_L^{-\circ} = (h_L^{-\circ}(v))^{v\in\mathbb{T}_L^n}$，其协方差函数为

$$k_L^{-\circ}(v,u) := \frac{1}{a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda_z^{n/2}}\, \varphi_z(v)\,\varphi_z(u) = \frac{1}{a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}} \frac{1}{(2\pi|z|)^n} \cdot \cos\Big(2\pi\, z\cdot(v-u)\Big)\ .$$

约化离散多重调和高斯场 是一个中心化高斯场 $h_L^- = (h_L^-(v))^{v\in\mathbb{T}_L^n}$，其协方差函数为

$$k_L^{-}(v,u) := \frac{1}{a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}} \frac{\vartheta_{L,z}^2}{\lambda_z^{n/2}}\, \varphi_z(v)\,\varphi_z(u) = \frac{1}{a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}} \frac{\vartheta_{L,z}^2}{(2\pi|z|)^n} \cdot \cos\Big(2\pi\, z\cdot(v-u)\Big)\ .$$

与之前处理 h_L的方式类似，我们得到以下表示结果。

注记 2.5。 (i) 给定定义在 $\mathbb{T}_L^n$上的多调和高斯场 h_L，约化多调和高斯场和谱约化多调和高斯场定义为

$$h_L^- := \mathsf{r}_L^-(h_L), \qquad h_L^{-\circ} := \mathsf{r}_L^{-\circ}(h_L)\ .$$

(ii) 给定 $z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}$的独立同分布标准正态变量 ξ_z，定义在 $\mathbb{T}_L^n$上的约化多调和高斯场定义为

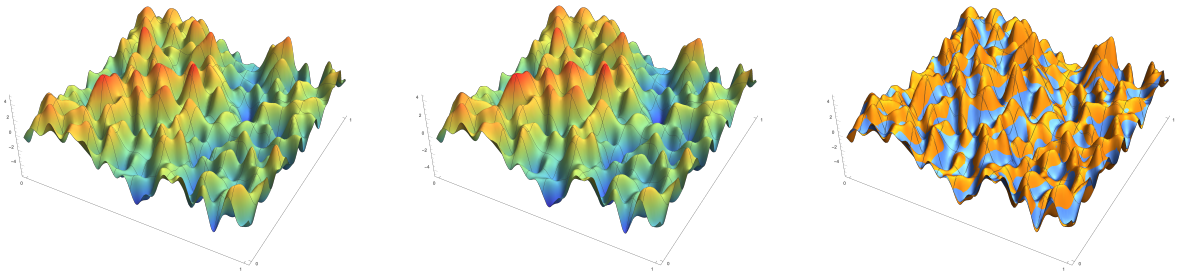
$$h_L^-(v) := \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}} \frac{\vartheta_{L,z}}{\lambda_z^{n/4}} \cdot \xi_z \cdot \varphi_z(v)\ . \tag{16}$$

谱约化多调和高斯场则定义为

$$h_L^{-\circ}(v) := \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda_z^{n/4}} \cdot \xi_z \cdot \varphi_z(v)\ . \tag{17}$$

3 连续环面上的多调和高斯场及其（半）离散近似

本节旨在分析连续环面上的多调和场相对于离散环面上的高斯场，以及后者在连续环面上的半离散扩展的逼近性质。



(a) $h_{25,\ \sharp}$ **(b)** $h_{\sharp,\ 25}$ **(c)** $h_{25,\ \sharp}$（蓝色）以及$h_{\sharp,\ 25}$（橙色）

图 2： h 在 $\mathcal{D}_{25}$ 上的傅里叶延拓/投影，随机性采用相同的实现。

- 基本对象是连续环面上的多调和场 h 及其离散对应物，即离散环面上的多调和场 h_L 。

- 从 $\mathbb{T}^n$上的场 h出发，我们定义其傅里叶投影（又称特征函数近似）$h_{\sharp,\ L}$、分段常数投影$h_{\flat,\ L}$、自然投影$h_{\circ,\ L}$以及增强投影$h_{+,\ L}$。它们都是 $\mathbb{T}^n$上的高斯随机场。

- 从 $\mathbb{T}^n_L$上的场 h_L 出发，我们定义其傅里叶延拓$h_{L,\ \sharp}$ 以及分段常数延拓$h_{L,\ \flat}$。对于所谓的谱约化离散场$h_L^{-\circ}$ 和 $\mathbb{T}^n_L$上的约化离散场 h_L^- ，也定义了类似的延拓。所有这些延拓都是$\mathbb{T}^n$上的高斯随机场。

总结

- $\flat$ 表示分片常数延拓/投影， $\sharp$ 表示傅里叶延拓/限制；- $h_{L,\ *}$ 与 $*\in\{\flat,\sharp\}$ 表示离散场 h_L的相应延拓； $h_L^{-\circ}$ 与 h_L^- 同理；- $h_{*,\ L}$ 与 $*\in\{\flat,\sharp,\circ,+\}$ 表示将连续场 h 投影到连续环面上阶数为 L 的相应场类中。

3.1 连续环面上的多调和高斯场及其投影的收敛性质

3.1.1 连续环面上的多调和高斯场 h

定义 3.1。 连续 n 环面上的随机场 $h=(\langle h|f\rangle)_{f\in H^{n/2}(\mathbb{T}^n)}$ 称为多调和高斯场，若它是一个中心化高斯场，其协方差函数为 k ，其中

$$\mathbf{E}\big[\langle h|f\rangle\cdot\langle h|g\rangle\big]=\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}f(x)k(x,y)g(y)\,dy\,dx\qquad(\forall f,g\in H^{n/2}(\mathbb{T}^n))\ .$$

命题 3.2。 (i) 多调和高斯场存在。

$\mathring{}(ii)$ 它可以在 $H^{-\epsilon}(\mathbb{T}^n)$ 中实现。

(iii) 配对 $\langle h|f\rangle$ 连续延拓至所有 $f\in\mathring{H}^{-n/2}(\mathbb{T}^n)$。

证明。 对于偶数 n，这里考虑的多调和场只是 [5] 中所讨论的共多调和场的一个特例，该文研究了黎曼流形上的一大类情形。对于环面这样的平坦空间，用于证明定理 3.1 和评注 3.4+3.5 的论证显然也适用于奇数 n。

□

3.1.2 h的傅里叶投影

给定连续环面上的多调和高斯场 h，我们定义其在空间 $\mathcal{D}_L$ 上的投影（见小节 1.3(a)）：

$$h_{\sharp,L}(x) \coloneqq \langle h | r_L(x,\cdot)\rangle, \qquad r_L \coloneqq \sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}} \varphi_z \otimes \varphi_z \tag{18}$$

这是定义在 $\mathbb{T}^n$ 上的一个中心化高斯场，其协方差函数为

$$k_{\sharp,L}(x,y) \coloneqq \frac{1}{a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda_z^{n/2}} \cdot \cos\Big(2\pi\, z\cdot(x-y)\Big) \tag{19}$$

其中 $\lambda_z = (2\pi|z|)^2$。

命题 3.3 ([5])。 对于所有 $f \in \mathring{H}^{-n/2}(\mathbb{T}^n)$,

$$\langle h_{\sharp,L}, f\rangle_{\mathbb{T}^n} \to \langle h, f\rangle_{\mathbb{T}^n} \quad \textit{in } L^2(\mathbf{P}) \textit{ as } L\to\infty$$

并且对于每个 $\epsilon > 0$,

$$h_{\sharp,L} \to h \quad \textit{in } L^2(H^{-\epsilon}(\mathbb{T}^n), \mathbf{P}) \textit{ as } L\to\infty\,.$$

证明。 为方便读者，我们简要概述 [5] 中关于第一个断言的论证:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big[\langle h - h_{\sharp,L}, f\rangle^2\Big] &= \frac{1}{a_n}\mathbf{E}\left[\left|\sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\mathbb{Z}^n_L} \frac{1}{(2\pi|z|)^{n/2}}\,\xi_z\,\langle\varphi_z, f\rangle\right|^2\right]\\ &= \frac{1}{a_n}\sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\mathbb{Z}^n_L} \frac{1}{(2\pi|z|)^n}\,\langle\varphi_z, f\rangle^2 \to 0\end{aligned}$$

因为 $L\to\infty$

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \frac{1}{(2\pi|z|)^n}\,\langle\varphi_z, f\rangle^2 = \big\|(-\Delta)^{-n/2} f\big\|^2_{L^2} = \|f\|^2_{\mathring{H}^{-n/2}} < \infty\,. \qquad \square$$

3.1.3 h 的分段常数投影

给定一个多调和高斯场 h 在连续环面上，我们定义其分段常数投影（参见小节 1.3(b)）如下:

$$h_{\flat,L}(x) \coloneqq \langle h | q_L(x,\cdot)\rangle, \qquad q_L \coloneqq L^n \sum_{v\in\mathbb{T}^n_L} \mathbf{1}_{v+Q_L}\otimes\mathbf{1}_{v+Q_L}\,. \tag{20}$$

那么 $(h_{\flat,\,L}(x))_{x\in\mathbb{T}^n}$ 是一个协方差函数为下式的中心化高斯场

$$k_{\flat,L}(x,y) \coloneqq \mathbb{E}\big[h_{\flat,L}(x)\,h_{\flat,L}(y)\big] = L^{2n}\sum_{v,w\in\mathbb{T}^n_L} \mathbf{1}_{v+Q_L}(x)\,\mathbf{1}_{w+Q_L}(y)\int_{v+Q_L}\int_{w+Q_L} k(x',y')\,dy'\,dx'\,. \tag{21}$$

命题 3.4. 对所有 $f\in L^2(\mathbb{T}^n)$,

$$\langle h_{\flat,L}, f\rangle_{\mathbb{T}^n} \to \langle h, f\rangle_{\mathbb{T}^n} \quad \textit{in } L^2(\mathbf{P}) \textit{ as } L\to\infty$$

并且对每个 $s > n/2$,

$$\big\|h_{\flat,L} - h\big\|_{H^{-s}} \to 0 \quad \textit{in } L^2(\mathbf{P}) \textit{ as } L\to\infty\,.$$

证明。 由于 $\langle h_{\flat,L}, f\rangle_{\mathbb{T}^n} = \langle h, \mathsf{q}_L f\rangle_{\mathbb{T}^n}$，且 $(\mathsf{q}_L f)(x) := \int_{\mathbb{T}^n} q_L(x,y) f(y)\, dy$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big[\langle h_{\flat,L} - h, f\rangle^2\Big] &= \mathbf{E}\Big[\langle h, \mathsf{q}_L f - f\rangle^2\Big] = \big\|\mathsf{q}_L f - f\big\|_{H^{-n/2}}^2 \\ &\le \big\|\mathsf{q}_L f - f\big\|_{L^2}^2 \to 0 \quad \text{as } L \to \infty.\end{aligned}$$

为证明第二个断言，令 h 定义为

$$h = \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \xi_z \frac{\varphi_z}{\lambda_z^{n/4}}$$

由此可得

$$h_{\flat,L} = \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \xi_z \frac{\mathsf{q}_L\varphi_z}{\lambda_z^{n/4}} = \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \frac{\xi_z}{\lambda_z^{n/4}} \sum_{w\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \langle \varphi_w, \mathsf{q}_L\varphi_z\rangle \varphi_w.$$

因此

$$\begin{aligned}\sqrt{a_n}\,(-\Delta)^{-s/2}\,(h - h_{\flat,L}) = &\sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \xi_z \lambda_z^{-n/4-s/2}\,(\varphi_z - \langle \varphi_z, \mathsf{q}_L\varphi_z\rangle\varphi_z) \\ &- \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \xi_z \lambda_z^{-n/4} \sum_{w\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0,z\}} \lambda_w^{-s/2} \langle \varphi_w, \mathsf{q}_L\varphi_z\rangle \varphi_w.\end{aligned}$$

最后，

$$\begin{aligned}a_n \mathbf{E}\big[\big\|h - h_{\flat,L}\big\|_{H^{-s}}^2\big] = &\sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \lambda_z^{-n/2-s}\,(1 - \langle \varphi_z, \mathsf{q}_L\varphi_z\rangle)^2 \\ &+ \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \lambda_z^{-n/2} \sum_{w\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0,z\}} \lambda_w^{-s} \langle \varphi_w, \mathsf{q}_L\varphi_z\rangle^2.\end{aligned} \tag{22}$$

由于对所有 L 都有 $|\langle \varphi_z, \mathsf{q}_L\varphi_z\rangle| \le 1$，并且当 $L\to\infty$ 时 $\langle \varphi_z, \mathsf{q}_L\varphi_z\rangle \to 1$，且

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \lambda_z^{-n/2-s}\,(1 - \langle \varphi_z, \mathsf{q}_L\varphi_z\rangle)^2 \le \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \lambda_z^{-n/2-s} < \infty,$$

我们发现，式（22）右侧的第一项在 $L\to\infty$ 时趋于零。由帕塞瓦尔恒等式以及 $\lambda_z \ge 1$ 对所有 $z \ne 0$ 均成立这一事实，可得

$$\begin{aligned}\sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \lambda_z^{-n/2} \sum_{w\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0,z\}} \lambda_w^{-s} \langle \varphi_w, \mathsf{q}_L\varphi_z\rangle^2 &\le \sum_{w\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \lambda_w^{-s} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0,w\}} \langle \varphi_w, \mathsf{q}_L\varphi_z\rangle^2 \\ &= \sum_{w\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \lambda_w^{-s} \Big[\|\mathsf{q}_L\varphi_w\|_{L^2}^2 - \langle \varphi_w, \mathsf{q}_L\varphi_w\rangle^2\Big] \\ &\le \sum_{w\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \lambda_w^{-s}\end{aligned}$$

其收敛，因为 $s > n/2$。此外，$0 \le \|\mathsf{q}_L\varphi_w\|_{L^2}^2 - \langle \varphi_w, \mathsf{q}_L\varphi_w\rangle^2 \le 1$ 对于所有 w 以及 L，并且$\|\mathsf{q}_L\varphi_w\|_{L^2}^2 - \langle \varphi_w, \mathsf{q}_L\varphi_w\rangle^2 \to 0$ 对于所有 w 当 $L\to\infty$时。因此，(22) 右端的第二项也趋于 $L\to\infty$。 □

3.1.4 h的增强投影

给定连续环面上的多调和高斯场 h，我们将其增强分段常数投影，或简称增强投影，定义为

$$h_{+,L}(x) := \langle h | p_{+,L}(x,\cdot)\rangle, \qquad p_{+,L} := q_L \circ r_L^+ \tag{23}$$

其中，与之前一样，$r_L^+ := \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n} \frac{1}{\vartheta_{L,z}} \cdot \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{L,z}}\right)^{n/4} \cdot \varphi_z \otimes \varphi_z$ 且 $q_L := L^n \sum_{v\in\mathbb{T}_L^n} \mathbf{1}_{v+Q_L} \otimes \mathbf{1}_{v+Q_L}$。它是一个协方差函数为

$$k_{+,L}(x,y) := \frac{1}{a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n} \frac{1}{\vartheta_{L,z}^2} \cdot \frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/2}} \cdot \mathsf{q}_L\varphi_z(x) \cdot \mathsf{q}_L\varphi_z(y). \tag{24}$$

更精确地说，它可以被视为连续环面上的分段常值随机场，或等价地视为离散环面上的随机场。

引理 3.5. *(i)* 对所有 $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$,

$$\mathsf{p}_{+,L} f \to f \quad in\ L^2\ as\ L\to\infty.$$

(ii) 在 $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ 上,

$$k_{+,L} \to k \quad in\ L^0\ as\ L\to\infty.$$

证明。 (i) 回忆一下 $\mathsf{p}_{+,L} = \mathsf{q}_L \circ \mathsf{r}_L^+$。由 [5] 中的例 3.12（及其证明）可知$\|\mathsf{q}_L f - f\|_{L^2} \to 0$ 当 $L\to\infty$ 时成立，并且根据詹森不等式,

$$\left\|\mathsf{q}_L f - \mathsf{q}_L \mathsf{r}_L^+ f\right\|_{L^2} \le \left\|f - \mathsf{r}_L^+ f\right\|_{L^2}.$$

此外，根据 $L\to\infty$，后者趋于 0

$$\begin{aligned}\left\|f - \mathsf{r}_L^+ f\right\|_{L^2}^2 &= \left\| \sum_{\|z\|_\infty < L/2} \left[1 - \frac{1}{\vartheta_{L,z}} \cdot \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{L,z}}\right)^{n/4}\right] \cdot \langle f, \varphi_z\rangle\, \varphi_z + \sum_{\|z\|_\infty > L/2} \langle f, \varphi_z\rangle\, \varphi_z \right\|_{L^2}^2 \\ &= \sum_{\|z\|_\infty < L/2} \left[1 - \frac{1}{\vartheta_{L,z}} \cdot \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{L,z}}\right)^{n/4}\right]^2 \cdot \langle f, \varphi_z\rangle^2 + \sum_{\|z\|_\infty > L/2} \langle f, \varphi_z\rangle^2 \ \to\ 0.\end{aligned}$$

这里最后一项的收敛性源于 $\sum_z \langle f, \varphi_z\rangle^2 = \|f\|_{L^2}^2$ 的有限性。最后一个显示公式中第一项的收敛性则由以下事实得出：对所有 L 和 z，$\left|1 - \frac{1}{\vartheta_{L,z}} \cdot \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{L,z}}\right)\right| \le C := (\frac{\pi}{2})^{3n/2}$；当 $L\to\infty$ 时，对所有 z，$\left|1 - \frac{1}{\vartheta_{L,z}} \cdot \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{L,z}}\right)^{n/4}\right| \to 0$；并且 $\sum_z \langle f, \varphi_z\rangle^2 < \infty$。

(ii) 将 $\mathsf{q}_L^{\otimes 2}$ 记为 q_L 对两个变量函数的二重作用，并令

$$k_L^+(x,y) := \frac{1}{a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n} \frac{1}{\vartheta_{L,z}^2} \cdot \frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/2}} \cdot \varphi_z(x) \cdot \varphi_z(y). \tag{25}$$

则 $k_{+,L} = \mathsf{q}_L^{\otimes 2} k_L^+$。所述收敛将由以下三个收敛断言推出：

(1) $\mathsf{q}_L^{\otimes 2} k(x,y) \to k(x,y)$ 对所有 x 局部一致地收敛 $\neq y$
(2) $\iint \left|\mathsf{q}_L^{\otimes 2} k_L^+ - \mathsf{q}_L^{\otimes 2} k\right|^2 dxdy \le \iint \left|k_L^+ - k\right|^2 dxdy$
(3) $\iint \left|k_L^+ - k\right|^2 dxdy \to 0$。

断言 (1) 显然成立，因为 k 在对角线之外是光滑的，且 q_L 的作用具有有界支集 $\le 1/L \to 0$。断言 (2) 可由简单应用詹森不等式得到。为证明断言 (3)，注意到

$$\begin{aligned}\iint \left|k_L^+ - k\right|^2 dxdy &= \frac{1}{a_n} \iint \left| \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{\vartheta_{L,z}^2\, \lambda_{L,z}^{n/2}} \mathbf{1}_{\{\|z\|_\infty < L/2\}} - \frac{1}{\lambda_z^{n/2}} \right) \varphi_z(x)\, \varphi_z(y) \right|^2 dx\, dy \\ &= \frac{1}{a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{\vartheta_{L,z}^2\, \lambda_{L,z}^{n/2}} \mathbf{1}_{\{\|z\|_\infty < L/2\}} - \frac{1}{\lambda_z^{n/2}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \frac{1}{(2\pi|z|)^{2n}} \left(\frac{\lambda_z^{n/2}}{\vartheta_{L,z}^2\, \lambda_{L,z}^{n/2}} \mathbf{1}_{\{\|z\|_\infty < L/2\}} - 1 \right)^2.\end{aligned}$$

后者在 $L \to \infty$ 时收敛到 0，因为项 $\left(\frac{\lambda_z^{n/2}}{\vartheta_L^2} \cdot_z \lambda_L^{n/2} \cdot_z \mathbf{1}_{\{\|z\|_\infty < L/2\}} - 1 \right)$ 关于 L 和 z一致有界，因为对于每个 z，它在 $L \to \infty$时都收敛到 0，并且级数 $\overline{\sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \frac{1}{2\pi|z|()^{2n}}}$ 是有限的。 □

3.1.5 h的自然投影

给定连续环面上的多调和高斯场 h，我们将其自然投影 定义为其傅里叶投影的分段常数投影：

$$h_{\circ,L} \coloneqq \mathsf{q}_L(\mathsf{r}_L(h)). \tag{26}$$

换言之，$h_{\circ,\,L}(x) \coloneqq \langle h | p_{\circ,L}(x,\ \cdot)\rangle$ 其中 $p_{\circ,\,L} \coloneqq q_L \circ r_L$ 并且与前面一样，$r_L \coloneqq \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n} \varphi_z \otimes \varphi_z$ 且$q_L \coloneqq L^n \sum_{v\in\mathbb{T}_L^n} \mathbf{1}_{v+Q_L} \otimes \mathbf{1}_{v+Q_L}$。它是一个协方差函数为下式的中心化高斯场

$$k_{\circ,L}(x,y) \coloneqq \frac{1}{a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n} \frac{1}{\lambda_z^{n/2}} \cdot \mathsf{q}_L\varphi_z(x) \cdot \mathsf{q}_L\varphi_z(y). \tag{27}$$

更准确地说，它可以视为连续环面上的分段常数随机场，等价地，也可以视为离散环面上的随机场。

引理 3.6。 *(i)* 对所有 $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$,

$$\mathsf{p}_{\circ,L} f \to f \quad in\ L^2\ as\ L \to \infty.$$

(ii) 在 $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ 上,

$$k_{\circ,L} \to k \quad in\ L^0\ as\ L \to \infty.$$

证明。与引理类似（但更简单）3.5。 □

3.2 离散环面上的多调和高斯场及其延拓的收敛性质

3.2.1 离散环面上的多调和高斯场 h_L

定理 3.7。对于所有 $f \in \bigcup_{s>n/2} H^s(\mathbb{T}^n)$,

$$\langle h_L, f\rangle_{\mathbb{T}_L^n} \to \langle h, f\rangle_{\mathbb{T}^n} \quad in\ L^2(\mathbf{P})\ as\ L \to \infty\ .$$

证明。给定 $f = \sum_{z\in\mathbb{Z}^n} \alpha_z\varphi_z \in \bigcup_{s>n/2} H^s(\mathbb{T}^n)$，根据引理 1.7，

$$\begin{aligned}\langle h, f\rangle_{\mathbb{T}^n} - \langle h_L, f\rangle_{\mathbb{T}_L^n} = \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}} \xi_z \cdot \left[\frac{1}{\lambda_z^{n/4}}\alpha_z - \frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/4}} \sum_{w\in\mathbb{Z}^n} \alpha_{z+Lw} \right] \\ + \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n,\ \|z\|_\infty \geq L/2} \xi_z \cdot \frac{1}{\lambda_z^{n/4}}\alpha_z\ .\end{aligned}$$

Thus

$$
\begin{aligned}
& a_n \cdot \mathbf{E}\Big[\big|\langle h, f\rangle_{\mathbb{T}^n} - \langle h_L, f\rangle_{\mathbb{T}^n_L}\big|^2\Big] \\
&= \sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}} \left[\frac{1}{\lambda_z^{n/4}}\alpha_z - \frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/4}}\sum_{w\in\mathbb{Z}^n}\alpha_{z+Lw}\right]^2 + \sum_{z\in\mathbb{Z}^n,\,\|z\|_\infty\geq L/2}\frac{1}{\lambda_z^{n/2}}\alpha_z^2 \\
&\leq 2\sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}}\left[\frac{1}{\lambda_z^{n/4}} - \frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/4}}\right]^2\alpha_z^2 \\
&\quad + 2\sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}}\frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/2}}\left[\sum_{w\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\alpha_{z+Lw}\right]^2 + \sum_{z\in\mathbb{Z}^n,\,\|z\|_\infty\geq L/2}\frac{1}{\lambda_z^{n/2}}\alpha_z^2 \\
&\leq \frac{2}{(2\pi)^n}\sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}}\left[1 - \frac{\lambda_z^{n/4}}{\lambda_{L,z}^{n/4}}\right]^2\frac{1}{|z|^n}\alpha_z^2 \\
&\quad + \frac{2}{4^n}\sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}}\frac{1}{|z|^n}\left[\sum_{w\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\alpha_{z+Lw}\right]^2 + \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{z\in\mathbb{Z}^n,\,\|z\|_\infty\geq L/2}\frac{1}{|z|^n}\alpha_z^2\,.
\end{aligned}
$$

现在，由于 $L\to\infty$，最后一项为零（因为 f 尤其属于 $H^{-n/2}(\mathbb{T}^n)$），第一项也为零，见下文定理 3.9 的证明。为了估计第二项，取 $s>n/2$ 满足$\sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}|z|^{2s}|\alpha_z|^2<\infty$，根据 f的定义，这样的对象存在。于是，

$$
\begin{aligned}
\sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}}\frac{1}{|z|^n}\left[\sum_{w\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\alpha_{z+Lw}\right]^2 &\leq \sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}}\left[\sum_{w\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\alpha_{z+Lw}\right]^2 \\
&\leq \sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}}\left[\sum_{w\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\frac{1}{|z+Lw|^{2s}}\right]\cdot\left[\sum_{w\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}|z+Lw|^{2s}\cdot|\alpha_{z+Lw}|^2\right]\,.
\end{aligned}
$$

对第一个括号中的项进行估计，得到

$$
\sum_{w\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\frac{1}{|z+Lw|^{2s}} \leq \sum_{u\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\frac{1}{|u|^{2s}} < \infty\,,
$$

于是我们得到

$$
\sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}}\frac{1}{|z|^n}\left[\sum_{w\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\alpha_{z+Lw}\right]^2 \leq \left[\sum_{u\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\frac{1}{|u|^{2s}}\right]\cdot\sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}}\left[\sum_{w\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}|z+Lw|^{2s}\cdot|\alpha_{z+Lw}|^2\right]
$$

因此，只需证明第二个因子在 $L\to\infty$ 时趋于零。由于 $z,\ w\neq 0$，我们有 $|z+Lw|\geq L/2$，于是重新标记 $v:=z+Lw$，

$$
\sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}}\left[\sum_{w\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}|z+Lw|^{2s}\cdot|\alpha_{z+Lw}|^2\right] = \left[\sum_{v\in\mathbb{Z}^n,\,\|v\|_\infty\geq L/2}|v|^{2s}\cdot|\alpha_v|^2\right]\to 0 \qquad \text{as } L\to\infty
$$

这是收敛级数的余项。 □

3.2.2 h_L 的分段常数延拓

给定离散环面上的多调和高斯场 h_L，回顾一下，通过 $h_{L,\flat}(x):=h_L(v)$，其在连续环面上的分段常数延拓定义为：若 $x\in v+Q_L$，则 $Q_L=[-\frac{1}{2L},\frac{1}{2L})^n$。于是

$$
\langle h_{L,\flat}, f\rangle_{\mathbb{T}^n} = \langle h_L, \mathfrak{q}_L f\rangle_{\mathbb{T}^n_L}
$$

其中 $\mathfrak{q}_L f\in L^2(\mathbb{T}^n_L)$ 对应 $f\in L^2(\mathbb{T}^n)$。注意，$\mathfrak{q}_L f(v)=L^n\int_{v+Q_L}f(y)dy$ 对应 $v\in\mathbb{T}^n_L$。

定理 3.8. 对于所有 $f \in \bigcup_{s>n/2} H^s(\mathbb{T}^n)$,

$$\langle h_{L,\flat}, f\rangle_{\mathbb{T}^n} \to \langle h, f\rangle_{\mathbb{T}^n} \quad in\ L^2(\mathbf{P})\ as\ L \to \infty\ . \tag{28}$$

此外，对于每个 $s > n/2$,

$$\left\|h_{L,\flat} - h\right\|^2_{\mathring{H}^{-s}} \to 0 \quad in\ L^2(\mathbf{P})\ as\ L \to \infty\ . \tag{29}$$

证明。 根据构造,

$$\langle h_{L,\flat}, f\rangle_{\mathbb{T}^n} - \langle h, f\rangle_{\mathbb{T}^n} = \langle h_L, \mathsf{q}_L f - f\rangle_{\mathbb{T}^n_L} + \langle h_L, f\rangle_{\mathbb{T}^n_L} - \langle h, f\rangle_{\mathbb{T}^n}$$

并且根据前述定理 3.7， $\langle h_L, f\rangle_{\mathbb{T}^n_L} - \langle h, f\rangle_{\mathbb{T}^n} \to 0$因为 $L \to \infty$。因此，第一个结论可由下式推出

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big[\langle h_L, \mathsf{q}_L f - f\rangle^2_{\mathbb{T}^n_L}\Big] &= \frac{1}{a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda^{n/2}_{L,z}} \langle \varphi_z, \mathsf{q}_L f - f\rangle^2_{\mathbb{T}^n_L} \\
&\le \frac{1}{4^n\, a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}} \frac{1}{|z|^n} \langle \varphi_z, \mathsf{q}_L f - f\rangle^2_{\mathbb{T}^n_L} \\
&= \frac{1}{4^n\, a_n} \left\|\mathsf{q}_L f - f\right\|^2_{H^{-n/2}} \\
&\le \frac{1}{4^n\, a_n} \left\|\mathsf{q}_L f - f\right\|^2_{L^2} \to 0 \quad \text{as } L \to \infty
\end{aligned}$$

因为根据索博列夫嵌入

$$\bigcup_{s>n/2} H^s(\mathbb{T}^n) \subset \mathcal{C}(\mathbb{T}^n)\ .$$

对于第二个结论，注意到

$$h_{L,\flat} = \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \varphi_z \sum_{w\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}} \lambda^{-n/4}_{w,L} \xi_w \langle \varphi_w, \mathsf{q}_L \varphi_z\rangle.$$

由此，我们得到

$$a_n \left\|h_{L,\flat}\right\|^2_{H^{-s}} = \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \lambda^{-s}_z \left(\sum_{w\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}} \lambda^{-n/4}_{w,L} \xi_w \langle \varphi_w, \mathsf{q}_L \varphi_z\rangle \right)^2 .$$

因此

$$a_n \mathbf{E} \left\|h_{L,\flat}\right\|^2_{H^{-s}} = \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \lambda^{-s}_z \sum_{w\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}} \lambda^{-n/2}_{w,L} \langle \varphi_w, \mathsf{q}_L \varphi_z\rangle^2$$

一方面，由于 $L \to \infty$，被加项收敛到 $\lambda^{-s-n/2}_z 1_{z=w}$。另一方面，根据帕ɪśɪʊ瓦尔恒等式，我们发现

$$\sum_{w\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}} \lambda^{-n/2}_{w,L} \langle \varphi_w, \mathsf{q}_L \varphi_z\rangle^2 = \left\|(-\Delta_L)^{-n/2} \mathsf{q}_L \varphi_z\right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n_L)} \le 1.$$

因此，由于 $s > n/2$，该和一致有界。这表明

$$\mathbf{E} \left\|h_{L,\flat}\right\|^2_{H^{-s}} \to \mathbf{E} \left\|h\right\|^2_{H^{-s}}\ .$$

类似的计算表明

$$\mathbf{E}\langle h, h_{L,\flat}\rangle_{H^{-s}} \to \mathbb{E} \left\|h\right\|^2_{H^{-s}}\ .$$

至此，第二个断言的证明完成。 □

3.2.3 h_L 的傅里叶延拓

给定离散环面上的多调和高斯场 h_L，我们将其傅里叶延拓到连续环面，定义为

$$h_{L,\sharp}(x) \coloneqq \dot{\mathrm{r}}_L h(x) \coloneqq \langle h, r_L(x,\cdot)\rangle_{\mathbb{T}_L^N} \qquad (\forall x \in \mathbb{T}^n)\ .$$

换言之，对于每个 ω 函数 $h^{\omega}_{L,\,\sharp}$ 都是 $\mathcal{D}_L$ 中满足 $h^{\omega}_{L,\,\sharp} = h^{\omega}_L$ 的唯一函数，$\mathbb{T}^n_L$参见（12）。若 h_L 给定为

$$h_L(v) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/4}} \cdot \xi_z \cdot \varphi_z(v) \qquad (\forall v \in \mathbb{T}^n_L)$$

那么同一公式给出了 $h_{L,\,\sharp}$ 的表示：

$$h_{L,\sharp}(x) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/4}} \cdot \xi_z \cdot \varphi_z(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{T}^n)\ . \tag{30}$$

这是定义在 $\mathbb{T}^n$ 上的中心化高斯场，其协方差函数为

$$k_{L,\sharp}(x,y) = \frac{1}{a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/2}} \cdot \cos\Big(2\pi\, z\cdot(x-y)\Big) \qquad (\forall x,y \in \mathbb{T}^n) \tag{31}$$

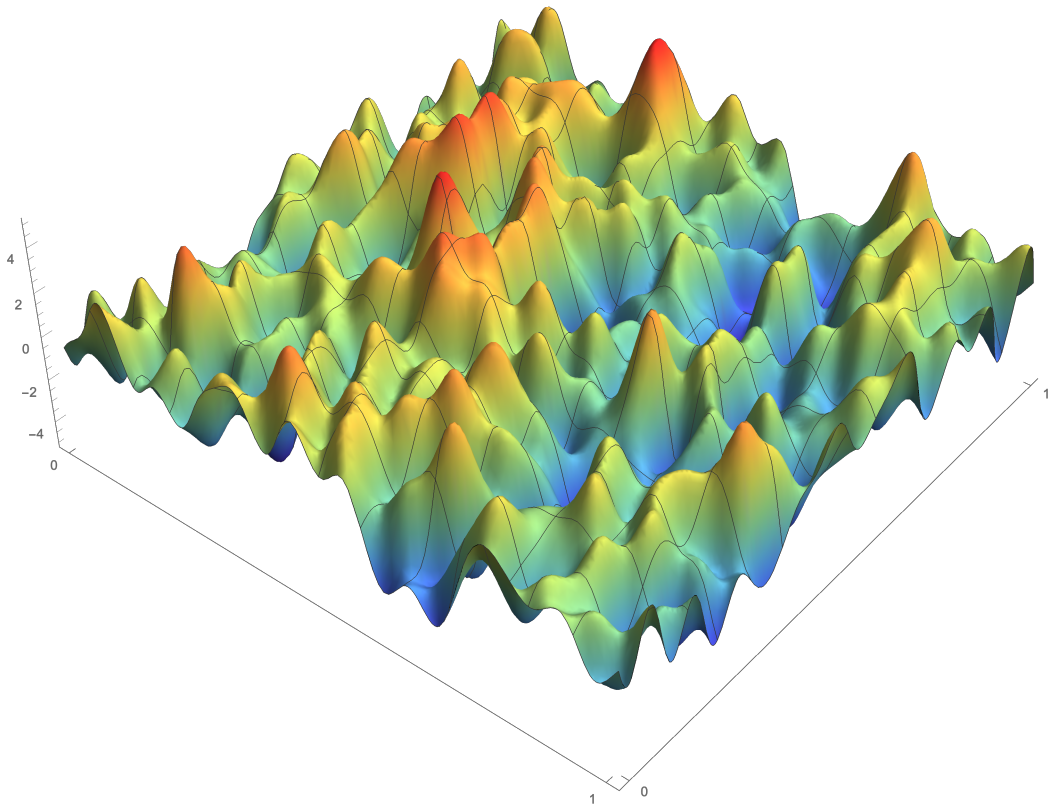


图 3： $h_{25,\,\sharp}$ 的一个实现

定理 3.9。对于所有 $f \in \mathring{H}^{-n/2}(\mathbb{T}^n)$，

$$\langle h_{L,\sharp}, f\rangle_{\mathbb{T}^n} \to \langle h, f\rangle_{\mathbb{T}^n} \quad \textit{in } L^2(\mathbf{P}) \textit{ as } L\to\infty\ , \tag{32}$$

对于所有 $\epsilon > 0$,

$$\big\|h_{L,\sharp} - h\big\|^2_{H^{-\epsilon}} \to 0 \quad \textit{in } L^2(\mathbf{P}) \textit{ as } L\to\infty\ . \tag{33}$$

证明。 根据命题 3.3，我们已经知道 $\langle h_{\sharp,L}, f\rangle \to \langle h, f\rangle$。因此，只需证明 $\langle h_{L,\sharp} - h_{\sharp,L}, f\rangle \to 0$。这根据

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big[\langle h_{L,\sharp} - h_{\sharp,L}, f\rangle^2\Big] \\
&= \frac{1}{a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/2}} - \frac{1}{\lambda_z^{n/2}}\right) \langle\varphi_z, f\rangle^2 \\
&= \frac{1}{a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}} \left(\left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{L,z}}\right)^{n/2} - 1\right) \frac{\langle\varphi_z, f\rangle^2}{\lambda_z^{n/2}} \to 0
\end{aligned}$$

由控制收敛定理可得 $L\to\infty$，因为

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda_z^{n/2}} \langle\varphi_z, f\rangle^2 < \infty\ ,$$

$$0 \le \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{L,z}}\right)^{n/2} - 1 \le 2^n$$

对于所有的 z 和 L，并且

$$\left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{L,z}}\right)^{n/2} - 1 \to 0$$

因为对每个 z 都有 $L\to\infty$。

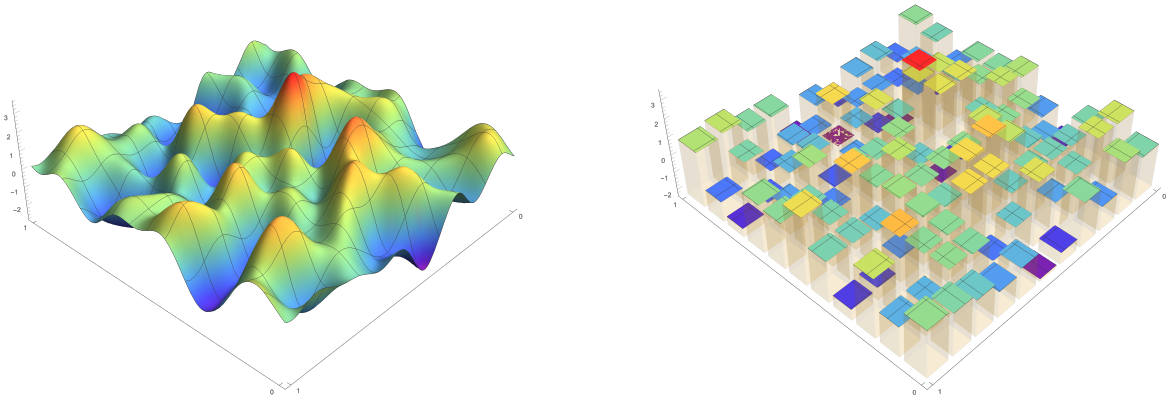
对于第二个结论，我们再次利用这一事实，即由命题 3.3 对每个 $\epsilon > 0$,

$$\mathbf{E}\Big[\big\|h - h_{\sharp,L}\big\|_{\mathring{H}^{-\epsilon}}^2\Big] \to 0 \quad \text{as } L\to\infty\ .$$

此外,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big[\big\|h_{L,\sharp} - h_{\sharp,L}\big\|_{\mathring{H}^{-\epsilon}}^2\Big] &= \frac{1}{a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/4}} - \frac{1}{(2\pi|z|)^{n/2}}\right)^2 \frac{1}{|z|^{2\epsilon}} \\
&= \frac{1}{a_n(2\pi)^n} \sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}} \left(\left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{L,z}}\right)^{n/4} - 1\right)^2 \frac{1}{|z|^{n-2\epsilon}} \to 0
\end{aligned}$$

如同针对第一项断言所采用的控制收敛论证一样， $L\to\infty$ □



(a) $h_{11,\ \sharp}$ **(b)** $h_{11,\ \flat}$

图 4： 场 h 的两种不同近似/延拓，具有相同的随机实现n ess.

3.2.4 离散环面上的约化与谱约化多调和高斯场

关于多调和场及其（分别为傅里叶或分段常数）延拓的前述断言定理 3.7、3.8 和 3.9 ——以及它们的证明——对于约化多调和场和谱约化多调和场 h_L^- 以及 $h_L^{-\circ}$ 及其（分别为傅里叶或分段常数）延拓 h_L^- 、$\sharp$、 h_L^- 、$\flat$ 和$h_L^{-\circ}$ 、$\sharp$、 $h_L^{-\circ}{}_\flat$，同样以类似形式成立。

命题 3.10. （对所有$f \in \bigcup_{s>n/2} H^s(\mathbb{T}^n)$，

$$\langle h_L^{-\circ}, f\rangle_{\mathbb{T}^n_L} \to \langle h, f\rangle_{\mathbb{T}^n} \quad in\ L^2(\mathbf{P})\ as\ L\to\infty$$

以及

$$\langle h_{L,\flat}^{-\circ}, f\rangle_{\mathbb{T}^n} \to \langle h, f\rangle_{\mathbb{T}^n} \quad in\ L^2(\mathbf{P})\ as\ L\to\infty\ .$$

(*ii*) 对所有 $f \in \mathring{H}^{-n/2}(\mathbb{T}^n)$，

$$\langle h_{L,\sharp}^{-\circ}, f\rangle_{\mathbb{T}^n} \to \langle h, f\rangle_{\mathbb{T}^n} \quad in\ L^2(\mathbf{P})\ as\ L\to\infty\ .$$

(*iii*) 将 h_L^- 、 h_L^- 、$\flat$、 h_L^- 、$\sharp$ 分别替换为 $h_L^{-\circ}$ 、 $h_L^{-\circ}{}_\flat$、、 $h_L^{-\circ}$ 、$\sharp$，同理可得。

3.2.5 相关方法与结果

注 3.11（连续体中的对数相关高斯场）。 对于 $n=1$，场 h 是正则性参数属于（$_{12}$，$_{32}$）的分数布朗运动在下极限情形，参见例如 [12, 7]。对于 $n=2$，它是著名的 高斯自由场 （GFF），定义在 $\mathbb{T}^2$上，综述见 [16]。对于 $n=1$，其分布与将高斯自由场限制在线上所得的场一致（$\mathbb{T}^1 \subset \mathbb{T}^2$）。对于 $n\geq 3$，它是文献 [7]综述的一种对数相关高斯场。共形不变性 h 在 $\mathbb{T}^n$ 上的共形不变性，是平坦几何上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子的共形不变性的结果。在一般非平坦几何中构造对数相关高斯场的正确（即共形协变）方法见 [5]。

注记 3.12（离散到连续近似）。 据我们所知，在维数为 $n\geq 5$ 的情况下，尚无关于对数相关高斯场的离散化/离散近似结果。然而，在低维情形下，已知与 h 类似的高斯场是不同离散模型的标度极限。对于 $n=2$，鉴于高斯自由场的著名普适性，场 h 是在各种设定下定义的大量不同离散高斯场和非高斯场的标度极限，这些设定从格点到随机环境，例如随机导电模型 [1]。对于 $n=4$，场 h 由纽曼双拉普拉斯算子生成；在 $[0,1]^4$ 上由狄利克雷双拉普拉斯算子生成的相应场，是膜模型 [13, 10]，的标度极限，见 [2, 14]，，同时也是可分沙堆模型 [11]，的里程表函数的标度极限，见 [4]。我们强调，对于 $^\circ$ 的不同离散化，我们关于 h 的收敛结果在 H^{-s} 中、满足 $s>2$ 的条件下成立，因此与沙堆里程表函数的标度极限所对应的指数范围相同，见 [3，命题 14]。另一方面，膜模型的相应标度极限迄今仅在 H^{-s} 中针对 $s>6$ 得到证明，见 [2，定理 3.11]。

3.3 识别

引理 3.13. 多调和场 h 的傅里叶投影 $h_{\sharp,L}$ 的谱增强 $h_\sharp^{+\circ}{}_L$，与离散多调和场 h_L 的傅里叶延拓 $h_{L,\sharp}$ 在分布意义下相同。

类似地，多调和场 h 的傅里叶近似 $h_{\sharp,L}$ 与离散多调和场 h_L 的傅里叶延拓 $h_{L,\sharp}$ 的谱约化 $h_L^{-\circ}{}_{,\sharp}$ 在分布意义下相同（后者又与谱约化离散多调和场的傅里叶延拓相同）。换言之，将 $h_{\sharp,L}$ 限制到 $\mathbb{T}^n_L$ 上，便定义了一个谱约化多调和场 $h_L^{-\circ}$。

引理 3.14. 限制在离散环面上时，连续环面上的多调和高斯场 h 的增强投影 $h_{+,L}$ 与离散环面上的多调和高斯场h_L 同分布。

证明。 不失一般性，假设 h 是用标准独立同分布正态变量 $(\xi_z)_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}$ 表示为

$$h = \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}^{\square} \frac{1}{\lambda_z^{n/4}} \xi_z \varphi_z.$$

Then

$$\mathsf{r}_L^+(h) = \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}^{\square} \frac{1}{\vartheta_{L,z}} \frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/4}} \xi_z \varphi_z$$

在 $\mathbb{T}^n$ 上。因此对于 $v \in \mathbb{T}_L^n$,

$$\begin{aligned} h_{+,L}(v) &= \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}^{\square} \frac{1}{\vartheta_{L,z}} \frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/4}} \xi_z \cdot L^n \int_{v+Q_L} \varphi_z(y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}^{\square} \frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/4}} \xi_z \varphi_z(v) \end{aligned}$$

根据引理 1.6。因此，由命题 2.2， $h_{+,L}$ 服从离散环面 $\mathbb{T}_L^n$ 上的多调和高斯场分布。

□

引理 3.15。 设 h 是连续环面 $\mathbb{T}^n$ 上的多调和高斯场，并令

$$h_{\circ,L} \coloneqq \mathsf{q}_L(\mathsf{r}_L(h))$$

表示其傅里叶投影的分段常数投影，称为 h 的自然投影。那么， $\mathbb{T}^n$ 上的此场与约化离散多调和场 h_L^- , $\flat$ 的分段常数延拓同分布。特别地，场 $h_{\circ,L}$ 在 $\mathbb{T}_L^n$ 上与约化离散多调和场 h_L^- 同分布。

证明。 不失一般性，假设

$$h = \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}^{\square} \frac{1}{\lambda_z^{n/4}} \xi_z \varphi_z.$$

Then

$$h_{\circ,L}(x) = \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}^{\square} \frac{1}{\lambda_z^{n/4}} \xi_z \cdot \sum_{v\in\mathbb{T}_L^n} \mathbf{1}_{v+Q_L}(x) \cdot L^n \int_{v+Q_L} \varphi_z(y)dy,$$

因此对于 $v \in \mathbb{T}_L^n$,

$$\begin{aligned} h_{\circ,L}(v) &= \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}^{\square} \frac{1}{\lambda_z^{n/4}} \xi_z \cdot L^n \int_{v+Q_L} \varphi_z(y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}^{\square} \frac{\vartheta_{L,z}}{\lambda_z^{n/4}} \xi_z \varphi_z(v) \end{aligned}$$

根据 引理 1.6。因此，$h_{\circ,L}$ 服从 $\mathbb{T}_L^n$ 上的约化离散多调 和高斯场。

□

4 离散环面与连续环面上的 LQG 测度

我们将介绍并分析离散环面和连续环面上的刘维尔量子引力（=*LQG*）测度。本节的主要结果是，随着 $L \to \infty$ 离散环面上的 LQG 测度 $\mathbb{T}_L^n$将收敛到连续环面上的 LQG 测度 $\mathbb{T}^n$。

我们将对所谓的约化*LQG*测度证明一个更一般的类似收敛断言。这些随机测度定义在离散环面 $\mathbb{T}_L^n$ 上，由离散多调和场 h_L 给出。

4.1 连续环面上的 LQG 测度及其近似 s

对于 $\gamma \in \mathbb{R}$，定义随机测度 $\mu_{\sharp,\ L}$ 在 $\mathbb{T}^n$ 上为

$$d\mu_{\sharp,L}(x) = \exp\left(\gamma h_{\sharp,L}(x) - \frac{\gamma^2}{2} k_{\sharp,L}(x,x)\right) d\mathcal{L}^n(x)$$

其中 $h_{\sharp,\ L}$ 表示多调和场 h 和$k_{\sharp,\ L}$ 所对应的协方差函数（其在对角线上取常数值 $\frac{1}{a_n} \sum_{z \in \mathbb{Z}^n_L \setminus \{0\}} \frac{1}{2\pi|z|}$ $()^n$ ），即 傅里叶投影 （或 特征函数近似），如(18)和(19)中所引入。 — ———

命题 4.1 ([5, 定理 4.1+4.15])。 假设 $|\gamma| < \gamma^* : = \sqrt{2n}$。则对于 $\mathbf{P}$-几乎处处的 ω，存在唯一的博雷尔测度 μ^ω ，在 $\mathbb{T}^n$ 上满足

$$\mu^\omega_{\sharp,L} \to \mu^\omega \qquad as\ L \to \infty$$

即测度的弱收敛于 $\mathbb{T}^n$ （即针对 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^n)$进行检验）。更进一步，对于每个 $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$,

$$\int_{\mathbb{T}^n} f\, d\mu_{\sharp,L} \to \int_{\mathbb{T}^n} f\, d\mu \qquad as\ L \to \infty \quad \mathbf{P}\text{-}a.s.\ and\ in\ L^1(\mathbf{P})\ .$$

对于 $|\gamma| < \sqrt{n}$，后一个收敛在 $L^2(\mathbf{P})$ 中也成立。

定义 4.2。 上述构造并刻画的定义在 $\mathbb{T}^n$ 上的随机测度 μ 称为多调和 LQG 测度或多调和高斯乘法混沌。

定义在 $\mathbb{T}^n$ 上的随机测度$\mu_{\sharp,\ L}$ 称为多调和 *LQG* 测度的傅里叶近似。

Pi分段常数近似。 对于 $\gamma \in \mathbb{R}$，定义定义在 $\mathbb{T}^n$ 上的随机测度 $\mu_{\flat,\ L}$ by

$$d\mu_{\flat,L}(x) = \exp\left(\gamma h_{\flat.L}(x) - \frac{\gamma^2}{2} k_{\flat,L}(x,x)\right) d\mathcal{L}^n(x)$$

其中 $h_{\flat,\ L}$ 表示多调和场 h 的分段常数投影，且$k_{\flat,\ L}$ 表示相应的协方差函数（在对角线上为常数），如 (20) 和 (21) 中所述。

命题 4.3 ([5, 定理 4.14])。 假设 $|\gamma| < \sqrt{2n}$。那么在 $\overline{L^1}(\mathbf{P})$中，

$$\mu_{\flat,L} \to \mu \qquad as\ L \to \infty.$$

证明。 该定理在 [5, 定理 4.14] 中利用 Kahane 凸性不等式证明。 □

增强逼近。 对于 $\gamma \in \mathbb{R}$，定义随机测度 $\mu_{+,\ L}$ ，其定义在 $\mathbb{T}^n$ 上:

$$d\mu_{+,L}(x) = \exp\left(\gamma h_{+,L}(x) - \frac{\gamma^2}{2} k_{+,L}(x,x)\right) d\mathcal{L}^n(x)$$

其中 $h_{+,\ L}$ 表示多调和场 h 的增强投影，而 $k_{+,\ L}$ 表示其对应的协方差函数。

命题 4.4。假设 $|\gamma| < \sqrt{n/e}$。则在 $\overline{L^1}(\mathbf{P})$中，

$$\mu_{+,L} \to \mu \qquad as\ L \to \infty.$$

证明。 为证明与环面上多调和场的增强投影相关的 LQG 测度 $\mu_{+,L}$ 收敛到 $\mathbb{T}^n$ 上的 LQG 测度 μ， $\mathbb{T}^n$ 我们验证 [5, 引理 45], 中所需的假设；该引理是在当前设定下对 A. Shamov 提出的高斯乘法混沌一般构造的改写， [15]。引理 3.5 给出了正则化核$p_{+,L}$ 以及协方差核$k_{+,L}$的收敛结果。随机测度逼近序列的一致可积性 $\mu_{+,L}$ 将在最后一节作为定理 4.11 证明。

□

自然近似。 对于 $\gamma \in \mathbb{R}$，定义随机测度 $\mu_{\circ,L}$ ，其定义在 $\mathbb{T}^n$ 上：

$$d\mu_{\circ,L}(x) = \exp\left(\gamma h_{\circ,L}(x) - \frac{\gamma^2}{2} k_{\circ,L}(x,x)\right) d\mathcal{L}^n(x)$$

其中，$h_{\circ,\ L}$ 表示多调和场 h 的自然投影，而$k_{\circ,\ L}$ 表示相应的协方差函数。

命题 4.5。假设 $|\gamma| < \sqrt{n}$。则在 $L^1(\mathbf{P})$中，

$$\mu_{\circ,L} \to \mu \qquad as\ L \to \infty.$$

证明。为证明与多调和场 h 的自然投影相关的 LQG 测度$\mu_{\circ}$、$_L$ 收敛到 $\mathbb{T}^n$上的 LQG 测度 μ ，我们再次验证 [5, 引理 4.5]中的必要假设。引理 3.6 给出了正则化核 $p_{\circ}$、$_L$ 以及协方差核 $k_{\circ}$、$_L$的收敛结果。随机测度逼近序列 $\mu_{\circ}$、$_L$ 的一致可积性——甚至是 L^2-有界性——由随机测度序列 $\mu_{\sharp}$、$_L$ 的 L^2-有界性以及对马尔可夫核 q_L直接应用詹森不等式得到，该结论见命题 4.1：

$$\begin{aligned}
\sup_L \mathbb{E}\left[|\mu_{\circ,L}(\mathbb{T}^n)|^2\right] &= \sup_L \mathbb{E}\left[\left|\int_{\mathbb{T}^n} \exp\left(\gamma h_{\circ,L}(x) - \frac{\gamma^2}{2} k_{\circ,L}(x)\right) dx\right|^2\right] \\
&= \sup_L \iint_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n} \exp\left(\gamma^2\, k_{\circ,L}(x,y)\right) dy\, dx \\
&\le \sup_L \iint_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n} \iint_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n} \exp\left(\gamma^2\, k_{\sharp,L}(x',y')\right) q_L(x,x')\, q_L(y,y')\, dy'\, dx'\, dy\, dx \\
&= \sup_L \iint_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n} \exp\left(\gamma^2\, k_{\sharp,L}(x,y)\right) dy\, dx \\
&= \sup_L \mathbb{E}\left[|\mu_{\sharp,L}(\mathbb{T}^n)|^2\right] = \mathbb{E}\left[|\mu(\mathbb{T}^n)|^2\right] < \infty\ .
\end{aligned}$$

或者，我们也可以直接在 $h_{\circ,\ L}$ 的层面应用詹森不等式。具体而言，我们得到

$$\begin{aligned}
\exp\left(\gamma h_{\circ,L}(x) - \frac{\gamma^2}{2} k_{\circ,L}(x,x)\right) &= \exp\left(\int \left(\gamma h_{\sharp,L}(x') - \frac{\gamma^2}{2} k_{\sharp,L}(x',x'')\right) q_L(x,x') q_L(x,x'') dx dx' dx''\right) \\
&\le \int \exp\left(\gamma h_{\sharp,L}(x') - \frac{\gamma^2}{2} k_{\sharp,L}(x',x'')\right) q_L(x,x') q_L(x,x'').
\end{aligned}$$

由此可得

$$\mu_{\circ,L}(\mathbb{T}^n) \le \mu_{\sharp,L}(\mathbb{T}^n).$$

□

4.2 离散环面上的 LQG 测度及其收敛性

本节将证明我们的主要结果：离散 LQG 测度 μ_L 收敛到 $\mathbb{T}^n$ 上的 LQG 测度 μ 。

尽管这种收敛仅在参数 γ 的有限范围内成立，但所谓的约化离散 LQG 测度 μ_L 收敛到 $\mathbb{T}^n$ 上的 LQG 测度 μ ，则在更一般的条件下也成立。

定义 4.6。对于给定的 $\gamma \in \mathbb{R}$，定义离散环面 上的多调和 LQG 测度或离散 LQG 测度为随机测度 μ_L ，定义在 $\mathbb{T}_L^n$ 上，定义如下

$$d\mu_L(v) = \exp\left(\gamma h_L(v) - \frac{\gamma^2}{2} k_L(v,v)\right) dm_L(v)\ .$$

这里 h_L 是离散环面 $\mathbb{T}_L^n$上的多调和高斯场 k_L，其协方差函数如（12）和（6）中所引入，且 m_L 是离散环面上的归一化计数测度 $\frac{1}{L^n}\sum_{u\in\mathbb{T}_L^n}\delta_u$。回忆一下，对于所有 $v\in\mathbb{T}_L^n$，$k_L(v,\ v)=\frac{1}{a_n}\sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n\setminus\{0\}}\frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/2}}$。

为了证明离散环面 $\mathbb{T}_L^n$ 上随机测度 μ_L 在 $L\to\infty$ 时的收敛，我们将只考虑离散环面层级有序的子序列，例如对某个固定整数 $a\geq 2$ 和 $\ell\in\mathbb{N}$，当 $\ell\to\infty$ 时有 $L=a^\ell$。为方便起见，我们假设 a 是奇数。

定理4.7。假设 $|\gamma|<\gamma_*$，并令 a 为奇整数 ≥ 2。那么在 $L^1(\mathbf{P})$，

$$\mu_{a^\ell}\to\mu \qquad as\ \ell\to\infty.$$

证明。给定如上所述的 a，若函数 f 在 $\mathbb{T}^n$ 上对所有立方体 $v+Q_L$, $v\in\mathbb{T}_L^n$ 均为常数，其中某个 $L=a^{\ell'}$，则称其为分段常数 函数。对于这样的 f 以及所有 $\ell\geq\ell'$，

$$\int f\,d\mu_{a^\ell}=\int f\,d\mu_{+,a^\ell}. \tag{34}$$

事实上，场 h_{+,a^ℓ} 在所有立方体 $v+Q_{a^\ell}$, $v\in\mathbb{T}_{a^\ell}^n$ 上均为常数，而引理 3.14 得出场 h_{a^ℓ} 和 h_{+,a^ℓ} 在离散环面 $\mathbb{T}_{a^\ell}^n$ 上重合（在分布意义下）。因此，所有立方体 $v+Q_{a^\ell}$, $v\in\mathbb{T}_{a^\ell}^n$ 对应的 LQG 测度也相同。

因此，对于分段常数函数 f，收敛

$$\int f\,d\mu_{a^\ell}\to\int f\,d\mu \qquad \text{as } \ell\to\infty$$

可由前述命题4.4推出。

对于连续函数 f，该结论可通过用分段常数函数 f_j 近似 f 得出。事实上，

$$\mathbf{E}\Big[\Big|\int f\,d\mu_{a^\ell}-\int f_j\,d\mu_{a^\ell}\Big|\Big]\leq\mathbf{E}\Big[\int\Big|f-f_j\Big|\,d\mu_{a^\ell}\Big]=\int\Big|f-f_j\Big|\,dx\ \to\ 0$$

在 $\ell\in\mathbb{N}$ 上一致成立，且用 μ_{a^ℓ} 替换 μ 时也同样成立。 □

4.3 离散环面上的约化LQG测度及其收敛

回顾一下，如果 h_L 是离散环面上的多调和场，那么

$$h_L^-\coloneqq \mathsf{r}_L^-(h_L)$$

定义了离散环面上的约化多调和场。如果 h_L 给定为

$$h_L(v)=\frac{1}{\sqrt{a_n}}\sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n}\frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/4}}\,\xi_z\,\varphi_z(v)$$

then

$$h_L^-(v)=\frac{1}{\sqrt{a_n}}\sum_{z\in\mathbb{Z}_L^n}\frac{\vartheta_{L,z}}{\lambda_z^{n/4}}\,\xi_z\,\varphi_z(v).$$

对于 $\gamma\in\mathbb{R}$，在 $\mathbb{T}_L^n$ 上定义随机测度 μ_L^-，称为 约化离散对数相关高斯场测度，定义如下：

$$d\mu_L^-(v)=\exp\Big(\gamma h_L^-(v)-\frac{\gamma^2}{2}k_L^-(v,v)\Big)\,dm_L(v)$$

定理 4.8。假设 $|\gamma|<\sqrt{n}$，并令 a 为满足 ≥ 2 的奇整数。那么在 L^1（$\mathbf{P}$） 中，

$$\mu_{a^\ell}^-\to\mu \qquad as\ \ell\to\infty.$$

证明。设 a 如上所述，并设 f 是定义在 $\mathbb{T}^n$ 上的函数，在所有立方体 $v+Q_L$上$v\in\mathbb{T}_L^n$均为常数，其中 $L=a^{\ell'}$。于是根据引理 3.15 对所有 $\ell\geq\ell'$，

$$\int f\,d\mu_{a^\ell}^-=\int f\,d\mu_{\circ,a^\ell}. \tag{35}$$

因此，对于分段常数函数 f，收敛

$$\int f\, d\mu_{a^\ell}^- \to \int f\, d\mu \qquad \text{as } \ell \to \infty$$

由前面的命题推出 4.5。对于连续的 f，该结论可通过用分段常数函数近似 f 得出 f_j， $j \in \mathbb{N}$。

□

4.4 半离散LQG测度的收敛结果

到目前为止，我们研究了离散环面 $\mathbb{T}_L^n$上的 LQG 测度和约化 LQG 测度，以及它们在 $L \to \infty$时的收敛性质。对于离散环面上的多调和场 h_L，我们还可以在连续环面上定义所谓的半离散 LQG 测度和谱约化半离散LQG测度。它们分别是与离散场 h_L 和谱约化离散场 $h_L^{-\circ}$ 的傅里叶延拓相关联的 LQG 测度。所有这些随机测度都是离散场 h_L的函数。

4.4.1 半离散 LQG 测度

对于 $\gamma \in \mathbb{R}$，定义连续环面 $\mathbb{T}^n$上的随机测度 $\mu_{L,\sharp}$，称为半离散 *LQG* 测度，其定义如下：

$$d\mu_{L,\sharp}(x) = \exp\left(\gamma h_{L,\sharp}(x) - \frac{\gamma^2}{2} k_{L,\sharp}(x,x)\right) d\mathcal{L}^n(x)$$

其中 $h_{L,\sharp}$ 表示离散多调和场 的傅里叶延拓 h_L，且 $k_{L,\sharp}$ 是 §§3.2.3中介绍的相应协方差函数。

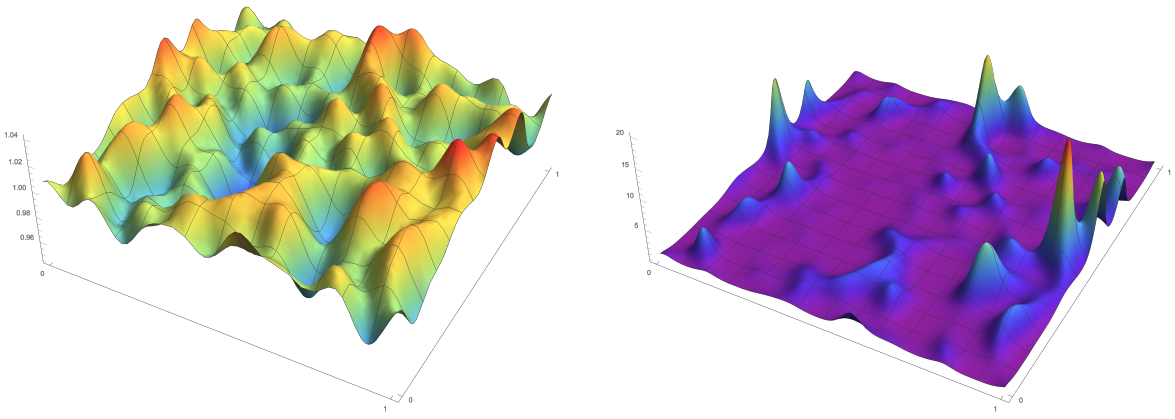
定理 4.9. 假设 $|\gamma| < \gamma_* := \sqrt{n}$。那么在 $L^1(\mathbf{P})$ 中，

$$\mu_{L,\sharp} \to \mu \qquad as\ L \to \infty.$$

证明。 根据注记 3.13，离散随机场 h_L 的傅里叶延拓 $h_{L,\sharp}$ 与连续场 h 通过核 $r_L^{+\circ}$ 进行正则化后得到的场在分布上相同。

为了证明$\mu_{L,\sharp}$ 环面上多调和场的傅里叶延拓所对应的 LQG 测度 $\mathbb{T}^n$ 收敛到 LQG 测度 μ 上 $\mathbb{T}^n$，我们再次验证 [5, 引理 4.5]中的必要假设。引理 4.5 的条件 (ii) 和 (iii) [5],可以完全按照引理3.5的证明来验证。随机测度逼近序列的一致可积性由下一节中的定理4.11 得出。

□



(a) $\gamma = 0.01$ **(b)** $\gamma = 1$

图 5： 高斯乘法混沌 $\mu_{L,\sharp}$ 在 $\mathbb{T}^2$ 上对应于 $L = 15$，取 γ 的不同值且随机性采用相同的实现。

4.4.2 谱约化半离散 LQG 测度

对于 $\gamma \in \mathbb{R}$，定义随机测度 $\mu_L^{-\circ}{}_{,\sharp}$ 在 $\mathbb{T}^n$ 上，称为谱约化半离散*LQG*测度，其定义如下：

$$d\mu_{L,\sharp}^{-\circ}(x) = \exp\left(\gamma h_{L,\sharp}^{-\circ}(x) - \frac{\gamma^2}{2} k_{L,\sharp}^{-\circ}(x,x)\right) d\mathcal{L}^n(x)$$

其中 $h_L^{-\circ}{}_{,\sharp}$ 表示谱约化离散多调和场 $h_L^{-\circ}$ 的傅里叶延拓，而 $k_L^{-\circ}{}_{,\sharp}$ 是相应的协方差函数，如§3.2.4中所介绍。由引理 3.13 和命题 4.1，可直接得到

定理 4.10。假设 $|\gamma| < \sqrt{2n}$。那么在 **P**-概率意义下以及在 $L^1(\mathbf{P})$ 中，

$$\mu_{L,\sharp}^{-\circ} \to \mu \qquad as\ L \to \infty.$$

4.5 离散和半离散 LQG 测度的一致可积性

最后，我们讨论 LQG 测度逼近序列的一致可积性问题。我们给出一个自成一体的论证来证明 L^2-有界性，该论证不依赖于 Kahane 的工作 [9]。

定理 4.11。假设 $|\gamma| < \gamma_* := \sqrt{\frac{n}{e}}$。那么

(i)

$$\sup_L \int_{\mathbb{T}^n} \exp\left(\gamma^2 k_{L,\sharp}(0,y)\right) d\mathcal{L}^n(y) < \infty\,, \tag{36}$$

(ii)

$$\sup_L \int_{\mathbb{T}^n} \exp\left(\gamma^2 k_{L,\flat}(0,y)\right) d\mathcal{L}^n(y) < \infty\,. \tag{37}$$

(iii)

$$\sup_L \int_{\mathbb{T}^n} \exp\left(\gamma^2 k_{+,L}(0,y)\right) d\mathcal{L}^n(y) < \infty\,. \tag{38}$$

证明。(i) 回顾（31），对于 $x,\ y \in \mathbb{T}^n$，

$$k_{L,\sharp}(x,y) = \frac{1}{a_n} \sum_{z \in \mathbb{Z}_L^n \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/2}} \cdot \exp\left(2\pi i\, z \cdot (x-y)\right)$$

此处与前面一样，$\lambda_{L,\,z} = 4L^2 \sum_{k=1}^n \sin^2\left(\pi z_k / L\right)$。给定 $\epsilon > 0$，选择 $R > 2$，使得对所有满足 $\|z\|_\infty \geq R/2$ 的 $z \in \mathbb{Z}^n$，都有 $|z| + \frac{1}{2}\sqrt{n} \leq (1+\epsilon)|z|$；再选择 $S > 1$，使得对所有 $t \in [0, \frac{\pi}{2S}]$，都有 $t \leq (1+\epsilon)\sin(t)$。将 $k_{L,\,\sharp}$（其中 $L > RS$）分解为 $k_{L,\,R,\,S} + g_{L,\,R} + f_{L,\,S}$，其中

$$f_{L,S}(x,y) = \frac{1}{a_n} \sum_{z \in \mathbb{Z}_L^n \setminus \mathbb{Z}_{L/S}^n} \frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/2}} \cdot e^{2\pi i\, z\cdot(x-y)}\,, \qquad g_{L,R}(x,y) = \frac{1}{a_n} \sum_{z \in \mathbb{Z}_R^n \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/2}} \cdot e^{2\pi i\, z\cdot(x-y)}$$

and

$$k_{L,R,S}(x,y) = \frac{1}{a_n} \sum_{z \in \mathbb{Z}_{L/S}^n \setminus \mathbb{Z}_R^n} \frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/2}} \cdot e^{2\pi i\, z\cdot(x-y)}\,.$$

对于固定的 R，显然 $g_{L,R}(x,y)$ 在 L, x, y 中一致有界。类似地，由于 $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}\, t$ for $t \in [0, \pi/2]$，我们有，对于固定的 S，

$$\begin{aligned}
\left|f_{L,S}\right|(x,y) &\leq \frac{1}{a_n} \sum_{z \in \mathbb{Z}_L^n \setminus \mathbb{Z}_{L/S}^n} \frac{1}{\lambda_{L,z}^{n/2}} \leq \frac{1}{a_n} \sum_{z \in \mathbb{Z}_L^n \setminus \mathbb{Z}_{L/S}^n} \frac{1}{4^n |z|^n} \\
&\leq \frac{1}{4^n\, a_n} \int_{B_{\sqrt{n}L/2}(0) \setminus B_{L/(2S)}(0)} \frac{1}{|x|^n} d\mathcal{L}^n(x) \\
&= C\left[\log(\sqrt{n}L/2) - \log(L/(2S))\right] = C' < \infty\,.
\end{aligned}$$

要使 (36) 成立，因此只需证明

$$\sup_L \int_{\mathbb{T}^n} \exp\left(\gamma^2 k_{L,R,S}(0,y)\right) d\mathcal{L}^n(y) < \infty \,, \tag{39}$$

对于上述某个 $R > 2$。

为证明后者，我们沿用 [17] 中引理 2 证明（第 611 页）的论证。首先，我们使用多维豪斯多夫–杨不等式，该不等式可见于 [8, 第 248] 页：

$$\text{For } p \geq 2 \quad \int_{\mathbb{T}^n} |k_{L,R,S}(0,y)|^p \, dy \leq \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^n_{L/S} \setminus \mathbb{Z}^n_R} |c(z)|^{p'} \right)^{p-1} \,,$$

其中 $c(z) = \frac{1}{a_n^n}\big(4L^2 \sum_{k=1}^n \sin^2(\pi z_k/L)\big)^{-n/2}$，且 $p' \in [1,2]$ 是 H¨older 共轭指数。由于对所有考虑中的 z_k/L， $\pi|z_k|/L \leq (1+\epsilon)|\sin(\pi z_k/L)|$，因此有

$$\int_{\mathbb{T}^n} |k_{L,R,S}(0,y)|^p \, dy \leq (1+\epsilon)^{np'(p-1)} \left(\frac{1}{a_n^{p'}} \sum_{z \in \mathbb{Z}^n_{L/S} \setminus \mathbb{Z}^n_R} \frac{1}{(2\pi|z|)^{np'}} \right)^{p-1} .$$

令 $Q_1(z)$ 为以 $z \in \mathbb{Z}^n$ 为中心的单位立方体 $\prod_{i=1}^n [z - \frac{1}{2}e_i, z + \frac{1}{2}e_i]$。根据假设

$$|x| \leq |z| + \frac{1}{2}\sqrt{n} \leq (1 + \frac{1}{2}\sqrt{n})|z| \leq (1+\epsilon)|z|$$

对所有 $x \in Q_1(z)$ 以及满足 $\|z\|_\infty \geq R/2$ 的所有 z，我们估计

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathbb{Z}^n_{L/S} \setminus \mathbb{Z}^n_R} \int_{Q_1(z)} \frac{1}{|z|^{np'}} \, dx &\leq \sum_{z \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{Z}^n_R} (1+\epsilon)^{np'} \int_{Q_1(z)} \frac{1}{|x|^{np'}} \, dx \\ &\leq (1+\epsilon)^{np'} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R/2}(0)} \frac{1}{|x|^{np'}} \, dx. \end{aligned}$$

利用卡瓦列里原理，可将积分估计为

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R/2}(0)} \frac{1}{|x|^{np'}} \, dx &= \int_{R/2}^\infty \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} r^{n-1} \frac{1}{r^{np'}} \, dr \\ &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \frac{1}{n(p'-1)} \left(\frac{R}{2}\right)^{n(1-p')} \leq \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \frac{p}{n} \end{aligned}$$

由于 $p' > 1$ 和 $R \geq 2$。因此，对于 $k_{L,\ R,\ S}$，我们得到：

$$\int_{\mathbb{T}^n} |k_{L,R,S}(0,y)|^p \, dy \leq \left(\frac{(1+\epsilon)^2}{2\pi} \right)^{np} \frac{1}{a_n^p} \left(\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \frac{p}{n} \right)^{p-1} . \tag{40}$$

将这些项对所有 $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ 求和，得到

$$\begin{aligned} \sum_{p \geq 2} \frac{\gamma^{2p}}{p!} \int_{\mathbb{T}^n} |k_{L,R,S}(0,y)|^p \, dy &\leq \sum_{p \geq 2} \frac{\gamma^{2p}}{p!} \left(\frac{(1+\epsilon)^{2n}}{(2\pi)^n a_n} \right)^p \left(\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \frac{p}{n} \right)^{p-1} \\ &= \frac{n\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}} \sum_{p \geq 2} \frac{\gamma^{2p}}{p!p} \left(\frac{(1+\epsilon)^{2n}}{(2\pi)^n a_n} \frac{2\pi^{n/2} p}{n\Gamma(n/2)} \right)^p \\ &\sim \frac{n\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}} \sum_{p \geq 2} \frac{1}{p\sqrt{2\pi p}} \left(\frac{(1+\epsilon)^{2n} 2\pi^{n/2} e \gamma^2}{(2\pi)^n a_n n \Gamma(n/2)} \right)^p , \end{aligned}$$

其中我们使用了斯特林公式 $p! \sim \sqrt{2\pi p}(\frac{p}{e})^p$。最后一个求和是有限的，如果

$$(1+\epsilon)^{2n}\gamma^2 < \frac{(2\pi)^n a_n n \Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2} e} = \frac{n}{e} = \gamma_*^2 \,, \tag{41}$$

其中我们代入了 $a_n = \frac{2}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(n/2)}$。由于假设 $|\gamma| < \gamma_*$ 且 $\epsilon > 0$ 是任意的，通过适当选择后者，(41) 即可满足。

对于 $p = 0$ 和 $p = 1$ 的情形，注意到 $\left(\int_{\mathbb{T}^n} |k_{L,R,S}(0,y)|\,dy\right)^2 \le \int_{\mathbb{T}^n} |k_{L,R,S}(0,y)|^2\,dy$。因此，存在一个常数 $C^R_{n,\gamma}$，使得

$$\sum_{p\ge 0} \frac{\gamma^{2p}}{p!} \int_{\mathbb{T}^n} |k_{L,R,S}(0,y)|^p\,dy \le C^R_{n,\gamma},$$

关于 L 一致成立，因此又存在一个常数 $C^\sharp_{n,\gamma}$，使得

$$\sup_L \sum_{p\ge 0} \frac{\gamma^{2p}}{p!} \int_{\mathbb{T}^n} |k_{L,\sharp}(0,y)|^p\,dy \le C^\sharp_{n,\gamma},$$

这就证明了（36）。

（ii）为证明（37），注意到

$$\int_{\mathbb{T}^n} \exp\left(\gamma^2 k_{L,\flat}(0,y)\right) d\mathcal{L}^n(y) = \int_{\mathbb{T}^n_L} \exp\left(\gamma^2 k_L(0,v)\right) dm_L(v)$$

对每个 L 都成立。此外，对于 $p \ge 2$,

$$\int_{\mathbb{T}^n_L} |k_L(0,v)|^p\,dm_L(v) \le \left(\frac{1}{a_n^{p'}} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}} |c(z)|^{p'}\right)^{p-1}.$$

事实上，对于 $p=2$，这是由帕塞瓦尔恒等式得到的；对于 $p=\infty$，这是因为 $|\exp(2\pi i z(x-y))| = 1$。根据 Riesz–Thorin 定理，该估计对所有介于 $p \in (2,\infty)$ 的值均成立。然后，（37）的证明沿用上述思路即可。

(iii) 回忆一下 $k_{+,L} = q_L \circ k_L^+$ 其中 k_L 给出的是（25）。因此根据詹森不等式，（38）将由以下式子推出:

$$\sup_L \int_{\mathbb{T}^n} \exp\left(\gamma^2 k_L^+(0,y)\right) d\mathcal{L}^n(y) < \infty\,. \tag{42}$$

为证明这一点，我们像之前在 (i) 中那样论证，不过现在取

$$k_L^+(x,y) = \frac{1}{a_n} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n_L\setminus\{0\}} \frac{1}{\vartheta_{L,z}^2\,\lambda_{L,z}^{n/2}} \cdot \exp\left(2\pi i\, z\cdot(x-y)\right)$$

将 $k_{L,\sharp}(x,y)$ 放在原来的位置。对于给定的 $\epsilon > 0$，像之前一样选择 $R > 2$ 和 $S > 1$。特别地，此时对于所有 $t \in [0, \frac{\pi}{2S}]$，$t \le (1+\epsilon)\sin(t)$，从而

$$1 \ge \vartheta_{L,z} \ge (1+\epsilon)^{-n} \qquad \forall z \in \mathbb{Z}^n_{L/S}.$$

因此将 它像之前一样分解为三个因子，然后用之前的论证即可证明该结论。 □

推论 4.12。若 $|\gamma| < \gamma_*$，则对于每个 $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$，
(i) 族 $\left(\int_{\mathbb{T}^n} f\,d\mu_{L,\sharp}\right)_{L\in\mathbb{N}}$ 是 $L^2(\mathbf{P})$-有界的，*(ii)* 族 $\left(\int_{\mathbb{T}^n} f\,d\mu_{L,\flat}\right)_{L\in\mathbb{N}}$ 是 $L^2(\mathbf{P})$-有界的。*(iii)* 族 $\left(\int_{\mathbb{T}^n} f\,d\mu_{+,L}\right)_{L\in\mathbb{N}}$ 是 $L^2(\mathbf{P})$-有界的。

证明。(i) 给定上述的 $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ 和 γ，考虑高斯随机变量

$$Y_{L,\sharp} := \int_{\mathbb{T}^n} f\,d\mu_{L,\sharp} = \int_{\mathbb{T}^n} \exp\left(\gamma h_{L,\sharp}(x) - \frac{\gamma^2}{2} k_{L,\sharp}(x,x)\right) f(x)\,d\mathcal{L}^n(x).$$

Then

$$\begin{aligned}\sup_L \mathbb{E}\Big[\big|Y_{L,\sharp}\big|^2\Big] &= \sup_L \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} \exp\Big(\gamma^2 k_{L,\sharp}(x,y)\Big)\, f(x)\, f(y)\, dm_L(y)\, d\mathcal{L}^n(x)\\ &\le \sup_L \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} \exp\Big(\gamma^2 k_{L,\sharp}(x,y)\Big)\, f^2(x)\, dm_L(y)\, d\mathcal{L}^n(x)\\ &\le \|f\|^2 \cdot \sup_L \int_{\mathbb{T}^n} \exp\Big(\gamma^2 k_{L,\sharp}(0,y)\Big)\, dm_L(y) \le \|f\|^2 \cdot C^{\sharp}_{n,\gamma} < \infty.\end{aligned}$$

(ii) 同理,

$$\sup_L \mathbb{E}\Big[\big|Y_{L,\flat}\big|^2\Big] \le \|f\|^2 \cdot \sup_L \int_{\mathbb{T}^n} \exp\Big(\gamma^2 k_{L,\flat}(0,y)\Big)\, dm_L(y) \le \|f\|^2 \cdot C^{\flat}_{n,\gamma} < \infty$$

对于 $Y_{L,\flat} := \int_{\mathbb{T}^n} f\, d\mu_{L,\flat} = \int_{\mathbb{T}^n} \exp\Big(\gamma h_{L,\flat}(x) - \frac{\gamma^2}{2} k_{L,\flat}(x,x)\Big) f(x)$ $d\mathcal{L}^n(x)$。(iii) 类似地。 □

参考文献

[1] M. Biskup。关于随机导电模型的最新进展。 *Probab. Surv.*, 8:294–373, 2011。[2] A. Cipriani, B. Dan 和 R. S. Hazra。膜模型的标度极限。 *Ann. Probab.* 47 6 3963 4001, , ( ): – 2019 .[3] A. Cipriani, J. de Graaff 和 W. M. Ruszel。可分沙堆的标度极限：傅里叶乘子方法。*J. Theor. Probab.*, 33(4):2061–2088, 2019。[4] A. Cipriani, R. S. Hazra 和 W. M. Ruszel。可分沙堆中里程表函数的标度极限。 *Probab. Theory Relat. Fields* 172 3 4 829 868, 2017 , (-): – dec .[5] L. Dello Schiavo, R. Herry, E. Kopfer 和 K.-T. Sturm。偶数维黎曼流形上的共形不变随机场、量子刘维尔测度和随机潘尼茨算子。 *arXiv:2105.13925*, 2021。[6] Dello Schiavo, L., Kopfer, E. 和 Sturm, K.-T. 随机黎曼几何探索之旅。 *arXiv:2012.06796*, 2020。[7] B. Duplantier, R. Rhodes, S. Sheffield 和 V. Vargas。对数相关高斯场：综述。载于 *Progress in Mathematics* 191 216 2017 , 第 – 页。施普林格国际出版，。[8] G. B. Folland。 *Real analysis: modern techniques and their applications*，第 40 卷。约翰·威立父子出版公司，1999。[9] Kahane, J.-P. 论乘法混沌。 *Ann. sc. math. Québec*, 9(2):105–150, 1985。[10] N. Kurt。临界维数下高斯膜模型的最大值与熵排斥。 *Ann. Probab.*, 37 2 687 725, 2009 ( ): – .[11] L. Levine, M. Murugan, Y. Peres 和 B. E. Ugurcan。临界密度下的可分沙堆。 *Ann. Henry Poincaré* 17 1677 1711, 2016 , : – .

[12] A. Lodhia, S. Sheffield, X. Sun 和 S. S. Watson。分数高斯场：综述。 *Probab. Surveys* 13 1 56, , : – . 2016 [13] H. Sakagawa。具有某种有限程相互作用的高斯格点场的熵排斥。 *J. Math. Phys.*, 44 2939 2003( ), .[14] F. Schweiger。四维膜模型的最大值。 *Ann. Probab.*, 48(2):714–741, 2020。[15] A. Shamov。关于高斯乘法混沌。 *J. Funct. Anal.*, 270:3224–3261, 2016。[16] S. Sheffield。面向数学家的高斯自由场。 *Probab. Theory Relat. Fields*, 139:521–541, 2007。[17] A. Zygmund。三角级数与幂级数理论中的若干问题。 *Trans. Amer. Math. Soc.* 36 3 586 617, , ( ): – 1934 .