# 利用嵌入囚禁离子量子多能级系统中的量子比特实现通用量子计算

Anastasiia S. Nikolaeva,[1,2] Evgeniy O. Kiktenko,[1,2] 和 Aleksey K. Fedorov[1,2]
[1]*Russian Quantum Center, Skolkovo, Moscow 121205, Russia*
[2]*National University of Science and Technology "MISIS", Moscow 119049, Russia*(日期：2024年7月2日)

基于量子多能级系统的量子计算，尤其是囚禁离子方面的最新进展，为在不增加物理信息载体数量的情况下扩展量子处理器提供了有趣的可能性。本文提出一种编译量子电路的方法，适用于在囚禁离子平台上将量子比特嵌入实验上具有实际意义的维度的量子多能级系统中，$d = 3, \ldots\ldots, 8$。具体而言，我们展示了如何利用单量子位操作以及作为基本双粒子操作的 Mølmer-Sørensen（MS）门，实现单量子比特门、双量子比特门和多量子比特门。我们预计，我们的研究结果可直接应用于当前一代基于囚禁离子的奎迪特处理器。

arXiv:2302.02966v3 [quant-ph] 1 Jul 2024

## 一、引言。

尽管半导体微电子学的发展取得了显著进展 [1]，但现代计算架构仍有一些问题在实践中难以解决，例如大数的整数分解 [2]以及复杂（量子相互作用、多体）系统的模拟 [3]。量子计算基于操控量子比特的纠缠叠加态这一思想 [4–6]（量子比特是经典比特的量子对应物），被视为增强计算能力、解决包括上述任务在内的困难计算问题的一种途径 [2, 7, 8]。然而，一项重大挑战是开发能够解决实际相关任务的大规模量子计算设备。具体而言，设计一种可扩展至大量量子比特、同时又不降低其相互作用控制质量的物理平台并非易事。目前的前沿任务是构建含噪声中等规模量子（NISQ）设备 [9]，，其中量子比特存在噪声，彼此之间的操作也不完美。近期 NISQ 设备的发展包括对多种物理平台的研究，例如超导体 [10–12]，半导体 [13–15],中性原子 [16–19]，囚禁离子 [20–22]，以及量子光学系统 [23, 24]。

上述平台中使用的信息载体本质上都是多能级系统，因此将其用作量子比特需要理想化处理。自然的做法是将此类系统视为量子多能级系统，即 $d$ 维量子系统（$d > 2$）。过去几十年来，使用量子多能级系统进行量子计算一直是活跃的研究领域 [25–65]。值得注意的是，最早实现的双量子比特门便使用了量子多能级系统 [66]：两个量子比特存储在单个囚禁离子的自由度中。近期成果包括基于囚禁离子的多量子比特处理器演示 [67, 68]，、超导系统 [69, 70]，以及光学系统的演示 [63]。对于囚禁离子 [67, 68]，研究人员已展示了对多达八个能级的系统进行高效实验控制，并实现了足够高的门保真度；此外，还公布了能级数更多的系统的实验结果 [71]。

除了要克服各种实验挑战，开发基于奎迪特的处理器还需要采用新方法来实现量子算法，尤其是编译以量子多能级系统为资源的量子电路。即使对于三能级量子比特（$d = 3$），附加能级也有助于分解多量子比特门 [37, 40, 46, 50, 52, 64]。此外，可以将量子位的空间视为多个量子比特构成的空间，例如，将四能级量子系统（$d = 4$）视为两个量子比特 [42, 43, 68]。对于维数更大的量子位，可以结合这些方法 [72]。总体而言，基于原生操作，为不同维数开发资源高效的编译方案仍是一个亟待解决的问题，而这对实现量子算法至关重要 [72–75]。我们以囚禁离子平台为例，研究量子多能级系统的多能级资源如何巧妙地解决这一问题。

在这项工作中，我们展示了如何利用多能级量子系统实现通用量子计算。为此，我们提出了一种方法，用于将量子比特量子电路编译到具有不同维度的囚禁离子量子位上。我们展示了如何借助三能级量子比特的第三能级（$d = 3$），为处于前两个能级子空间中的量子比特构造广义托福利门。随后，我们介绍了如何为嵌入四能级量子系统（$d = 4$）中的成对量子比特系统获得通用门集。接着，我们将这一思路扩展到五能级量子比特（$d = 5$）、六能级量子比特（$d = 6$）和七能级量子比特（$d = 7$），展示如何利用附加能级对多量子比特门进行分解。最后，我们研究了嵌入八能级量子比特（$d = 8$）中的三量子比特系统的通用门集。由于我们的方法采用 MS门，因此预计我们的结果可直接应用于当前一代基于囚禁离子的奎迪特处理器，并涵盖所有相关维度。

## II. 基于囚禁离子量子位的处理器模型

我们首先定义一个基于囚禁离子的量子位处理器模型。我们考虑一个由 $m$ 个量子多能级系统组成的系统，每个系统具有相同数量的可用能级 $d$，其基态记为 $|j\rangle$, $j = 0, \ldots, d-1$。作为一组基本

单量子位操作，我们采用泡利旋转 $R_\phi^{ij}(\theta) = \exp(-\imath\sigma_\phi^{ij}\theta/2)$，其中 $\theta$ 是旋转角，$i \neq j$ 表示量子位中两个被寻址的能级，$\sigma_\phi^{ij} = \cos\phi\sigma_x^{ij} + \sin\phi\sigma_y^{ij}$, $\sigma_\kappa^{ij}$，其中 $\kappa = x, y, z$ 表示作用于由 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ 张成的两能级子空间中的标准泡利矩阵（例如，$\sigma_y^{02} = -\imath|0\rangle\langle 2| + \imath|2\rangle\langle 0|$），而角度 $\phi$ 指定旋转轴。我们将绕 $x$ 轴和 $y$ 轴旋转的记号分别定为：$R_x^{ij}(\theta) := R_{\phi=0}^{ij}(\theta)$,$R_y^{ij}(\theta) := R_{\phi=\pi/2}^{ij}(\theta)$。我们还假设可以实现相位门 $\mathrm{Ph}^j(\theta)$，它为基态 $|j\rangle$ 添加相位因子 $e^{\imath\theta}$，并保持其他基态不变。我们指出，通过组合物理上允许的跃迁构成的连通图 [73] 上的旋转，可以在任意所需跃迁处实现单量子位旋转。从技术层面而言，量子多能级系统由单个激光声光调制器控制。

作为一种基本的双量子位操作，我们考虑经过相位补偿、基于量子位的 MS 门扩展 $\widetilde{\mathrm{MS}}_\phi^{ijkl}(\chi) := \exp(-\imath\sigma_\phi^{ij}\otimes\sigma_\phi^{k\ell}\chi)$，其中 $\chi$ 表示量子门的持续时间，而成对的 $(i,j)$、$(k,l)$ 表示耦合量子位 [67] 中被寻址的跃迁。该操作可通过在相位补偿的 MS 门 $\widetilde{\mathrm{MS}}_\phi^{01}(\chi) = \exp\left[-\imath(\sigma_\phi^{01}\otimes\sigma_\phi^{01})\chi\right]$ 两侧施加单量子位门来实现（见附录 A）。标准 MS 门 $\mathrm{MS}_\phi^{01}(\chi) = \exp\left[-\imath(\sigma_\phi^{01}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\sigma_\phi^{01})^2\chi/2\right]$ 的相位补偿过程见参考文献 [67]。我们还规定 $x$轴旋转的记号：$\mathrm{XX}^{ijkl}(\chi) := \widetilde{\mathrm{MS}}_{\phi=0}^{ijkl}(\chi)$。我们假设任意一对量子位都可以执行双量子位门；对于囚禁离子而言，这是一个自然的假设 [67, 68]。

我们还假设能够进行计算基读出测量，该测量由正算符值测度（POVM）$\mathcal{M} = \{|j\rangle\langle j|\}_{j=0,\ldots,d-1}$描述。通过重复进行投影式量子非破坏（QND）测量$\{|0\rangle\langle 0|, \sum_{j\geq 1}|j\rangle\langle j|\}$，并在测量之间适当交换量子位各能级的布居，即可在物理上实现这种测量。这使我们能够对下文讨论的各种量子比特嵌入量子位的方式进行计算基测量。

## III. 利用不同维度的囚禁离子基量子位实现量子电路

下面，我们考虑通过将量子比特嵌入维度范围为 $d = 3$[1] 至 $d = 8$、具有实验相关性的囚禁离子量子位中，实现基于量子比特的电路。

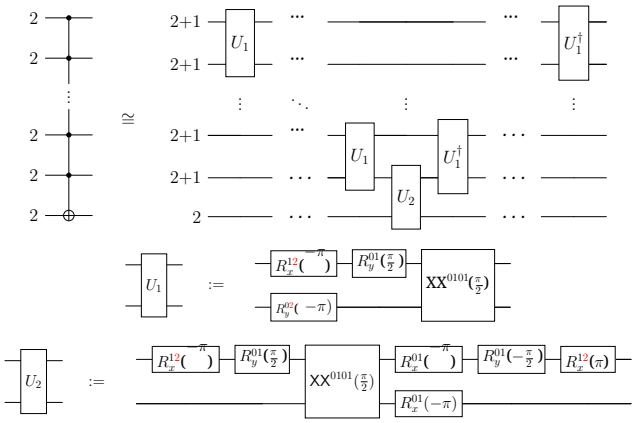


图1. 囚禁离子三能级量子系统中嵌入量子比特的广义托福利门分解。每条线路旁的数字表示相应粒子所采用的维数。符号 ≅ 强调，右侧的量子电路与左侧的量子电路等价，适用于仅占据前两个能级的量子比特子空间。

### A. 利用三能级量子系统简化多量子比特门的分解

三能级量子比特 Q 的计算空间可以视为量子比特 q 的空间（$|0\rangle_\mathsf{Q} \leftrightarrow |0\rangle_\mathsf{q}$，$|1\rangle_\mathsf{Q} \leftrightarrow |1\rangle_\mathsf{q}$）与一个辅助能级 $|a=2\rangle_\mathsf{Q}$ 的组合。这样，$m$ 个量子比特便嵌入到 $m$ 个三能级量子系统中。这种嵌入实际上是标准量子比特方法的扩展，因此，要为量子比特子空间实现通用门集，只需使用 $R_\phi^{01}(\theta)$ 和 $\mathrm{XX}^{0101}(\chi)$ 门，而不占据第三级能级。

然而，辅助能级 $|a=2\rangle$ 对于实现多量子比特广义托福利门（多重受控非门）似乎相当实用

$$\mathsf{C}^{N-1}\mathsf{X} : |c_1,\ldots,c_{N-1},t\rangle \mapsto |c_1,\ldots,c_{N-1},t\oplus\prod_{i=1}^{N-1}c_i\rangle, \quad (1)$$

其中 $c_i$，$t \in \{0,1\}$ 以及 $\oplus$ 表示模2求和。在图1中，我们展示了 $\mathsf{C}^{N-1}\mathsf{X}$ 门的V形阶梯式分解，该分解利用了三能级量子系统的上层辅助能级。所示量子电路在相关三能级量子系统的量子比特子空间内实现 $\mathsf{C}^{N-1}\mathsf{X}$ 操作；只要电路开始时所有辅助能级均未占据，那么结束时它们也都会保持未占据状态。

所提出的分解需要在最近邻线性耦合图中应用 $2N-3$ 双三能级量子比特 $\mathrm{XX}^{0101}(\pi/2)$ 量子门。作为比较，已知

[1] 关于基于三能级量子比特的分解的初步结果已发表作为海报“基于量子位的量子编译器：充分发挥多能级量子系统的潜力”，作者为 A.S. Nikolaeva、E.O. Kiktenko、A.K. Fedorov，发表于第六届量子技术国际会议“ICQT2021”。该文的扩展版本所呈现的结果已发表于莫斯科物理技术学院第64届全俄罗斯科学会议论文集（报告《超导和囚禁离子三能级量子系统上的广义托福利门分解》，A.S. Nikolaeva、E.O. Kiktenko、A.K. Fedorov）。

多重受控门的基于量子比特的分解需要 $\mathcal{O}(N^2)$ 个双量子比特门，且不使用辅助量子比特 [76]。我们强调，图 1 中的分解基于囚禁离子专用双三能级系统 MS 门；这一门与此前为简化广义托福利门的实现而研究的受控相位门和 iSWAP 双三能级系统操作不同（即使在其周围施加局部门之后也是如此） [52, 64, 77]。它也不同于基于 Cirac-Zoller 门的分解 [78]。与 MS门不同，Cirac-Zoller 门要求将运动自由度制备在基态。

### B. 在四能级系统中嵌入成对的量子比特

与三能级量子系统相比，四能级系统的特点在于，其空间可以被视为两个量子比特的空间。也就是说，两个量子比特 q 和 q′ 可以通过映射 $|j\rangle_{\mathsf{Q}} \leftrightarrow |\mathrm{bin}_2(j)\rangle_{\mathsf{qq}'}$ 嵌入四能级量子系统 Q 中，其中 $\mathrm{bin}_k(j)$ 表示 $k$ 位的 $j$ =0、.....、$2^k-1$ 的二进制表示（例如，$\mathrm{bin}_2(0) = 00$、$\mathrm{bin}_2(1) = 01$ 等）。这种方法可以将 $n$ 个量子比特存储在 $\lceil n/2 \rceil$ 个四能级系统中。

由于每个量子比特 $\mathsf{q}_1$ 始终与某个“相邻”量子比特 $\mathsf{q}_2$ 一起位于四能级量子系统 Q 内，因此，作用于 $\mathsf{q}_1$，的单量子比特门 $u$ 必须被视为与恒等算符的张量积，而该恒等算符作用于 $\mathsf{q}_2$。根据 $\mathsf{q}_1$ 在 Q 内的“位置”，实现 $u$ 的单量子位数酉算符 $U$ 具有以下形式：

$$U = u \otimes \mathbb{1} = \begin{pmatrix} u_{00} & & u_{01} & \\ & u_{00} & & u_{01} \\ u_{10} & & u_{11} & \\ & u_{10} & & u_{11} \end{pmatrix}, \qquad U = \mathbb{1} \otimes u = \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & & \\ u_{10} & u_{11} & & \\ & & u_{00} & u_{01} \\ & & u_{10} & u_{11} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中未指定的元素均为零，$u_{ij} = \langle i|\, u\, |j\rangle$[另见图 2(a, b)]。请注意，式 (2) 中定义四能级量子系统酉算符 $U$ 的独立参数数量与单量子比特酉算符 $u$ 相同。给定单量子比特门 $u = R_\phi(\theta) =: R_\phi^{01}(\theta)$，基于四能级量子比特的实现形式取决于受影响的量子比特，可写为$R_\phi(\theta) \otimes \mathbb{1} = R_\phi^{02}(\theta) R_\phi^{13}(\theta)$，或 $\mathbb{1} \otimes R_\phi(\theta) = R_\phi^{01}(\theta) R_\phi^{23}(\theta)$。类似地，单量子比特门 $u =$ 相位门$(\theta) =:$ 相位门$^1(\theta)$ 可通过相位门$(\theta) \otimes \mathbb{1} =$ 相位门$^2(\theta)$相位门$^3(\theta)$实现，也可通过 $\mathbb{1} \otimes$ 相位门$(\theta) =$ 相位门$^1(\theta)$相位门$^3(\theta)$实现。

双量子比特门（例如 CZ: $|xy\rangle_{\mathsf{q}_1\mathsf{q}_2} \mapsto (-1)^{xy} |xy\rangle_{\mathsf{q}_1\mathsf{q}_2}$，）的实现取决于 $\mathsf{q}_1$ 和 $\mathsf{q}_2$ 是否属于同一个量子位 Q。若属于同一个量子位，则可通过单四能级量子门 CZ $=$ $\mathrm{Ph}^3(\pi) =$ $\mathrm{diag}(1, 1, 1, -1)$ [实现，另见图2(c)]。若不属于同一个量子位，则必须考虑一个16维的四量子比特（双四能级系统）操作，该操作由 CZ 与单位矩阵的适当张量积给出。可以看到，作用于四能级系统对 $\mathsf{Q}_1$，$\mathsf{Q}_2$的 $\mathrm{XX}^{2323}(\pi)$

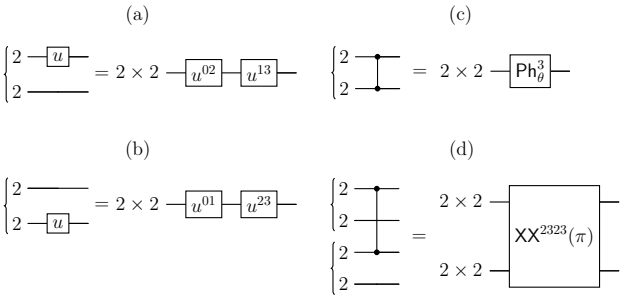


图2. 将单量子比特门和双量子比特门编译到嵌入基于囚禁离子的四能级系统中的量子比特上。大括号表示嵌入同一量子位中的量子比特。图(a)和(b)分别展示了作用于量子位内第一和第二个量子比特的单量子比特门 $u$ 的实现。这里，上标 $ij$ 表示四能级系统门 $u^{ij}$ 作用的能级。图(c)展示了作用于同一量子位内量子比特的双量子比特受控相位门的实现。图(d)展示了使用MS门实现作用于来自不同四能级系统的量子比特之间的双量子比特受控相位门。

会给四个基态 $\mathsf{q}_{12}\mathsf{q}_{21}\mathsf{q}_{22}$添加 $-1$相位因子$|1a1b\rangle_{\mathsf{q}_{11}}$，其中 $a$，$b \in \{0, 1\}$，$\mathsf{q}^{ij}$表示嵌入四能级系统 $\mathsf{Q}_i$中的第 $j$个量子比特。此操作正是 CZ 门[，另见图2(d)]。量子比特对 ($\mathsf{q}_{11}$,$\mathsf{q}_{22}$)、($\mathsf{q}_{12}$,$\mathsf{q}_{21}$) 和 ($\mathsf{q}_{12}$,$\mathsf{q}_{22}$) 上的 CZ 门分别由 $\mathrm{XX}^{2313}(\pi)$、$\mathrm{XX}^{1323}(\pi)$ 和 $\mathrm{XX}^{1313}(\pi)$ 实现。

通过能够对任意量子比特施加 $R_\phi(\theta)$ 和 $\mathrm{Ph}_\theta(\theta)$ 操作，并对任意一对量子比特施加双量子比特 受控-Z门，我们便获得了量子比特通用门集。与直接基于量子比特的实现相比，所提出的方法减少了运行给定量子电路所需的双粒子操作数量。这是因为一些双量子比特操作作用于同一量子多能级系统中的量子比特。特别是，标准的无辅助比特分解 $C^2X$门需要 14 个双量子比特门 [79]。，而采用该方法可将其映射为仅需 6 个双四能级量子门的分解；见附录 B。

### C. 利用第 5、6 和 7 能级改进多量子比特门的分解。

$d$能级多能级量子比特空间（$d = 5$，6，7）可视为两个量子比特构成的四维子空间与一个（$d-4$）维辅助能级子空间的直和。这样便可采用此前为四能级量子系统开发的所有技术，并且通过在辅助能级上操作还能获得额外益处。

如图 2(a, b) 所示，增加一个辅助能级，例如，$a = 4$ 对于 $d = 5$ 可将实现CZ 和 CZ 量子比特门所需的双粒子操作次数减少至分别仅需一次 $\mathrm{XX}^{2313}(\pi)$ 和 $\mathrm{XX}^{1313}(\pi)$ 操作。重要的是，该实现方

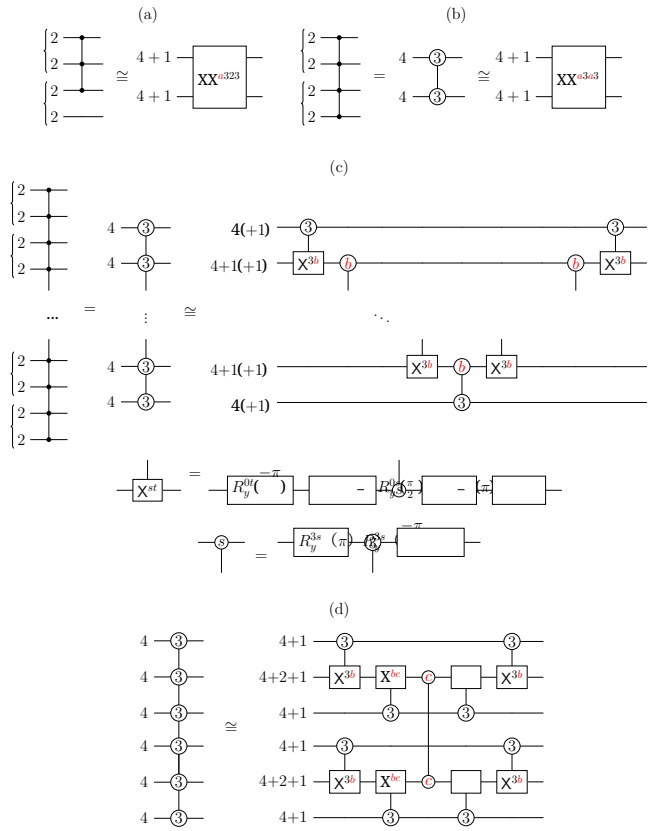


图3. 借助高能级 $d > 4$，实现作用于嵌入量子多能级系统中的量子比特对的 $C^{N-1}Z$ 量子门。连接带圈的 3 的竖线表示多量子位门：当且仅当所有受影响的量子位都处于状态 $|3\rangle$时，该门会附加相位 −1。注意，此操作等价于作用于所有嵌入量子比特的受控相位门。(a) 和 (b) 分别展示了借助一个附加能级 $a$ 和一个 $XX^{ijk\ell}(\pi)$ 量子门实现 $C^2Z$ 和 $C^3Z$ 的方法。注意，$C^3Z$ 的实现会执行一次 $\mathrm{Ph}^{33}_{\mathcal{A}_a}$ 操作。(c) 展示了基于两个量子位 $\mathrm{Ph}^{33}_{\mathcal{A}_b}$ 门的多量子比特 $C^{N-1}Z$ 量子门的线性深度分解。这些门可以通过调整 $C^3Z$ 量子门的直接量子比特分解来实现（见附录 B），也可以借助一个额外的辅助能级 $a \neq b$（标记为 (+1)）并采用方案 (b) 来实现。(d) 展示了使用 $\mathrm{Ph}^{33}_{\mathcal{A}_b,\ c}$ 门对 $C^{11}Z$ 量子门进行的对数深度分解，该分解使用两个辅助能级 $b$ 和 $c$。这些门可以使用第三个辅助能级 $a \neq b$、$c$ 和方案 (b) 来实现。

$C^3Z$ 门的实现产生变换 $\mathrm{Ph}^{33}_{\mathcal{A}_a}$，其中

$$\mathrm{Ph}^{33}_{\mathcal{A}} : |j,k\rangle \mapsto \begin{cases} (-1)^{\delta_{3,j}\delta_{3,k}}\,|j,k\rangle & \text{for } (j,k) \in \mathcal{A}, \\ e^{i\phi(j,k)}\,|j,k\rangle & \text{for } (j,k) \notin \mathcal{A}, \end{cases} \quad (3)$$

$\delta_{i,\ j}$ 表示标准克罗内克符号，$\phi(j,\ k)$ 是一些实相位，且 $\mathcal{A}_a := \{(x,\ y) :\ x,\ y \in \{0,\ldots,d-1\}/\{a\}\}$。换言之，$C^3Z$ 在由除 $a$ 以外的所有能级张成的双量子位子空间中，是一个形如 diag(1，…，1，−1，1，…，1) 的矩阵。

同时，如图 3(c) 所示，$C^{N-1}Z$ 门作用于 $N$ 个量子比特（$N$ 为偶数）嵌入 $N/2$ 个量子位中，只需使用 $N-3$ 个双量子位操作即可实现.

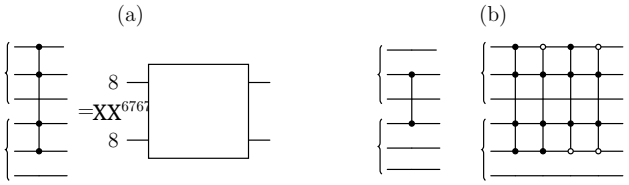


图4. 实现作用于嵌入在两个不同八能级量子比特中的量子比特上的门。(a) 展示了用单个 $XX^{6767}(\pi)$ 双量子多能级门实现 $C^3Z$。(b) 展示了用 4 个 $C^3Z$ 门，在来自不同量子多能级系统的两个量子比特之间实现 CZ 门。此处使用反向控制（空心圆点）的标准记法。通过在基本 $C^3Z$ 门两侧加上 $R_x(\pm\pi)$ 个扩展为单个量子位操作的单量子比特门，即可实现取反。

作，$\mathrm{Ph}^{33}_{\mathcal{A}_b}$，其中 $\mathcal{A}_b := \{(x,y):\ x \in \{0,\ldots,3,b\}, y \in \{0,\ldots,3\}\}$。$\mathrm{Ph}^{33}_{\mathcal{A}_b}$ 可以通过两种方式实现。第一种方法是采用四量子比特 $C^3Z$ 门的基于量子比特的分解（见附录 B）。该方法不使用任何额外的辅助能级，可用于 $d = 5$ 个量子位。在这种情况下，每个 $\mathrm{Ph}^{33}_{\mathcal{A}_b}$ 操作需要 6 个双量子位 $XX^{ijkl}(\pi)$ 门，而 $C^{N-1}Z$ 的完整分解需要 $6N-18$ 个原生双量子位门。还需注意，量子电路中第二个“递增”部分的门序列必须取为第一个“递减”部分的厄米共轭。实现 $\mathrm{Ph}^{33}_{\mathcal{A}_b}$ 的第二种方法是使用 $a \neq b$ 执行一次 $\mathrm{Ph}^{33}_{\mathcal{A}_a}$ 操作（注意 $\mathcal{A}_a \supset \mathcal{A}_b$）。这对于 $d \geq 6$ 是可行的。最终，我们得到一个 $C^{N-1}X$ 门的分解，其中包含 $N-3$ 个 $XX^{a3a3}(\pi)$ 操作。

从 $d = 6$ 到 $d = 7$ 可以进一步改进多量子比特门分解。具体而言，如图3(d)所示，$C^{N-1}X$ 门可以通过由 $N-3$ 基于两个辅助能级的 $\mathrm{Ph}^{33}_{\mathcal{A}_{b,\ c}}$ 操作组成的对数深度量子电路来实现，其中$\mathcal{A}_{b,\ c} := \{(x,\ y) :\ x,\ y \in \{0,\ldots,3,b,c\}\}$。同样，$\mathrm{Ph}^{33}_{\mathcal{A}_{b,\ c}}$可以简化为单个 $XX^{a3a3}(\pi)$ 操作，且 $a \neq b,\ c$。

我们总结了表I中各种分解的性质。可以看出，可控的辅助能级越多，多量子比特门分解就越容易。

表I. 嵌入 $N/2$ 量子多能级系统中的 $N$ 个量子比特的 $C^{N-1}X$ 门分解性质（$N$ 为偶数）。

| 量子位维数 $XX^{ijk\ell}(\chi)$ 门数量 | 深度 | |
|---|---|---|
| $d = 5$ | $12N-18$ | $\mathcal{O}(N)$ |
| $d = 6$ | $N-3$ | $\mathcal{O}(N)$ |
| $d = 7$ | $N-3$ | $\mathcal{O}(\log N)$ |

### D. 将三元量子比特嵌入八能级量子比特

对 $d = 8$ 能级的操控能力使得可以将三个量子比特 $q_1, q_2, q_3$ 嵌入单个量子位 Q 中，例如，通过直接映射 $|j\rangle_Q \leftrightarrow |\text{bin}_3(j)\rangle_{q_1,q_2,q_3}$。单量子位操作以及同一量子位内量子比特之间的门，都可以通过单量子位操作实现。为了获得通用量子比特门集，我们考虑特定 $i, j, k, \ell$ 下的 $XX^{ijk\ell}(\pi)$ 操作。该操作可用于在不同量子位中的两对量子比特之间实现 $C^3Z$ 门 [，示例见图 4(a)]。所得门集是通用的，因为如图 4(b) 所示，通过实施四个 $C^3Z$ 门，可以得到不同量子位中任意量子比特之间的 CZ 门。

## IV. 讨论

在这项工作中，我们提出了一套方法，用实验上相关维度为 $d = 3, \ldots\ldots, 8$ 的囚禁离子量子位实现量子比特电路。据我们所知，这是首次明确展示如何实现通用量子比特门集：该门集由单量子比特门和纠缠CZ门组成，作用于嵌入成对量子位（在具有 $d \geq 4$ 的量子位中）或三元量子位（在具有 $d \geq 8$ 的量子位中）的量子比特。我们还展示了如何利用基于囚禁离子的量子位中的额外能级，高效地实现无需辅助量子比特的广义托福利门。实现 $C^{N-1}X$ 门所需的纠缠门数量为 $c_1 N + c_2$（其中 $c_i$ 是一些常数），并且 $c_1$ 随量子位维度 $d$ 的增大而减小。值得注意的是，我们所有的分解都使用了 MS门，这种门是基于囚禁离子的架构中的原生门。这些特点使本工作的贡献有别于近期其他大多基于受控相位门的量子位分解方案（例如，参见 [46, 50, 52, 72, 77]）。

采用我们的方法实现具体算法时，相较于直接的基于量子比特的版本，能够获得优势的一个显著例子是Grover算法 [80]。在图5(a,b)中，我们给出了 Grover算法的高层级量子比特量子电路，其预言机的维度分别为 $n = 3$ 和 $n = 4$ （“隐藏字符串”分别选取为（$n-1$）个单位）。根据 [76, 79], 对$C^{N-1}X$ ($C^{N-1}X$)进行的无辅助量子比特基于量子比特的分解，对于$N = 3$ 和 $N = 4$ 量子门，分别需要 6 个和 14 个 受控-Z门 纠缠门。因此，实现

表 II. 使用量子比特、三能级量子系统和五能级量子比特实现Grover算法所需的纠缠门数量。

| 数量<br>算法中的量子比特<br>算法 | CZ 门数量<br>基于量子比特的<br>转译 | XX($\chi$)量子门数量<br>在基于量子多能级系统的<br>转译 |
|---|---|---|
| $n = 3$ | 7 | 4（适用于 $d = 3$） |
| $n = 4$ | 40 | 4（适用于 $d = 5$） |

分别需要 7 个和 40 个纠缠 $n = 3$ 和 $n = 4$量子比特 Grover算法。与此同时，如图5(c,d)所示，基于量子多能级系统的转译可将纠缠操作的数量减少到 4 个。这里我们以维度为 $d = 3$和 $d = 5$的量子位为例，展示相应方案。比较结果也列于表II。

一个重要的问题是，量子多能级辅助的门数量缩减所带来的优势，能否超过使用量子位的高能级所引入的额外噪声及其导致的错误。为回答这一问题，我们进行了简化分析，以估算量子比特方案与基于量子位的方案中的错误之间必须满足的关系，从而确保后者具有优势。假设错误的主要来源是纠缠门，且$e_{\mathrm{b(d)}}$ 表示系统噪声导致的量子比特（量子位）纠缠操作中的错误概率。令 $N_{\mathrm{b(d)}}$ 表示实现某个固定操作（例如广义托福利门）的量子比特（量子位）电路中纠缠门的数量。量子比特（量子位）情况下至少发生一次错误的概率为

$$E_{\mathrm{b(d)}} = 1 - (1 - e_{\mathrm{b(d)}})^{N_{\mathrm{b(d)}}} \approx N_{\mathrm{b(d)}} e_{\mathrm{b(d)}}, \qquad (4)$$

假设$e_{\mathrm{b(d)}}$ 足够小。那么在以下情况下， $E_{\mathrm{d}} < E_{\mathrm{b}}$为

$$\frac{e_{\mathrm{d}}}{e_{\mathrm{b}}} < \frac{N_{\mathrm{b}}}{N_{\mathrm{d}}} =: \kappa. \qquad (5)$$

对于所提出的方案， $\kappa \to 3$ [图1(a)]， $\kappa \to 6$[图1(b,d)], 甚至 $\kappa = \infty$ [图2(c)] （此处的极限是相对于分解 $N$ 中的量子比特数而言，所分解的是$C^{N-1}Z$ 量子门）。考虑到通过连续解耦抑制量子位高能级错误的进展 [81] 以及通过磁屏蔽进一步提高错误抑制效果的潜力， [74], 我们预计，所提出的基于量子多能级的技术相较于基于量子比特的实现将带来切实优势。我们还请读者参阅近期的研究 [82]，该研究在另一种背景下分析了一个与量子位和量子比特错误的影响有关的问题。

## V. 结论

我们提出了一套技术，用于编译嵌入囚禁离子量子多能级系统中的量子比特量子电路。该方法的一个特点是采用 MS门的量子多能级推广作为基本的双粒子门。我们展示了在实验相关的情况下增加维数（从$d = 3$ 增至 $d = 8$）如何为量子比特量子电路的编译带来越来越多的益处。我们预计，这些结果可直接应用于基于囚禁离子量子多能级系统的处理器 [67, 68]。

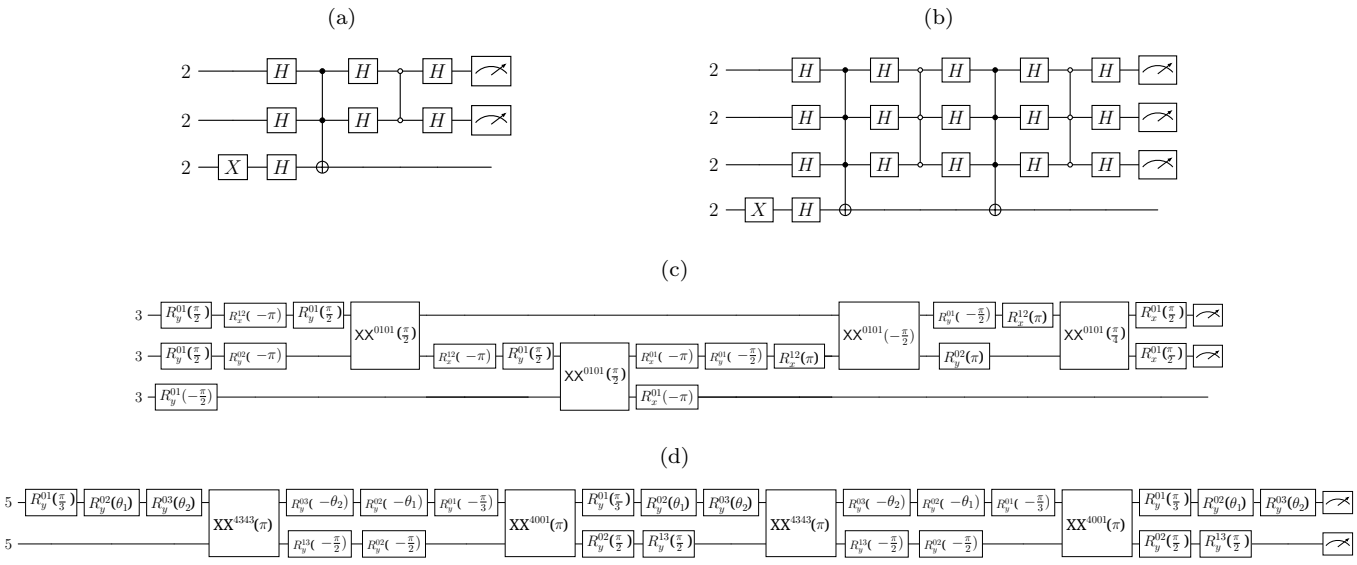


图 5. Grover算法实现的量子电路。(a) 和 (b) 分别展示了使用 $2+1$ 和 $3+1$ 个量子比特搜索隐藏字符串“11”和“111”的硬件无关电路。空心圆表示对状态 $|0\rangle$的控制位。(c) 中的量子电路是将 (a) 中的量子电路转译为单量子三能级系统门和双量子三能级离子门后的结果。此处使用了图 1 中的多量子比特分解。(d) 中所示的量子电路对应于量子电路 (b) 的基于量子五能级系统的实现。采用直接的量子比特到五能级量子比特映射：第一（第二）对量子比特嵌入第一个（第二个）五能级量子比特。使用五能级量子比特的最高能级，以简化多量子比特门的实现，如图 3 (a,b)所示。此处，$\theta_1 := 2\arcsin(3^{-1/2})$，$\theta_2 := \pi/2$。

**致谢**

我们感谢 B.I. Bantysh 和 I.V. Zalivako 富有成效的讨论。本研究由 NIST “MISIS”的 Priority 2030 计划通过项目 K1-2022-027 资助。A.S.N. 和 E.O.K. 的工作还获得了俄罗斯科学基金会资助项目19-71-10091的支持（开发基于三能级量子比特和基于四能级量子比特的分解）。

**附录A：将量子比特囚禁离子门扩展至多能级量子比特空间**

在图 6中，我们展示了如何将$\mathrm{XX}^{0101}(\chi)$ 门——通常被视为基于囚禁离子量子多能级系统的处理器中的基本双多能级量子比特操作 [67, 68]，转换为更一般的$\mathrm{XX}^{ijk\ell}(\chi)$ 门。我们注意到，形如 $R_\phi^{ij}(\theta)$ 的每种跃迁都可以分解为一系列操作，这些操作位于量子位能级之间的连通耦合图内。作为一个示例，我们考虑基于$^{171}\mathrm{Yb}^+$的四能级系统（$d=4$），[68]其耦合图由四种跃迁组成：$|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$，$|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$，$|0\rangle \leftrightarrow |3\rangle$。任意能级对（$i$，$j$）上的跃迁形式为

$$R_\phi^{ij}(\theta) = R_y^{0i}(\pi) R_\phi^{0j}(\theta) R_y^{0i}(-\pi). \tag{A1}$$

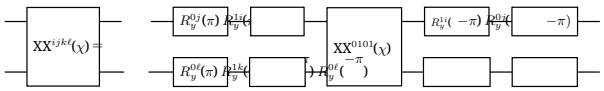

图 6. 基于 $\mathrm{XX}^{0101}(\chi)$ 量子门并结合单量子位旋转实现 $\mathrm{XX}^{ijk\ell}(\chi)$ 量子门。

**附录B：调整基于量子比特的$\mathrm{C}^3\mathrm{X}$ 量子门分解，以适用于嵌入两个量子位中的四个量子比特**

这里，我们展示如何在不使用辅助能级的情况下，利用 $\mathrm{XX}^{ijk\ell}(\chi)$ 操作为嵌入两个量子位的四个量子比特实现 $\mathrm{C}^3\mathrm{Z}$（等价地，$\mathrm{C}^3\mathrm{X}$）门。为此，我们采用据我们所知最佳的无辅助量子比特分解方案，该方案引自参考文献[79]，如图 7(a) 所示。它由全连接耦合图中的 14 个双量子比特 CZ 门和若干单量子比特门组成。将此方案映射到两个量子位后，得到一个包含 6 个双多能级量子比特 $\mathrm{XX}^{ijk\ell}(\pi)$ 门的量子电路，如图 7(b) 所示。每个 $\mathrm{XX}^{ijk\ell}(\pi)$ 门对应一个 CZ 门。其余的 $14-6=8$ 个双量子比特 CZ 门则转换为单量子位相位门 $\mathrm{Ph}^3(\pi)$，因为相应的量子比特属于同一个量子位。根据张量积和张量和规则（在$d>4$的情况下），所有单量子比特 $2\times 2$ 酉操作都映射为单量子位 $d\times d$ 酉操作。

若要将此分解用作其他由高能级辅助的分解（针对 $d=5$）的基本模块，就需要考虑作用于前四个量子比特能级与高能级上的操作之间出现的相位差。这种相位差是由于

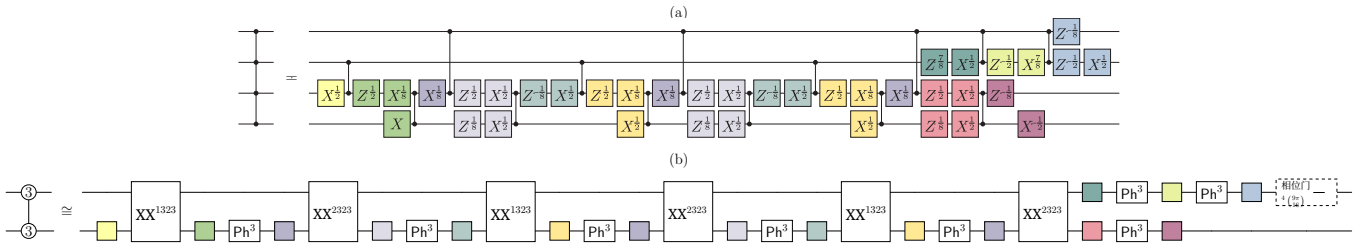


图7。（a）展示了参考文献 [79] 中的 $\mathsf{C}^3$受控-Z门的基于量子比特的分解。这里， $X^\alpha := R_x(\alpha\pi)$，且 $Z^\alpha := R_z(\alpha\pi)$。（b）展示了将四个量子比特嵌入两个量子位中的相应实现。这里，$\mathsf{XX}^{ijk\ell} := \mathsf{XX}^{ijk\ell}(\pi)$，且 $\mathsf{Ph} := \mathsf{Ph}^3(\pi)$。不同颜色的空方框表示单量子位门序列，它们是相同颜色的相应单量子比特门（序列）的扩展。嵌入同一量子位中的量子比特之间的双量子比特 CZ 门以 $\mathsf{Ph}^3$ 门的形式明确表示。量子电路末尾高亮显示的单量子位门用于进行相位校正，这是基于辅助能级的分解所必需的。

形式为（$u\otimes\mathbb{1}_{\rm qb}$）$\oplus\mathbb{1}_{\rm anc}$（或（$\mathbb{1}_{\rm qb}\otimes u$）$\oplus\mathbb{1}_{\rm anc}$）的单量子位算符张量积中的交叉项，其中 $u$ 是一个单量子比特操作， $\mathbb{1}_{\rm qb}$ 而 $\mathbb{1}_{\rm anc}$ 分别是作用于相邻量子比特空间和高能级空间的恒等算符。特别是，要采用图 7（a）中的分解来实现 $\mathsf{Ph}^{33}_{\mathcal{A}_4}$ 量子门，其将 $|33\rangle$ 变换为 $-|33\rangle$ 并使 $|xy\rangle$ 在 $x\in\{0,\ldots,4\}$、$y\in\{0,\ldots,3\}$、$xy\neq 33$保持不变，因此需要在图 7（b）所示量子电路的末端执行额外相位校正操作。

[1] G. E. Moore, 《Electronics》38 (1965年)。[2] P. Shor, 载于*Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science* 1994 124 134 ( )第 – 页。[3] R. P. Feynman, 《国际理论物理学杂志》21, 467（1982年）。[4] D. Deutsch, 《伦敦皇家学会会刊：数学与物理科学辑》400, 97（1985年）。[5] G. Brassard、I. Chuang、S. Lloyd 和 C. Monroe, 《美国国家科学院院刊》95, 11032（1998年）。[6] T. D. Ladd、F. Jelezko、R. Laflamme、Y. Nakamura、C. Monroe 和 J. L. O'Brien, 《自然》464, 45（2010 年）。[7] S. Lloyd, 《科学》273, 1073（1996年）。[8] A. K. Fedorov、N. Gisin、S. M. Beloussov 和 A. I. Lvovsky, "量子计算处于量子优势阈值：一篇务实综述"（2022年）。[9] K. Bharti、A. Cervera-Lierta、T. H. Kyaw、T. Haug、S. Alperin-Lea、A. Anand、M. Degroote、H. Heimonen、J. S. Kottmann、T. Menke、W.-K. Mok、S. Sim、L.- C. Kwek 和 A. Aspuru-Guzik, 《现代物理评论》94, 015004（2022年）。[10] N. Moll、P. Barkoutsos、L. S. Bishop、J. M. Chow、A. Cross、D. J. Egger、S. Filipp、A. Fuhrer、J. M. Gambetta、M. Ganzhorn、A. Kandala、A. Mezzacapo、P. M¨ uller、W. Riess、G. Salis、J. Smolin、I. Tavernelli 和 K. Te mme, 《量子科学与技术》3, 030503（2018年）。[11] F. Arute、K. Arya、R. Babbush、D. Bacon、J. C. Bardin、R. Barends、R. Biswas、S. Boixo、F. G. S. L. Brandao、D. A. Buell、B. Burkett、Y. Chen、Z. Chen、B. Chiaro、R. Collins、W. Courtney、A. Dunsworth、E. Farhi、B. Foxen、A. Fowler、C. Gidney、M. Giustina、R. Graff、K. Guerin、S. Habegger、M. P. Harrigan、M. J. Hartmann、A. Ho、M. Hoffmann、T. Huang, T. S. Humble, S. V. Isakov, E. Jeffrey, Z. Jiang, D. Kafri, K. Kechedzhi, J. Kelly, P. V. Klimov, S. Knysh, A. Korotkov, F. Kostritsa, D. Landhuis, M. Lind- mark, E. Lucero, D. Lyakh, S. Mandr`a, J. R. Mc- Clean, M. McEwen, A. Megrant, X. Mi, K. Michielsen, M. Mohseni, J. Mutus, O. Naaman, M. Neeley, C. Neill, M. Y. Niu, E. Ostby, A. Petukhov, J. C. Platt, C. Quintana, E. G. Rieffel, P. Roushan, N. C. Rubin, D. Sank, K. J. Satzinger, V. Smelyanskiy, K. J. Sung, M. D. Tre- vithick, A. Vainsencher, B. Villalonga, T. White, Z. J. Yao, P. Yeh, A. Zalcman, H. Neven, and J. M. Martinis, 《自然》**574**, 505 (2019). [12] Y. Wu, W.-S. Bao, S. Cao, F. Chen, M.-C. Chen, X. Chen, T.-H.Chung, H. Deng, Y. Du, D. Fan, M. Gong, C. Guo, C. Guo, S. Guo, L. Han, L. Hong, H.-L. Huang, Y.-H. Huo, L. Li, N. Li, S. Li, Y. Li, F. Liang, C. Lin, J. Lin, H. Qian, D. Qiao, H. Rong, H. Su, L. Sun, L. Wang, S. Wang, D. Wu, Y. Xu, K. Yan, W. Yang, Y. Yang, Y. Ye, J. Yin, C. Ying, J. Yu, C. Zha, C. Zhang, H. Zhang, K. Zhang, Y. Zhang, H. Zhao, Y. Zhao, L. Zhou, Q. Zhu, C.-Y. Lu, C.-Z. Peng, X. Zhu, and J.-W. Pan, 《物理评论快报》**127**, 180501 (2021). [13] X. Xue, M. Russ, N. Samkharadze, B. Undseth, A. Sam- mak, G. Scappucci, and L. M. K. Vandersypen, 《自然》**601**, 343 (2022). [14] M. T. Madzik, S. Asaad, A. Youssry, B. Joecker, K. M. Rudinger, E. Nielsen, K. C. Young, T. J. Proctor, A. D. Baczewski, A. Laucht, V. Schmitt, F. E. Hudson, K. M. Itoh, A. M. Jakob, B. C. Johnson, D. N. Jamieson, A. S. Dzurak, C. Ferrie, R. Blume-Kohout, and A. Morello, 《自然》**601**, 348 (2022). [15] A. Noiri, K. Takeda, T. Nakajima, T. Kobayashi, A. Sam- mak, G. Scappucci, and S. Tarucha, 《自然》**601**, 338 (2022).

[16] S. Ebadi, T. T. Wang, H. Levine, A. Keesling, G. Semeghini, A. Omran, D. Bluvstein, R. Samajdar, H. Pich- ler, W. W. Ho, S. Choi, S. Sachdev, M. Greiner, V. Vuleti´c, and M. D. Lukin, 《自然》595, 227 (2021). [17] P. Scholl, M. Schuler, H. J. Williams, A. A. Eberharter, D. Barredo, K.-N. Schymik, V. Lienhard, L.-P. Henry, T. C. Lang, T. Lahaye, A. M. L¨auchli, and A. Browaeys, 《自然》595, 233 (2021). [18] L. Henriet, L. Beguin, A. Signoles, T. Lahaye, A. Browaeys, G.-O. Reymond, and C. Jurczak, Quan- tum 4, 327 (2020). [19] T. M. Graham, Y. Song, J. Scott, C. Poole, L. Phutti- tarn, K. Jooya, P. Eichler, X. Jiang, A. Marra, B. Grinke- meyer, M. Kwon, M. Ebert, J. Cherek, M. T. Licht- man, M. Gillette, J. Gilbert, D. Bowman, T. Ballance, C. Campbell, E. D. Dahl, O. Crawford, N. S. Blunt, B. Rogers, T. Noel, and M. Saffman, 《自然》604, 457 (2022). [20] J. Zhang, G. Pagano, P. W. Hess, A. Kyprianidis, P. Becker, H. Kaplan, A. V. Gorshkov, Z. X. Gong, and C. Monroe, 《自然》551, 601 (2017). [21] R. Blatt and C. F. Roos, 《自然·物理》8, 277 (2012). [22] C. Hempel, C. Maier, J. Romero, J. McClean, T. Monz, H. Shen, P. Jurcevic, B. P. Lanyon, P. Love, R. Babbush, A. Aspuru-Guzik, R. Blatt, and C. F. Roos, 《物理评论X》8, 031022 (2018). [23] H.-S. Zhong, H. Wang, Y.-H. Deng, M.-C. Chen, L.-C. Peng, Y.-H. Luo, J. Qin, D. Wu, X. Ding, Y. Hu, P. Hu, X.-Y. Yang, W.-J. Zhang, H. Li, Y. Li, X. Jiang, L. Gan, G. Yang, L. You, Z. Wang, L. Li, N.-L. Liu, C.-Y. Lu, and J.-W. Pan, 《科学》370, 1460 (2020). [24] L. S. Madsen, F. Laudenbach, M. F. Askarani, F. Rortais, T. Vincent, J. F. F. Bulmer, F. M. Miatto, L. Neuhaus, L. G. Helt, M. J. Collins, A. E. Lita, T. Gerrits, S. W. Nam, V. D. Vaidya, M. Menotti, I. Dhand, Z. Vernon, N. Quesada, and J. Lavoie, 《自然》606, 75 (2022). [25] E. Farhi and S. Gutmann, 《物理评论A》57, 2403 (1998). [26] A. R. Kessel and N. M. Yakovleva, 《物理评论A》66, 062322 2002( ). [27] A. Muthukrishnan and C. R. Stroud, 《物理评论A》62, 052309 2000( ). [28] M. A. Nielsen, M. J. Bremner, J. L. Dodd, A. M. Childs, and C. M. Dawson, 《物理评论A》66, 022317 (2002). [29] X. Wang, B. C. Sanders, and D. W. Berry, 《物理评论A》67, 042323 (2003). [30] A. B. Klimov, R. Guzm´an, J. C. Retamal, and C. Saave- dra, 《物理评论A》67, 062313 (2003). [31] E. Bagan, M. Baig, and R. Mu˜noz Tapia, 《物理评论A》67, 014303 (2003). [32] A. Y. Vlasov, in *First International Symposium on Quantum Informatics* 5128, , Vol. edited by Y. I. Ozhigov, 国际光学与光子学学会 (SPIE, 2003) pp. 29 – 36. [33] A. D. Greentree, S. G. Schirmer, F. Green, L. C. L. Hol- lenberg, A. R. Hamilton, and R. G. Clark, 《物理评论快报》92, 097901 (2004). [34] D. P. O'Leary, G. K. Brennen, and S. S. Bullock, 《物理评论A》74, 032334 (2006). [35] Y. I. Bogdanov, E. V. Moreva, G. A. Maslennikov, R. F. Galeev, S. S. Straupe, and S. P. Kulik, 《物理评论A》73, 063810 2006( ). [36] E. V. Moreva, G. A. Maslennikov, S. S. Straupe, and S. P. Kulik, 《物理评论快报》97, 023602 (2006). [37] T. C. Ralph, K. J. Resch, and A. Gilchrist, 《物理评论A》75, 022313 (2007)。[38] B. P. Lanyon, T. J. Weinhold, N. K. Langford, J. L. O'Brien, K. J. Resch, A. Gilchrist 和 A. G. White, 《物理评论快报》100, 060504 (2008)。[39] S.-Y. Baek, S. S. Straupe, A. P. Shurupov, S. P. Kulik 和 Y.-H. Kim, 《物理评论A》78, 042321 (2008)。[40] R. Ionicioiu, T. P. Spiller 和 W. J. Munro, 《物理评论A》80, 012312 (2009)。[41] S. S. Ivanov, H. S. Tonchev 和 N. V. Vitanov, 《物理评论A》85, 062321 (2012)。[42] E. O. Kiktenko, A. K. Fedorov, O. V. Man'ko 和 V. I. Man'ko, 《物理评论A》91, 042312 (2015)。[43] E. Kiktenko, A. Fedorov, A. Strakhov 和 V. Man'ko, 《物理快报A辑》379, 1409 (2015)。[44] C. Song, S.-L. Su, J.-L. Wu, D.-Y. Wang, X. Ji 和 S. Zhang, 《物理评论A》93, 062321 (2016)。[45] A. Bocharov, M. Roetteler 和 K. M. Svore, 《物理评论A》96, 012306 (2017)。[46] P. Gokhale, J. M. Baker, C. Duckering, N. C. Brown, K. R. Brown 和 F. T. Chong, 载于 *Proceedings of the 46th International Symposium on Computer Architecture*, ISCA '19（美国计算机协会，纽约，NY，美国，2019），第554–566页。[47] Y.-H. Luo, H.-S. Zhong, M. Erhard, X.-L. Wang, L.-C. Peng, M. Krenn, X. Jiang, L. Li, N.-L. Liu, C.-Y. Lu, A. Zeilinger 和 J.-W. Pan, 《物理评论快报》123, 070505 2019( )。[48] P. J. Low, B. M. White, A. A. Cox, M. L. Day 和 C. Senko, Physical Review Research 2, 033128 (2020)。[49] M. Neeley, M. Ansmann, R. C. Bialczak, M. Hofheinz, E. Lucero, A. D. O'Connell, D. Sank, H. Wang, J. Wen- ner, A. N. Cleland, M. R. Geller 和 J. M. Martinis, 《科学》325, 722 (2009)。[50] B. P. Lanyon, M. Barbieri, M. P. Almeida, T. Jennewein, T. C. Ralph, K. J. Resch, G. J. Pryde, J. L. O'Brien, A. Gilchrist 和 A. G. White, 《自然·物理》5, 134 (2009)。[51] S. Straupe 和 S. Kulik, 《自然·光子学》4, 585 (2010)。[52] A. Fedorov, L. Steffen, M. Baur, M. P. da Silva 和 A. Wallraff, 《自然》481, 170 (2012)。[53] B. E. Mischuck, S. T. Merkel 和 I. H. Deutsch, 《物理评论A》85, 022302 (2012)。[54] M. J. Peterer, S. J. Bader, X. Jin, F. Yan, A. Kamal, T. J. Gudmundsen, P. J. Leek, T. P. Orlando, W. D. Oliver 和 S. Gustavsson, 《物理评论快报》114, 010501 (2015)。[55] E. Svetitsky, H. Suchowski, R. Resh, Y. Shalibo, J. M. Martinis 和 N. Katz, 《自然·通讯》5, 5617 (2014)。[56] J. Braum¨uller, J. Cramer, S. Schl¨or, H. Rotzinger, L. Radtke, A. Lukashenko, P. Yang, S. T. Skacel, S. Probst, M. Marthaler, L. Guo, A. V. Ustinov 和 M. Weides, 《物理评论B辑》91, 054523 (2015)。[57] M. Kues, C. Reimer, P. Roztocki, L. R. Cort´es, S. Sciara, B. Wetzel, Y. Zhang, A. Cino, S. T. Chu, B. E. Little, D. J. Moss, L. Caspani, J. Aza˜na 和 R. Morandotti, 《自然》546, 622 (2017)。[58] C. Godfrin, A. Ferhat, R. Ballou, S. Klyatskaya, M. Ruben, W. Wernsdorfer 和 F. Balestro, 《物理评论快报》119, 187702 (2017)。[59] R. Sawant, J. A. Blackmore, P. D. Gregory, J. Mur-Petit, D. Jaksch, J. Aldegunde, J. M. Hutson, M. R. Tarbutt 和 S. L. Cornish, 《新物理学杂志》22, 013027 (2020)。[60] P. J. Low, B. M. White, A. A. Cox, M. L. Day 和

C. Senko，Physical Review Research 2, 033128 (2020)。[61] A. Pavlidis 和 E. Floratos，《物理评论A》103, 032417 (2021)。[62] P. Rambow 和 M. Tian，“通过将基于量子比特的量子门映射到量子位基来降低量子电路深度”，(2021)。[63] Y. Chi, J. Huang, Z. Zhang, J. Mao, Z. Zhou, X. Chen, C. Zhai, J. Bao, T. Dai, H. Yuan, M. Zhang, D. Dai, B. Tang, Y. Yang, Z. Li, Y. Ding, L. K. Oxenløwe, M. G. Thompson, J. L. O'Brien, Y. Li, Q. Gong 和 J. Wang，《自然·通讯》13, 1166 (2022)。[64] A. S. Nikolaeva, E. O. Kiktenko 和 A. K. Fedorov，《物理评论A》105, 032621 (2022)。[65] J. A. L´opez-Sald´ıvar, O. Casta˜nos, M. A. Man'ko 和 V. I. Man'ko，《量子信息处理》18, 1 (2019)。[66] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano 和 D. J. Wineland，《物理评论快报》75, 4714 (1995)。[67] M. Ringbauer, M. Meth, L. Postler, R. Stricker, R. Blatt, P. Schindler 和 T. Monz，《自然·物理》18, 1053 (2022)。[68] M. A. Aksenov, I. V. Zalivako, I. A. Semerikov, A. S. Borisenko, N. V. Semenin, P. L. Sidorov, A. K. Fedorov, K. Y. Khabarova 和 N. N. Kolachevsky，《物理评论A》107, 052612 (2023)。[69] A. D. Hill, M. J. Hodson, N. Didier 和 M. J. Reagor，“任意双重受控量子相位门的实现”，(2021)。[70] T. Roy, Z. Li, E. Kapit 和 D. I. Schuster，“在可编程超导处理器上实现双量子三能级系统量子算法”，(2022)。[71] P. J. Low, B. White 和 C. Senko，“13能级囚禁离子量子位的控制与读出”，(2023)，arXiv:2306.03340 [量子物理]。[72] A. S. Nikolaeva、E. O. Kiktenko 和 A. K. Fedorov，“利用量子多能级系统高效实现量子算法”，（2021年）。[73] K. Mato、M. Ringbauer、S. Hillmich 和 R. Wille，载于 *2022 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE)*（IEEE计算机学会，洛斯阿拉米托斯，美国加利福尼亚州，2022年），第 484–491 页。[74] K. Mato、M. Ringbauer、S. Hillmich 和 R. Wille，载于 *Proceedings of the 28th Asia and South Pacific Design Automation Conference*，ASPDAC '23（美国计算机协会，纽约，美国纽约州，2023年），第 202–208 页。[75] L. E. Fischer、A. Chiesa、F. Tacchino、D. J. Egger、S. Car- retta 和 I. Tavernelli, PRX Quantum 4，030327（2023年）。[76] A. Barenco、C. H. Bennett、R. Cleve、D. P. DiVincenzo、N. Margolus、P. Shor、T. Sleator、J. A. Smolin 和 H. Weinfurter，《物理评论A》52，3457（1995年）。[77] E. O. Kiktenko、A. S. Nikolaeva、P. Xu、G. V. Shlyap- nikov 和 A. K. Fedorov，《物理评论A》101，022304（2020年）。[78] C. Fang、Y. Wang、K. Sun 和 J. Kim，arXiv 预印本 arXiv:2301.07564（2023 年）。[79] K. M. Nakanishi 、 T. Satoh 和 S. Todo，“量子门分解器”，（2021年），arXiv:2109.13223 [量子物理]。[80] L. K. Grover，《物理评论快报》79，325（1997年）。[81] I. V. Zalivako、A. S. Borisenko、I. A. Semerikov、A. E. Korolkov、P. L. Sidorov、K. P. Galstyan、N. V. Se- menin、V. N. Smirnov、M. D. Aksenov、A. K. Fe- dorov、K. Y. Khabarova 和 N. N. Kolachevsky，Frontiers in Quantum Science and Technology 2（2023年），10.3389/frqst.2023.1228208。[82]D. Jankovi´c、J.-G. Hartmann、M. Ruben 和 P.-A. Hervieux，“含噪量子dit与多个量子比特：门效率的条件”，（2023年），arXiv:2302.04543 [量子物理]。