厄米 Monge-Amp`ere 方程的梯度估计

Abdellah HANANI[1]

arXiv:2302.02973v2 [math.AP] 8 Feb 2023

摘要。我们改进了先前关于紧致厄米特流形上 Monge-Amp`ere 方程的梯度估计，并给出了非混合二阶导数的估计。这些估计是应用 Evans-Krylov $C^{2,\alpha}$ 估计，或针对含梯度项方程的三阶导数估计所必需的。

关键词。Monge-Amp`ere 方程，厄米流形，梯度估计。

数学主题分类：32U05, 32U40, 53C55

1. 引言

过去半个世纪以来，复数 Monge-Amp`ere 方程一直受到深入研究。在 K¨ahler 几何的框架下，人们对这一方程产生兴趣，源于 Calabi 著名的猜想：对于代表复维数为 $n \geq 2$ 的 K¨ahler 流形 (M, g) 第一陈类的每一个闭(1,1)形式 R，都存在唯一一个与之属于同一 K¨ahler 类的 K¨ahler 度量，其里奇形式为 R。

若复流形的第一陈类消失，则写作

$$\omega = \mathrm{i} g_{\lambda\overline{\mu}} \mathrm{d}z^{\lambda} \wedge \mathrm{d}z^{\overline{\mu}},$$

Calabi 认识到，他的猜想可以归结为求解以下形式的 Monge-Amp`ere 方程

$$(\omega + \mathrm{i}\partial\overline{\partial}\varphi)^n = e^f \omega^n \quad \text{with} \quad \omega + \mathrm{i}\partial\overline{\partial}\varphi > 0,$$

对于实值函数 φ，其中 f 是定义在 M上的光滑实函数。该方程由 Aubin [1-2] 和 Yau [13]求解。本文的主要目的是重新审视这些估计；上述作者的工作并不需要这些估计，但它们在过去二十年中引起了相当大的关注。

[1]现地址：法国 Villeneuve d'Ascq Cedex 59655，里尔大学数学系 M2 楼。电子邮箱：abdellah.hanani@univ-lille.fr

两位作者各自独立地推导出了对解的拉普拉斯算子的估计，其前提仅是对解有一致估计。梯度估计可以省去。另一方面，两位作者再次各自独立给出的三阶导数估计，并未使用纯指标的二阶导数估计。为了处理含有梯度项的方程，我们需要推导这些被省去的估计。

设 (M,g) 是一个无边界的紧致厄米特流形。记 ∇ 为陈联络，记 TM 为 M 的切丛。对于 F 上的非负光滑实值函数，我们考虑如下 Monge-Amp`ere 方程

$$\left(\omega+\mathrm{i}\partial\overline{\partial}\varphi\right)^n=F\omega^n, \tag{1}$$

并满足条件 $\omega+\mathrm{i}\partial\overline{\partial}\varphi>0$。称函数 φ 为可容许的。对于 $(x,p)\in TM$ 和 $t\in\mathbb{R}$，记

$$F_x(\bullet)=F(\bullet,p,t),\quad F_p(\bullet)=F(x,\bullet,t)\quad\text{and}\quad F_t(\bullet)=F(x,p,\bullet).$$

我们的梯度估计可表述如下。

定理1. 设 $\varphi\in C^3(M)$ 是方程 (1) 的一个可容许解，满足 $\|\varphi\|_\infty\leq C_0$，其中 C_0 为正常数。假设存在实数 r，使得 $r<2$，并且对所有 $(x,p,t)\in TM\times[-C_0,C_0]$,

$$F\leq C\left(1+|p|^r\right)\quad and\quad \left|\nabla\left[(F^{\frac{1}{n}})_x\right]\right|,\ \left|\left[(F^{\frac{1}{n}})_t\right]'\right|,\ \left|p^\alpha\frac{\partial(F^{\frac{1}{n}})_p}{\partial p^\alpha}\right|\leq CF^{\frac{1}{n}}, \tag{2}$$

其中 (p^a) 是 TM 的纤维中的自然坐标。则

$$|\nabla\varphi|\leq C_1,$$

其中常数 C_1 仅取决于 C_0、M 以及 (2) 中的常数。若 F 不依赖于梯度，则不需要假设 (2)，且 C_1 仅取决于 C_0、M 以及 $\|\nabla F^{\frac{1}{n}}\|_\infty$的一个上界。

这一梯度估计最早由 [8] 和 [9] 于九十年代提出。接下来的几年里，厄米流形上的 Monge-Amp`ere 方程研究一直没有进展，直到最近，这些结果才被 P. Guan [7], 、B. Guan-Q. Li [6], 、D.H Phong-J. Sturm[11] 和 . 重新发现。此外，S.Dinew-S.Kolodziej [4] 也在弱意义下研究了该方程，并通过恰当构造的多重势理论获得了解的一致估计。

沿用 Aubin 和 Yau 的相同策略（另见 P. Cherrier） [3], ，现在可以估计拉普拉斯算子。由此估计可知，由（$g_{\lambda\overline{u}}+\partial_{\lambda\overline{u}}\varphi$）定义的度量 g 和 g' 等价：存在一个严格为正的常数 a，使得

$$a^{-1}g\leq g'\leq ag.$$

常数 a 对 M 几何的依赖关系相当明确。它还取决于紧致空间上 F 的一个C^2-范数

$$\mathscr{K} = \{(x,p,t) \in TM \times \mathbb{R} \,:\, x \in M,\ |p| \le C_1,\ |t| \le C_0\}.$$

Aubin 和 Yau 的工作的下一步是估计三阶导数。对于含有梯度项的方程，如果不先完成 C^2-估计，就无法直接处理这一估计。要应用 Evans-Krylov定理进行 $C^{2,\,\alpha}$-估计，也需要这些估计。对于非混合型二阶导数，我们有以下估计。

定理 2. 设 $\varphi \in \mathbb{C}^4(M)$ 是方程（1）的可容许解，且满足 $\|\varphi\| \le C_0$ and$\|\nabla\varphi\| \le C_1$。则

$$|\nabla_{\lambda\mu}\varphi \nabla^{\lambda\mu}\varphi| \le C_2,$$

其中常数 C_2 仅取决于 C_0、 C_1、 M （依据其几何）、 F 在紧致 $\mathscr{K}$ 上的C^2-范数的一个界，以及 $\min\limits_{\mathscr{K}} F$。

2. 定理1的证明

在局部坐标 (z^λ) 中，记 $z^{\overline{\lambda}} = \overline{z^\lambda}$、 $e_\lambda = \partial_\lambda = \dfrac{\partial}{\partial z^\lambda}$,

$$g = g_{\lambda\overline{\mu}} \mathrm{d}z^\lambda \otimes \mathrm{d}z^{\overline{\mu}} \quad \text{and} \quad g^{-1} = g^{\lambda\overline{\mu}} e_\lambda \otimes e_{\overline{\mu}}.$$

关于度量 g 和 g'，作用于函数的拉普拉斯算子 Δ 和 Δ' 定义如下

$$\Delta\varphi = g^{\alpha\overline{\beta}}\nabla_{\alpha\overline{\beta}}\varphi \quad \text{and} \quad \Delta'\varphi = g'^{\alpha\overline{\beta}}\nabla_{\alpha\overline{\beta}}\varphi.$$

张量 $T = T_\alpha \mathrm{d}z^\alpha$ 关于度量 g 和 g' 的范数记作 g和 g'，作用于函数时定义如下

$$|T|^2 = g^{\alpha\overline{\beta}} T_\alpha T_{\overline{\beta}} \quad \text{and} \quad |T|'^2 = g'^{\alpha\overline{\beta}} T_\alpha T_{\overline{\beta}}.$$

由于我们只考虑光滑情形，因此可以将方程（1）写成如下形式

$$\det\left(\delta^\lambda_\mu + \nabla^\lambda_\mu \varphi\right) = F(x, \nabla\varphi, \varphi). \tag{3}$$

定理1的证明中的一个关键步骤是以下引理。

引理1. 设 $\varphi \in C^3(M)$ 是方程（3）的一个可容许解。则

$$\begin{aligned} \Delta'|\nabla\varphi|^2 \;=\; & 2\mathrm{Re}\left\langle \nabla \log F, \nabla\varphi \right\rangle_g + g'^{\alpha\overline{\beta}} \nabla_{\alpha\lambda}\varphi \nabla_{\overline{\beta}}{}^{\lambda}\varphi + g'^{\alpha\overline{\beta}} g_{\alpha\overline{\beta}} - n + \Delta\varphi \\ & + 2\mathrm{Re}\left(g'^{\alpha\overline{\beta}} T^\nu_{\lambda\alpha} \nabla^\lambda\varphi \nabla_{\nu\overline{\beta}}\varphi \right) + g'^{\alpha\overline{\beta}} R_{\alpha\overline{\beta}\rho\overline{\mu}} \nabla^\rho\varphi \nabla^{\overline{\mu}}\varphi, \end{aligned} \tag{4}$$

符号 Re(z) 表示复数 z 的实部。

证明。下文中，我们记 $A = g'^{\alpha\overline{\beta}}\nabla_{\alpha\lambda}\varphi\nabla^{\lambda}_{\overline{\beta}}\varphi$。下面来计算 $\Delta'\varphi$,

$$\Delta'|\nabla\varphi|^2 = 2\mathrm{Re}(g'^{\alpha\overline{\beta}}\nabla_{\alpha\overline{\beta}\lambda}\varphi\nabla^{\lambda}\varphi) + g'^{\alpha\overline{\beta}}\nabla_{\alpha\lambda}\varphi\nabla^{\lambda}_{\overline{\beta}}\varphi + g'^{\alpha\overline{\beta}}\nabla^{\lambda}_{\alpha}\varphi\nabla_{\lambda\overline{\beta}}\varphi.$$

为了交换 三阶导数项中的求导顺序，我们使用以下关系 s

$$\nabla_{\alpha\overline{\beta}\lambda}\varphi = \nabla_{\lambda\alpha\overline{\beta}}\varphi + T^{\nu}_{\lambda\alpha}\nabla_{\nu\overline{\beta}}\varphi \tag{5}$$

and

$$\nabla_{\alpha\overline{\beta\mu}}\varphi = \nabla_{\overline{\mu}\alpha\overline{\beta}}\varphi + T^{\overline{\nu}}_{\overline{\mu\beta}}\nabla_{\alpha\overline{\nu}}\varphi + g^{\rho\overline{\nu}}R_{\alpha\overline{\beta}\rho\overline{\mu}}\nabla_{\overline{\nu}}\varphi. \tag{6}$$

因此

$$\Delta'|\nabla\varphi|^2 = 2\mathrm{Re}(g'^{\alpha\overline{\beta}}\nabla_{\lambda\alpha\overline{\beta}}\varphi\nabla^{\lambda}\varphi) + g'^{\alpha\overline{\beta}}\nabla_{\alpha\lambda}\varphi\nabla^{\lambda}_{\overline{\beta}}\varphi + g'^{\alpha\overline{\beta}}\nabla^{\lambda}_{\alpha}\varphi\nabla_{\lambda\overline{\beta}}\varphi + E. \tag{7}$$

其中

$$E = 2\mathrm{Re}(g'^{\alpha\overline{\beta}}T^{\nu}_{\lambda\alpha}\nabla^{\lambda}\varphi\nabla_{\nu\overline{\beta}}\varphi) + g'^{\alpha\overline{\beta}}g^{\rho\overline{\nu}}R_{\alpha\overline{\beta}\rho\overline{\mu}}\nabla_{\overline{\nu}}\varphi\nabla^{\overline{\mu}}\varphi.$$

根据 g' 的定义，我们可知

$$\nabla_{\nu\overline{\beta}}\varphi = g'_{\nu\overline{\beta}} - g_{\nu\overline{\beta}} \quad \text{and} \quad g'^{\alpha\overline{\beta}}g'_{\nu\overline{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\nu}. \tag{8}$$

So

$$g'^{\alpha\overline{\beta}}\nabla^{\lambda}_{\alpha}\varphi\nabla_{\lambda\overline{\beta}}\varphi = +g'^{\alpha\overline{\beta}}g_{\alpha\overline{\beta}} - n + \Delta\varphi. \tag{9}$$

现在，对方程（3）求一次导数，我们得到

$$g'^{\alpha\overline{\beta}}\nabla_{a\alpha\overline{\beta}}\varphi = \nabla_a \log f \quad \text{for all } a \in \{1,\dots,n,\overline{1},\dots,\overline{n}\}. \tag{10}$$

将（9）和（10）代入（7），得到关系式（4）。

定理1的证明。设 k 为稍后确定的严格正实数。记

$$\Gamma(\varphi) = |\nabla\varphi|^2\exp[\exp[k(C_0-\varphi)]].$$

由于 M 是紧的， Γ 在某点 $P \in M$ 处取得最大值。若能证明 $|\nabla\varphi|(P) \le C$，则结论成立。因此，假设

$$|\nabla\varphi|(P) \ge 1. \tag{11}$$

函数 $\log\ \Gamma$ 也在 P 处取得最大值。因此

$$\frac{\nabla_\alpha|\nabla\varphi|^2}{|\nabla\varphi|^2} - ke^{k(C_0-\varphi)}\nabla_\alpha\varphi = 0, \tag{12}$$

并写出拉普拉斯算子 $\Delta'\log\ \Gamma = g'^{\alpha\overline{\beta}}\nabla_{\alpha\overline{\beta}}\log\ \Gamma\,\mathrm{of}\log\ \Gamma$ 在 P处非正，我们得到

$$\frac{\Delta'|\nabla\varphi|^2}{|\nabla\varphi|^2} - \frac{|\nabla|\nabla\varphi|^2|'^2}{|\nabla\varphi|^4} + ke^{k(C_0-\varphi)}(k|\nabla\varphi|'^2 - \Delta'\varphi) \le 0. \tag{13}$$

我们先处理等式（13）左边的第二项。由于 $|\nabla \log\, \Gamma(\varphi)|'^2(P) = 0$，我们可以写成

$$\frac{|\nabla|\nabla\varphi|^2|'^2}{|\nabla\varphi|^4} = -k^2e^{2k(C_0-\varphi)}|\nabla\varphi|'^2 + 2\frac{ke^{k(C_0-\varphi)}}{|\nabla\varphi|^2}\mathrm{Re}(g'^{\alpha\overline{\beta}}\nabla_\alpha|\nabla\varphi|^2\nabla_{\overline{\beta}}\varphi). \tag{14}$$

展开 $\nabla|\nabla\varphi|^2$，由（8）可知

$$2\mathrm{Re}\left(g'^{\alpha\overline{\beta}}\nabla_\alpha|\nabla\varphi|^2\nabla_{\overline{\beta}}\varphi\right) = 2\left(|\nabla\varphi|^2 - |\nabla\varphi|'^2\right) + 2\mathrm{Re}\left(g'^{\alpha\overline{\beta}}g^{\lambda\overline{\mu}}\nabla_{\alpha\lambda}\varphi\nabla_{\overline{\mu}}\varphi\nabla_{\overline{\beta}}\varphi\right).$$

因此，利用柯西不等式，得到

$$2\mathrm{Re}\left(g'^{\alpha\overline{\beta}}g^{\lambda\overline{\mu}}\nabla_{\alpha\lambda}\varphi\nabla_{\overline{\mu}}\varphi\nabla_{\overline{\beta}}\varphi\right) \le \frac{A}{ke^{k(C_0-\varphi)}} + ke^{k(C_0-\varphi)}|\nabla\varphi|^2|\nabla\varphi|'^2$$

代入（14）即可得到所需的控制。具体而言，

$$\frac{|\nabla'|\nabla\varphi|^2|^2}{|\nabla\varphi|^4} \le \frac{A}{|\nabla\varphi|^2} + 2ke^{k(C_0-\varphi)}. \tag{15}$$

为处理（13）右侧的第一项，注意到

$$\frac{1}{n}\nabla_\lambda \log F = \frac{\nabla_\lambda F^{\frac{1}{n}}}{F^{\frac{1}{n}}} = \frac{\nabla_\lambda\left[(F^{\frac{1}{n}})_x\right]}{F^{\frac{1}{n}}} + \frac{\left[(F^{\frac{1}{n}})_t\right]'}{F^{\frac{1}{n}}}\nabla_\lambda\varphi + \frac{\frac{\partial(F^{\frac{1}{n}})_p}{\partial p^a}}{F^{\frac{1}{n}}}\nabla_{\lambda a}\varphi.$$

因此，考虑到以下关系

$$\nabla_{\lambda\overline{\mu}}\varphi = \nabla_{\overline{\mu}\lambda}\varphi \quad \text{and} \quad \nabla_{\lambda\mu}\varphi = \nabla_{\mu\lambda}\varphi + T^\nu_{\mu\lambda}\nabla_\nu\varphi,$$

我们得到以下等式

$$\begin{aligned}\frac{2}{n}\mathrm{Re}\left(\nabla^\lambda\varphi\nabla_\lambda\log F\right) &= \frac{2}{F^{\frac{1}{n}}}\mathrm{Re}\left(\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial(F^{\frac{1}{n}})_p}{\partial p^\alpha}\nabla_\alpha|\nabla\varphi|^2\right) + \frac{2}{F^{\frac{1}{n}}}\mathrm{Re}\left(\nabla^\lambda\varphi\nabla_\lambda(F^{\frac{1}{n}})_x\right)\\ &\quad + \frac{2(F^{\frac{1}{n}})'_t|\nabla\varphi|}{F^{\frac{1}{n}}} + f'_t|\nabla\varphi|\mathrm{Re}\left(\sum_{\lambda=1}^n\frac{\partial(F^{\frac{1}{n}})_p}{\partial p^\lambda}T^\nu_{\lambda\mu}\nabla^\mu\varphi\nabla_\nu\varphi\right),\end{aligned}$$

现在，由（12）可得

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial(F^{\frac{1}{n}})_p}{\partial p^\alpha}\nabla_\alpha|\nabla\varphi|^2\right) = ke^{k(C_0-\varphi)}|\nabla\varphi|^2\mathrm{Re}\left(\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial f_p}{\partial p^\alpha}\nabla_\alpha\varphi\right)$$

而假设（11）和结构条件（2）意味着

$$2\mathrm{Re}(\nabla^\lambda\varphi\nabla_\lambda\log F) \ge -C_3ke^{k(C_0-\varphi)}|\nabla\varphi|^2, \tag{16}$$

其中常数 C_3 取决于 C_0、（2）中的常数以及 M。

将不等式（16）代入（4），并考虑到

$$2\mathrm{Re}\left(g'^{\alpha\overline{\beta}}T^\nu_{\lambda\alpha}\nabla^\lambda\varphi\nabla_{\nu\overline{\beta}}\varphi\right) + g'^{\alpha\overline{\beta}}R_{\alpha\overline{\beta}\rho\overline{\mu}}\nabla^\rho\varphi\nabla^{\overline{\mu}}\varphi \ge -C_4|\nabla\varphi|^2(1+g'^{\alpha\overline{\beta}}g_{\alpha\overline{\beta}}),$$

其中常数 C_4 仅取决于挠率张量范数的上界 M 以及双截曲率的下界，由此我们得到

$$\frac{\Delta'|\nabla\varphi|^2}{|\nabla\varphi|^2} \ge \frac{A}{|\nabla\varphi|^2} - 2C_4\left(1+g'^{\alpha\overline{\beta}}g_{\alpha\overline{\beta}}\right) - C_3ke^{k(C_0-\varphi)}. \tag{17}$$

将（15）和（17）代入（13），并考虑到 $\Delta'\varphi = n - g'^{\alpha\overline{\beta}} g_{\alpha\overline{\beta}}$，可得

$$\left[ke^{k(C_0-\varphi)} - 2C_4\right] g'^{\alpha\overline{\beta}} g_{\alpha\overline{\beta}} + k^2 e^{k(C_0-\varphi)} |\nabla\varphi|'^2 \leq C_5 k e^{k(C_0-\varphi)}.$$

取 $k = 2C_4 + 1$，由于 $e^{k(C_0-\varphi)} \geq 1$，我们得到

$$g'^{\alpha\overline{\beta}} g_{\alpha\overline{\beta}} \leq C_5 \quad \text{and} \quad |\nabla\varphi|'^2(P) \leq C_5. \tag{18}$$

在一个使矩阵 $(\nabla_{\lambda\overline{\mu}}\varphi)$ 对角化的 g-正交标架中。我们有 $g'^{\alpha\overline{\beta}} g_{\alpha\overline{\beta}} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{1+\nabla_{\lambda\overline{\lambda}}\varphi}$ 并且，对每个 $\lambda \in \{1, \ldots, n\}$，可以写成

$$1 + \nabla_{\lambda\overline{\lambda}}\varphi = F \prod_{\mu\neq\lambda} \frac{1}{1+\nabla_{\mu\overline{\mu}}\varphi} \leq F \left(\frac{1}{n-1} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{1+\nabla_{\lambda\overline{\lambda}}\varphi} \right)^{n-1}.$$

对所有 λ 求和，并考虑 (2) 和 (18)，我们得到

$$n + \triangle\varphi \leq C_6 |\nabla\varphi|^r$$

最后，不等式 $|\nabla\varphi|^2 \leq (n + \triangle\varphi)|\nabla\varphi|'^2$ 与 (18) 中的第二个不等式结合起来可得

$$|\nabla\varphi|^2 \leq C_5 C_6 |\nabla\varphi|^r.$$

The 由于 $r < 2$， φ 的梯度在 P 处得到估计。因此，定理1的证明完成。

3. 定理 2 的证明

利用我们的梯度估计，我们可以改写 P. Cherrier [3] 的计算来估计拉普拉斯算子，从而保证度量 g 和 g'等价。也就是说，存在一个严格为正的常数，使得

$$a^{-1} g \leq g' \leq a g \tag{19}$$

常数 a 仅取决于 M的几何、解及其梯度的一致估计、 $\mathscr{K}$紧致 $\mathscr{K}$上 F的 C^2-范数的一个上界，以及 $\min_{\mathscr{K}} F$。

引理2. 设 $\varphi \in C^3(M)$ 是方程 (3) 的一个可容许解，满足 $\|\varphi\|_\infty \leq C_0$ 和 $|\nabla\varphi| \leq C_{0}$。记 $f = \log F$,

$$\psi^2 = g'^{\alpha\overline{\beta}} g^{a\overline{b}} \nabla_{\alpha a}\varphi \nabla_{\overline{\beta b}}\varphi \quad and \quad \theta^2 = g'^{\alpha\overline{\beta}} g'^{a\overline{b}} g^{\lambda\overline{\mu}} \nabla_{\alpha\overline{b}\lambda}\varphi \nabla_{\overline{\beta}a\overline{\mu}}\varphi.$$

于是存在一个常数 c，使得

$$\begin{aligned} \Delta'\psi^2 \quad \geq \quad & 2\mathrm{Re}\left(g'^{\alpha\overline{\beta}} g^{a\overline{b}} \nabla_{\alpha a}\varphi \nabla_{\overline{\beta b}} f \right) - g'^{\alpha\overline{\sigma}} g'^{\rho\overline{\beta}} g^{a\overline{b}} \nabla_{\alpha a}\varphi \nabla_{\overline{\beta b}}\varphi \nabla_{\rho\overline{\sigma}} f \\ & -c(1+\theta)(1+\psi^2) + \|E\|'^2 + K_1, \end{aligned} \tag{20}$$

其中，在一个 g'-正交规范标架下， $K_1 = \sum g^{a\overline{a}}|\nabla_{\overline{\lambda}\alpha a}\varphi|^2$ 且张量 E$_{\lambda,\ \alpha,\ a}$的分量为

$$E_{\lambda\alpha a} = \nabla_{\lambda\alpha a}\varphi - \sum_{\rho}\nabla_{\lambda\overline{\rho}\alpha}\varphi\nabla_{\rho a}\varphi. \tag{21}$$

常数 c 取决于 C_0、 C_1、(19) 中的常数 a ， 以及曲率张量 $\mathcal{R}$、挠率张量 $\mathcal{R}$ 和张量 $\nabla\mathcal{T}$ 的范数的一致估计。

证明。我们计算 $\Delta'\psi^2$,

$$\Delta'\psi^2 = \sum_{i=1}^{6} K_i, \tag{22}$$

其中

$$K_1 = g'^{\lambda\overline{\mu}}g'^{\alpha\overline{\beta}}g^{a\overline{b}}\nabla_{\overline{\mu}\alpha a}\varphi\nabla_{\lambda\overline{\beta}b}\varphi \ \text{ and } \ K_2 = g'^{\lambda\overline{\mu}}g'^{\alpha\overline{\beta}}g^{a\overline{b}}\nabla_{\lambda\alpha a}\varphi\nabla_{\overline{\mu\beta}b}\varphi$$

$$K_3 = g'^{\lambda\overline{\mu}}g^{a\overline{b}}\left(g'^{\alpha\overline{\delta}}g'^{\gamma\overline{\sigma}}g'^{\rho\overline{\beta}} + g'^{\alpha\overline{\sigma}}g'^{\rho\overline{\delta}}g'^{\gamma\overline{\beta}}\right)\nabla_{\lambda\overline{\delta}\gamma}\varphi\nabla_{\overline{\mu}\rho\overline{\sigma}}\varphi\nabla_{\alpha a}\varphi\nabla_{\overline{\beta}b}\varphi$$

$$\begin{aligned} K_4 = -g'^{\lambda\overline{\mu}}g'^{\alpha\overline{\sigma}}g'^{\rho\overline{\beta}}\Big[&\left(\nabla_{\lambda\overline{\sigma}\rho}\varphi\nabla_{\overline{\mu}\alpha a}\varphi + \nabla_{\overline{\mu}\rho\overline{\sigma}}\varphi\nabla_{\lambda\alpha a}\varphi\right)\nabla_{\overline{\beta}b}\varphi \\ &+ \left(\nabla_{\lambda\overline{\sigma}\rho}\varphi\nabla_{\overline{\mu\beta}b}\varphi + \nabla_{\overline{\mu}\rho\overline{\sigma}}\varphi\nabla_{\lambda\overline{\beta}b}\varphi\right)\nabla_{\alpha a}\varphi\Big] \end{aligned}$$

$$K_5 = g'^{\lambda\overline{\mu}}g'^{\alpha\overline{\beta}}g^{a\overline{b}}\left(\nabla_{\lambda\overline{\mu}\alpha a}\varphi\nabla_{\overline{\beta}b}\varphi + \nabla_{\alpha a}\varphi\nabla_{\lambda\overline{\mu\beta}b}\varphi\right)$$

$$K_6 = -g'^{\lambda\overline{\mu}}g'^{\alpha\overline{\sigma}}g'^{\rho\overline{\beta}}g^{a\overline{b}}\nabla_{\lambda\overline{\mu}\rho\overline{\sigma}}\varphi\nabla_{\alpha a}\varphi\nabla_{\overline{\beta}b}\varphi$$

我们记 $U(\varphi) \simeq V(\varphi)$，并称 U和 V等价，如果存在一个正的常数 c，它仅取决于引理中的各个量，使得

$$|U(\varphi) - V(\varphi)| \leq c(1+\theta)(1+\psi^2).$$

为简便起见，我们常常在 g'-正交规范标架中表示张量，并采用对重复指标求和的约定。

(i) 对 K_3 的研究。在 g'-正交标架中，若令

$$A = g^{a\overline{a}}\nabla_{\lambda\overline{\alpha}\gamma}\varphi\nabla_{\overline{\lambda}\rho\overline{\gamma}}\varphi\nabla_{\alpha a}\varphi\nabla_{\overline{\rho a}}\varphi,$$

and

$$B = g^{a\overline{a}}\nabla_{\lambda\overline{\rho}\gamma}\varphi\nabla_{\overline{\lambda}\rho\overline{\alpha}}\varphi\nabla_{\alpha a}\varphi\nabla_{\overline{\gamma a}}\varphi$$

则可得

$$K_3 = A + B. \tag{23}$$

(ii) 对 K_4 的研究。在 g'-正交标架中，令

$$C = g^{a\overline{a}}\nabla_{\lambda\overline{\alpha}a}\varphi\nabla_{\overline{\lambda}\alpha a}\varphi\nabla_{\overline{\rho a}}\varphi$$

and

$$D = g^{a\overline{a}}\nabla_{\lambda\overline{\alpha}\rho}\varphi\nabla_{\overline{\lambda\rho a}}\varphi\nabla_{\alpha a}\varphi,$$

我们得到

$$K_4 = -(C+\overline{C}) + (D+\overline{D}). \tag{24}$$

(iii) 对 K_5 的研究。鉴于 $|\nabla_{\lambda\overline{\mu}\alpha a}\varphi - \nabla_{\overline{\mu}\lambda\alpha a}\varphi| \le c\psi$，我们可以写成

$$K_5 \simeq K_5' + \overline{K_5'} \tag{25}$$

其中

$$K_5' = g'^{\lambda\overline{\mu}}g'^{\alpha\overline{\beta}}g^{a\overline{b}}\nabla_{\lambda\overline{\mu}\alpha a}\varphi\nabla_{\overline{\beta b}}\varphi.$$

对 φ 所满足的方程（1）求二阶导数,

$$g'^{\lambda\overline{\mu}}\nabla_{a\lambda\overline{\mu}}\varphi = \nabla_a f$$

$$g'^{\lambda\overline{\mu}}\nabla_{\alpha a\lambda\overline{\mu}}\varphi = \nabla_{\alpha a}f + g'^{\lambda\overline{\rho}}g'^{\nu\overline{\mu}}\nabla_{\alpha\nu\overline{\rho}}\varphi\nabla_{a\lambda\overline{\mu}}\varphi.$$

注意

$$g'^{\lambda\overline{\mu}}\nabla_{\lambda\overline{\mu}\alpha a}\varphi = g'^{\lambda\overline{\mu}}(\nabla_{\lambda\overline{\mu}\alpha a}\varphi - \nabla_{\alpha a\lambda\overline{\mu}}\varphi) + \nabla_{\alpha a}f + g'^{\lambda\overline{\rho}}g'^{\nu\overline{\mu}}\nabla_{\alpha\nu\overline{\rho}}\varphi\nabla_{\alpha\lambda\overline{\mu}}\varphi.$$

因此，经过直接计算（只用到协变导数的定义），可得

$$|\nabla_{\alpha a\lambda\overline{\mu}}\varphi - \nabla_{\lambda\overline{\mu}\alpha a}\varphi| \ \le\ C(1+\theta)(1+\psi).$$

Thus

$$K_5' \simeq g'^{\alpha\overline{\beta}}g^{a\overline{b}}\Big\{\nabla_{\alpha a}f + g'^{\lambda\overline{\rho}}g'^{\nu\overline{\mu}}\nabla_{a\lambda\overline{\mu}}\varphi\nabla_{\alpha\nu\overline{\rho}}\varphi\Big\}\nabla_{\overline{\beta b}}\varphi.$$

在此等价关系中，根据关系式 (5) 和 (6)，类型为 $(\nabla^3\varphi)^2\nabla^2\varphi$ 的项等价于 C。因此，结合 (28)，可得

$$K_5 \simeq C + \overline{C} + \mathrm{Re}\left(g^{a\overline{a}}\nabla_{\overline{\alpha a}}\varphi\nabla_{\alpha a}f\right) \tag{26}$$

(iv) 研究 K_6。对方程 (1) 求两次导数以消去四阶导数。我们得到

$$\begin{aligned} &K_6 + g'^{\alpha\overline{\sigma}}g'^{\rho\overline{\beta}}g^{a\overline{b}}(\nabla_{\rho\overline{\sigma}}f + g'^{\lambda\overline{\delta}}g'^{\gamma\overline{\mu}}\nabla_{\rho\overline{\delta}\gamma}\varphi\nabla_{\overline{\sigma}\lambda\overline{\mu}}\varphi)\nabla_{\alpha a}\varphi\nabla_{\overline{\beta b}}\varphi \\ &= g'^{\lambda\overline{\mu}}g'^{\alpha\overline{\sigma}}g'^{\rho\overline{\beta}}g^{a\overline{b}}(\nabla_{\rho\overline{\sigma}\lambda\overline{\mu}}\varphi - \nabla_{\lambda\overline{\mu}\rho\overline{\sigma}}\varphi)\nabla_{\alpha a}\varphi\nabla_{\overline{\beta b}}\varphi. \end{aligned} \tag{27}$$

根据协变导数的定义，经过标准计算可得以下恒等式

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha\overline{\beta\mu}\lambda}\varphi - \nabla_{\overline{\mu}\lambda\alpha\overline{\beta}}\varphi \ &= \ T^{\gamma}_{\lambda\alpha}\nabla_{\overline{\mu}\gamma\overline{\beta}}\varphi + \Big(R^{\gamma}_{\lambda\overline{\mu}\alpha} + \nabla_{\overline{\mu}}T^{\gamma}_{\lambda\alpha}\Big)\nabla_{\gamma\overline{\beta}}\varphi \\ &\quad + T^{\overline{\gamma}}_{\overline{\mu}\overline{\beta}}\nabla_{\lambda\overline{\gamma}\alpha}\varphi + \Big(R^{\overline{\gamma}}_{\overline{\beta}\mu\alpha} + \nabla_{\alpha}T^{\overline{\gamma}}_{\overline{\mu}\overline{\beta}}\Big)\nabla_{\lambda\overline{\gamma}}\varphi. \end{aligned} \tag{28}$$

由这一关系可知，(24) 右侧的项等于零。另一方面，在 g'-正交标架下，(24) 左侧的 $(\nabla^2\varphi)^2(\nabla^3\varphi)^2$ 型项可写为

$$g^{a\overline{a}}\nabla_{\gamma\overline{\rho}\lambda}\varphi\nabla_{\overline{\alpha}\rho\overline{\lambda}}\varphi\nabla_{\alpha a}\varphi\nabla_{\overline{\gamma a}}\varphi.$$

再考虑到 (5) 和 (6)，这一项与 B 相差 $C(1+\theta)\psi^2$。因此，

$$|K_6 + g'^{\alpha\overline{\sigma}} g'^{\rho\overline{\beta}} g^{a\overline{b}} \nabla_{\alpha a}\varphi \nabla_{\overline{\beta b}}\varphi \nabla_{\rho\overline{\sigma}} f + B| \le c(1+\theta)\psi^2. \tag{29}$$

(v) 最后，将 (23)、(26)、(27) 和 (29) 代入 (22)，得到

$$\Delta'\psi^2 \simeq K_1 + K_2 + A + 2\mathrm{Re}\left(g^{a\overline{a}}\nabla_{\overline{\alpha a}}\varphi\nabla_{\alpha a} f - D\right) - g^{a\overline{a}}\nabla_{\alpha a}\varphi\nabla_{\overline{\rho a}}\varphi\nabla_{\rho\overline{\alpha}} f.$$

由此可得 (20)，因为定义 (21) 意味着

$$\|E\|'^2 = g'^{\lambda\overline{\mu}} g'^{\alpha\overline{\beta}} g^{a\overline{b}} E_{\lambda\alpha a} E_{\overline{\mu\beta b}} = K_2 - (D + \overline{D}) + A.$$

定理 2 的证明。设 k 和 ℓ 是两个严格正实数。令 $J = k|\nabla\varphi|^2 + \ell(n + \Delta\varphi)$，并考虑

$$\Gamma(\varphi) = \psi exp(e^J).$$

由于 M 是紧的， $\Gamma(\varphi)$ 在某点 $P \in M$ 处取得最大值。假设 $\psi(P) \ge 1$，否则结论已得。由度量 g' 中 $\log\Gamma(\varphi) = \log\psi^2 + e^J$ 的拉普拉斯算子非负，可得

$$\frac{\Delta'\psi^2}{2\psi^2} - \frac{|\nabla\psi^2|'^2}{2\psi^4} + e^J|\nabla J|'^2 + e^J\Delta' J \le 0. \tag{30}$$

我们需要对 (30) 中的每一项给出下界。(20) 中涉及 f 的项展开后，可得一个正常数 C_3，使得

$$\Delta'\psi^2 \ge -C_3\left(1 + \theta^2 + \psi^4\right) + (K_1 + \|E\|'^2) + 2\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f_p}{\partial p^\alpha}\nabla_\alpha\psi^2\right). \tag{31}$$

现在，让我们在一个使 g' 对角化的 g-正交标架中展开 $\nabla\psi^2$。由 (21) 可得

$$\nabla_\lambda\psi^2 = g^{a\overline{a}}E_{\lambda\alpha a}\nabla_{\overline{\alpha a}}\varphi + g^{a\overline{a}}\nabla_{\alpha a}\varphi\nabla_{\lambda\overline{\alpha a}}\varphi := A_\lambda + B_\lambda,$$

其中 $A_\lambda = g^{a\overline{a}}E_{\lambda\alpha a}\nabla_{\overline{\alpha a}}\varphi$ 和 $B_\lambda = g^{a\overline{a}}\nabla_{\alpha a}\varphi\nabla_{\lambda\overline{\alpha a}}\varphi$。接下来，由

$$|A|^2 = \sum_\lambda |A_\lambda|^2 \quad \text{et} \quad |B|^2 = \sum_\lambda |B_\lambda|^2,$$

对所有 $\varepsilon > 0$，我们有

$$|\nabla\psi^2|'^2 = \sum_\lambda |A_\lambda + B_\lambda|^2 \le (1+\varepsilon)|A|^2 + (1+\varepsilon^{-1})|B|^2.$$

然而，由柯西不等式可知

$$|A|^2 \le \psi^2\|E\|'^2 \quad \text{and} \quad |B|^2 \le \psi^2 K_1.$$

So

$$\frac{|\nabla\psi^2|'^2}{\psi^2} \le (1+\varepsilon)\|E\|'^2 + (1+\varepsilon^{-1})K_1. \tag{32}$$

另一方面，由于 log Γ(φ) 在 P 处是驻定的，我们有

$$\frac{\nabla\psi^2}{2\psi^2} = -e^J\nabla J. \tag{33}$$

令 $\delta = 2^{-1}e^{-J}$。关系（33）意味着

$$e^J|\nabla J|'^2 = e^{-J}(e^{2J}|\nabla J|'^2) = e^{-J}\frac{|\nabla\psi^2|'^2}{4\psi^4} = \delta\frac{|\nabla\psi^2|'^2}{2\psi^4}.$$

因此，我们可以写成

$$\frac{|\nabla\psi^2|'^2}{2\psi^4} - e^J|\nabla J|'^2 = (1-\delta)\frac{|\nabla\psi^2|'^2}{2\psi^4}$$

并且，结合（32），

$$\frac{|\nabla\psi^2|'^2}{2\psi^4} - e^J|\nabla J|'^2 \leq (1-\delta)\frac{(1+\varepsilon)\|E\|'^2 + (1+\varepsilon^{-1})K_1}{2\psi^2}.$$

在（32）中取 $\varepsilon = \dfrac{\delta}{1-\delta}$。由于 $(1-\delta)\ (1+\epsilon)\ = 1$ 且 $(1-\delta)\ (1+\epsilon^{-1})\ = \dfrac{1-\delta}{\delta} = 2e^J - 1$，我们得到

$$\frac{|\nabla\psi^2|'^2}{2\psi^4} - e^J|\nabla J|'^2 \leq \frac{\|E\|'^2 + (2e^J-1)K_1}{2\psi^2}. \tag{34}$$

我们接着研究（30）中的最后一项。引理1中的关系给出：

$$\Delta'|\nabla\varphi|^2 \geq\ -C_4 + \psi^2 + 2\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f_p}{\partial p^\alpha}\nabla_\alpha|\nabla\varphi|^2\right)$$

其中常数 C_4 受到控制。现在，我们对方程（1）求两次导数，

$$\nabla_\lambda f = g'^{\alpha\overline{\beta}}\nabla_{\lambda\alpha\overline{\beta}}\varphi$$

and

$$\nabla_{\lambda\overline{\mu}} f = g'^{\alpha\overline{\beta}}\nabla_{\lambda\overline{\mu}\alpha\overline{\beta}}\varphi - g'^{\alpha\overline{\sigma}}g'^{\rho\overline{\beta}}\nabla_{\overline{\mu}\rho\overline{\sigma}}\varphi\nabla_{\lambda\alpha\overline{\beta}}\varphi.$$

So

$$\begin{aligned}\Delta f &= g^{\lambda\overline{\mu}}g'^{\alpha\overline{\beta}}\nabla_{\lambda\overline{\mu}\alpha\overline{\beta}}\varphi - g'^{\alpha\overline{\sigma}}g'^{\rho\overline{\beta}}g^{\lambda\overline{\mu}}\nabla_{\overline{\mu}\rho\overline{\sigma}}\varphi\nabla_{\lambda\alpha\overline{\beta}}\varphi \\ &= g'^{\alpha\overline{\beta}}(n+\Delta\varphi) + g^{\lambda\overline{\mu}}g'^{\alpha\overline{\beta}}\left(\nabla_{\lambda\overline{\mu}\alpha\overline{\beta}}\varphi - \nabla_{\alpha\overline{\beta}\lambda\overline{\mu}}\varphi\right) - g'^{\alpha\overline{\sigma}}g'^{\rho\overline{\beta}}g^{\lambda\overline{\mu}}\nabla_{\overline{\mu}\rho\overline{\sigma}}\varphi\nabla_{\lambda\alpha\overline{\beta}}\varphi.\end{aligned}$$

计算 Δf 并利用恒等式（28），我们得到

$$\Delta'(n+\Delta\varphi) \geq -C_5\psi^2 + \theta^2 + 2\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f_p}{\partial p^\alpha}\nabla_\alpha(n+\Delta\varphi)\right),$$

其中 C_5 是一个受到控制的常数。因此

$$\Delta' J\ \geq\ -C_4 k + \ell\theta^2 + (k - C_5\ell)\psi^2 + 2\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f_p}{\partial p^\alpha}\nabla_\alpha J\right). \tag{35}$$

最后，将 (31)、(34) 和 (35) 代入 (30)，并利用 (33)，我们得到以下不等式

$$-\frac{C_3(1+\theta^2+\psi^4)}{2\psi^2} - C_4e^J + \ell e^J\theta^2 + (k - C_5\ell)e^J\psi^2 - \frac{e^J-1}{\psi^2}K_1 \leq 0. \tag{36}$$

通过直接计算，我们证明 $\nabla_{\alpha\bar{\lambda}a}\varphi - \nabla_{\bar{\lambda}\alpha a}\varphi = R^b_{a\alpha\lambda}\nabla_b\varphi$。因此 $K_1 \leq 2\theta^2 + C_6$，其中 C_6 是一个受控常数。现在，由于 $\psi(P) \geq 1$，不等式 (36) 可写成以下形式

$$(\ell e^J - C_3 - 2e^J)\theta^2 + (k - C_5\ell - C_3 e^{-J})e^J\psi^2 \leq C_3 + C_4 e^J + C_6. \tag{37}$$

我们选取 $\ell = 2 + C_3$，然后选取 $k = 1 + C_5\ell + C_3$。由于 $e^J \geq 1$，式 (37) 中 θ^2 和 ψ^2 的系数分别为 ≥ 0 和 ≥ 1。因此

$$\psi^2(P) \leq \max\left(1, C_3 + C_6 + C_4 e^{\|J\|_\infty}\right).$$

证明至此结束。

参考文献

[1] T. Aubin：紧致凯勒流形上的 Monge-Amp`ere 型方程，C. R. A. S.，巴黎，A辑，第283卷，1976年，第119-121页。[2] T. Aubin：紧致凯勒流形上的 Monge-Amp`ere 型方程，Bull. Sc. Math.，（2），第102卷，1978年，第63-95页。[3] P. Cherrier：紧致厄米流形上的 Monge-Amp`ere 方程，Bull. Sc. Math.，（2），第 111 卷，1987 年，第 343-385 页。[4] S. Dinew 和 S. Kolodziej：紧致厄米流形上的多重势估计，arXiv:0910.3937。[5]B. Guan 和 Q. Li：厄米流形上的复 Monge-Amp`ere 方程，arXiv:0906.3548。[6] Bo Guan 和 Qun Li：复 Monge–Amp`ere 方程与全实子流形，Advances in Mathematics 225 (2010) 1185–1223。[7] P. Guan：复 Monge-Amp‘ere 方程的梯度估计，笔记，2008。[8] A. Hanani：紧致厄米流形上的 Monge-Amp`ere 型方程，J. Functional Anal. 137 (1996) 49-75。[9] A. Hanani：紧致厄米流形上 Monge-Amp`ere 方程的一种推广，Bull. Sci. Math. 120 (1996), 215 252。[10] S. Kolodziej：紧致凯勒流形上的 Monge-Amp`ere 方程，Indiana Univ. Math. J. 52 (2003)，第3期，667686。[11] D.H. Phong 和 J. Sturm：退化复 Monge-Amp`ere 方程的狄利克雷问题，Comm. Anal. Geom. 18 (2010)，第1期，145–170。[12] V. Tosatti 和 B. Weinkove：厄米流形和平衡流形上的复 Monge-Amp`ere 方程估计，Asian J. Math. 14 (2010)，第1期，19–40。

[13]S.T. Yau：紧致凯勒流形的里奇曲率与复 Monge-Amp`ere 方程 I，Comm. Pureand Appl. Math.，第31卷，1978年，第339-411页。

[14]Xi Zhang 和 Xiangwen Zhang：厄米流形上复数 Monge–Amp`ere 方程解的正则性估计，《Journal of Functional Analysis》260（2011年）2004–2026。